Тема 6. Магнитное поле стационарных токов

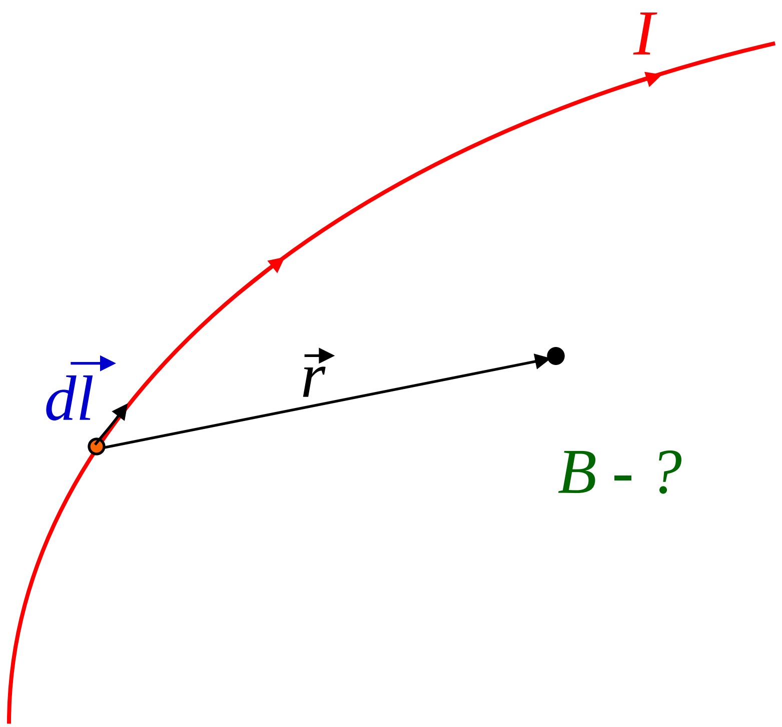
Тема 6. Магнитное поле стационарных токов

- 6.1. Закон Био-Савара-Лапласа (1820)

Био
Жан Батист
(21.IV.1774–3.II.1862)

Савар
Феликс
(30.VI.1791–16.III.1841)

Лаплас
Пьер Симон
(23.III.1749–5.III.1827)

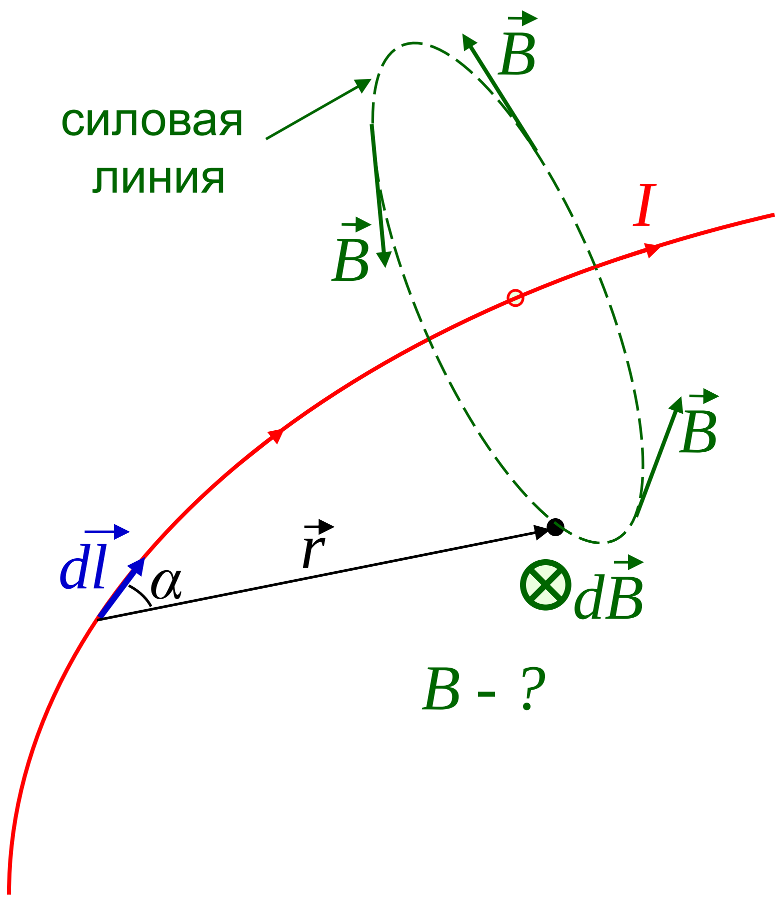


$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q\vec{\upsilon} \times \vec{e}_r}{r^2}$$

$$q \rightarrow \mathrm{d}q$$

$$\mathrm{d}q = \tau \mathrm{d}l$$

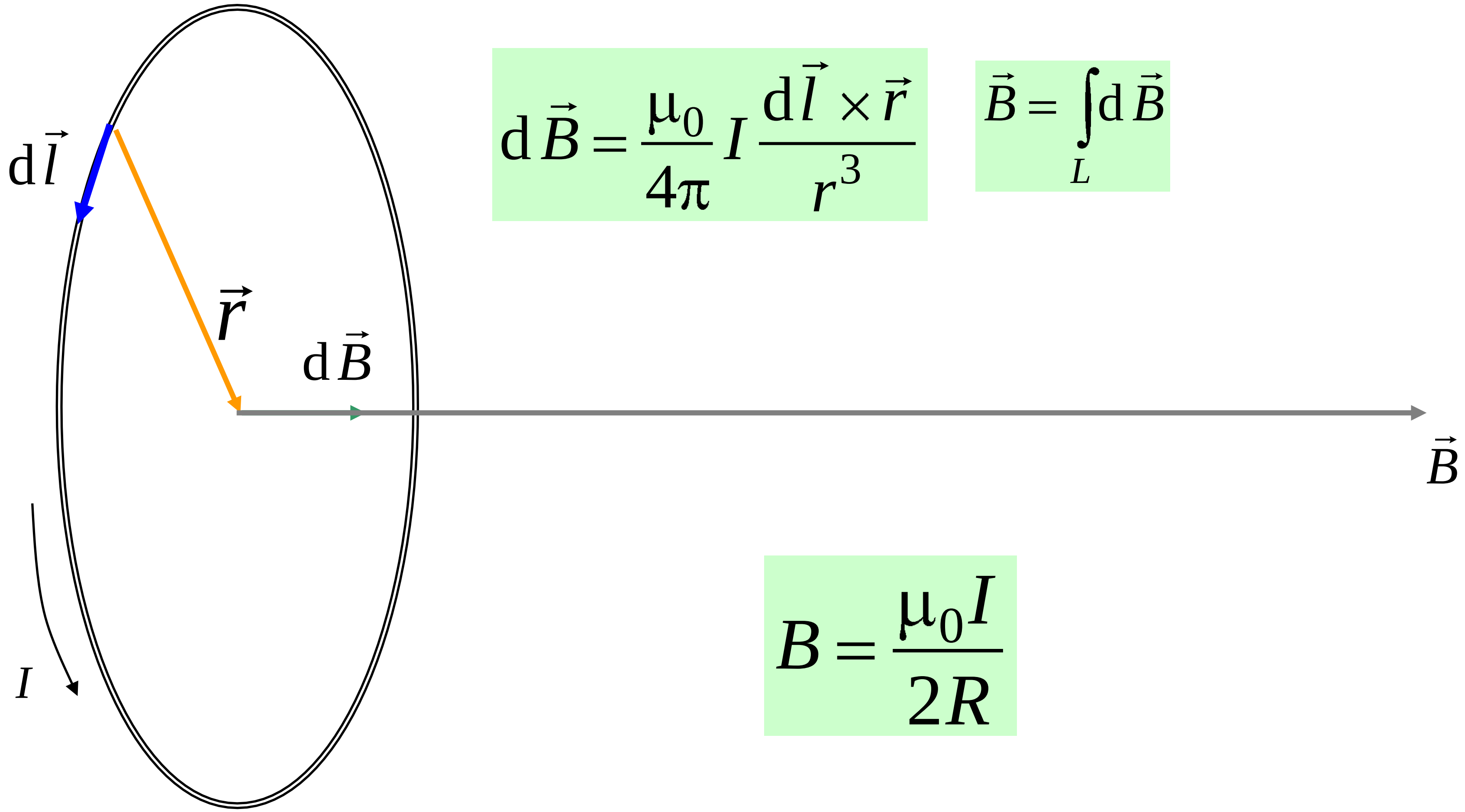
$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$



$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{r^2}\mathrm{d}l\sin\alpha$$

$$\vec{B} = \int_L d\vec{B}$$

Пример 1.
Поле в центре контура с током



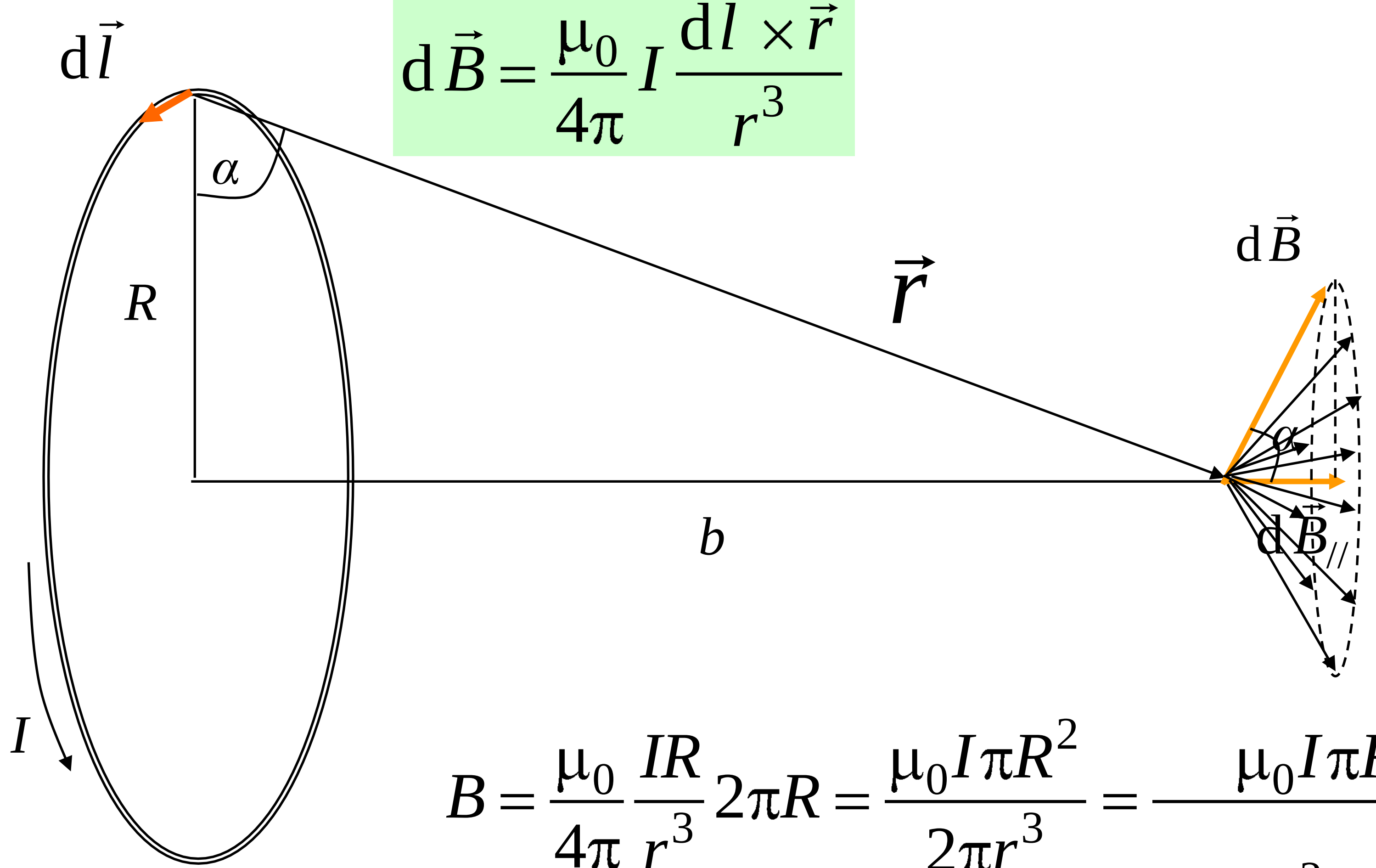
$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{B} = \int_L \mathrm{d}\vec{B}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

