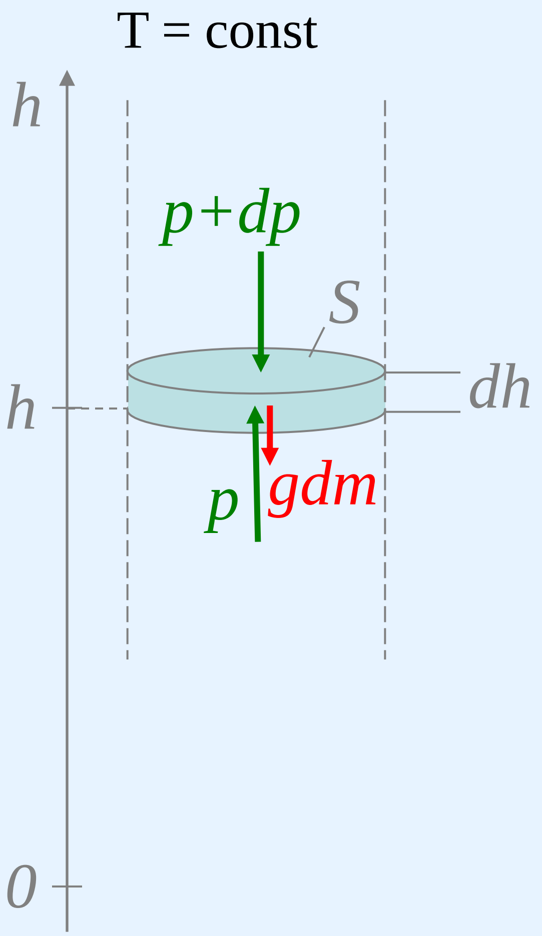
Тема 4. Статистические распределения

- 4.1. Барометрическая формула

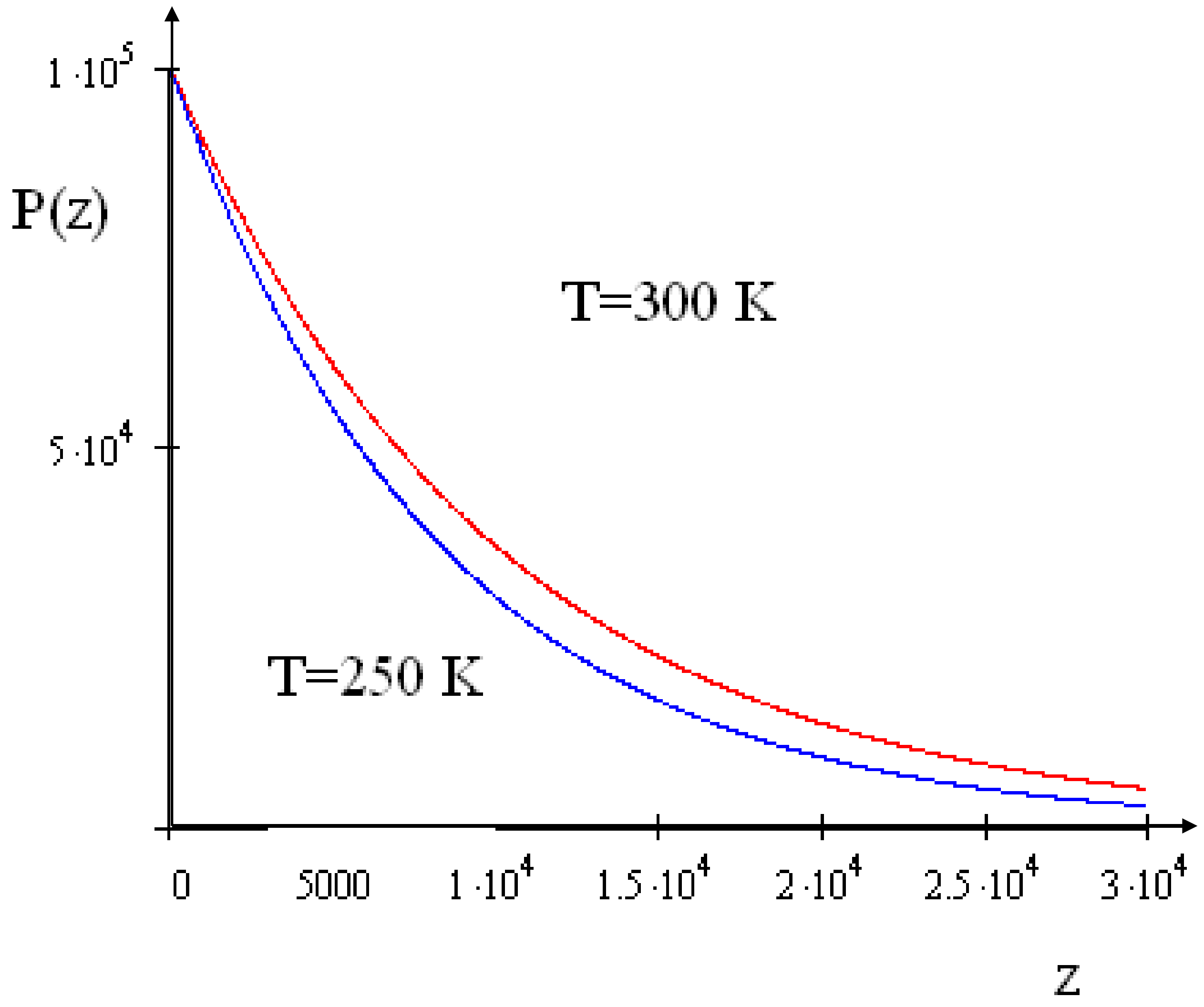
Толщина атмосферы ≈ 30 км

$$\frac{h}{R_з} \approx 0 \Rightarrow g \approx \text{const}$$

