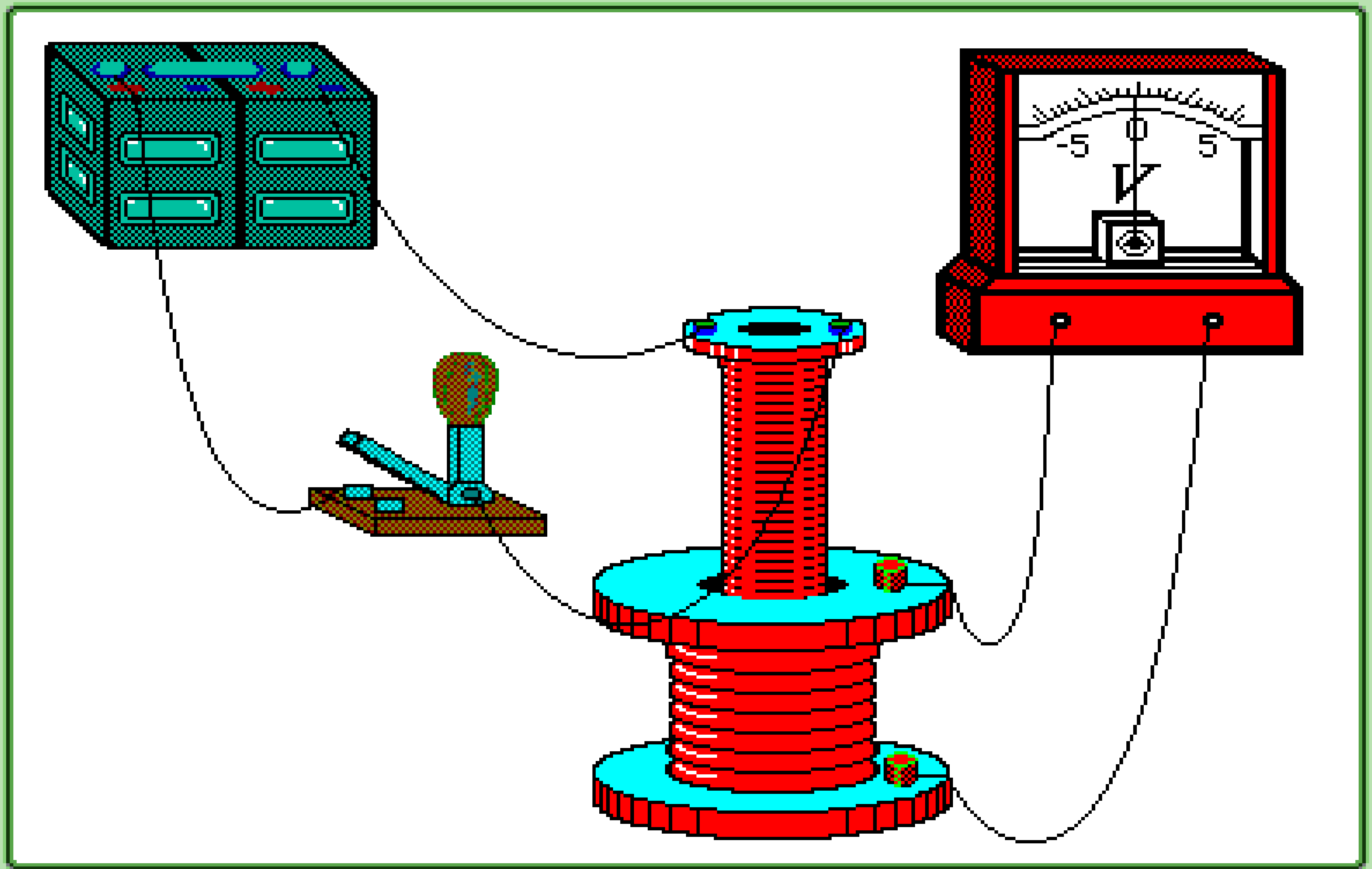
Тема 8. Электродинамика

► 8.1. Закон Фарадея – Ленца (1831 г.)