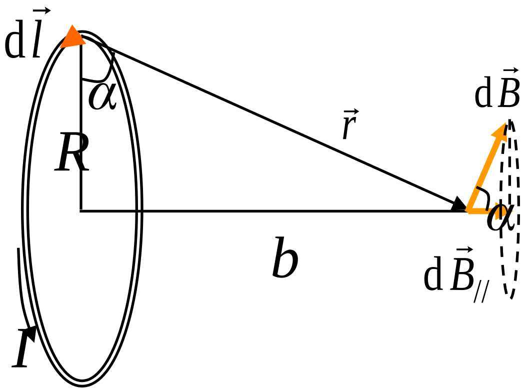
Пример 2.
Поле на оси контура с током

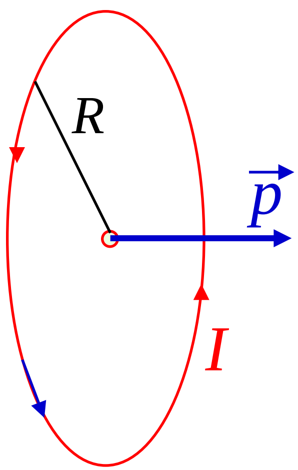
$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$



$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR}{r^3} 2\pi R = \frac{\mu_0 I \pi R^2}{2\pi r^3} = \frac{\mu_0 I \pi R^2}{2\pi \left(R^2 + b^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Пример 2.
Поле на оси контура с током





Дипольный магнитный момент:

$$\boxed{\vec{p}_m = I\,\vec{S}}$$

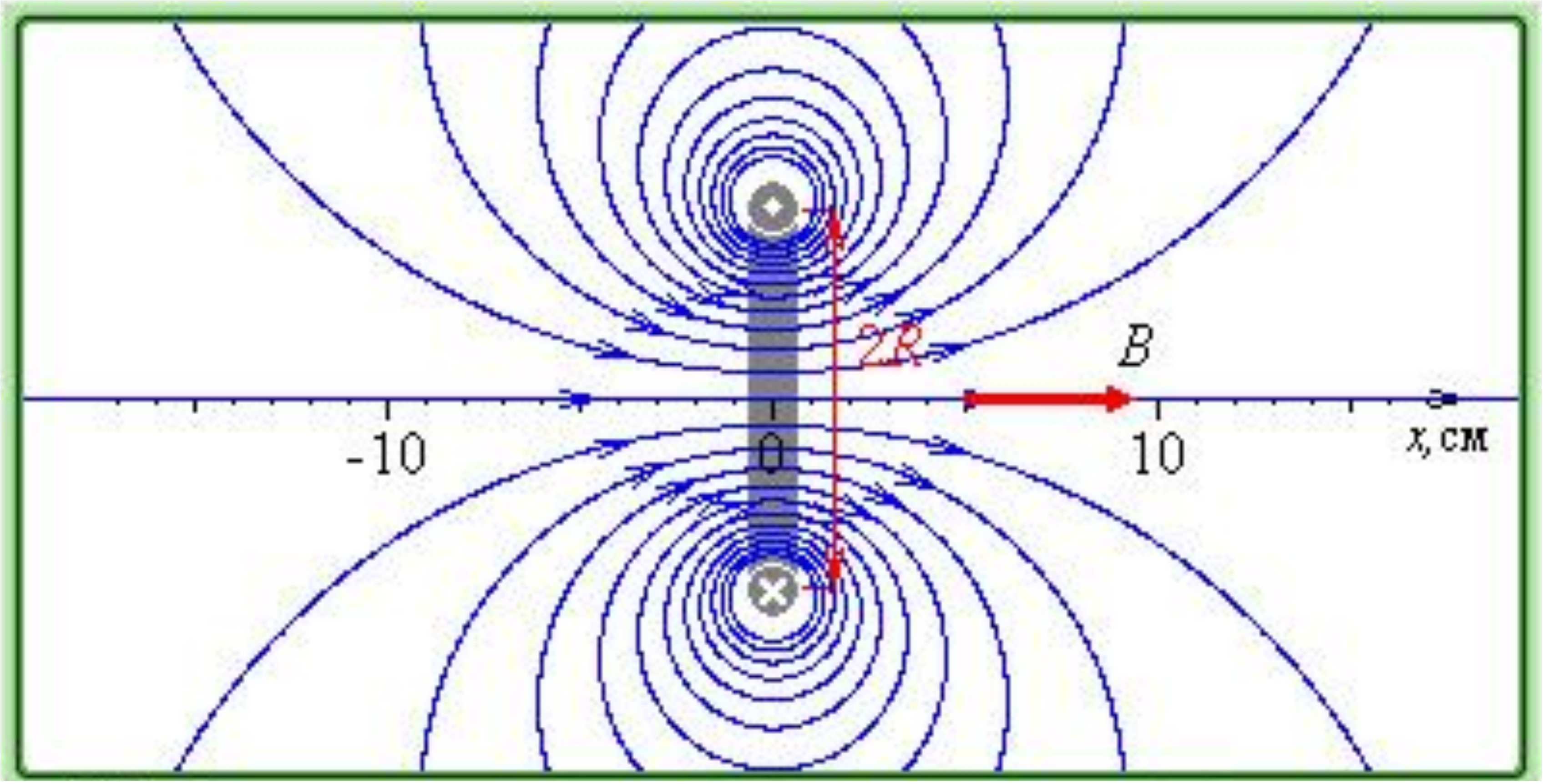
Направление: по правилу правого винта.

Для витка с током:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \vec{p}_m}{2\pi \left(R^2 + b^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

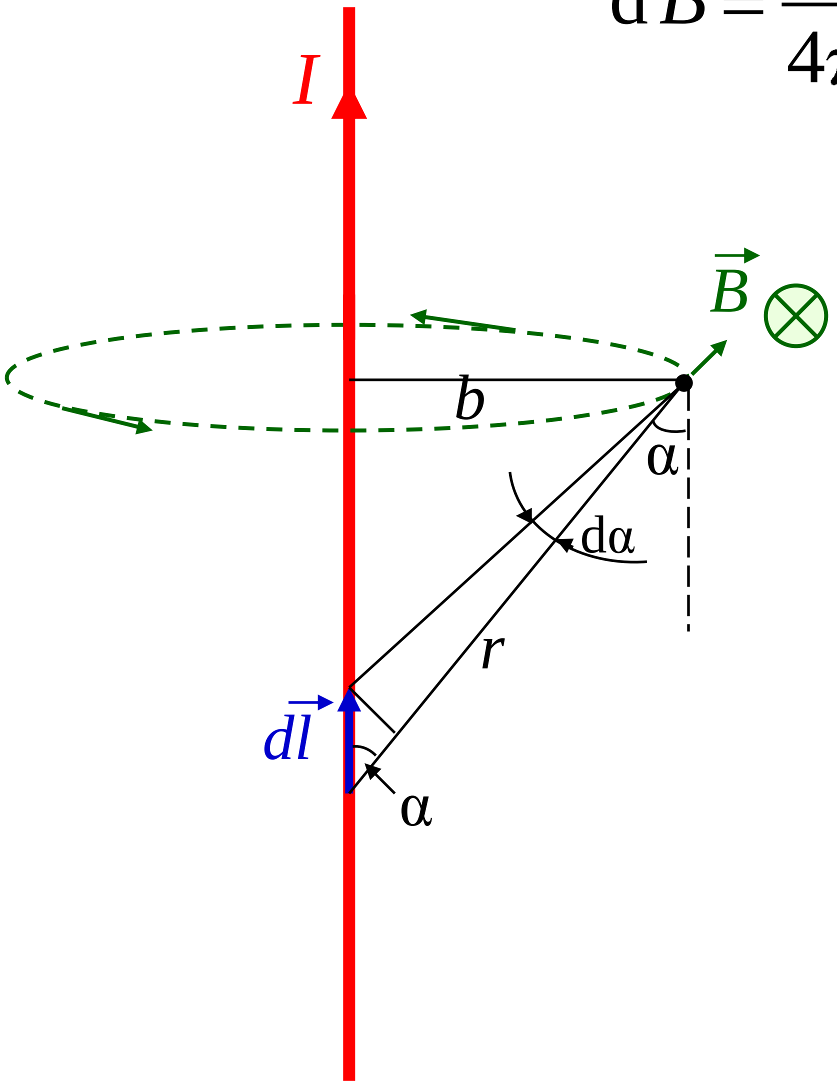
$$\vec{B} \sim \frac{\vec{p}_m}{r^3}$$

Модель 1.9. Магнитное поле кругового витка с током



Пример 3. Поле бесконечного прямого проводника с током

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}; \qquad dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dl}{r^2} \sin\alpha$$