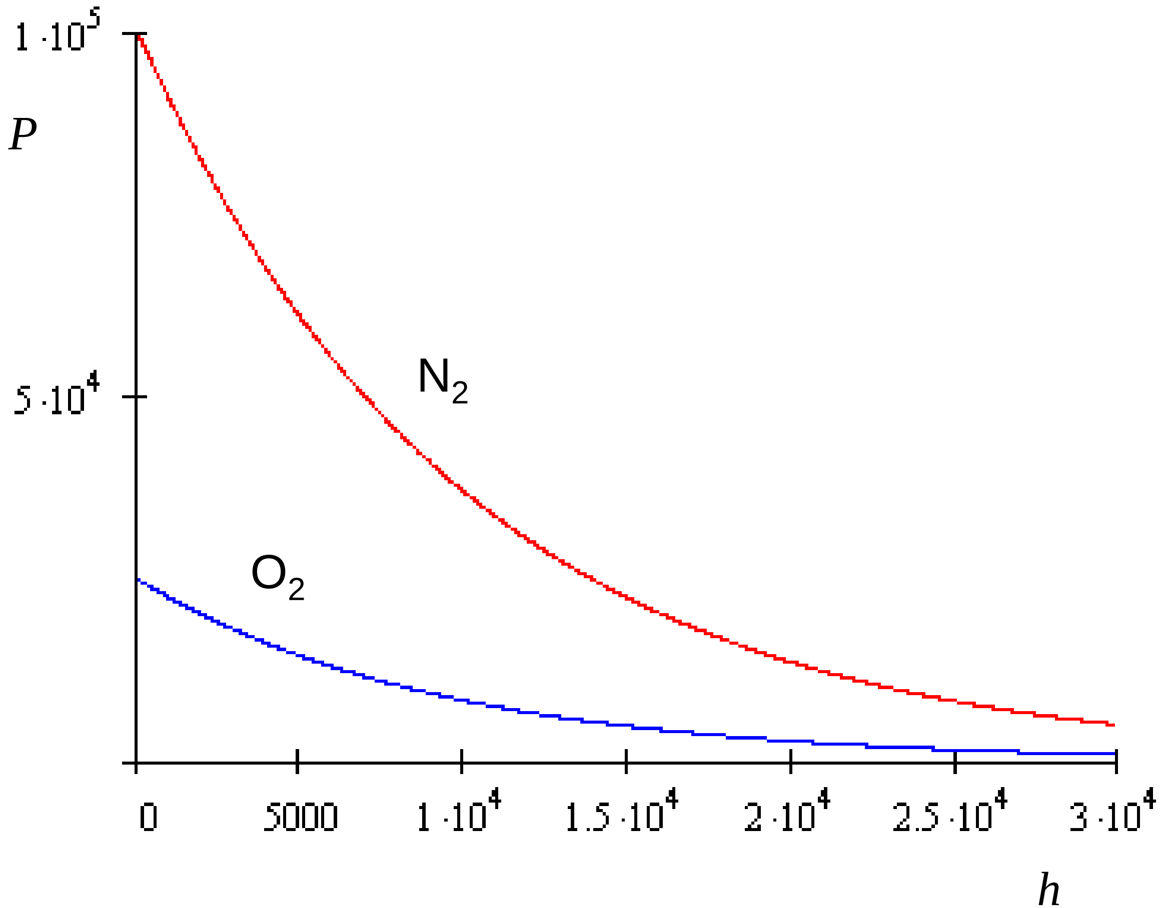
$$\frac{\Delta T}{T} \approx \frac{60}{300} \approx 0,2 \Rightarrow T \approx \text{const}$$



$$\boxed{p = p_0 e^{-\frac{\mu g h}{RT}}}$$



P(z)
1·10^5
5·10^4
T=300 K
T=250 K
0
5000
1·10^4
1.5·10^4
2·10^4
2.5·10^4
3·10^4
z