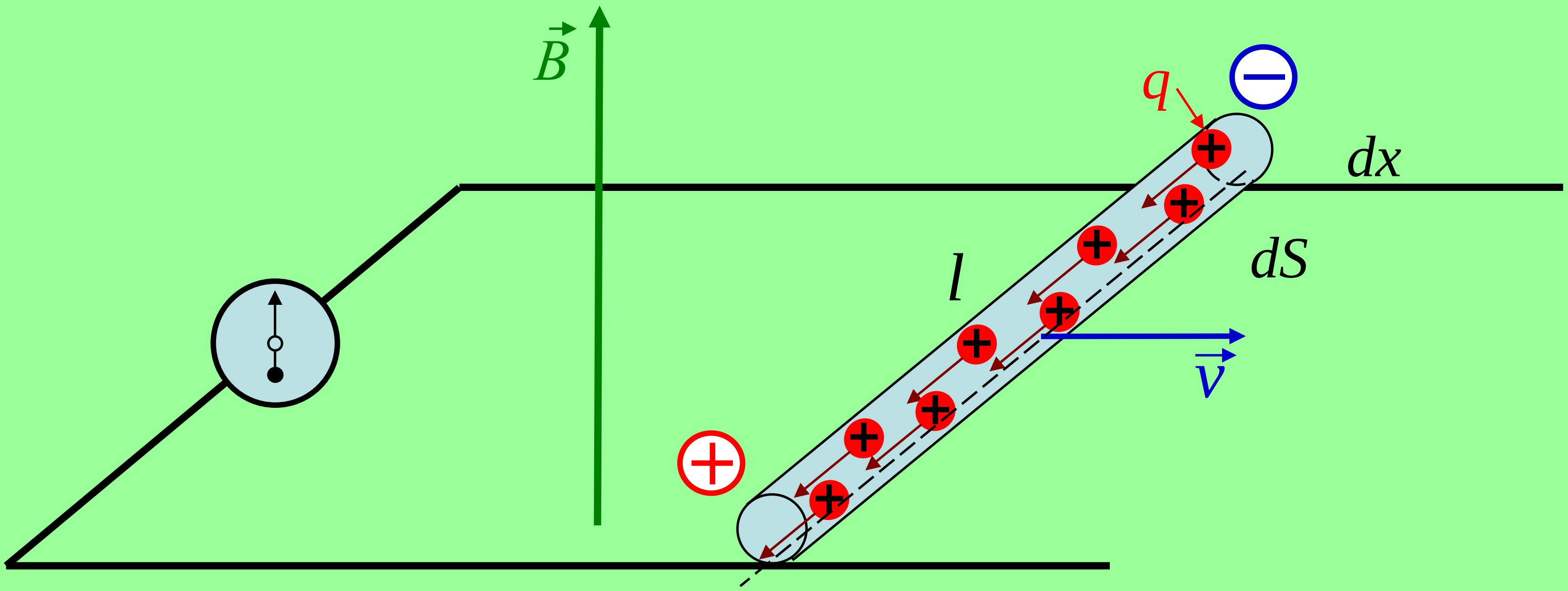
•**Фарадей** Майкл

Эмилий **Ленц**



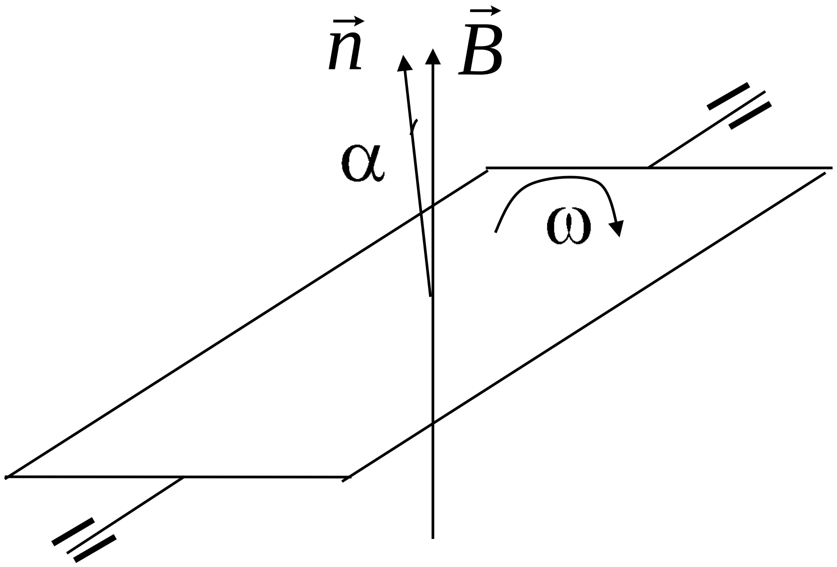
Электродинамика

1. Возникновение ЭДС индукции в движущемся проводнике



$$\frac{dS}{dt} \rightarrow \mathcal{E}$$

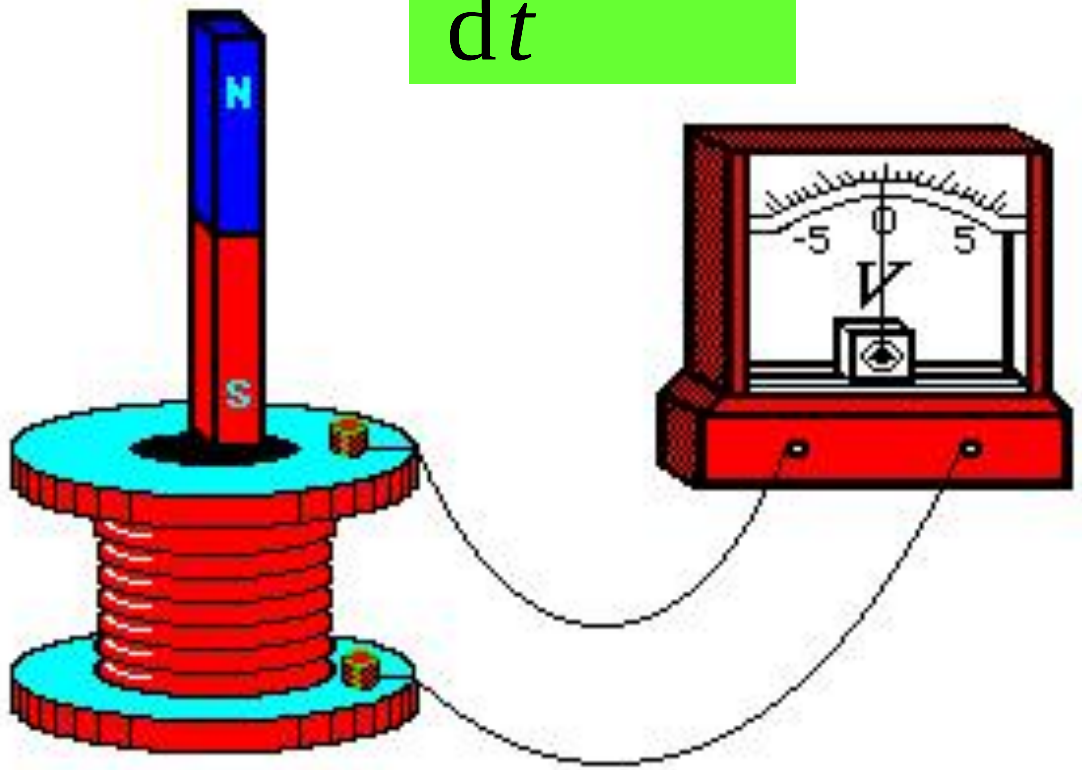
2. Генератор переменного тока



$$\frac{d\alpha}{dt} \rightarrow \varepsilon$$

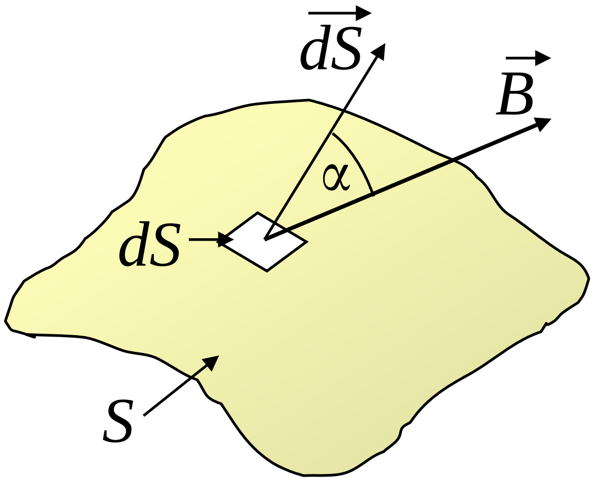
3. Опыты Фарадея (1831 г.)

$$\frac{dB}{dt} \rightarrow \mathcal{E}$$



Опыты Фарадея I

Опыты Фарадея II



Общий случай: произвольная поверхность, поле неоднородное

$$\Phi_{м} = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int_S B\,dS\cos\alpha$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}d\vec{S}$$

Закон электромагнитной индукции

$$\boxed{\varepsilon = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}d\vec{S}}$$

правило Ленца

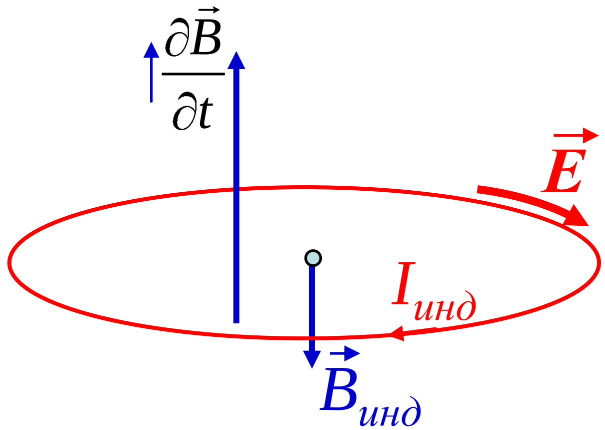
Майкл **Фарадей**

Эмилий **Ленц**

Тема 8. Электродинамика

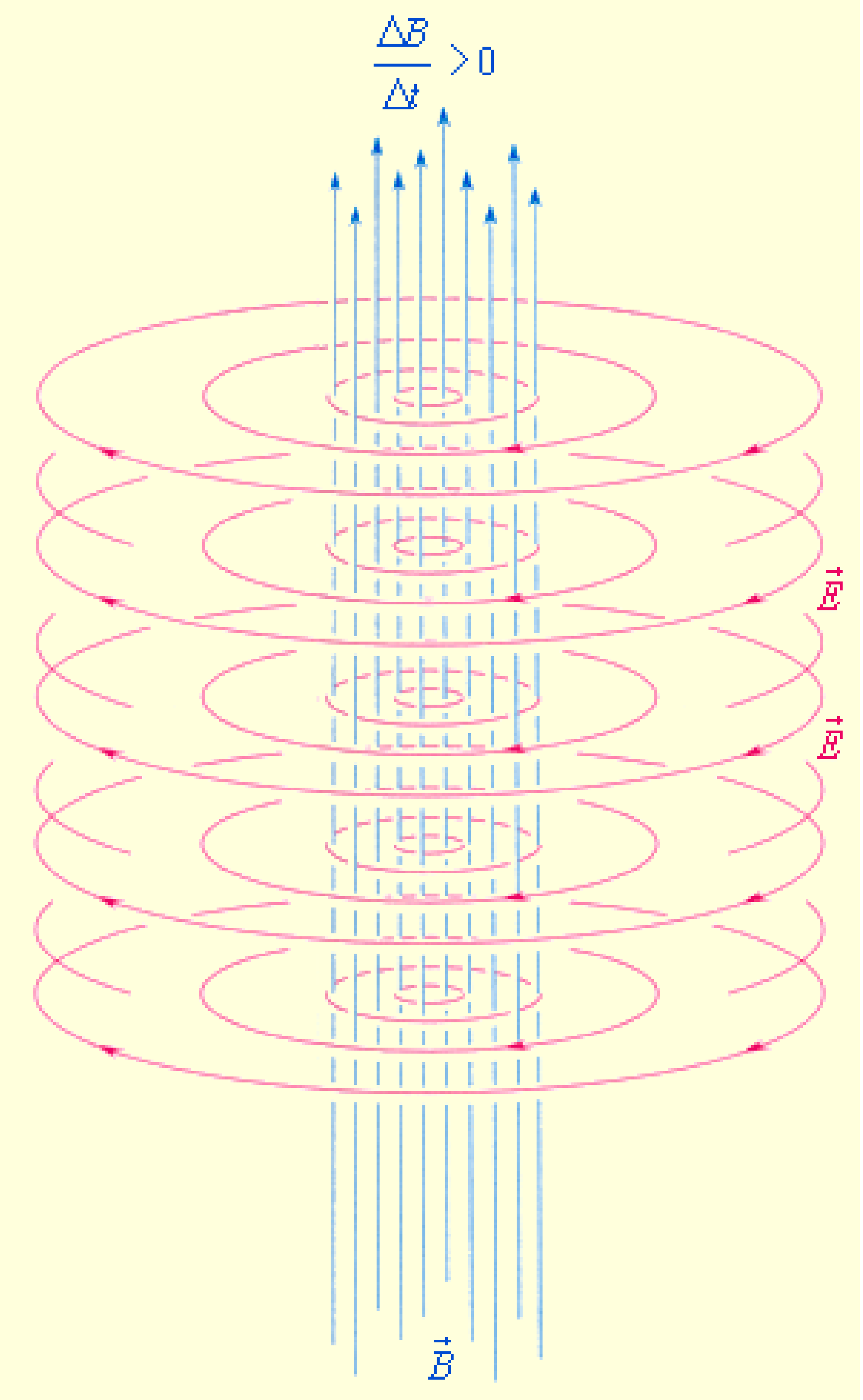
- 8.1. Закон Фарадея – Ленца
- 8.2. Вихревое электрическое поле

Максвелл
Джеймс Клерк
(1831–79)



$$\oint_L \vec{E}\,d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\,d\vec{S}$$