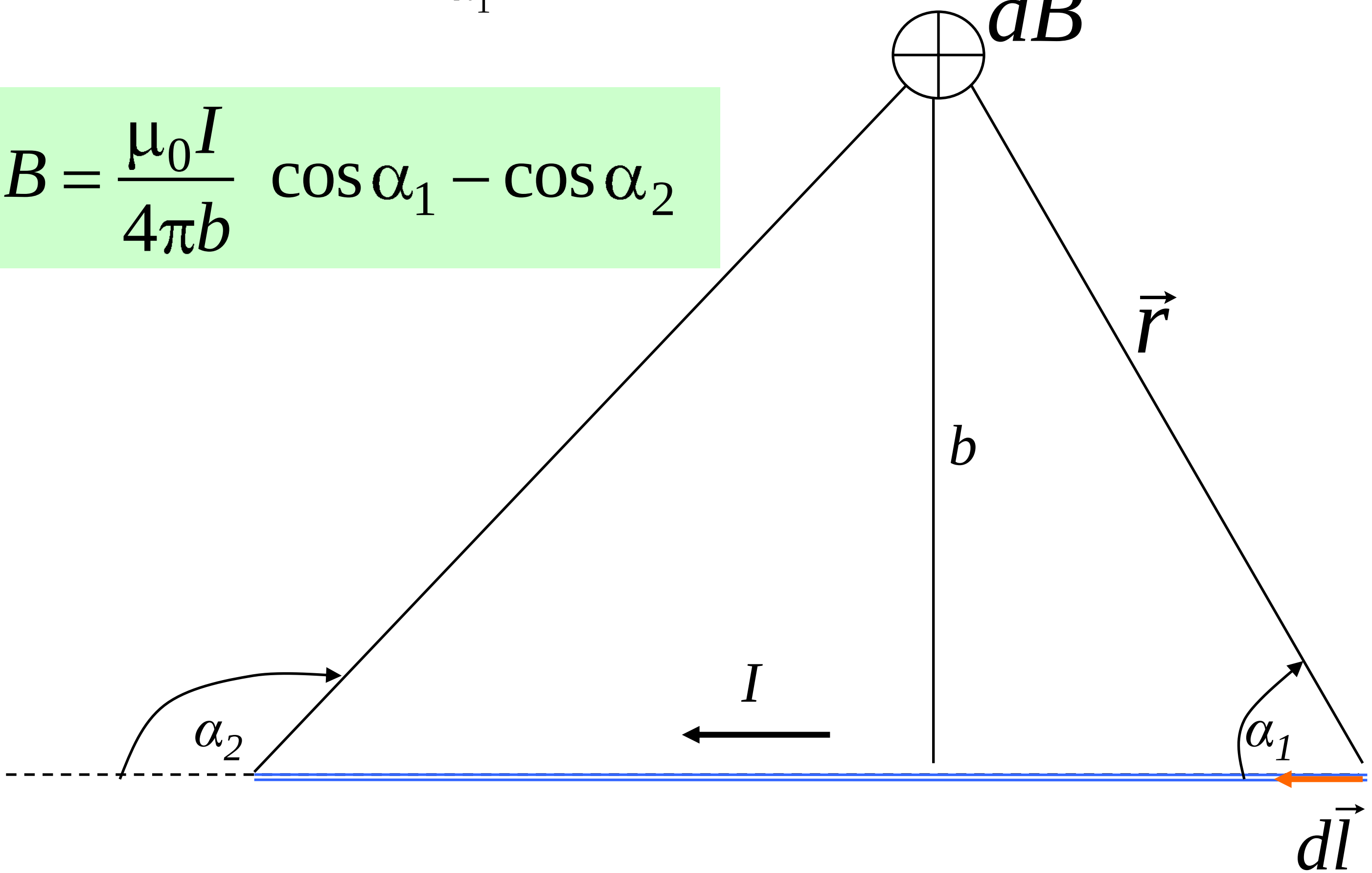


$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}}$$

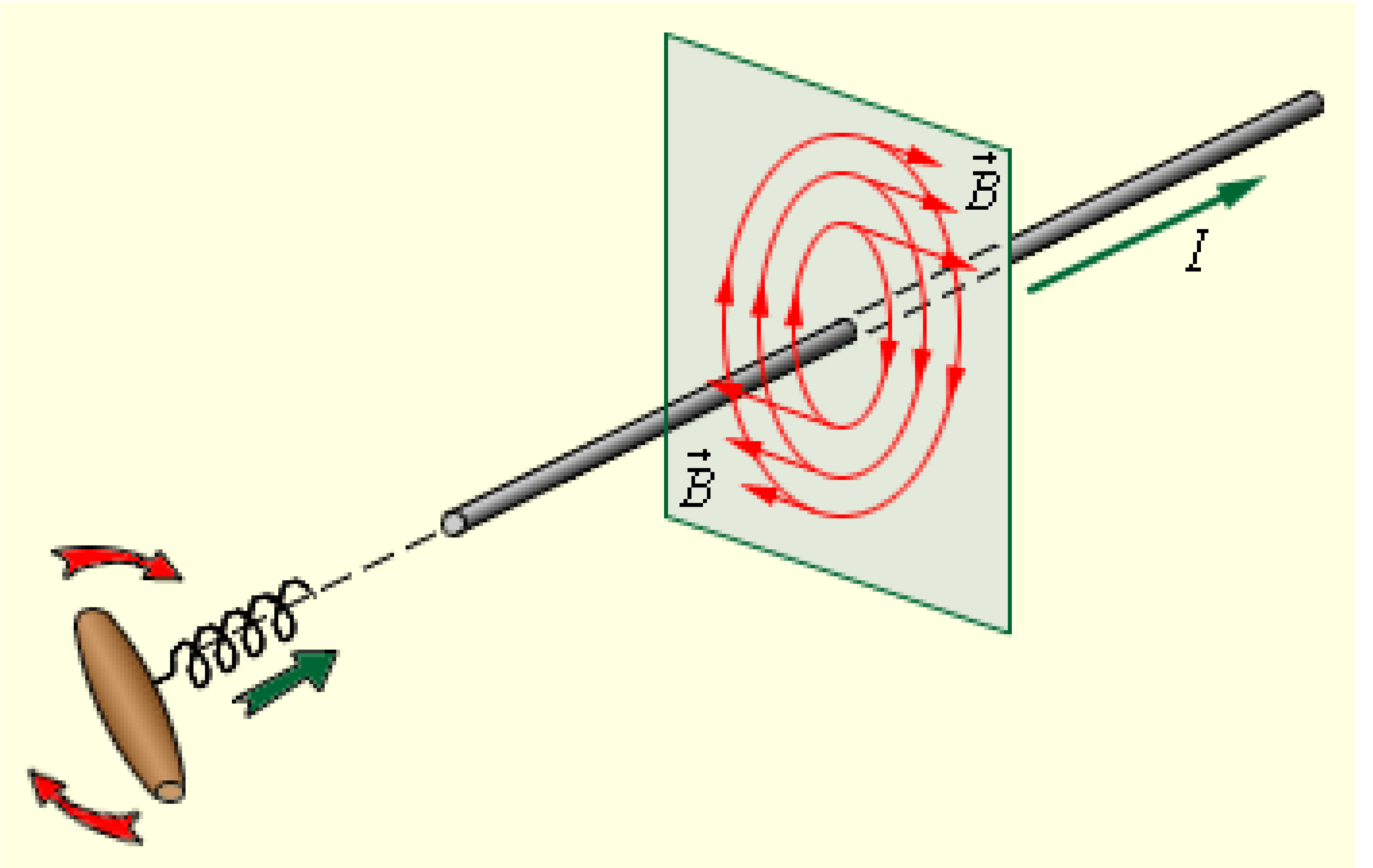
Поле участка прямого провода:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi b}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\sin\alpha\,d\alpha$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi b}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right)$$



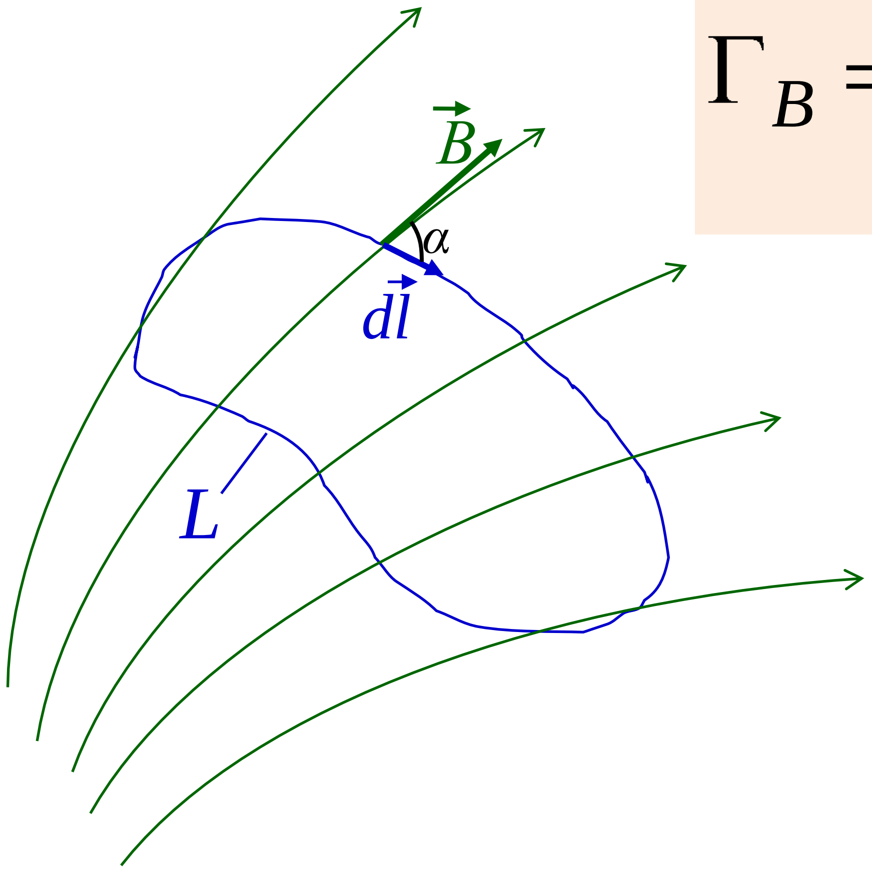
Магнитное поле прямолинейного проводника с током



Тема 6. Магнитное поле стационарных токов

- 6.1. Закон Био-Саварра-Лапласа
- 6.2. Циркуляция и поток магнитного поля

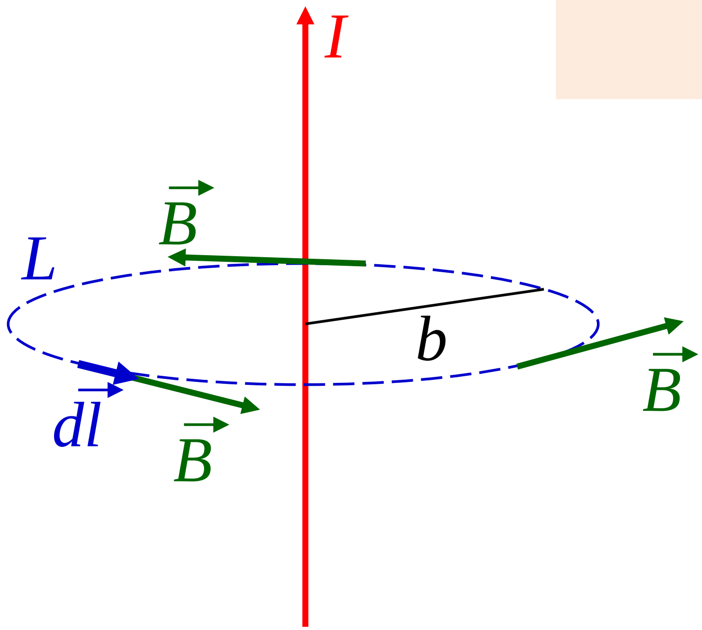
Циркуляция магнитного поля



$$\Gamma_B = \oint_L \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{l} = \oint_L B\,\mathrm{d}l\cos\alpha$$

Теорема о циркуляции магнитного поля

$$\Gamma_B = \oint_L \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{l} = \oint_L B\,\mathrm{d}l\cos\alpha$$



$$\oint_L \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{l} = B\,2\pi b$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}$$

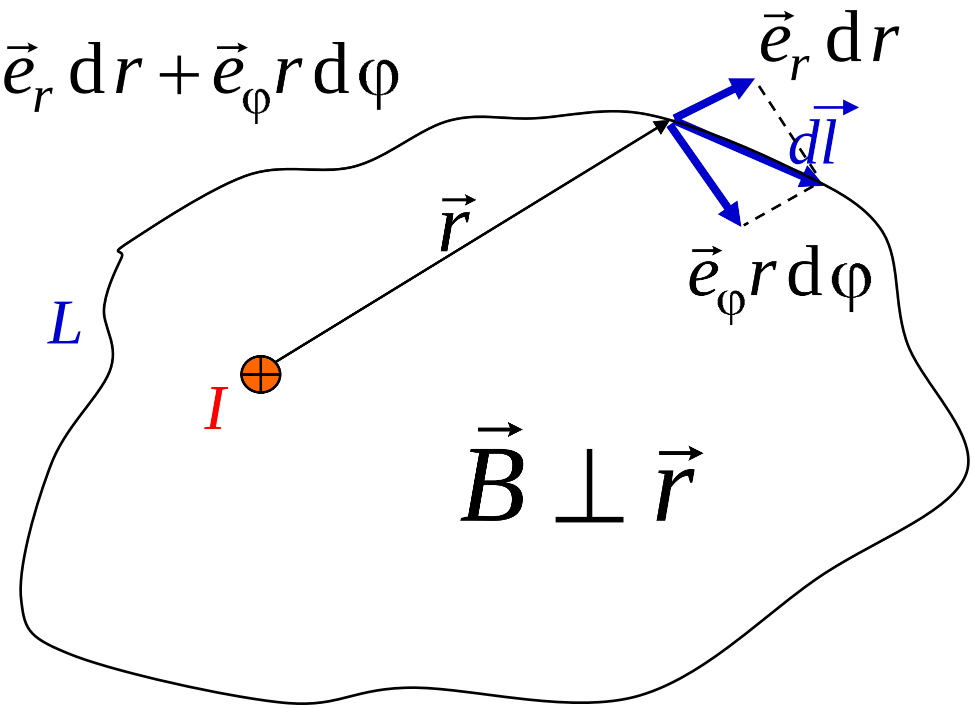
$$\boxed{\oint_L \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I}$$

Теорема о циркуляции магнитного поля

$$\Gamma_B = \oint_L \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{l}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