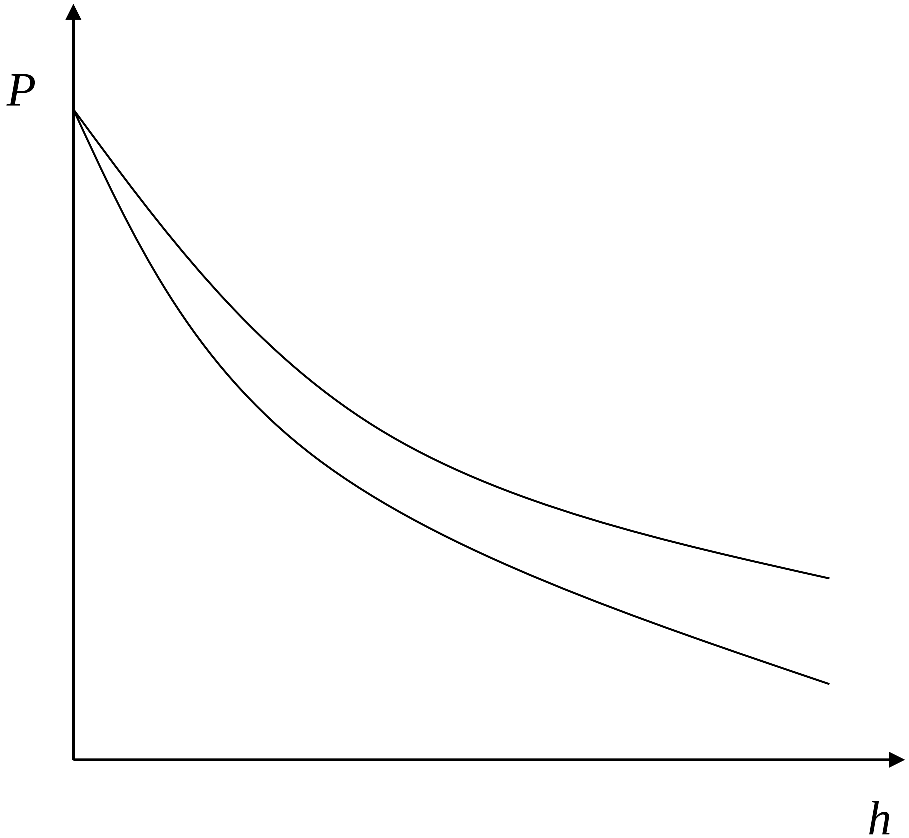


1·10^5
P
5·10^4
N2
O2
0
5000
1·10^4
1.5·10^4
2·10^4
2.5·10^4
3·10^4
h


Изменение давления газа с высотой

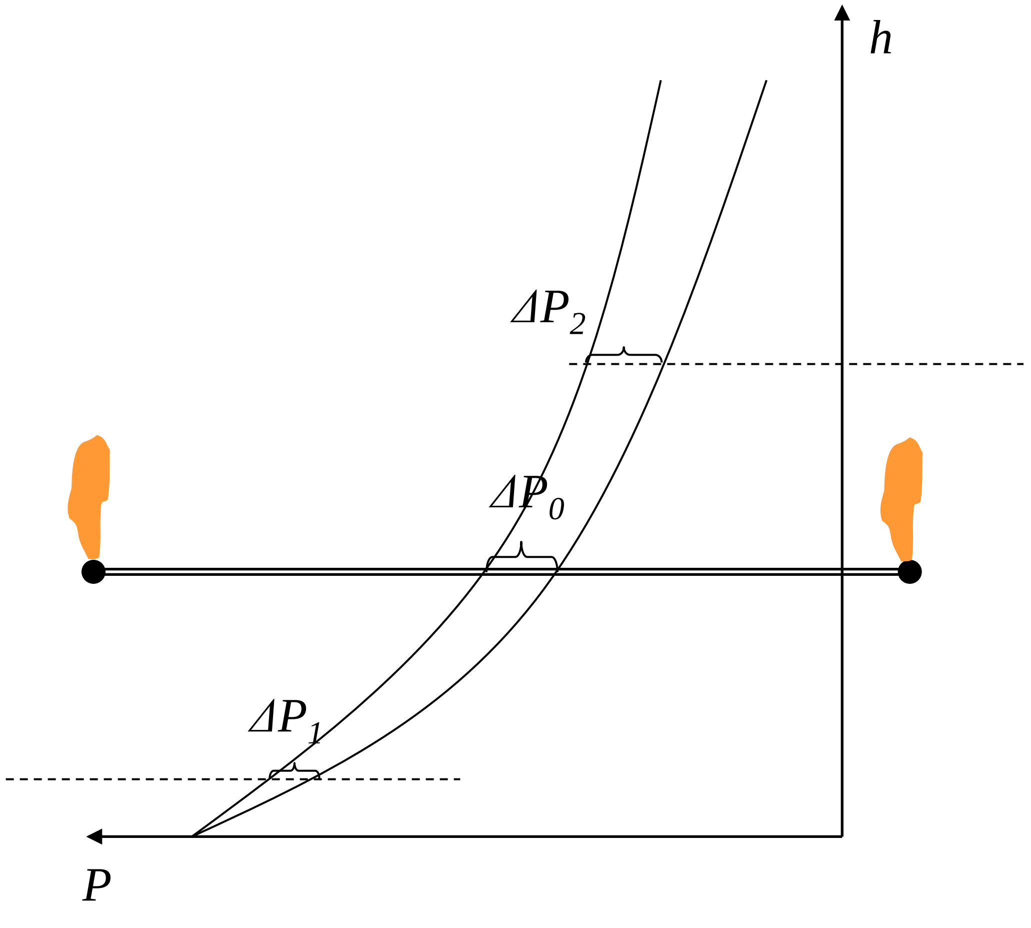
$$\mu_{CH_4} = 16 \quad \frac{\text{кг}}{\text{кмоль}}$$

$$\mu_{\text{возд}} = 29 \quad \frac{\text{кг}}{\text{кмоль}}$$



$$\mu_{CH_4} = 16 \quad \frac{\text{кг}}{\text{кмоль}}$$