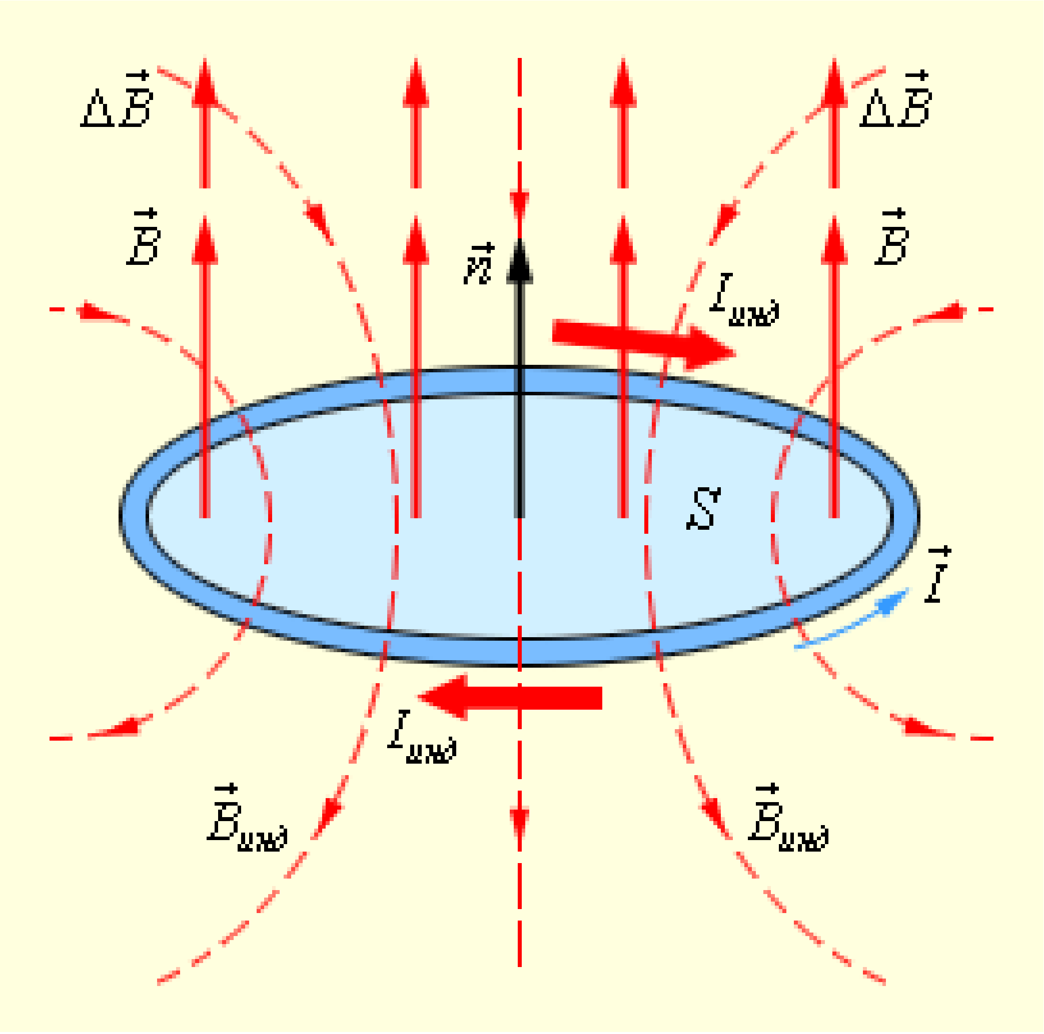
закон электромагнитной индукции
в трактовке Максвелла



Явление электромагнитной индукции

- Переменное магнитное поле порождает вихревое электрическое, причем осями вихрей являются линии поля $\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Иллюстрация правила Ленца



Тема 8. Электродинамика

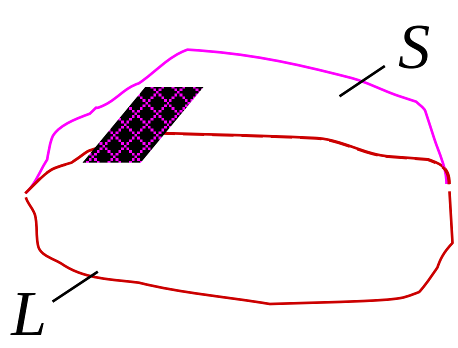
- 8.2. Вихревое электрическое поле
- 8.3. Магнитоэлектрическая индукция
- См. Другой диск

Максвелл
Джеймс Клерк
(1831–79)

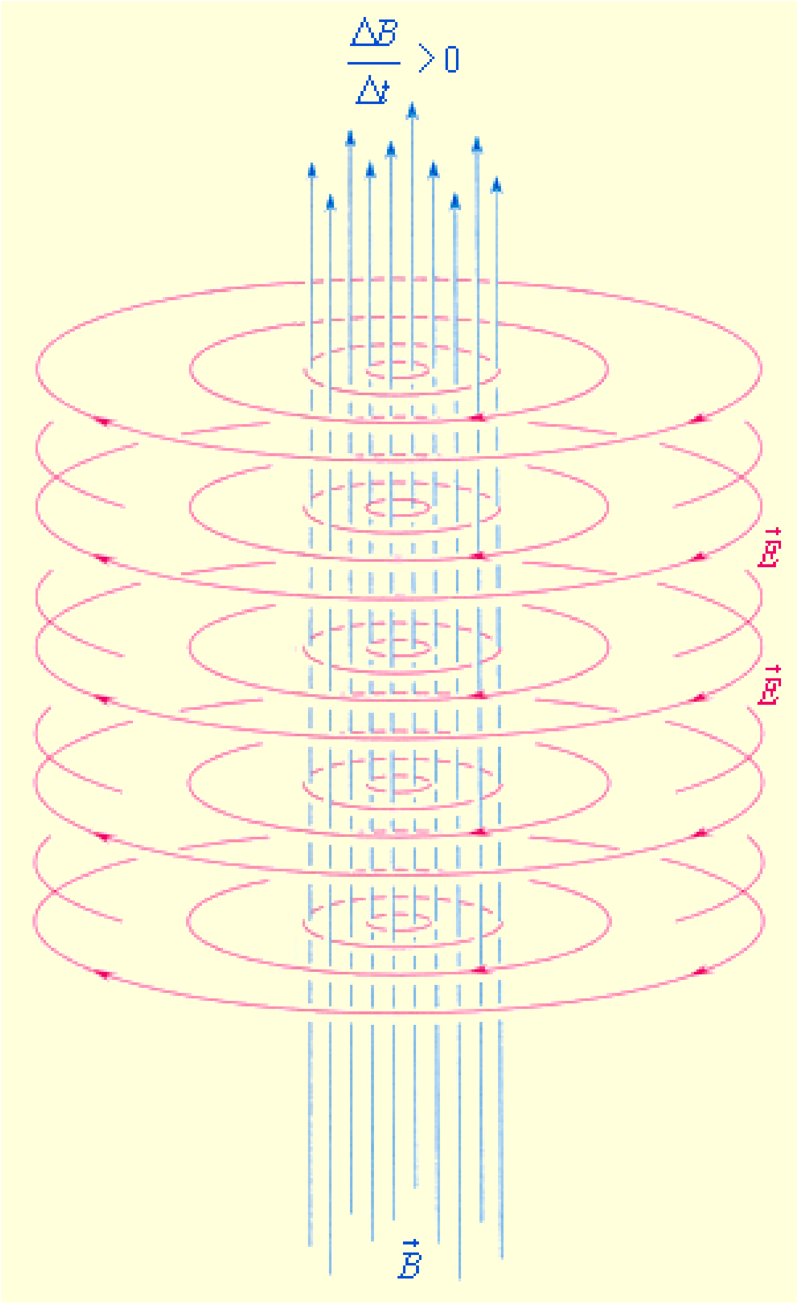
Закон электромагнитной индукции Фарадея – Максвелла:

Изменяющееся магнитное поле порождает вихревое электрическое поле

$$\oint\limits_L \vec{E}d\vec{l} = -\int\limits_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$$