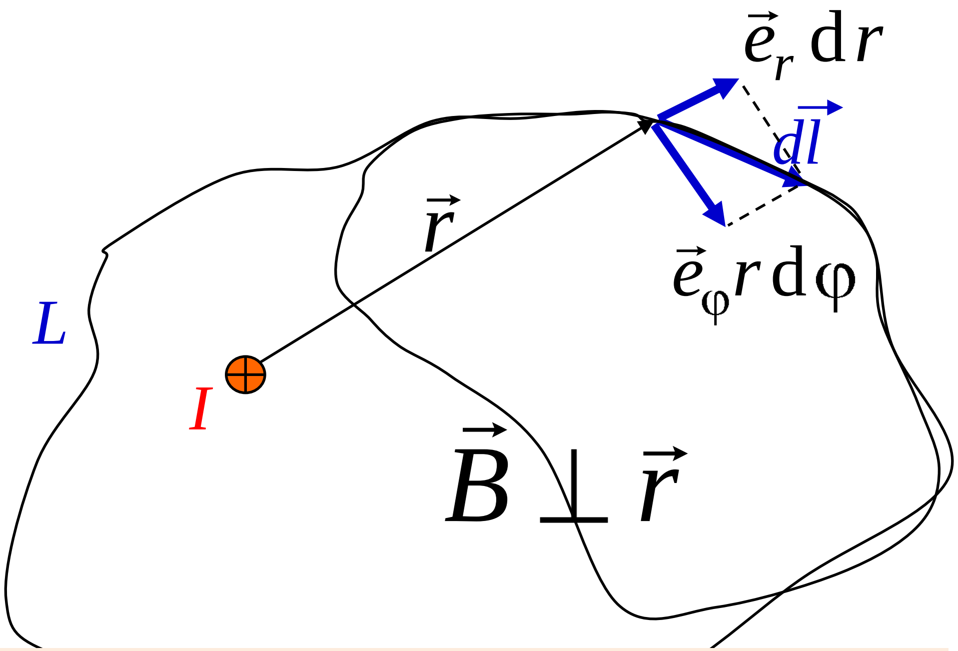
$$\mathrm{d}\vec{l} = \vec{e}_r\,\mathrm{d}r + \vec{e}_\varphi r\,\mathrm{d}\varphi$$



$$\Gamma_B = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi$$

$$\boxed{\oint_L \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I}$$

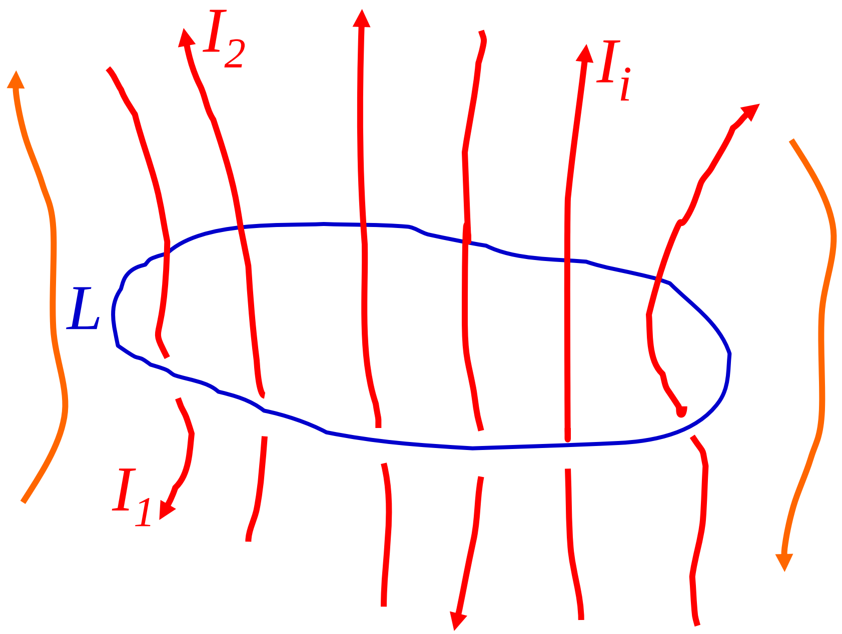
Теорема о циркуляции магнитного поля



$$\oint\limits_L \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I$$

$$\Gamma_B = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2}\mathrm{d}\varphi + \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int\limits_{\alpha_2}^{\alpha_1}\mathrm{d}\varphi = 0$$

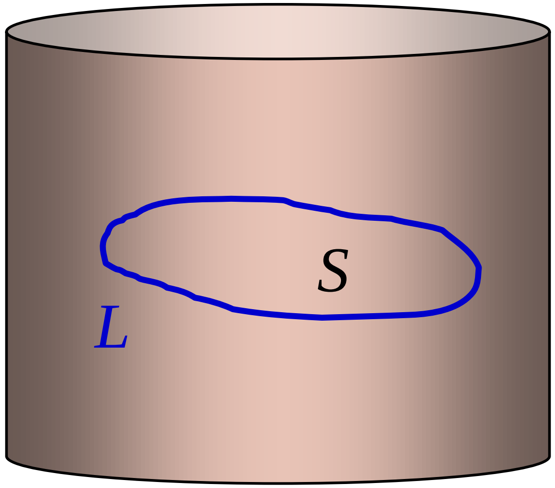
В общем случае



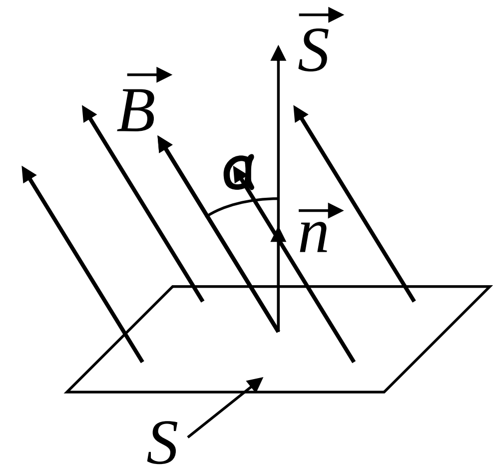
$$\oint_L \vec{B}\,d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^{N} I_i$$

алгебраическая(!) сумма токов, пересекающих любую поверхность, ограниченную контуром

Если токи не локализованы:



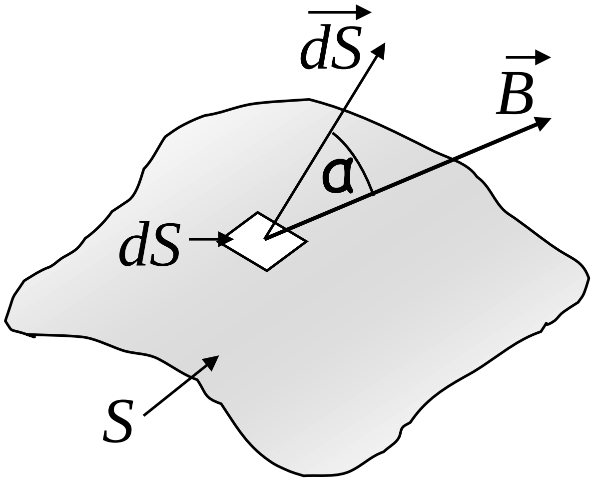
$$\oint_L \vec{B}\,d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j}\,d\vec{S}$$



Однородное поле

$$\boxed{\Phi_B = \vec{B}\cdot\vec{S};\quad \vec{S} = S\vec{n};\quad |\vec{n}| = 1}$$

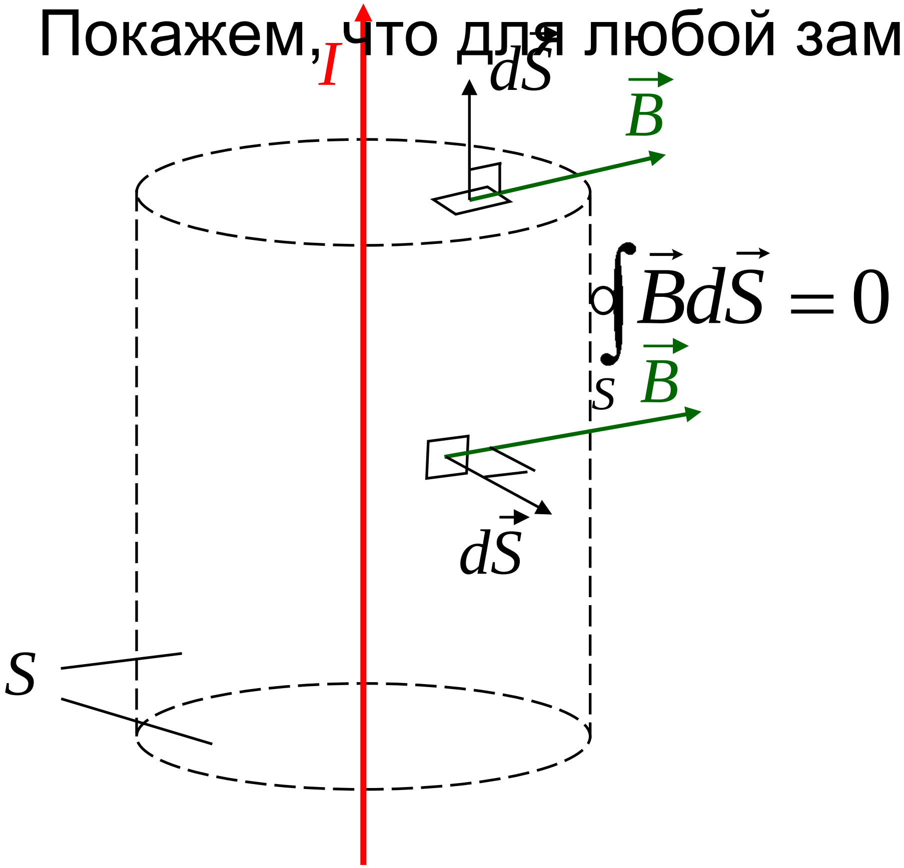
$$\Phi_B = BS\cos\alpha$$



Общий случай: произвольная поверхность, поле неоднородное

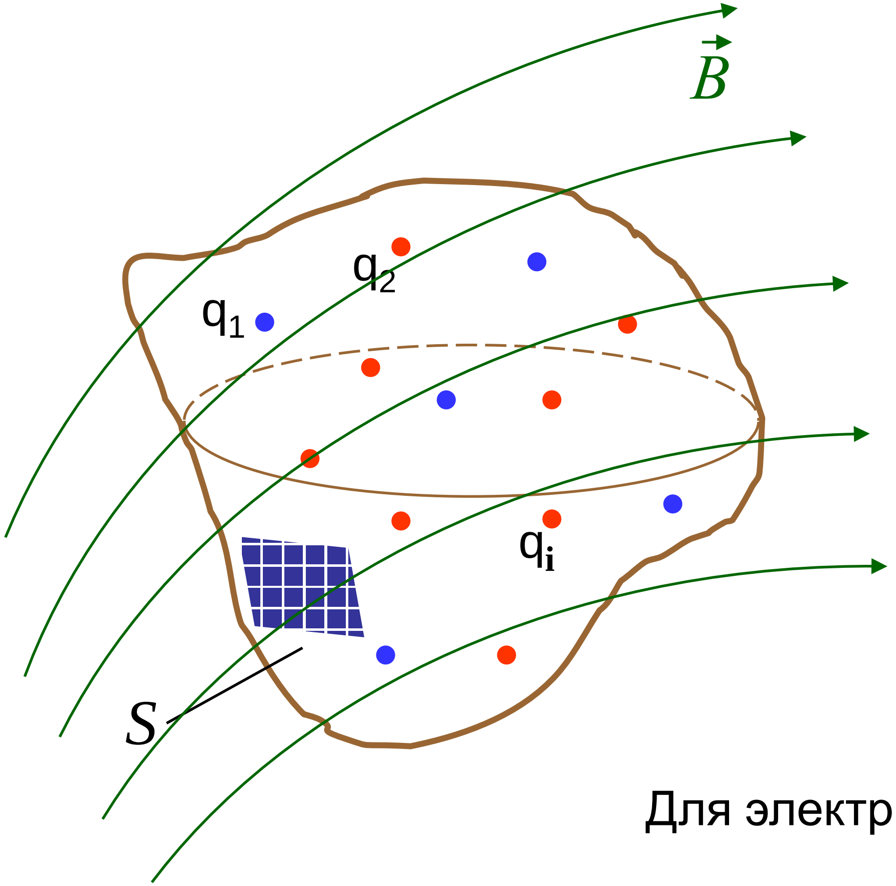
$$\boxed{\Phi_B = \int_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_S B\,\mathrm{d}S\cos\alpha}$$