$$\mu_{\text{возд}} = 29 \quad \frac{\text{кг}}{\text{кмоль}}$$



Следствие:

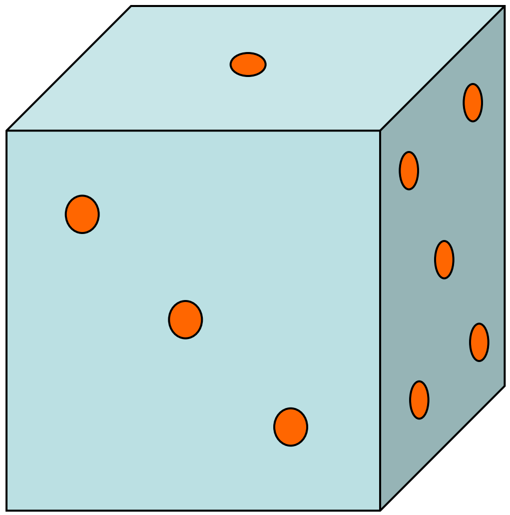
$$n = n_0 e^{-\frac{\mu g h}{RT}}$$

Температурный градиент атмосферы

$$\frac{dT}{dh} = -\frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{\mu g}{R}$$

Тема 4. Статистические распределения

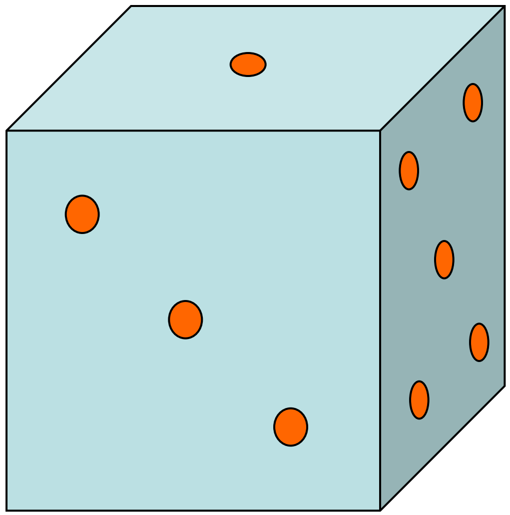
- 4.2. Понятие о функции распределения вероятностей