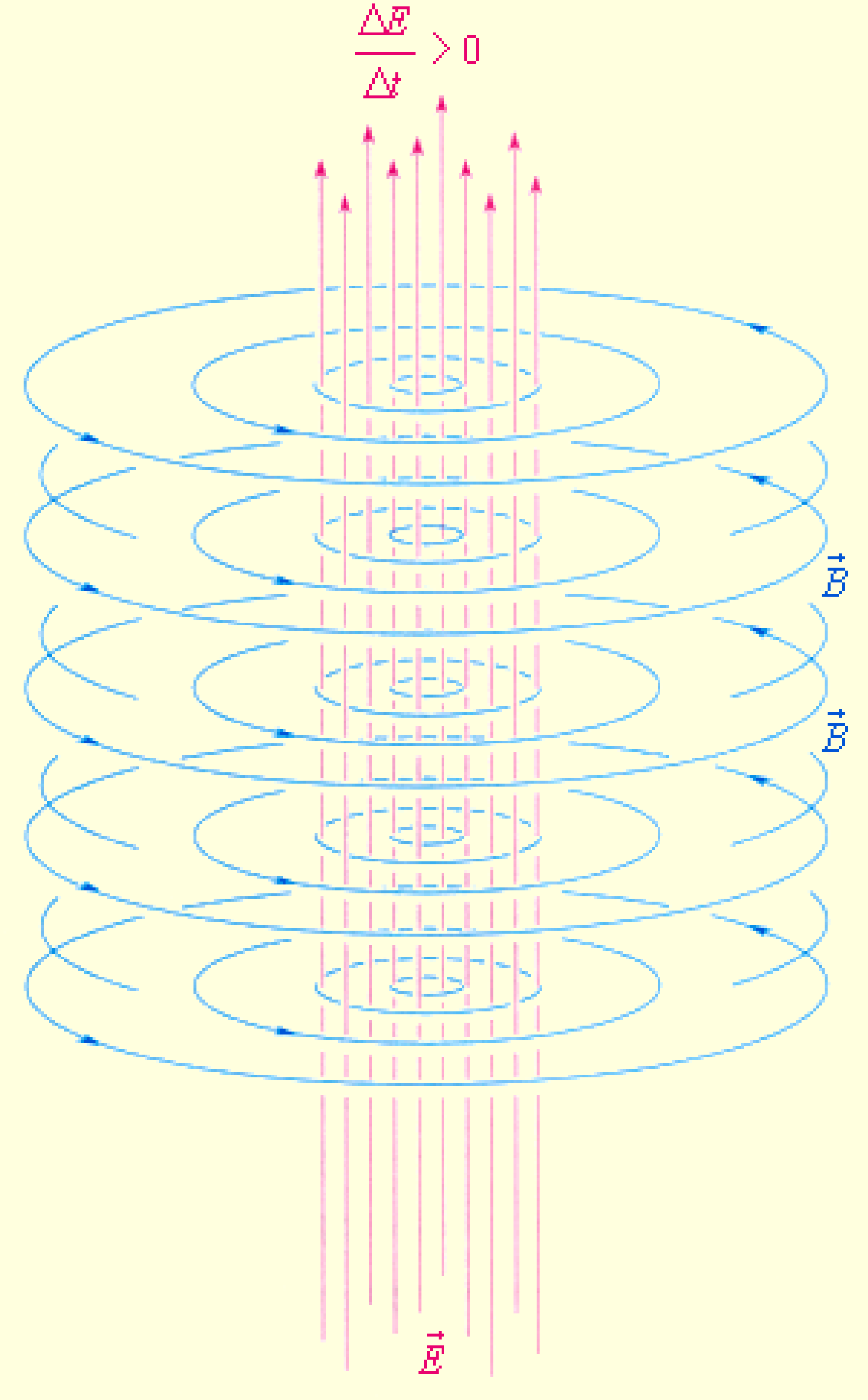


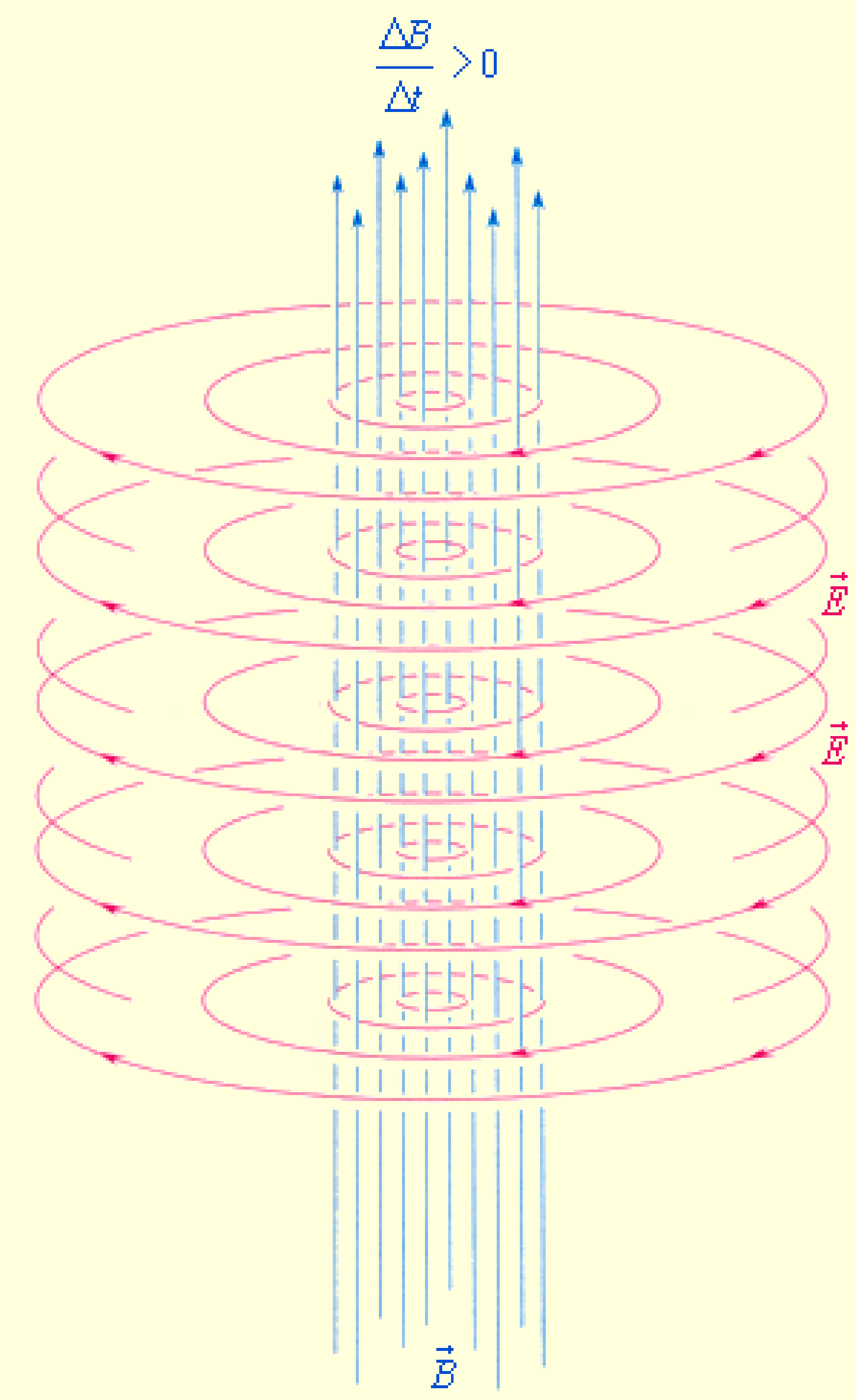
-любая



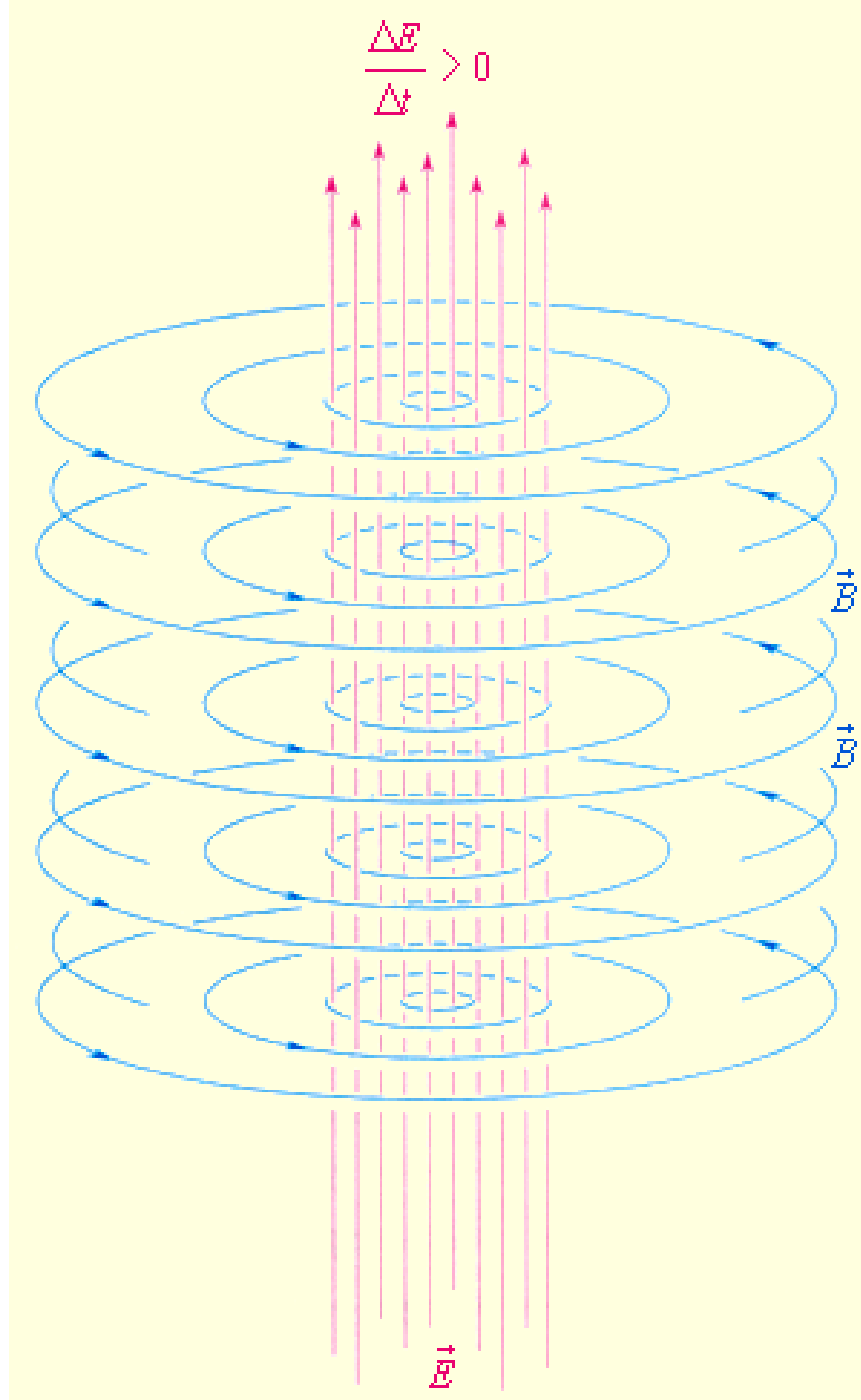
Гипотеза Максвелла:

изменяющееся электрическое поле порождает вихревое магнитное поле





$\frac{\Delta B}{\Delta t} > 0$
$\vec{E}$
$\vec{E}$
$\vec{B}$



$\frac{\Delta E}{\Delta t} > 0$
$\vec{B}$
$\vec{B}$
$\vec{E}$

$$\oint_S \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{S} = \int_V \rho\,\mathrm{d}V; \qquad \oint_S \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{S} = 0$$

$$\oint_L \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\,\mathrm{d}\vec{S}; \qquad \oint_L \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{l} = \int_S \vec{j}\,\mathrm{d}\vec{S}$$

$$\oint_S \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{S} = 0; \qquad \oint_S \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{S} = 0$$

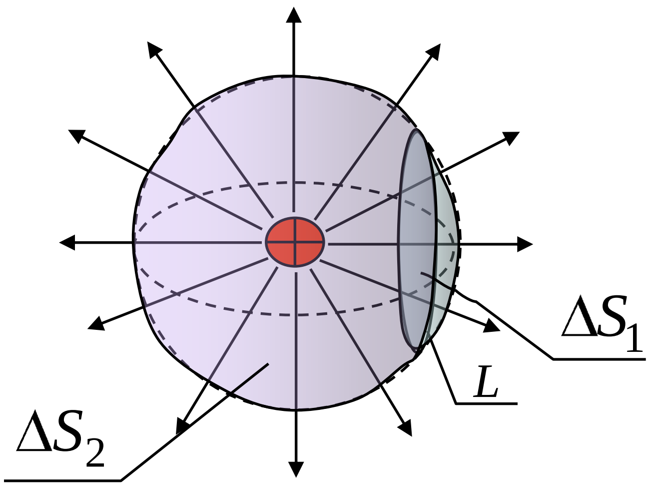
$$\oint_L \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\,\mathrm{d}\vec{S}; \qquad \oint_L \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{l} = 0$$

$$\begin{cases} \oint\limits_S \vec{E}\;\; t\;\; \mathrm{d}\vec{S} = \dfrac{1}{\varepsilon_0} q\;\; t\;\; ; \\ \oint\limits_S \vec{j}\;\; t\;\; \mathrm{d}\vec{S} = -\dfrac{\mathrm{d}q\;\; t}{\mathrm{d}t}; \end{cases} \qquad \begin{cases} \oint\limits_S \varepsilon_0 \dfrac{\partial\vec{E}\;\; t}{\partial t}\mathrm{d}\vec{S} = \dfrac{\mathrm{d}q\;\; t}{\mathrm{d}t}; \\ \oint\limits_S \vec{j}\;\; t\;\; \mathrm{d}\vec{S} = -\dfrac{\mathrm{d}q\;\; t}{\mathrm{d}t}; \end{cases}$$

$$\oint\limits_S \left(\varepsilon_0 \frac{\partial\vec{E}\;\; t}{\partial t} + \vec{j} \right) \mathrm{d}\vec{S} = 0 \quad !!!$$

ВСЕГДА !!!

1. Стекание заряда в слабопроводящей среде



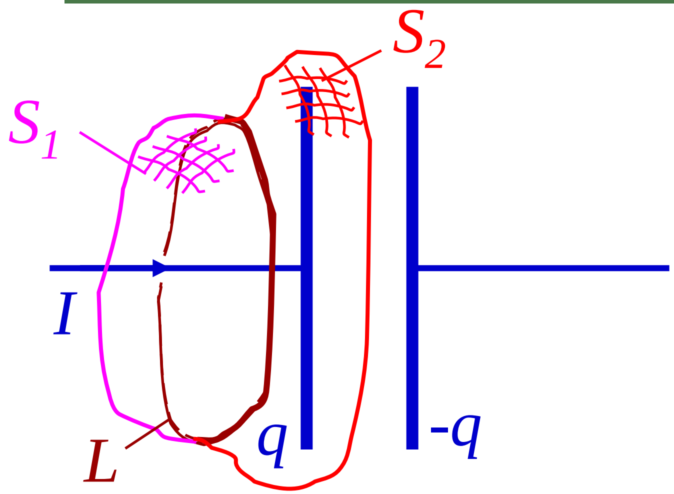
$$\begin{cases} \oint\limits_L \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 j \Delta S_1; \\ \oint\limits_L \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 j \Delta S_2 \end{cases}$$

$$\Gamma_1 \neq \Gamma_2$$

$$\Gamma_1 \neq 0 \neq \Gamma_2$$

Из симметрии должно быть $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0$

2. Зарядка конденсатора



Поверхность S_1 :

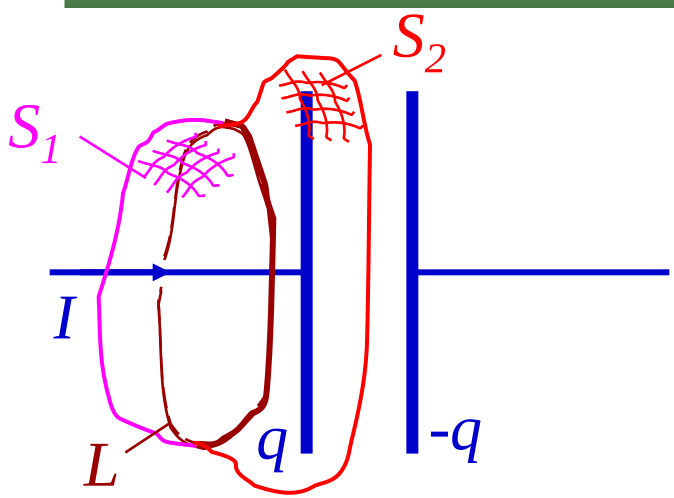
$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} \overset{?}{=} \mu_0 I$$

Поверхность S_2 :

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} \overset{?}{=} 0$$

$$\Gamma_1 \neq \Gamma_2$$

2. Зарядка конденсатора



Поверхность S_1:

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} \overset{?}{=} \mu_0 I$$

Поверхность S_2:

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} \overset{?}{=} 0$$

$$\Gamma_1 \neq \Gamma_2$$

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j}d\vec{S} + \mu_0\varepsilon_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{S};$$

- закон Ампера - Максвелла

$$\boxed{\varepsilon_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{S} = I_{\text{СМ}}}$$

- *ток смещения*

В вакууме:

$$\boxed{\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \varepsilon_0\mu_0 \int_S \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} d\vec{S}}$$

В веществе:

$$\oint_L \vec{H}d\vec{l} = \int_S \vec{j}d\vec{S} + \int_S \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} d\vec{S};$$

$$\boxed{\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \vec{j}_{см}}$$

- плотность тока смещения

$$\boxed{\oint_L \vec{H}d\vec{l} = \int_S (\vec{j} + \vec{j}_{см})d\vec{S}}$$

- закон Ампера - Максвелла

Тема 8. Электродинамика

- 8.3. Магнитоэлектрическая индукция
- 8.4. Уравнения Максвелла

Стационарные материальные уравнения Максвелла

$$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \rho \cdot \mathrm{d}V; \qquad \oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

$$\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S}; \qquad \oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}; \qquad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}; \qquad \vec{j} = \sigma \vec{E}$$

Материальные уравнения Максвелла

$$\oint_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \rho \cdot \mathrm{d}V; \qquad \oint_L \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\oint_L \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S (\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot \mathrm{d}\vec{S}; \qquad \oint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}; \quad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}; \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}$$

В веществе:

1. $\oint_S \vec{D}\,\mathrm{d}\vec{S} = \int_V \rho_q\,\mathrm{d}V$

2. $\oint_S \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{S} = 0$

3. $\oint_L \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\,\mathrm{d}\vec{S}$

4. $\oint_L \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{l} = \int_S \vec{j}\,\mathrm{d}\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\,\mathrm{d}\vec{S}$

$$\left.\begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu_0 \mu \vec{H} \\ \vec{j} &= \sigma \vec{E} \end{aligned}\right\}$$

В вакууме:

1. $\oint_S \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{S} = 0$

2. $\oint_S \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{S} = 0$

3. $\oint_L \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\,\mathrm{d}\vec{S}$

4. $\oint_L \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{l} = \varepsilon_0 \mu_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\,\mathrm{d}\vec{S}$

Векторный оператор набла
(оператор Гамильтона)