Покажем, что для любой замкнутой поверхности



$$\boxed{\oint_S \vec{B}d\vec{S} = 0}$$

Магнитный поток через любую замкнутую поверхность



$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$$

Теорема Гаусса для магнитного поля

Для электрического поля:

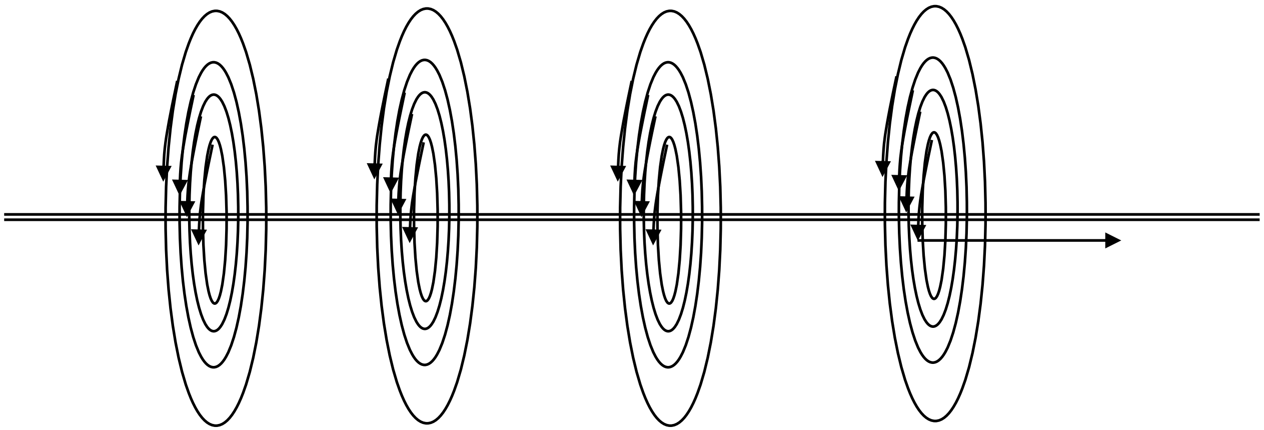
$$\oint_S \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i$$

Стационарные уравнения Максвелла в вакууме

$$\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \rho \cdot \mathrm{d}V; \qquad \oint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

$$\oint_L \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0; \qquad \oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

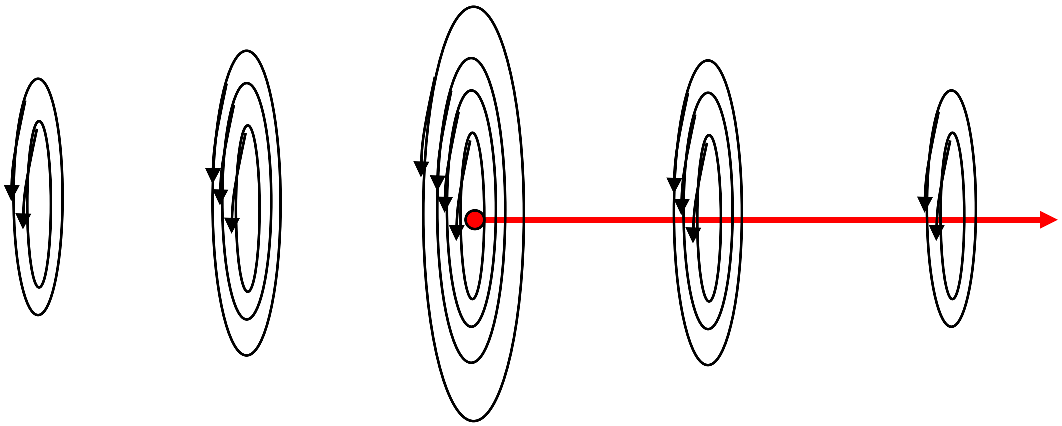
- 1. Поле прямого провода



$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

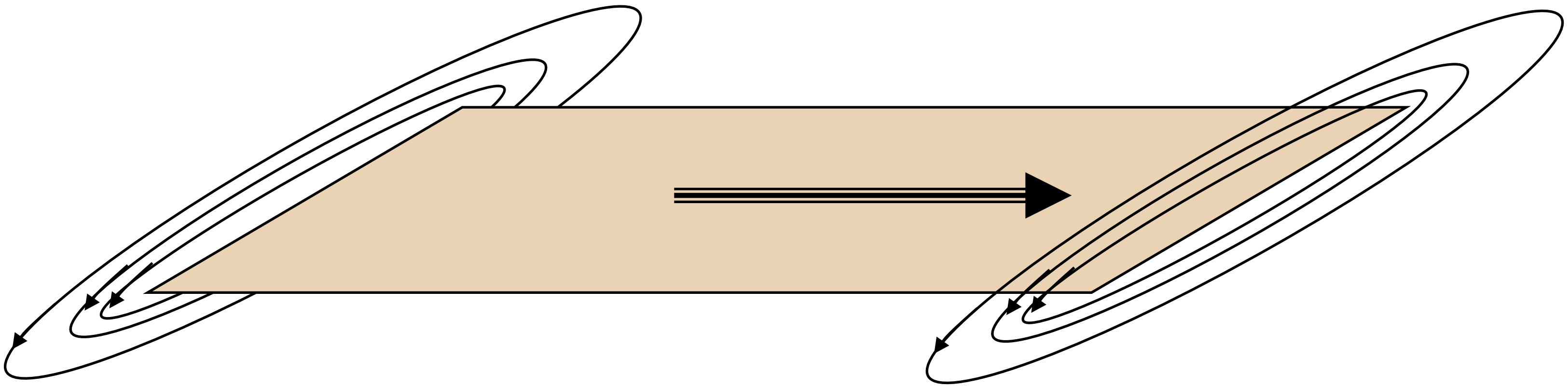
- 2. Поле точечного заряда

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q\vec{\upsilon} \times \vec{e}_r}{r^2}$$



- 3. Поле пластины с током

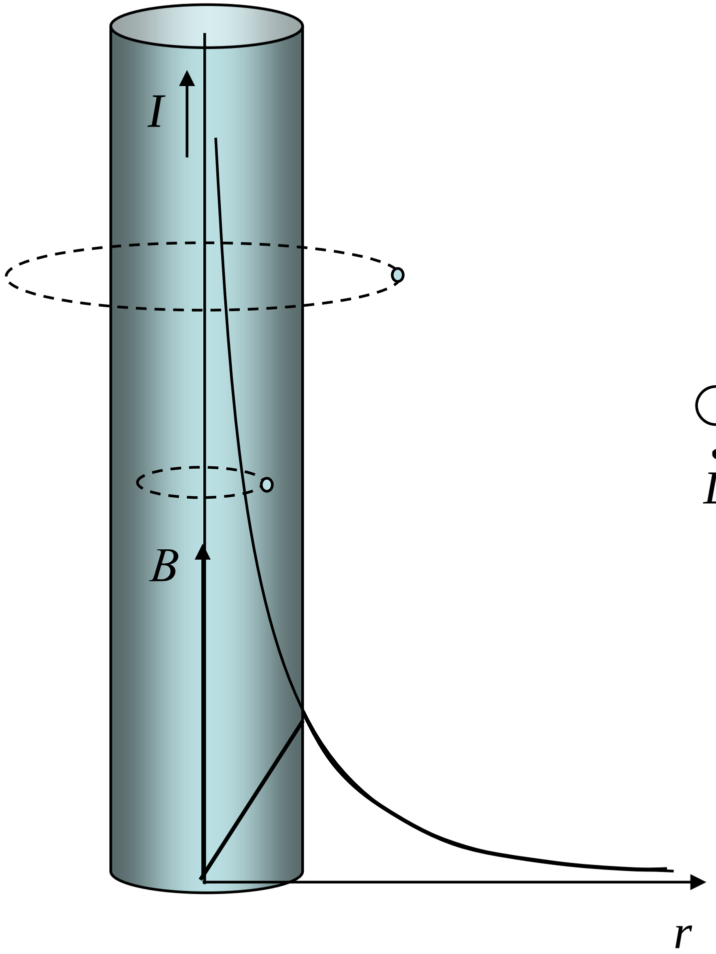
$$B = \frac{\mu_0 i}{2}$$



Тема 6. Магнитное поле стационарных токов

- 6.2. Циркуляция и поток магнитного поля
- 6.3. Применение теоремы о циркуляции магнитного поля

Пример 1.
Поле прямого бесконечного провода с током



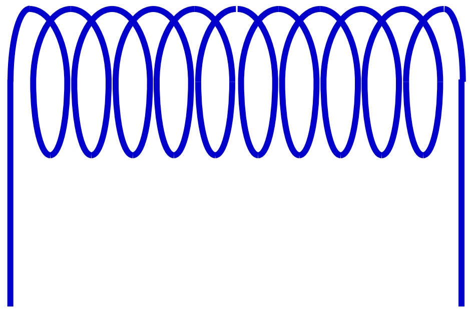
$$\oint_L \vec{B}\,d\vec{l} = \mu_0 I \qquad B2\pi r = \mu_0 I$$

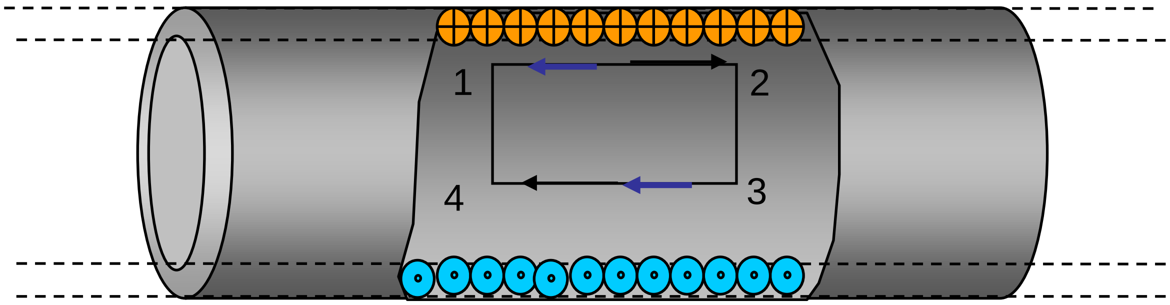
$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}}$$

$$\oint_L \vec{B}\,d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j}\,d\vec{S} \qquad B2\pi r = \mu_0 j \pi r^2$$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 j}{2} r}$$

Пример 2.
Магнитное поле соленоида





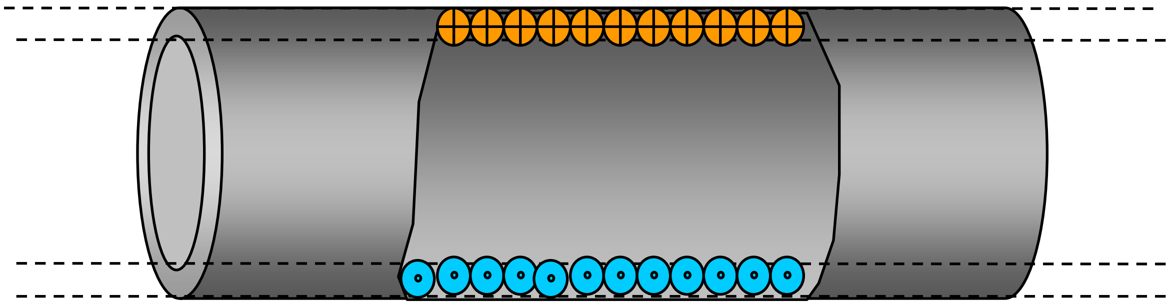
$$\oint_L \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^{N} I_i$$