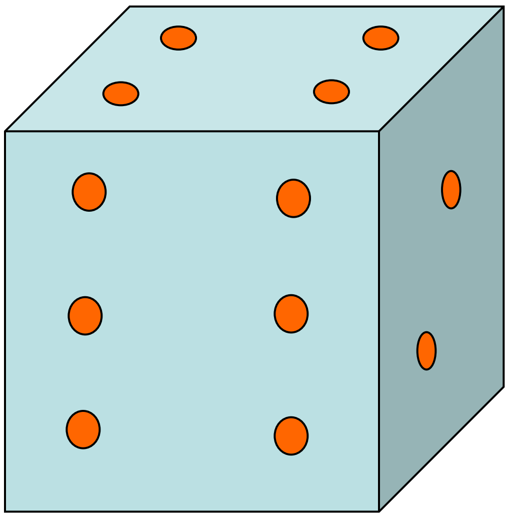


Вероятность - мера возможности наступления события

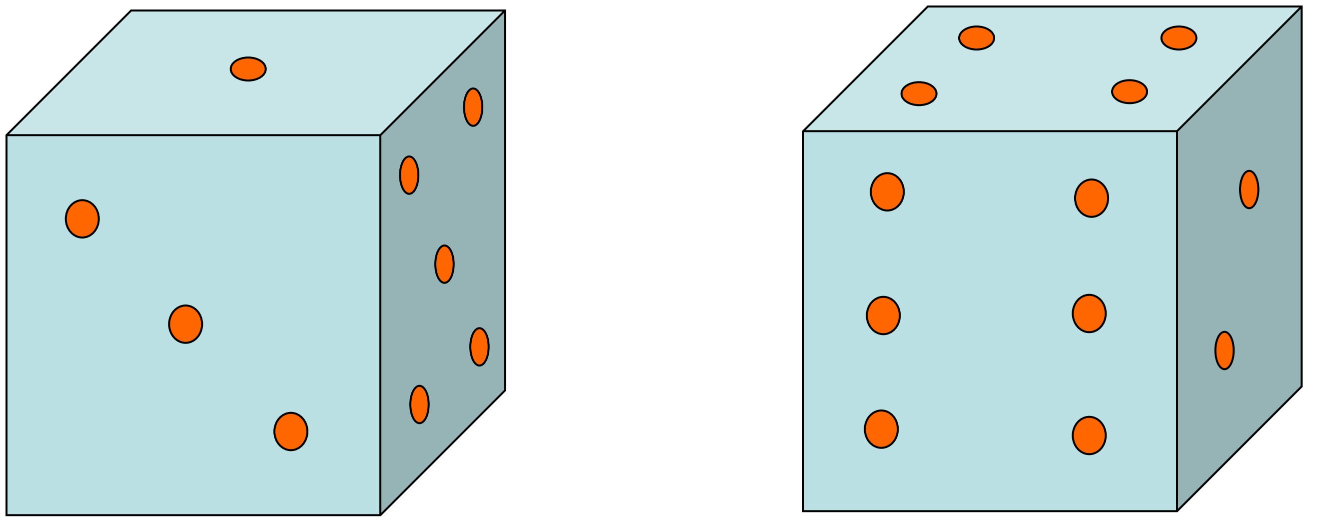
$$W_i = \lim_{N \to \infty} \frac{N_i}{N}$$

