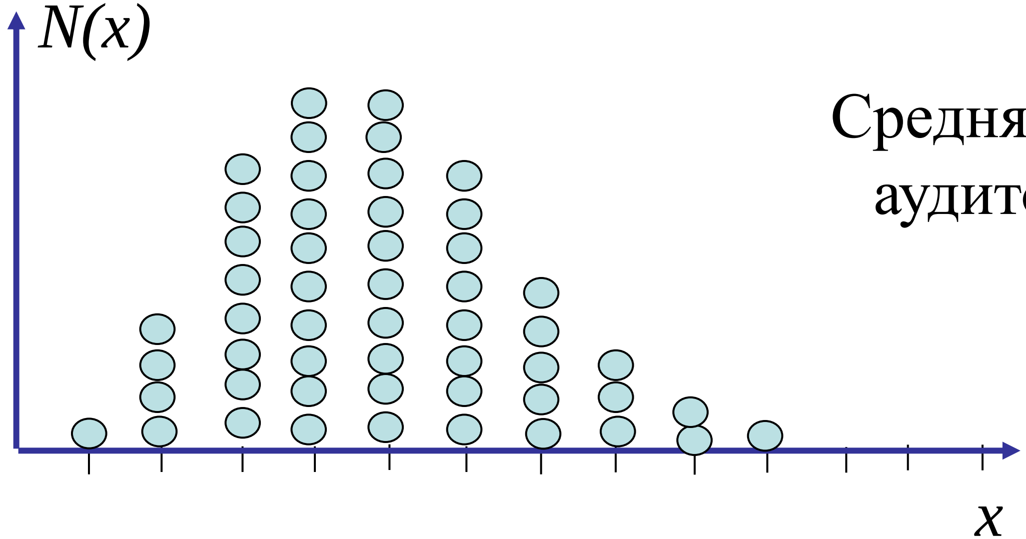
Тема 3. Операторы физических величин

- 3.1. Средние значения физических величин

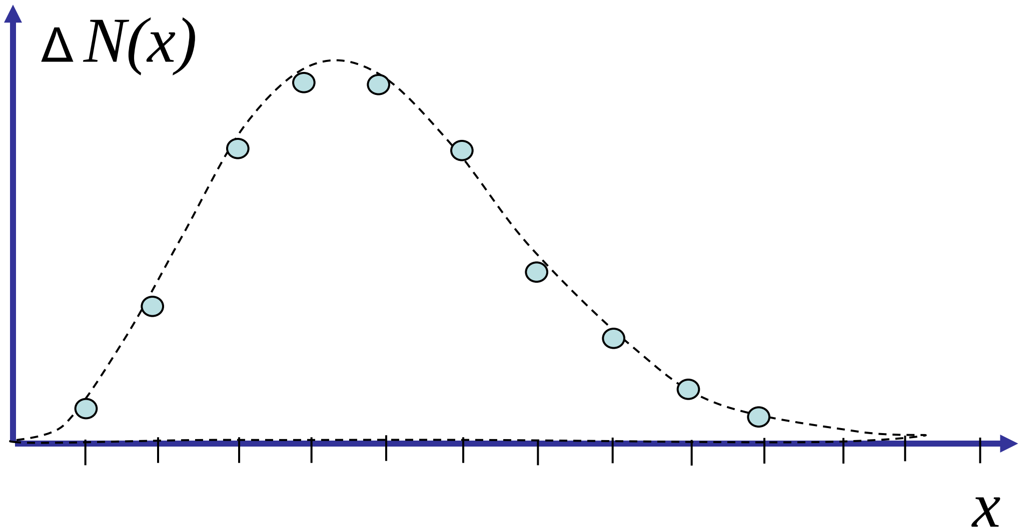
Среднее значение координаты в классической физике