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

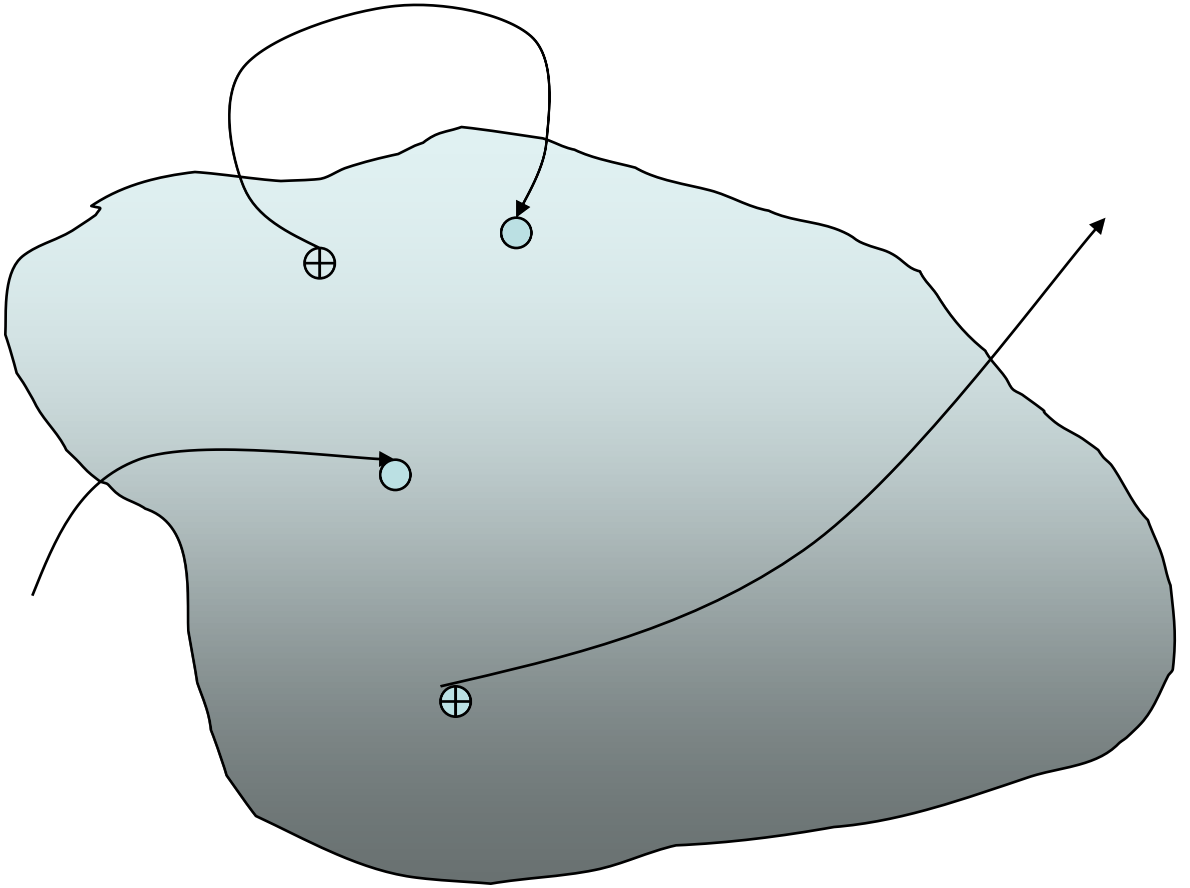
$$1.\ \vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k} \equiv \mathrm{grad}\,\varphi$$

$$2.\ \vec{\nabla}\cdot\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \equiv \mathrm{div}\,\vec{a}$$

$$3.\ \vec{\nabla}\times\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} \equiv \mathrm{rot}\,\vec{a} =$$

$$= \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Поток Ф вектора через замкнутую поверхность



Дивергенция

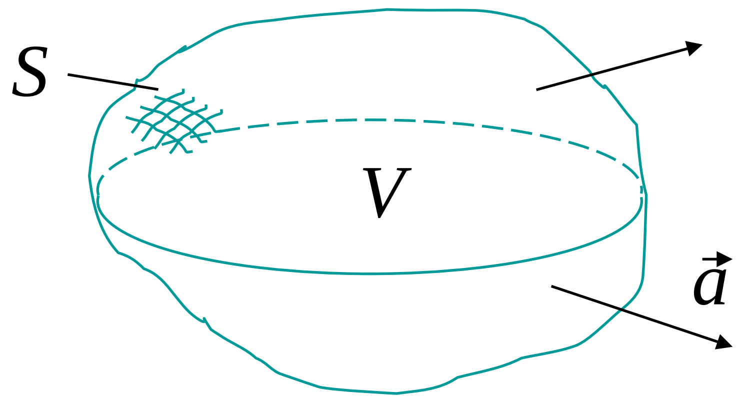
$$\mathrm{div}\vec{E} \equiv \lim_{V_i \to 0} \frac{1}{V_i} \oint_{S_i} \vec{E} \cdot d\vec{S}_i$$

$$\mathrm{div}\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \vec{\nabla} \cdot \vec{a}$$

Теорема

Остроградского - Гаусса

$$\boxed{\oint_S \vec{a}\cdot d\vec{S} = \int_V \operatorname{div}\vec{a}\cdot dV}$$



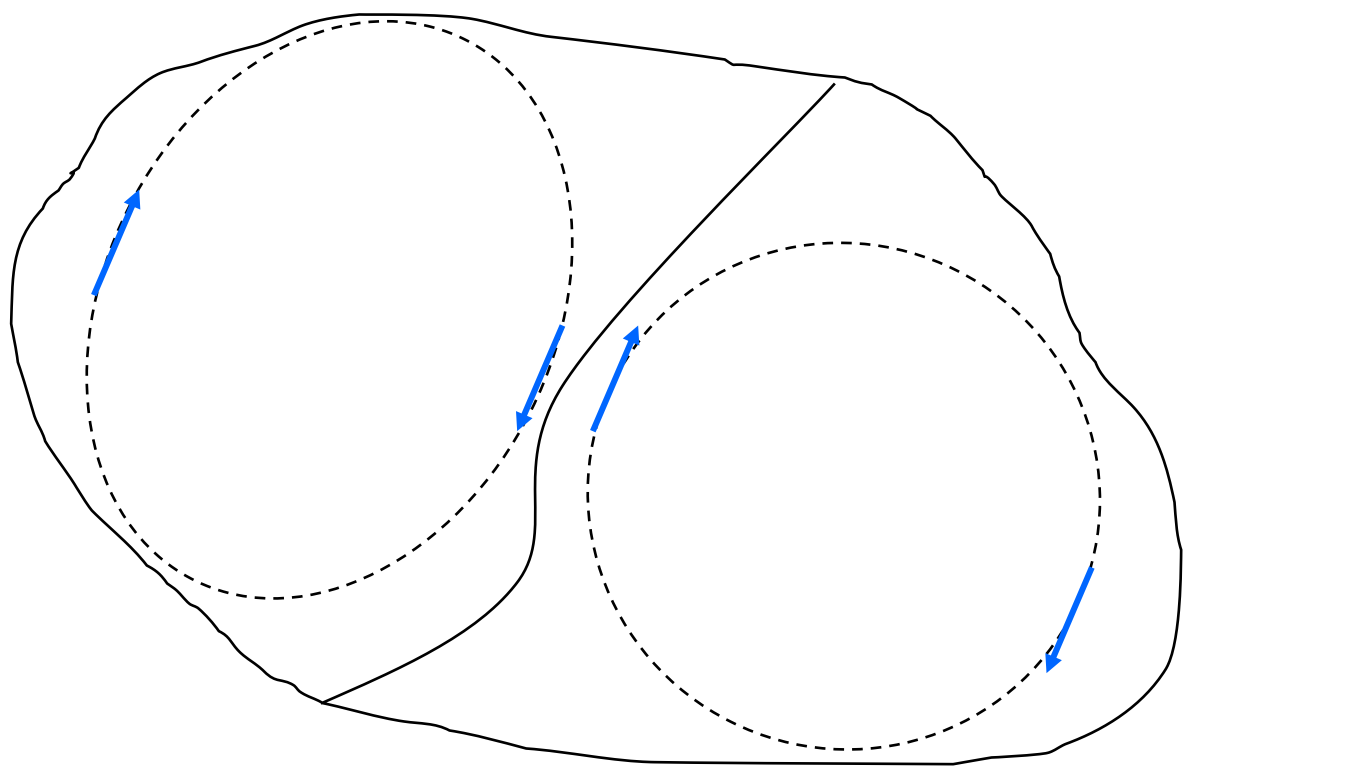
1. $\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho_q dV$

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

2. $\oint_S \vec{B}d\vec{S} = 0$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$$



Ротор

$$\left(\mathrm{rot}\vec{E}\right)_n = \lim_{S_i \to 0} \frac{\oint\limits_{L_i} \vec{E} \cdot d\vec{l}_i}{S_i}$$

$$\mathrm{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \vec{\nabla} \times \vec{a}$$

Ротор векторного поля

$$\left(rot\ \vec{a}\right)_n = \lim_{S\to 0}\frac{\oint\limits_L \vec{a}\cdot d\vec{l}}{S}$$

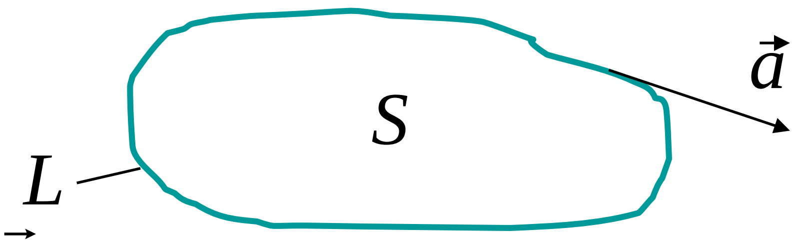
$$\vec{\nabla}\times\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} \equiv rot\,\vec{a} =$$

$$= \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Ротор векторного поля – плотность порождения циркуляции

Теорема Стокса

$$\oint_L \vec{a}\cdot d\vec{l} = \int_S \operatorname{rot}\vec{a}\cdot d\vec{S}$$