$$W_1 = \frac{1}{6}$$

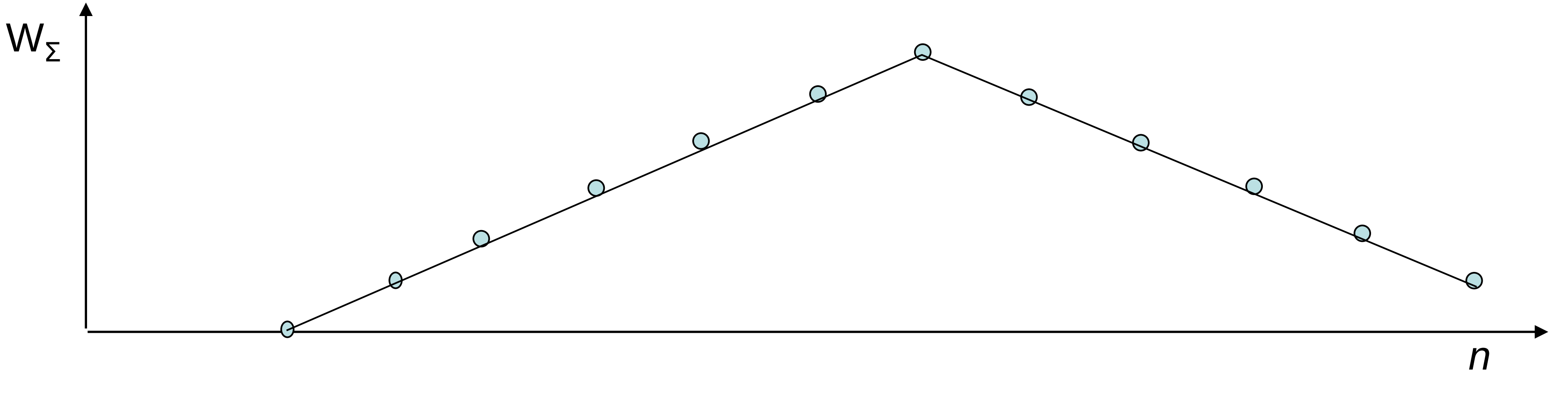




$$W_{14} = W_1 \cdot W_4 = \frac{1}{36}$$



n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
W_Σ												



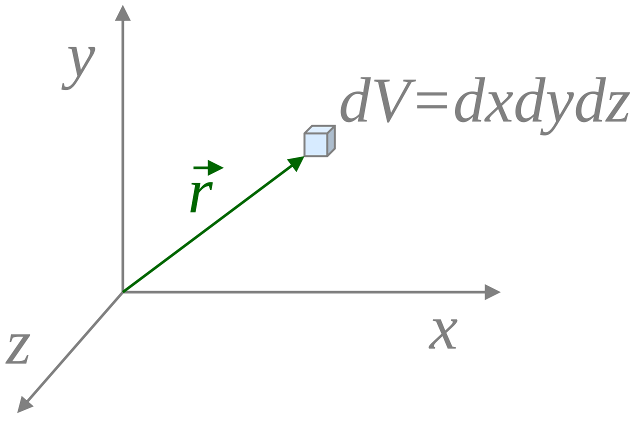

Нормальное
распределение.
Доска Гальтона

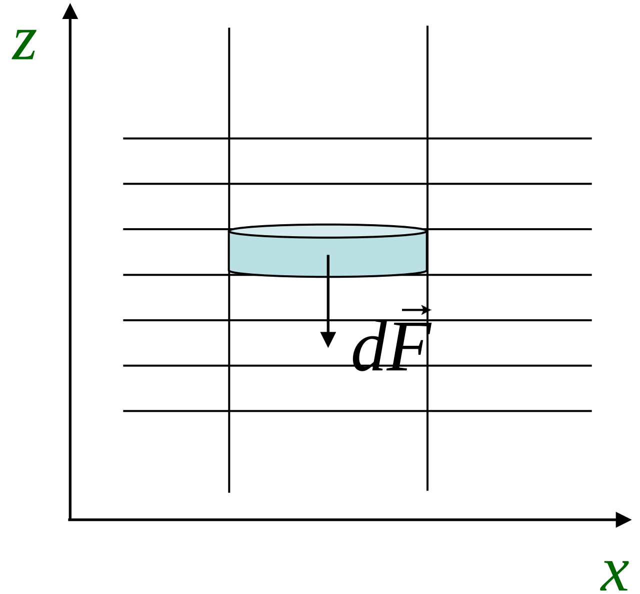
Тема 4. Статистические распределения

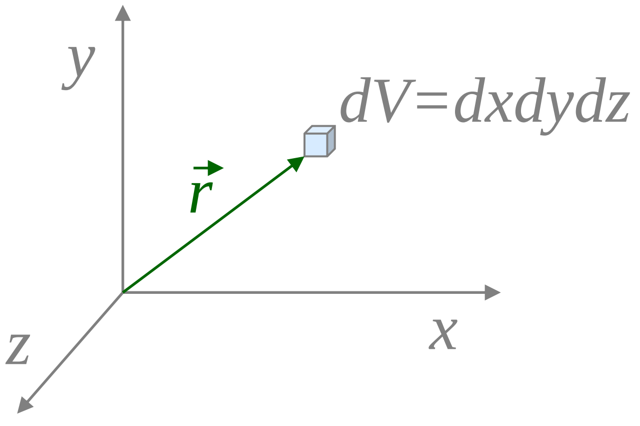
- 4.3. Распределение Больцмана

Больцман Людвиг
(20.II.1844–5.IX.1906)