Средняя координата студентов в аудитории на данной лекции

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{x_i} N_i x_i$$

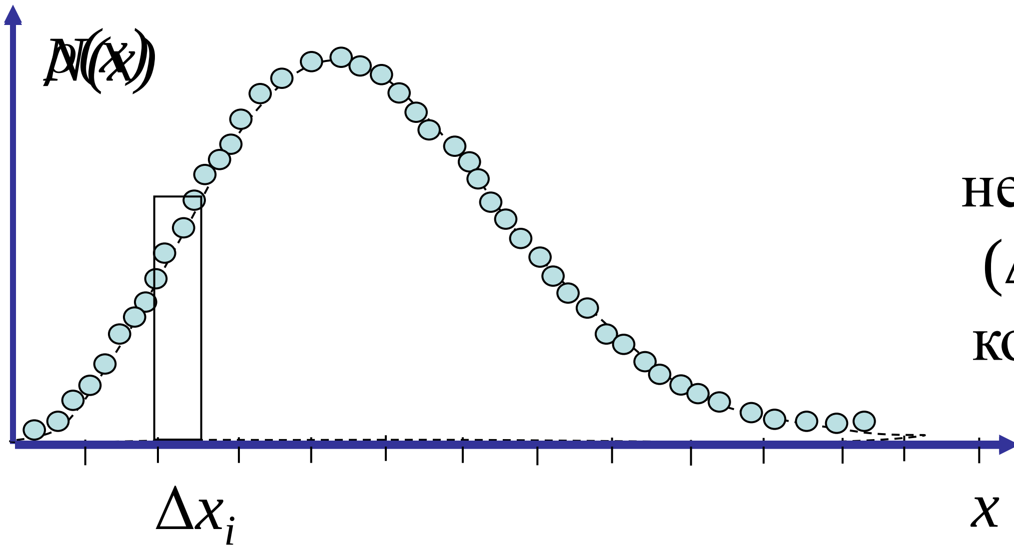
Среднее значение координаты в классической физике



Средняя координата одного студента в аудитории за все время обучения (N - общее количество лекций, ΔN_i- количество лекций с координатой студента x_i)

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N}\sum_{x_i} \Delta N_i x_i = \sum_{x_i} \frac{\Delta N_i}{N} x_i = \sum_{x_i} w_i x_i$$

Среднее значение координаты в классической физике

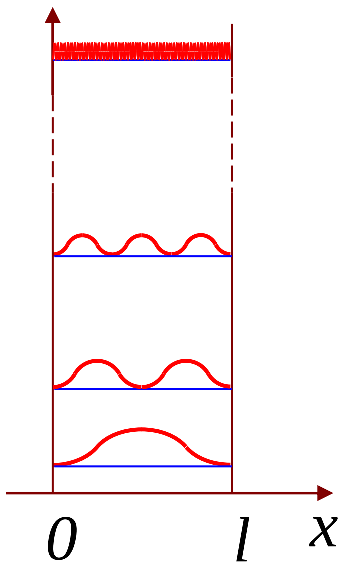


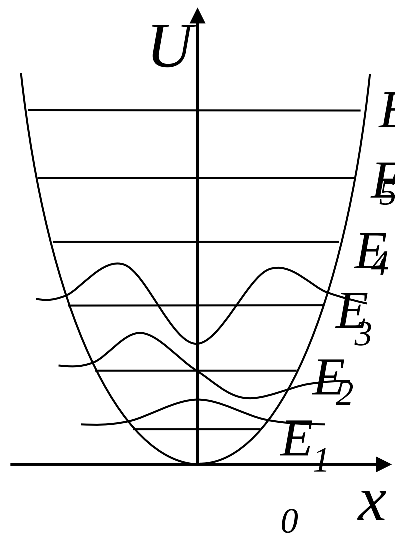
Средняя координата при непрерывном распределении (ΔN_i-количество объектов с координатой в пределах Δx_i)

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N}\sum_{x_i} \Delta N_i x_i = \sum_{x_i} \frac{\Delta N_i}{N} x_i = \sum_{x_i} \rho_i x_i \Delta x$$

$$\langle x \rangle = \int_0^\infty x\rho \quad x \quad \mathrm{d}\,x$$

Среднее значение координаты в квантовой физике

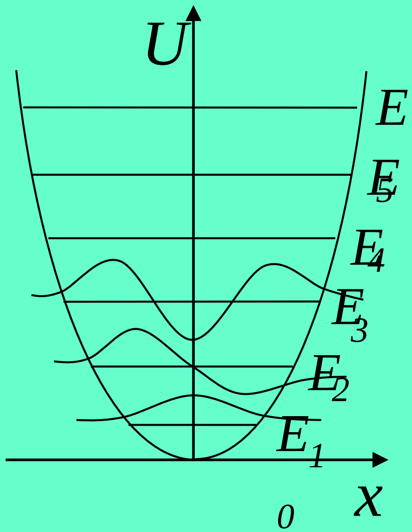




$$\langle x\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\rho\;\; x\;\; \mathrm{d}\,x$$