3. $\displaystyle\oint_L \vec{E}d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}d\vec{S}$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

4. $\displaystyle\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \mu_0\int_S(\vec{j}+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t})d\vec{S}$

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho, \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \qquad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

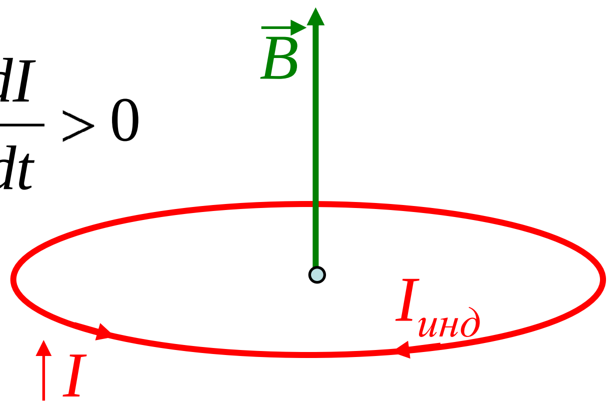
$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}; \quad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}; \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}$$

Тема 8. Электродинамика

- 8.4. Уравнения Максвелла
- 8.5. Явление самоиндукции

Генри Джозеф
(17.12.1797–13.V.1878)

$$\frac{dI}{dt} > 0$$



$B \sim I$ *(по Био и Савару)*

$$\boxed{\Phi = L\, I}$$

$L = L \quad I$ – индуктивность

Пример-индуктивность соленоида

$$L = \mu\mu_0 n^2 V = L \quad I$$

$$\boxed{\varepsilon_c = -\left(L + I\frac{dL}{dI}\right)\frac{dI}{dt}}$$

$[L]$ = В · с /А ≡ Гн *(генри)*

$$\boxed{\varepsilon_c \approx -L\frac{dI}{dt}}$$

В отсутствии ферромагнетиков

Тема 8. Электродинамика

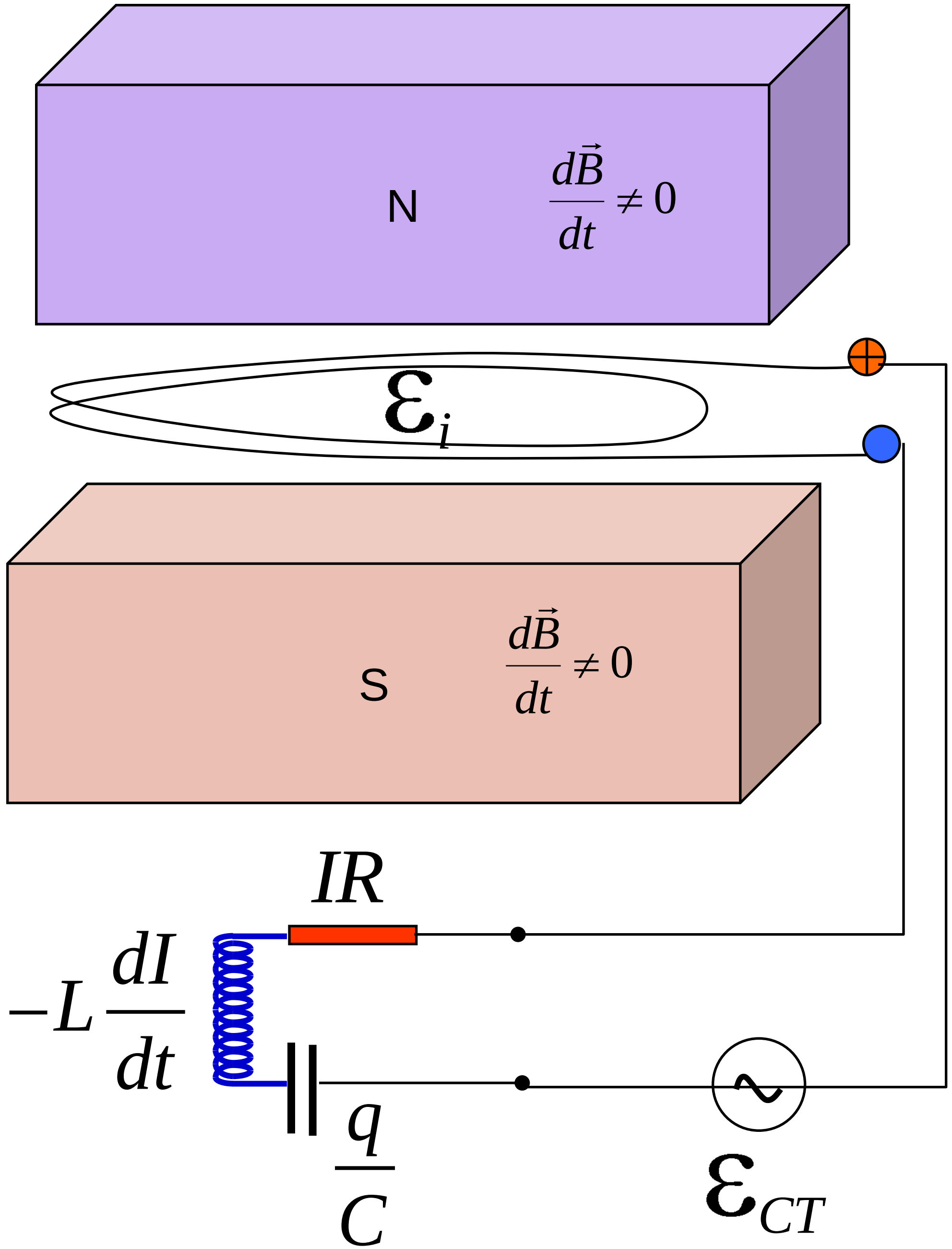
- 8.5. Явление самоиндукции
- 8.6. Обобщенный закон Ома

Условия квазистационарности

- 1. L – «размер цепи», c – скорость света, T- характерное время изменения

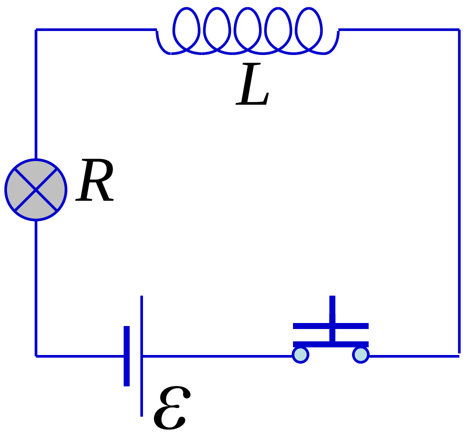
$$\tau = \frac{L}{c} \ll T$$

- 2. $E(\mathrm{t})_{\text{источников}}$ и $B(\mathrm{t})$ определяются как постоянные поля
- 3. $E_{\text{вихрев}}$ определяется через закон Фарадея - Ленца



$$IR + \frac{q}{C} = -L\frac{dI}{dt} + \varepsilon_i + \varepsilon_{CT}$$

$$L\frac{dI}{dt} + IR + \frac{q}{C} = \varepsilon\ t$$



Ток включения

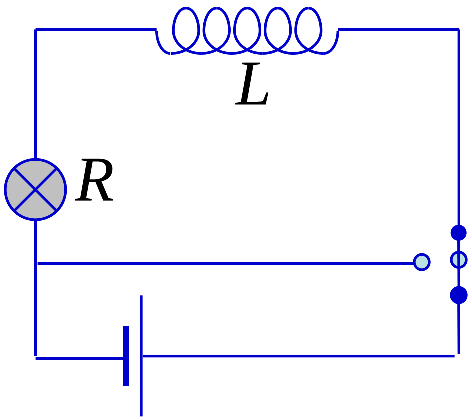
$$IR = \mathcal{E} - L\frac{dI}{dt}; \quad IR - \mathcal{E} = x; \quad dI = \frac{dx}{R}$$

Начальное условие:

$$t = 0; \qquad I = 0; \qquad C = -\mathcal{E}$$

$$\boxed{I = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)}$$

Ток выключения

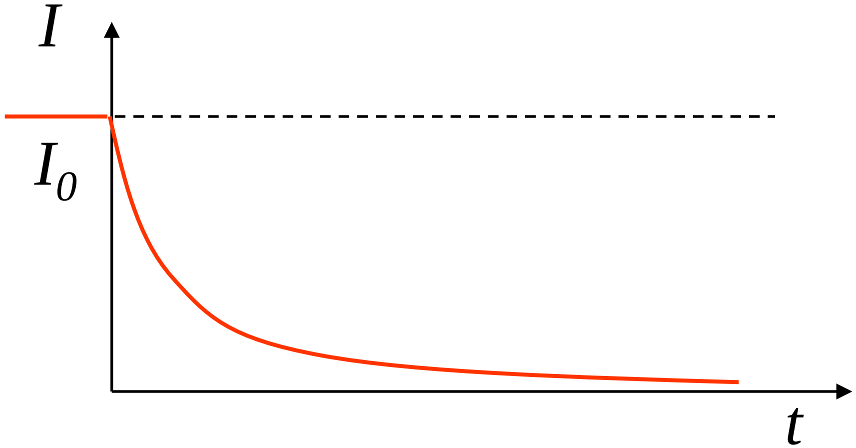


$$IR = -L\frac{dI}{dt};$$

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}dt$$

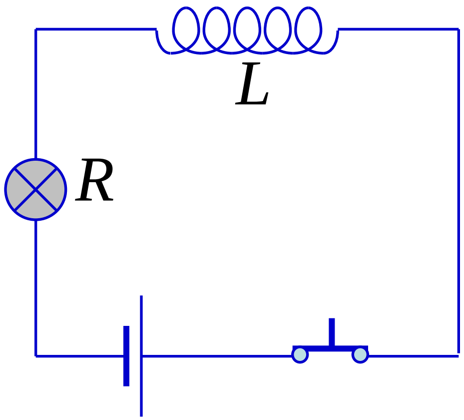
Начальное условие:

$$t = 0; \qquad I = I_0; \qquad C = I_0$$



$$\boxed{I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}}$$

Экстратоки



$$\boxed{I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}}$$

$$I_0 = \frac{\varepsilon}{R}$$

Но!