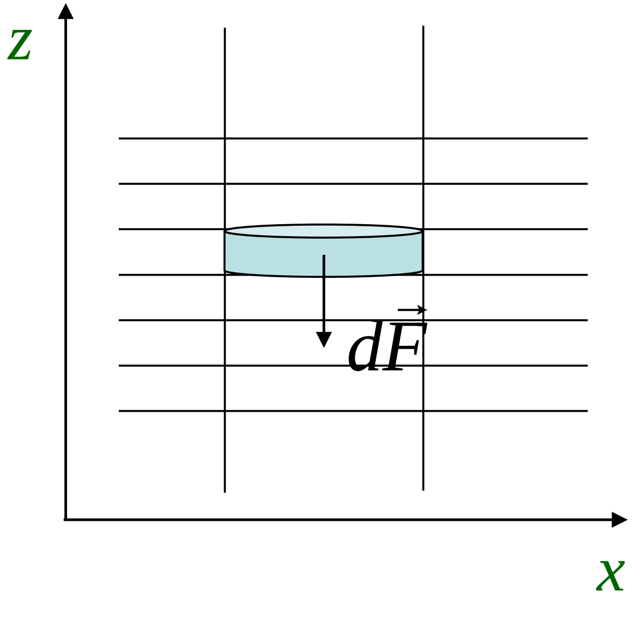
dN – число молекул в dV



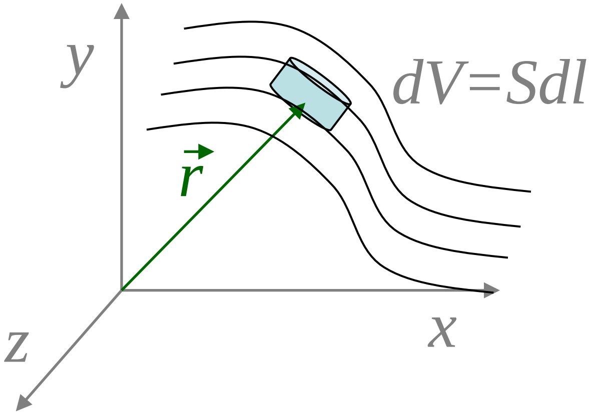




y
dV=dxdydz
r
x
z



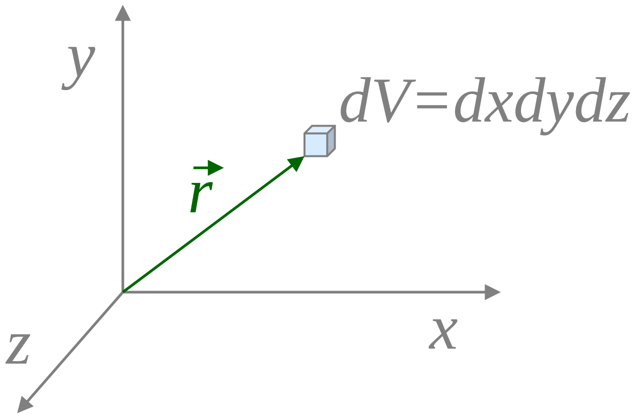
z
dF
x



$$\boxed{n(\vec{r}) = n_0 e^{-\frac{U(\vec{r})}{kT}}}$$

$$\boxed{\frac{n_1}{n_2} = e^{-\frac{U_1 - U_2}{kT}}}$$

Общая форма записи распределения Больцмана



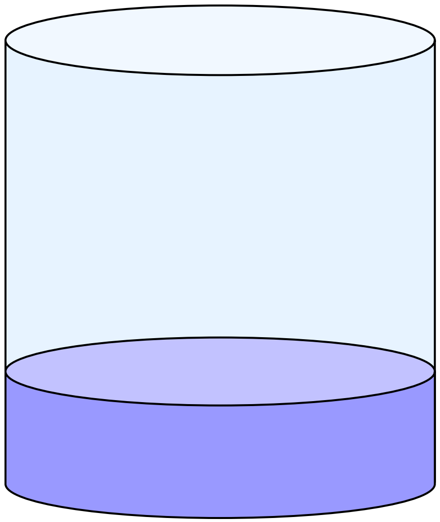
$$\frac{dN(\vec{r})}{N} = f(\vec{r})dV;$$

$$C = \frac{1}{\iiint\limits_V e^{-\frac{U(\vec{r})}{kT}} dxdydz}$$

функция распределения Больцмана

$$f(\vec{r}) = \frac{1}{\int\limits_V e^{-\frac{U\ \vec{r}}{kT}} dV} \cdot e^{-\frac{U\ \vec{r}}{kT}}$$