$$\langle x\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\psi^2\;\; x\;\; \mathrm{d}\,x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi * x\psi\,\mathrm{d}\,x$$

$$\langle \vec{r}\rangle = \int\limits_{V} \psi * \vec{r}\psi\,\mathrm{d}V$$



$$\left\langle A\ \ \vec{r}\ \ \right\rangle = \int_V \psi * A\ \ \vec{r}\ \ \psi\, \mathrm{d}V$$

$$\left\langle U\ \ \vec{r}\ \ \right\rangle = \int_V \psi * U\ \ \vec{r}\ \ \psi\, \mathrm{d}V$$

$$\langle \Delta x \rangle = 0 \quad !!!$$

$$\left\langle\ \ \Delta x\ \ ^2 \right\rangle = \left\langle\ \ x - x_{cp}\ \ ^2 \right\rangle = \left\langle x^2 \right\rangle - 2\left\langle x x_{cp} \right\rangle + x_{cp}^2$$

$$\left\langle\ \ \Delta x\ \ ^2 \right\rangle = \left\langle x^2 \right\rangle - x_{cp}^2$$

ВЫВОД:

- Для ансамбля микрочастиц, описываемых $\psi(r)$, как сами координаты, так и любая функция от координат $A(r)$ в стационарных состояниях не имеют определенных значений. Энергия при этом определена, что свидетельствует о несовместимости одновременного измерения $A(r)$ и E.

Тема 3. Операторы физических величин

- 3.1. Средние значения физических величин
- 3.2. Понятие об операторах физических величин

$$\langle E_k \rangle = \int_V \psi^* E_k \psi \, \mathrm{d}V \qquad E_k = ?$$

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} \underbrace{(E - U)}_{E_k} \psi = 0$$

$$E_k \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi$$

$$\langle E_k \rangle = \int_V \psi^* \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \right) \psi \, \mathrm{d}V = \int_V \psi^* E_k \psi \, \mathrm{d}V$$

$$\langle E \rangle = \langle E_k + U \rangle$$

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U$$

$$\langle E \rangle = \int_V \psi^* H \psi \, \mathrm{d}V$$

Вывод:

- В квантовой механике для определения среднего значения физической величины $\left\langle A\ \vec{r},\vec{p}\ \right\rangle$ ей необходимо сопоставить некий оператор $A\ \vec{r},\vec{p}$.

Тогда

$$\left\langle A\ \vec{r},\vec{p}\ \right\rangle = \int_V \psi * A\ \vec{r},\vec{p}\ \psi\, \mathrm{dV}$$

Уравнение Шрёдингера

$$H\psi = E\psi$$

Одно из основных утверждений квантовой механики

- Состояние, в котором физическая величина A имеет определенное значение A_i и описывается волновой функцией ψ_i, является решением операторного уравнения $A\psi = A\psi$
- A_i – являются собственными значениями оператора A, а ψ_i - его собственными функциями

Если $A = A\ \vec{r}, \vec{p}$, то $A = A\ \vec{r}, \vec{p}$

Сравним

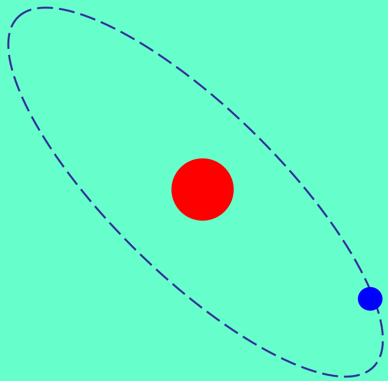
$$E_k = \frac{p^2}{2m} \qquad E_k = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2$$

$$\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla} \qquad p_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$$

Тема 3. Операторы физических величин

- 3.2. Понятие об операторах физических величин
- 3.3. Собственные значения проекции и квадрата модуля момента импульса