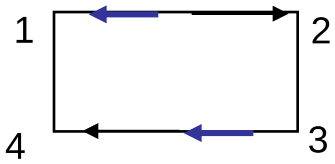
$$-B_1 a + B_4 a = 0$$

$$B_1 = B_4$$

поле внутри соленоида ***однородно !***

Пример 2.
Магнитное поле соленоида





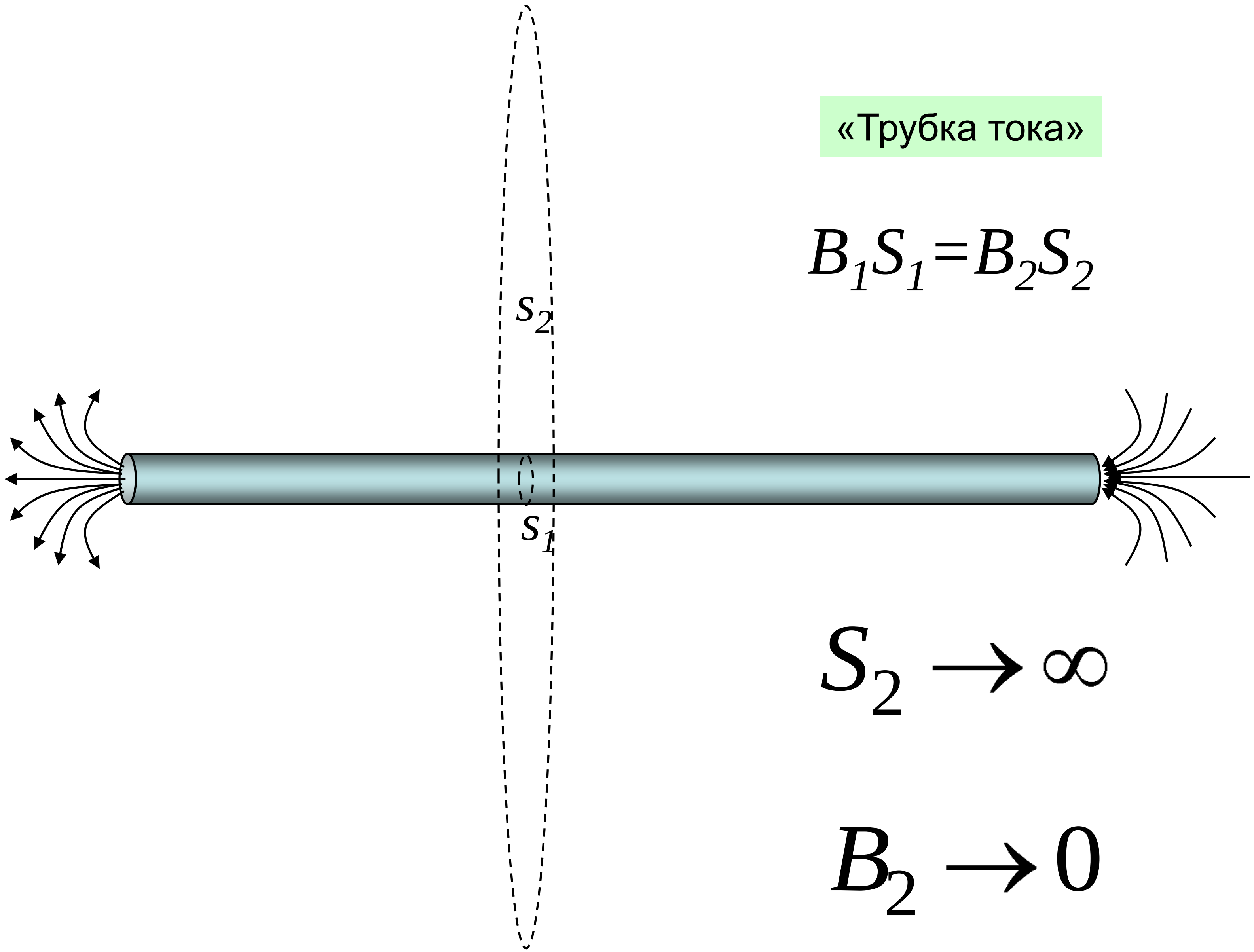
$$B_1 a - B_4 a = 0$$

$$B_1 = B_4$$

поле вне соленоида
однородно !

«Трубка тока»

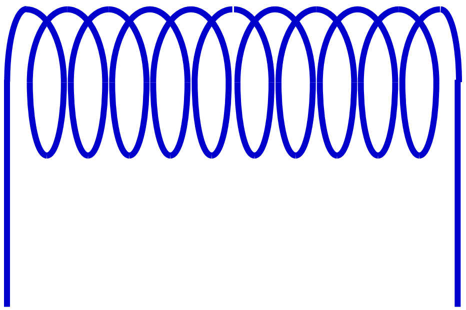
$$B_1 S_1 = B_2 S_2$$

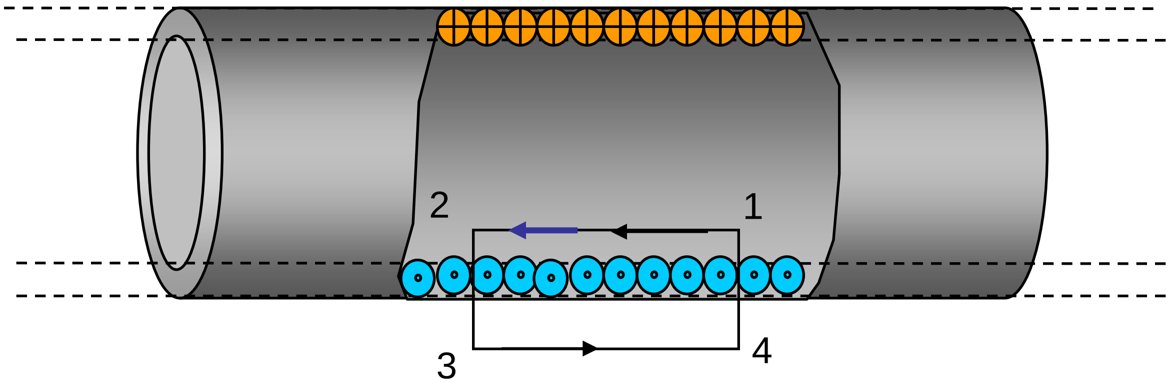


$$S_2 \to \infty$$

$$B_2 \to 0$$

Пример 2. Магнитное поле соленоида





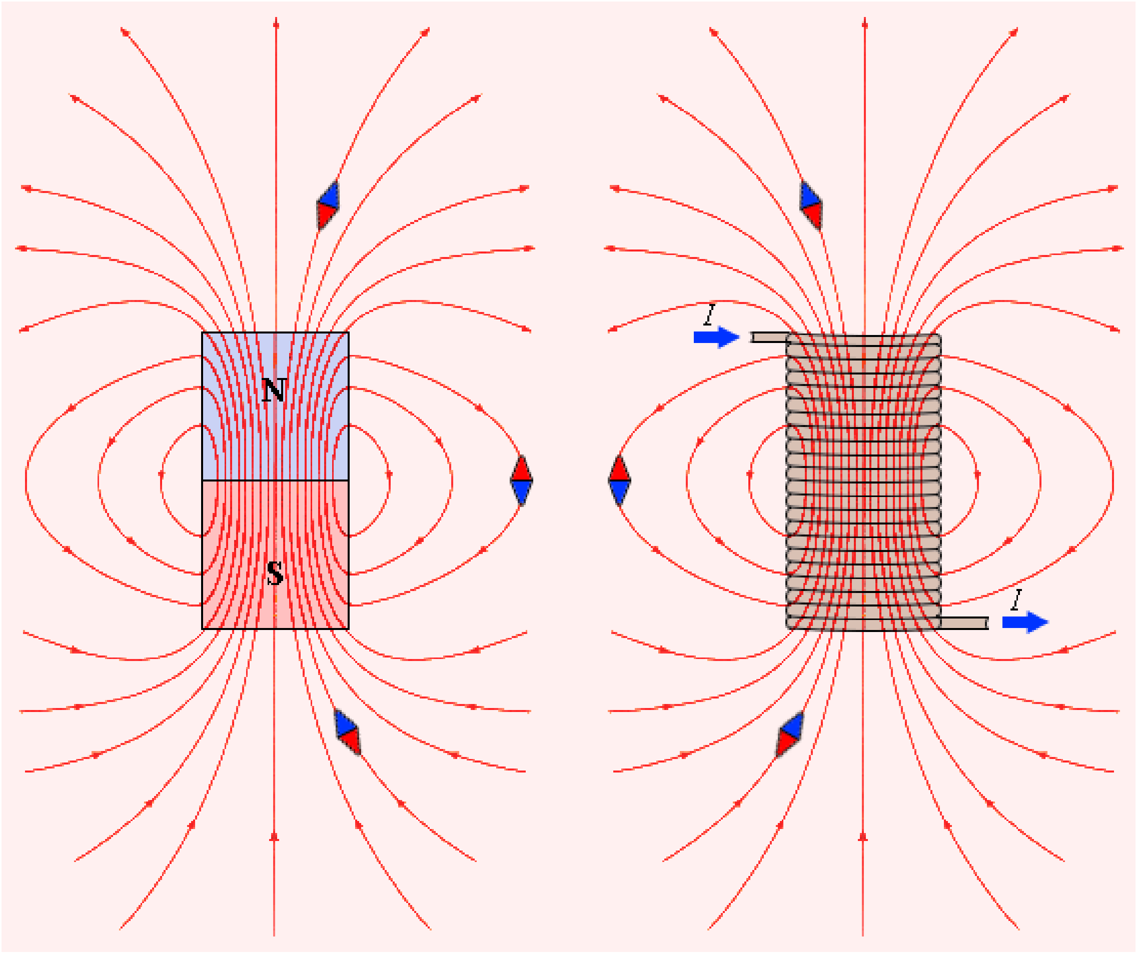
$$\boxed{\oint_L \vec{B}\,d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^{N} I_i}$$