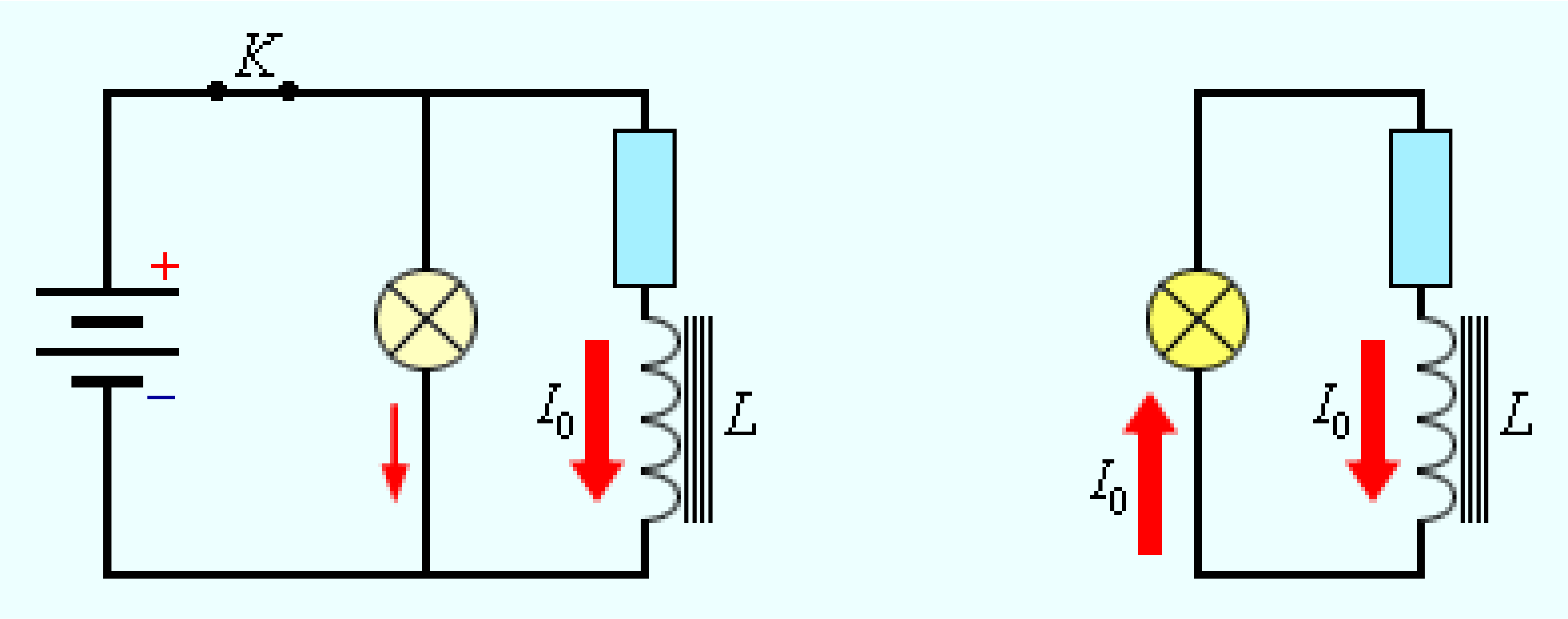
$$\varepsilon_c = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} = -LI_0\frac{R_\infty}{L}$$

$$\varepsilon_c = -\frac{\varepsilon}{R}R_\infty \to \infty$$

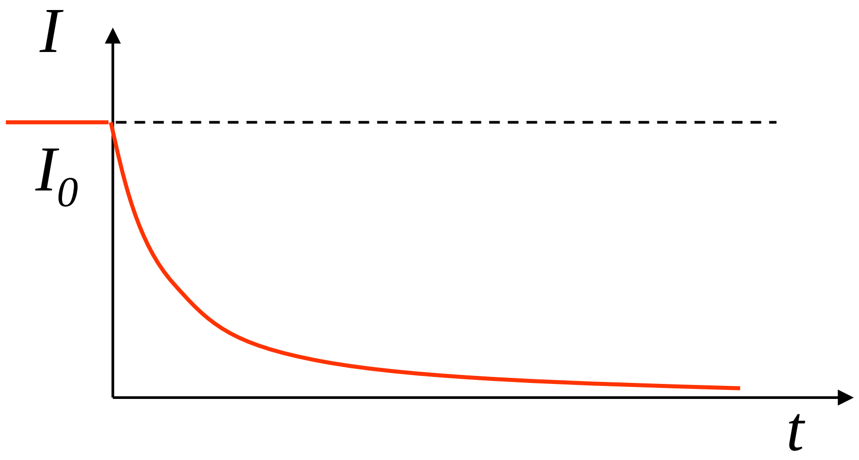
Тема 8. Электродинамика

- 8.6. Обобщенный закон Ома
- 8.7. Энергия магнитного поля

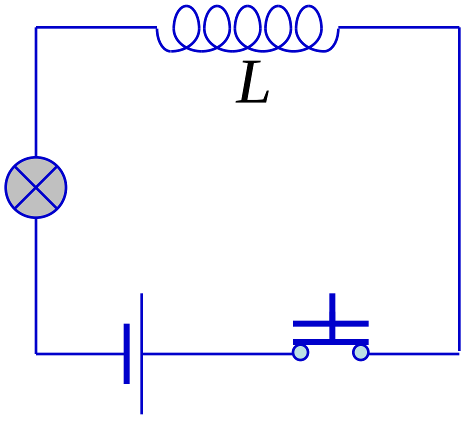
При размыкании ключа *K* лампа ярко вспыхивает.



Выделяющаяся энергия при выключении



$$dW = I\mathcal{E}_c dt = -IL\frac{dI}{dt}dt$$



$$\boxed{W_м = \frac{LI^2}{2}}$$

- *энергия магнитного поля*

Энергия магнитного поля: $W_м = \frac{LI^2}{2}$

$$B = {}_o \mu \, n \, I$$

$$W_м = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu} V$$

Объемная плотность энергии

$$\boxed{w_м = \frac{W_м}{V} = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu}}$$

$$w_м = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} = \frac{BH}{2}$$

$$B = \mu_o \, \mu \, H$$

Тема 8. Электродинамика

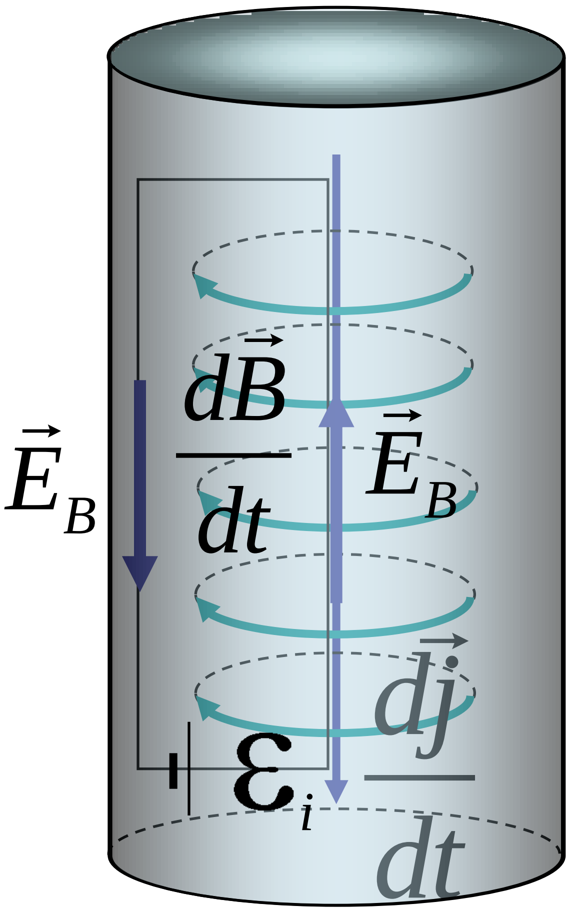
- 8.7. Энергия магнитного поля
- 8.8. Токи Фуко. Скин-эффект

Фуко
Жан Бернар Леон
(18.IX.1819–11.II.1868)

- Токи Фуко –

вихревые индукционные токи возбуждаемые переменным магнитным полем в сплошных массивных проводниках

СКИН-ЭФФЕКТ



Эффективная глубина поверхностного слоя

$$l \approx \frac{1}{\sqrt{2\mu\mu_0\sigma\nu}}$$

Для проволоки диаметром 2 мм

Частота	Увеличение R
50 Гц	На 0,0003%
10^6 Гц	В 7 раз