В классичекой физике

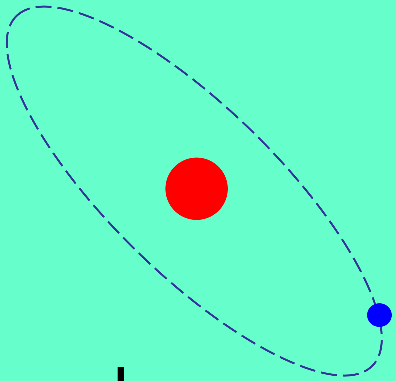


$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$E = \frac{p^2}{2m} + U =$$

$$= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\tau^2}{2m} + U =$$

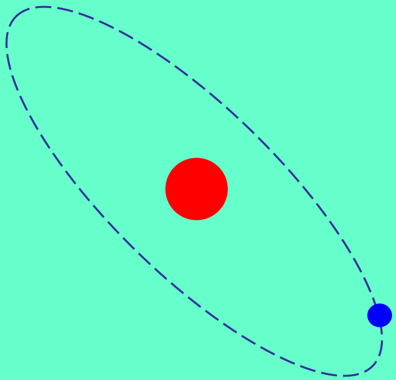
$$= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{L^2}{2I} + U$$



$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

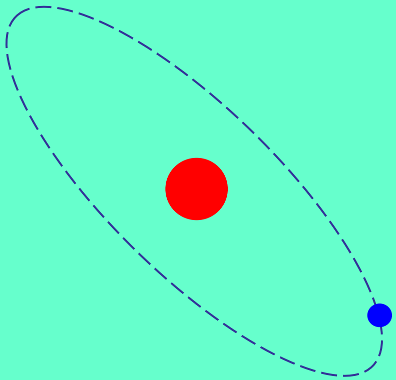
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\vec{L} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x & y & z \\ -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} & -i\hbar\frac{\partial}{\partial y} & -i\hbar\frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix}$$

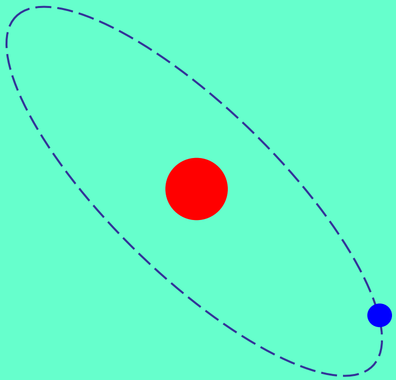


$$\vec{L} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x & y & z \\ -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x} & -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial y} & -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$\vec{L} = \ldots\ldots\ldots\underbrace{-i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)}_{L_z}\vec{e}_z$$