$$B\,a = \mu_o\, I_\Sigma = \mu_o\, n\, a\, I$$

n — *плотность намотки (число витков на единицу длины соленоида)*

$$\boxed{B = \mu_o n\, I}$$

Линии магнитной индукции полей постоянного магнита и катушки с током



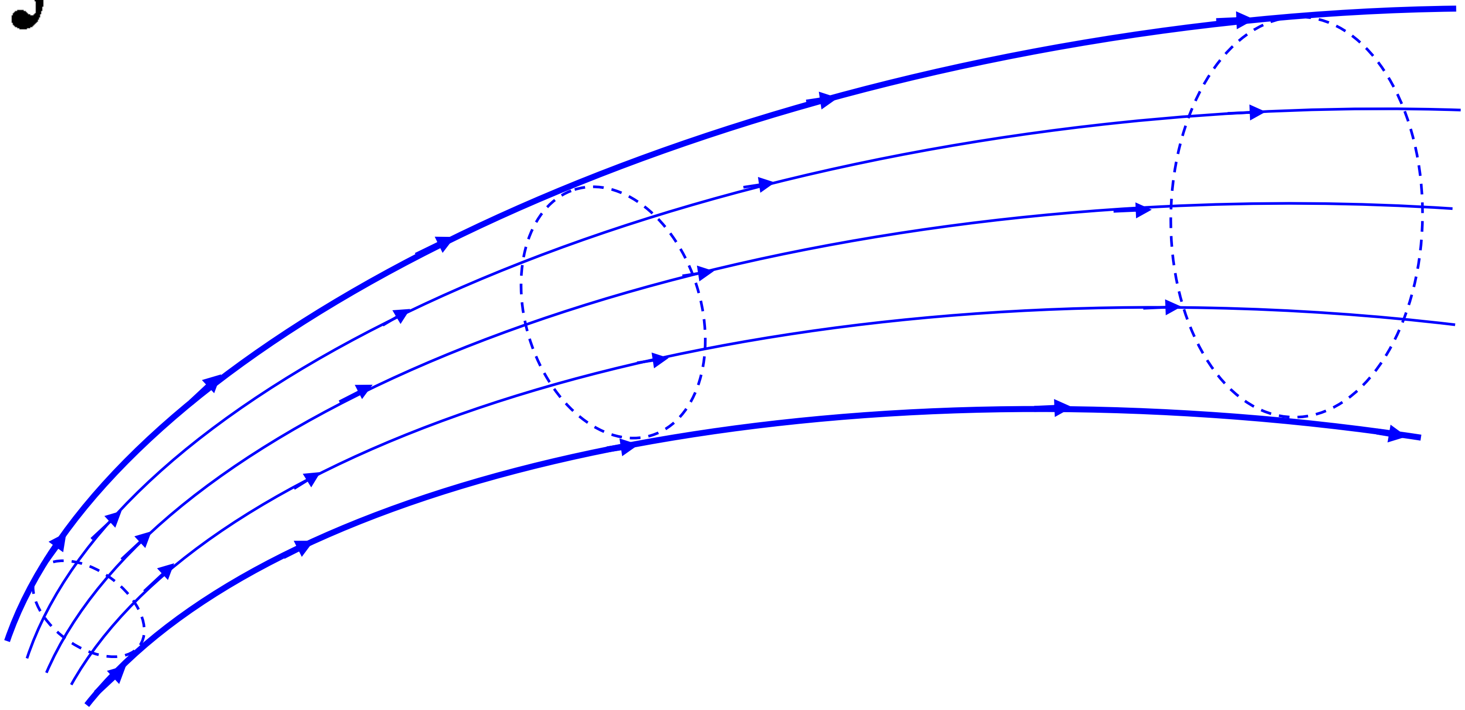
Тема 6. Магнитное поле стационарных токов

- 6.3. Применение теоремы о циркуляции магнитного поля
- 6.4. Индуктивность контура и соленоида

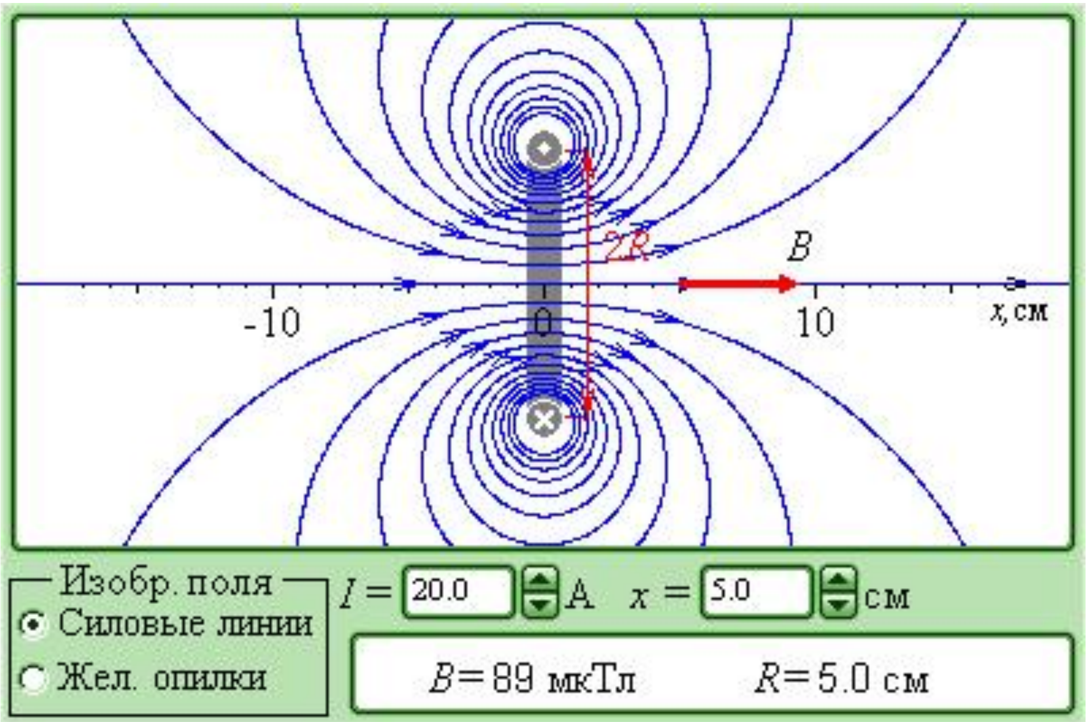
«Трубка тока»

$$B_1 S_1 = B_2 S_2$$

$$\int \vec{B}\,\mathrm{d}\,\vec{S} = \mathrm{const}$$

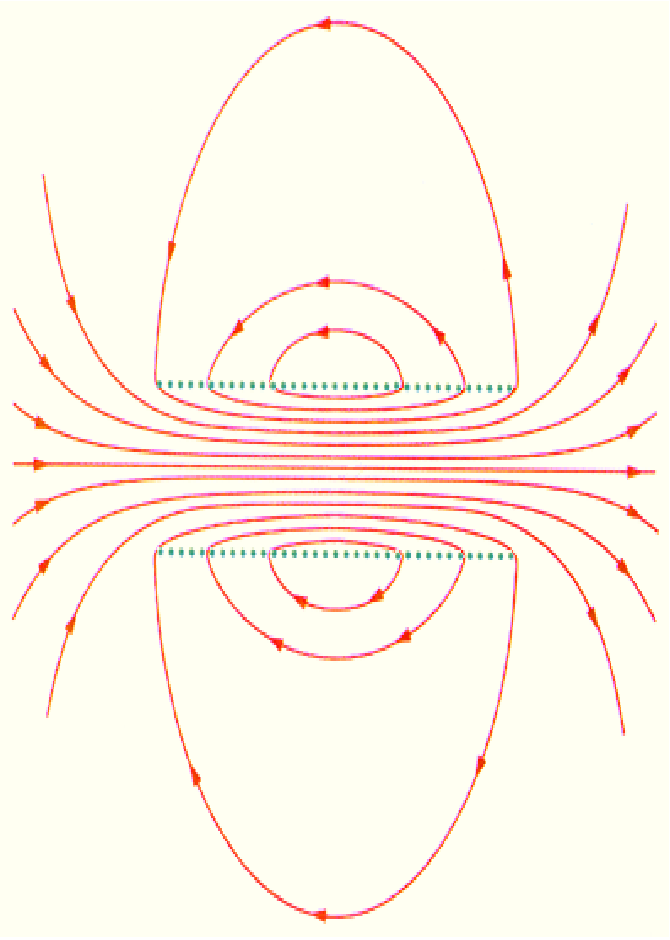


Модель 1.9. Магнитное поле кругового витка с током



$$\Delta\Phi \sim I$$

$$\Delta\Phi = LI$$



$$\Psi = N\Delta\Phi$$

Потокосцепление

$$L = \frac{\Psi}{I} = N\frac{\Delta\Phi}{I}$$

Для соленоида:

$$\Psi = NBS = N\mu_0 nIS$$

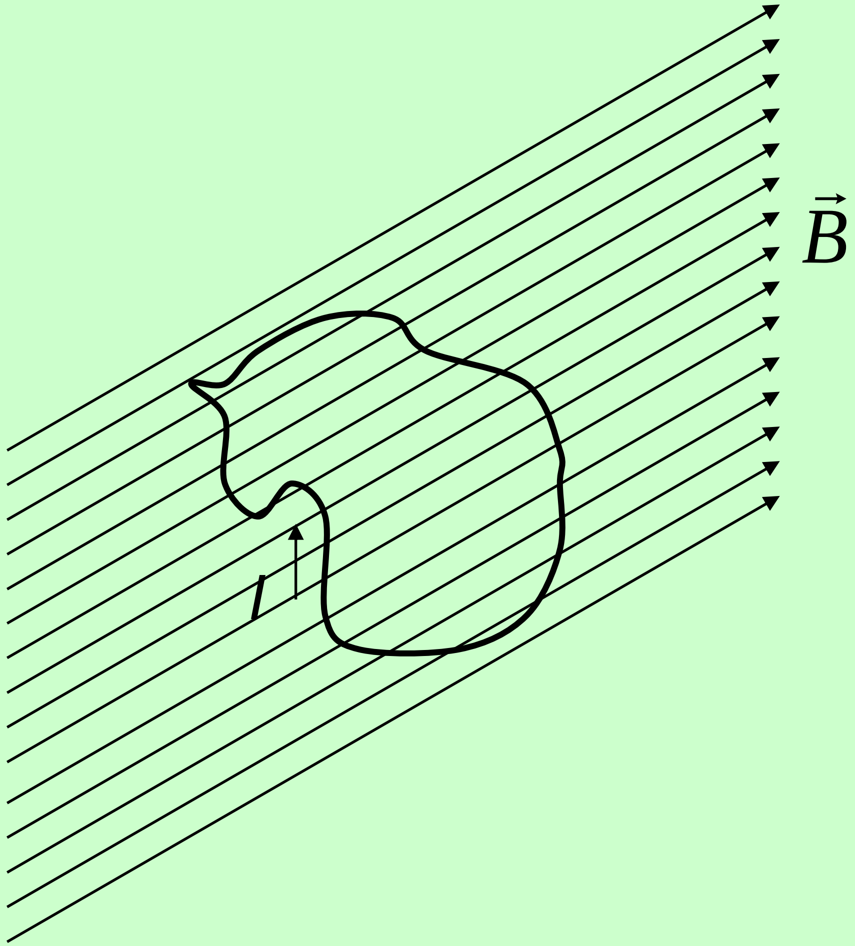
$$\Psi = \mu_0 n^2 IlS = \mu_0 n^2 IV$$

$$\boxed{L = \mu_0 n^2 V}$$

Тема 6. Магнитное поле стационарных токов

- 6.4. Индуктивность контура и соленоида
- 6.5. Контур с током в магнитном поле

Сила, действующая на контур с током в однородном магнитном поле

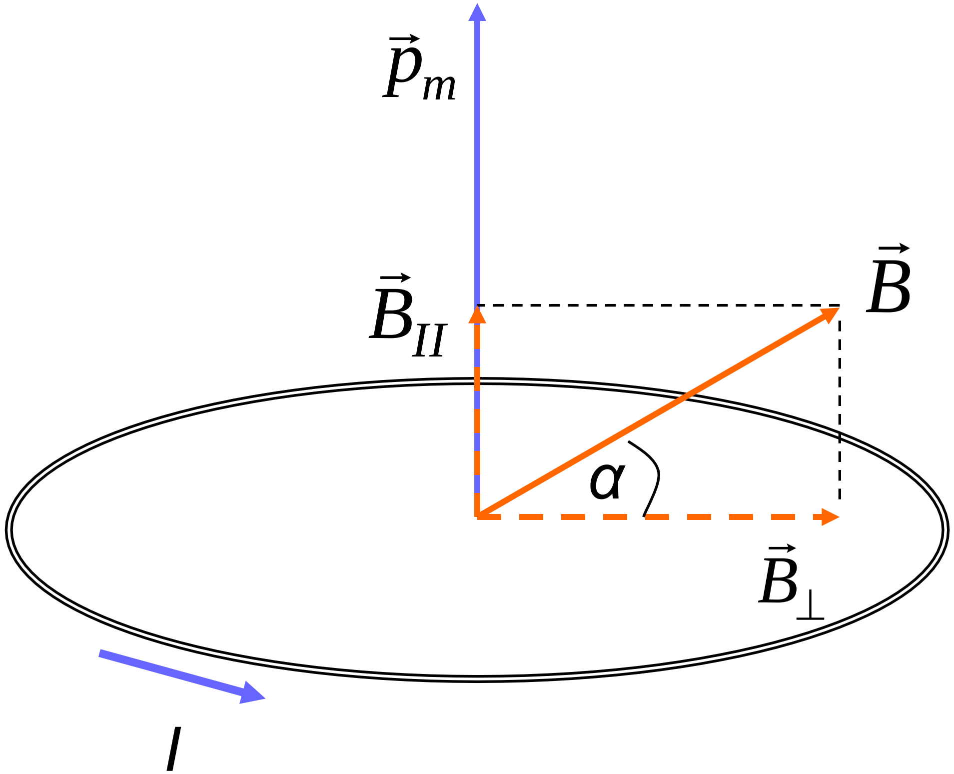


$$\vec{F} = \oint I\,\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$$

$$\vec{F} = I \oint \mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$$

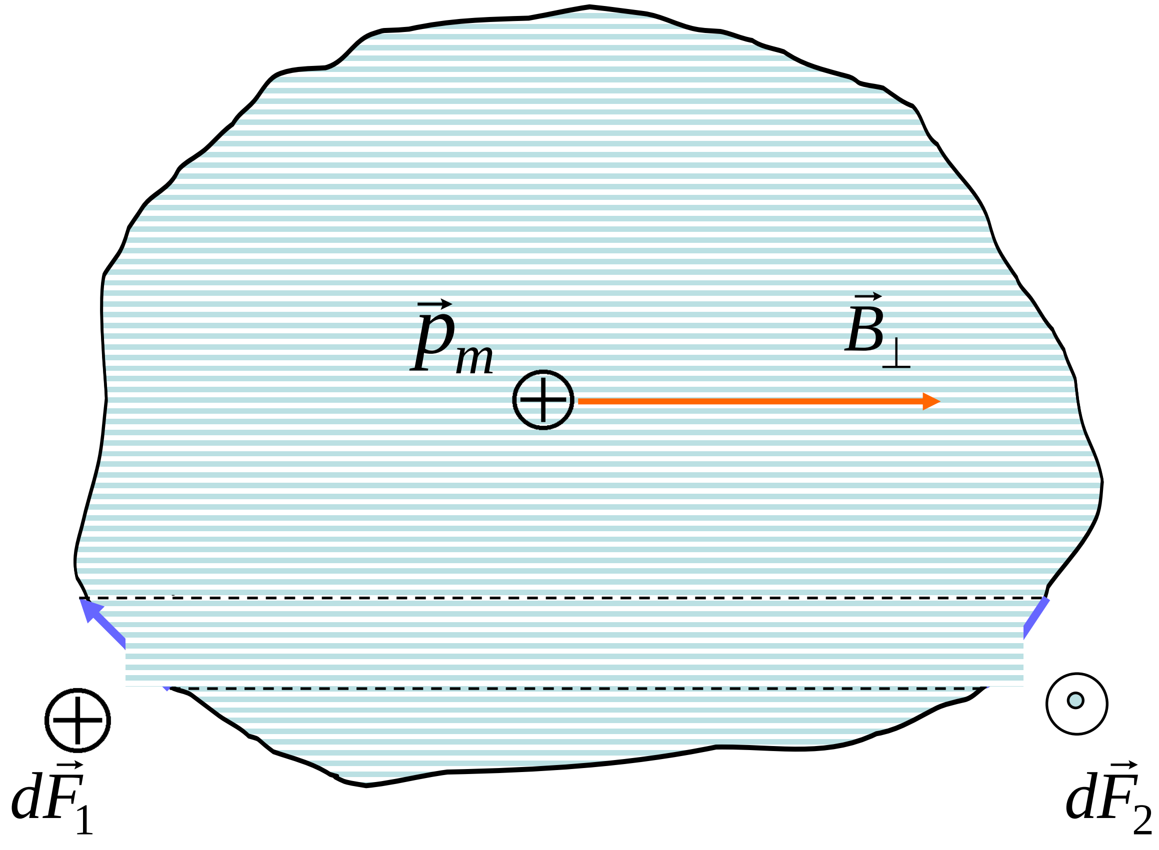
$$\vec{F} = 0$$

Момент силы, действующий на контур с током в магнитном поле



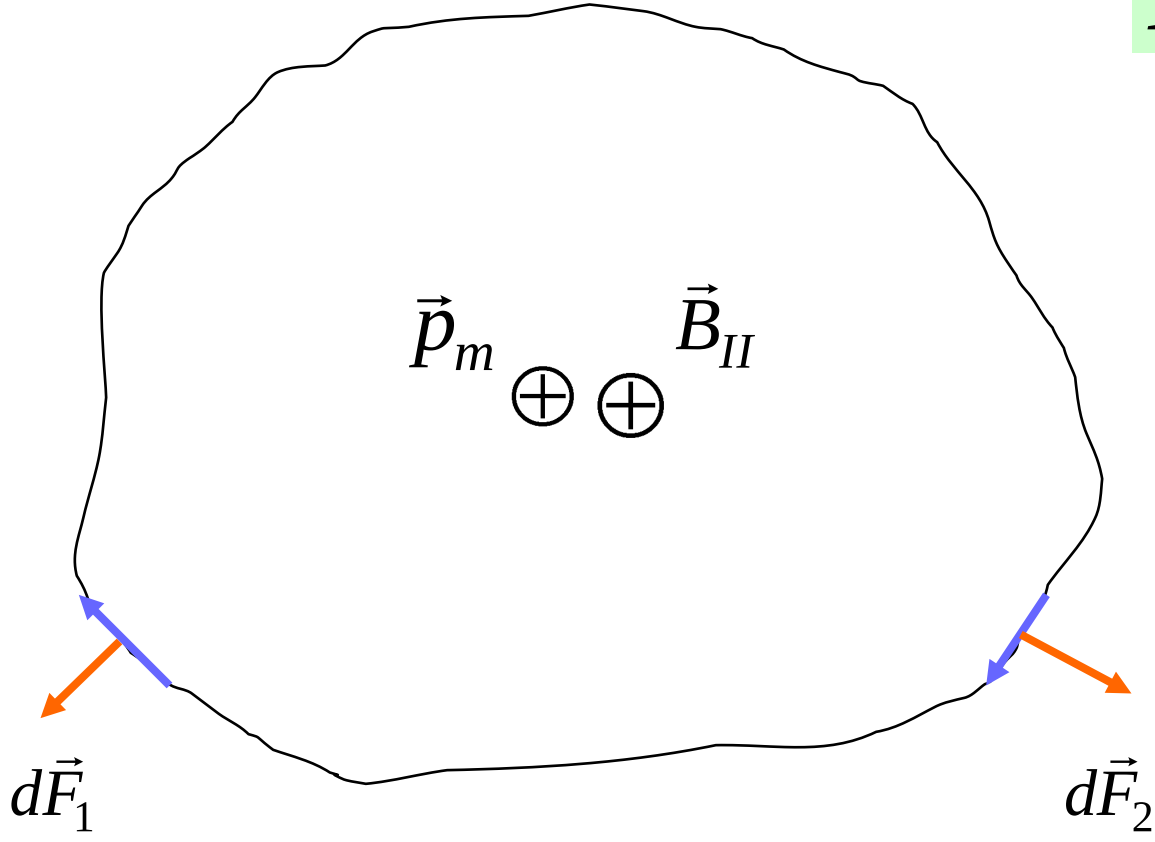
$$\mathrm{d}\vec{F}_1 = I\,\mathrm{d}\vec{l}_1 \times \vec{B}_\perp$$

$$\mathrm{d}\vec{F}_2 = I\,\mathrm{d}\vec{l}_2 \times \vec{B}_\perp$$

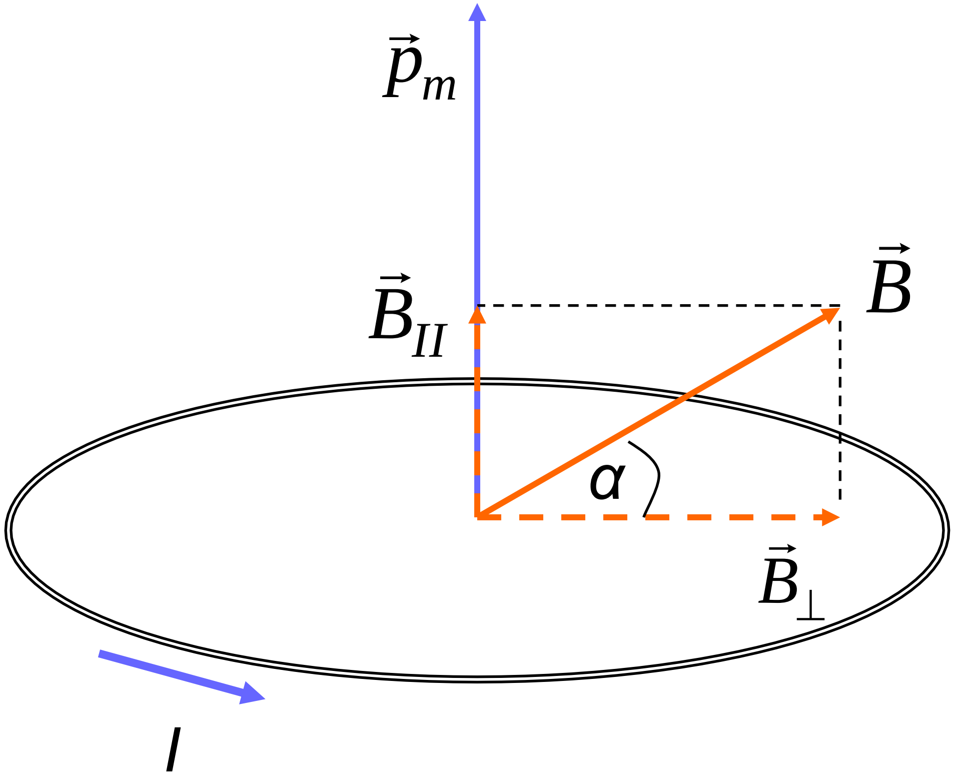


$$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}_\perp$$

$$\vec{M} = 0$$



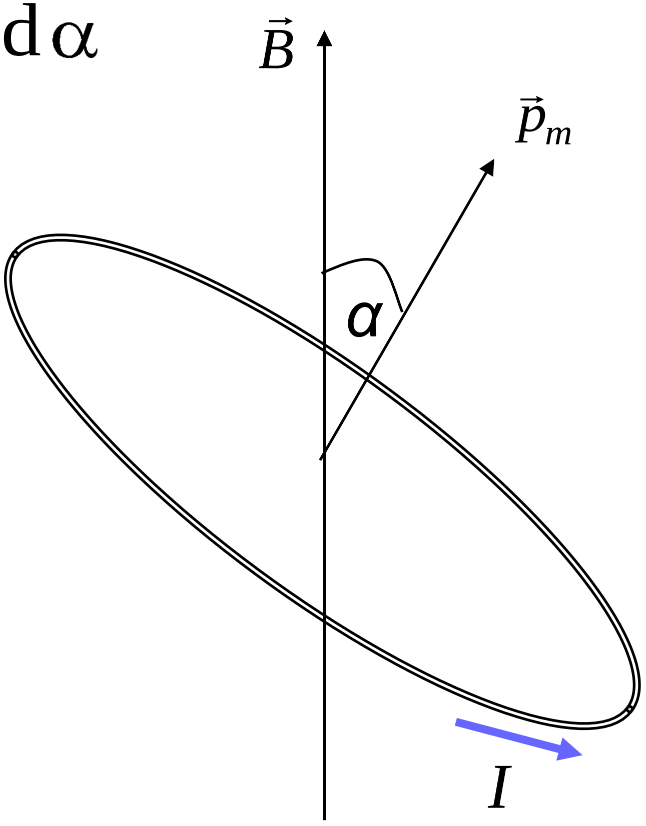
Момент силы, действующий на контур с током в магнитном поле



$$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}$$

Потенциальная энергия контура с током в магнитном поле

$$A = \int M \,\mathrm{d}\alpha = \int p_m B \sin\alpha \,\mathrm{d}\alpha$$



$$\boxed{W = -\vec{p}_m \vec{B}}$$