$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

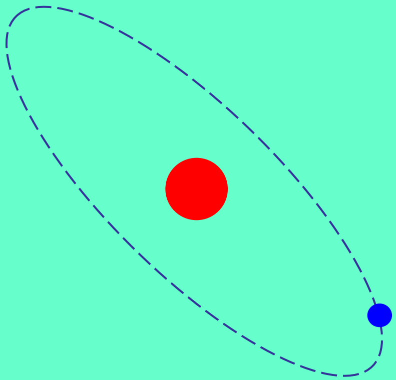


$$L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$L_z \psi = L_z \psi$$

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \psi = L_z \psi$$

$$\psi = A e^{\frac{i}{\hbar} L_z \varphi}$$

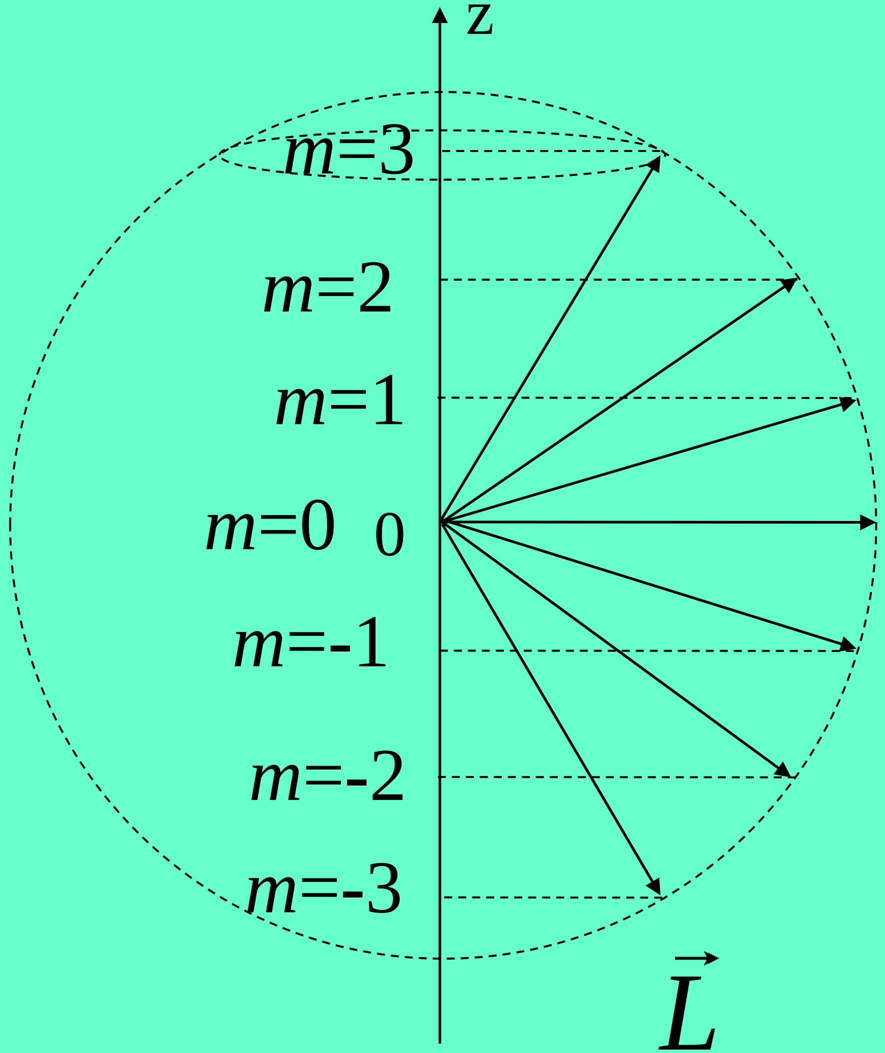


$$L_z = m\hbar$$

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}$$

$m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ - магнитное квантовое число

Из соотношения неопределенностей следует, что L_z и L_x, L_z и L_y не могут иметь одновременно определенных значений. Поэтому $L_z \neq L$

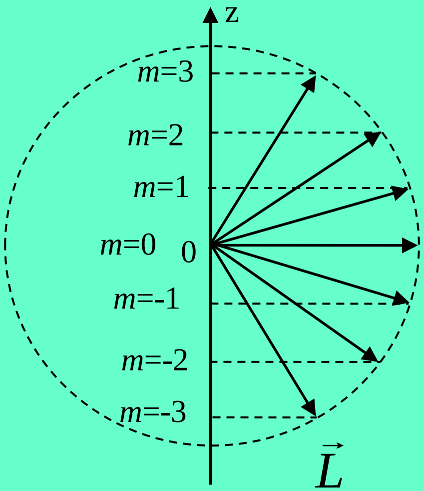


Вектор $\vec{L}$ как бы прецессирует вокруг выбранной оси.

$$\langle L_z \rangle = 0$$

$$\langle L_z^2 \rangle \neq 0$$

Всего 2*l*+1значений

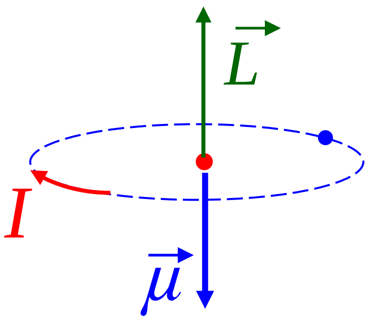


$$\left\langle L_z^2 \right\rangle = \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^{m=+l} m^2 \hbar^2$$

$$\left\langle L_z^2 \right\rangle = \frac{1}{3} \hbar^2 l \quad l+1$$

$$L_l = \hbar\sqrt{l\quad l+1}$$

$l = 0, 1, 2, \ldots$ - орбитальное квантовое число



Орбитальный момент импульса:

$$L = \hbar\sqrt{l(l+1)} \qquad (l = 0, 1, 2, 3, \ldots, (n-1))$$

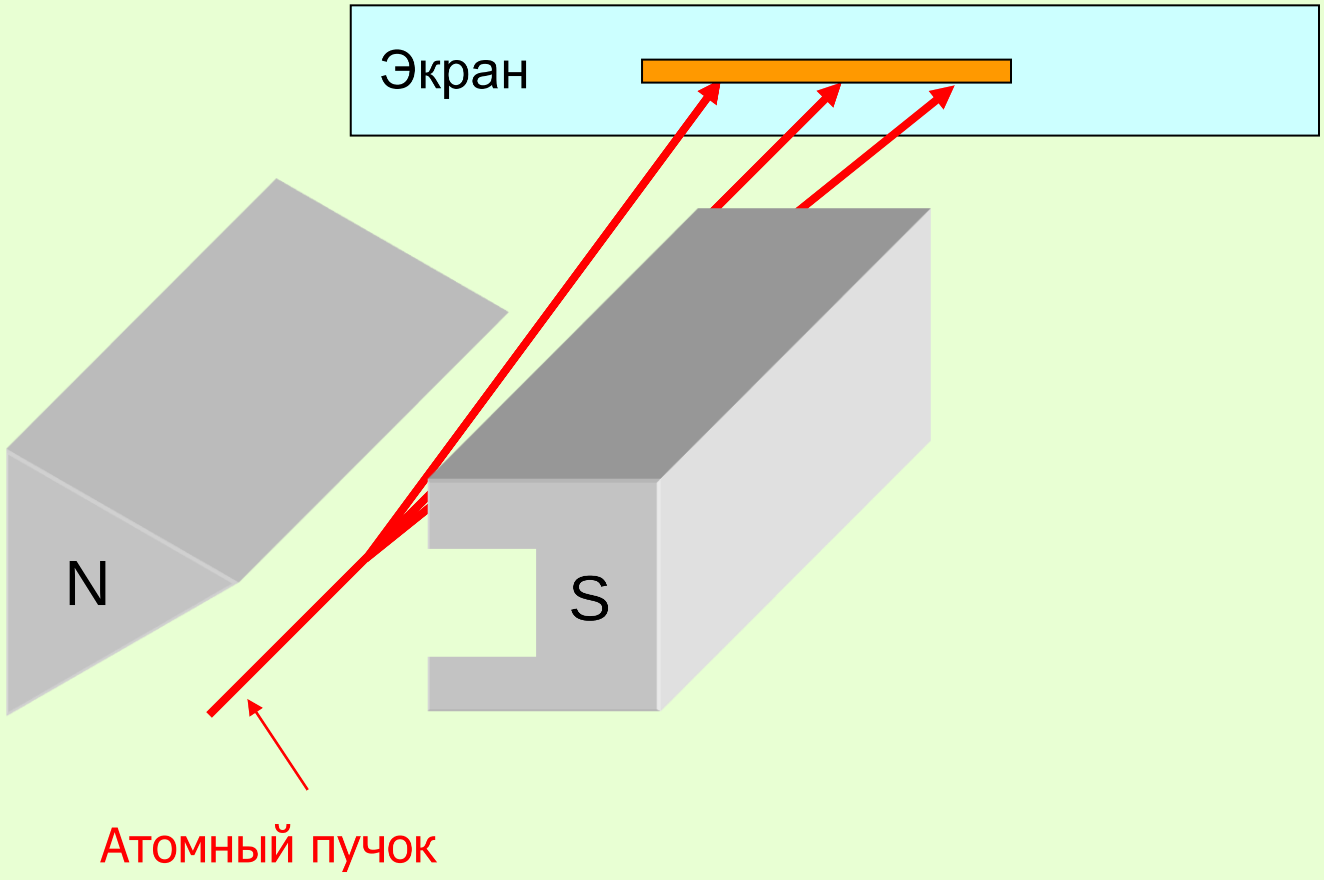
Орбитальный магнитный момент: $\mu = IS;$

$$\boxed{\mu = \mu_Б \sqrt{l(l+1)}} \qquad \mu_Б = \frac{e\hbar}{2m_e}$$ - магнетон Бора

Проекция магнитного момента: $\mu_z = \dfrac{e}{2m_e} L_z$

$$L_z = m\hbar \qquad (m = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ \pm l) \qquad \boxed{\mu_z = \mu_Б m}$$

Опыт Штерна и Герлаха



Результаты опыта Штерна и Герлаха