Равновесие жидкость-пар



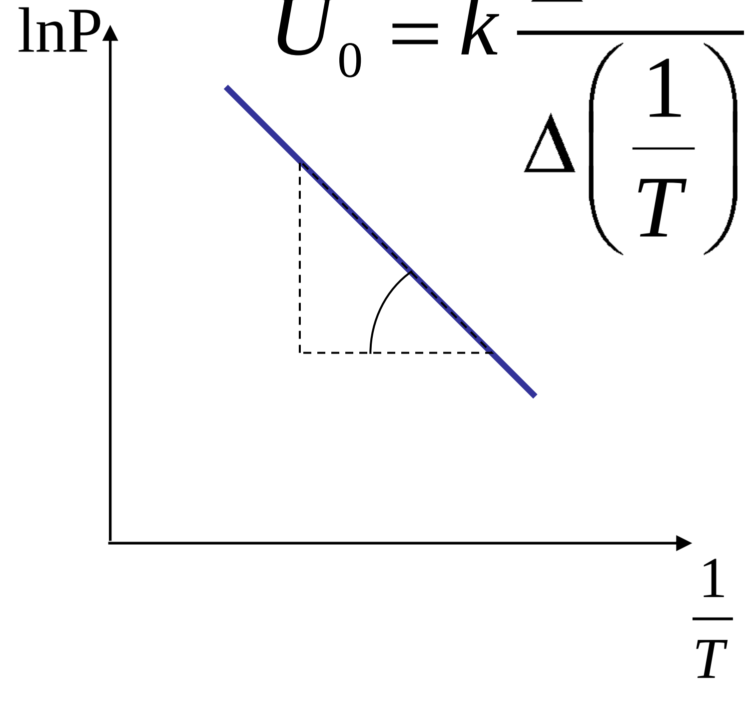
$$U = \begin{cases} 0 - \text{пар} \\ -U_0 - \text{жидкость} \end{cases}$$

$$\frac{n_п}{n_ж} = e^{-\frac{U_п - U_ж}{kT}} = e^{-\frac{U_0}{kT}}$$

$$n_п = n_ж e^{-\frac{U_п - U_ж}{kT}} = \frac{\rho}{\mu} N_A e^{-\frac{U_0}{kT}}$$

$$P = nkT = \frac{\rho}{\mu} RT e^{-\frac{U_0}{kT}}$$

$$U_0 = k\frac{\Delta \ln P}{\Delta\left(\frac{1}{T}\right)}$$

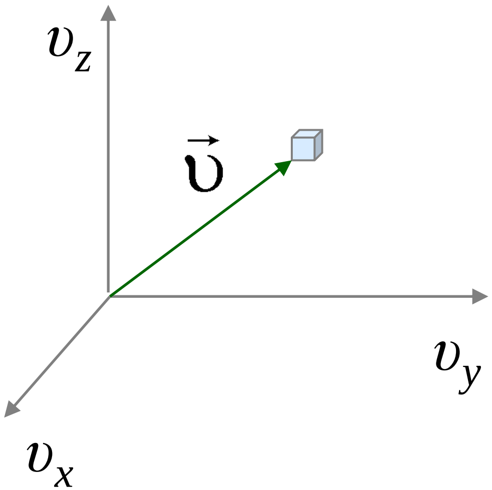


Тема 4. Статистические распределения

- 4.4. Распределение Максвелла (1860 г.)

Максвелл Джеймс (1831–79)

dN(υ_x) – число молекул, имеющих проекции скорости в диапазоне от υ_x до $\upsilon_x + d\upsilon_x$



$$dP(\upsilon_x) = \frac{dN(\upsilon_x)}{N} = f(\upsilon_x)\, d\upsilon_x$$

$$f(\upsilon_x) = \frac{dN(\upsilon_x)}{N d\upsilon_x}$$

dN($\vec{\upsilon}$) – число молекул, имеющих скорости с проекциями в диапазоне от υ_x до $\upsilon_x + d\upsilon_x$, от υ_y до $\upsilon_y + d\upsilon_y$, от υ_z до $\upsilon_z + d\upsilon_z$

$$F(\vec{\upsilon}) = \frac{dN(\vec{\upsilon})}{N d\upsilon_x d\upsilon_y d\upsilon_z}$$

Предпосылки Максвелла:

1) $f \;\; \upsilon_x \;\; , f \;\; \upsilon_y \;\; , f \;\; \upsilon_z \;\; -$ *имеют одинаковый вид*

2) $f \;\; \upsilon_x \;\; = f \;\; -\upsilon_x \;\; ,$ *тогда* $f \;\; \upsilon_x \;\; \Rightarrow f \;\; \upsilon_x^2$

3) $F \;\; \vec{\upsilon} \;\; = F \;\; \left|\vec{\upsilon}\right| \;\; \Rightarrow F \;\; \upsilon^2$

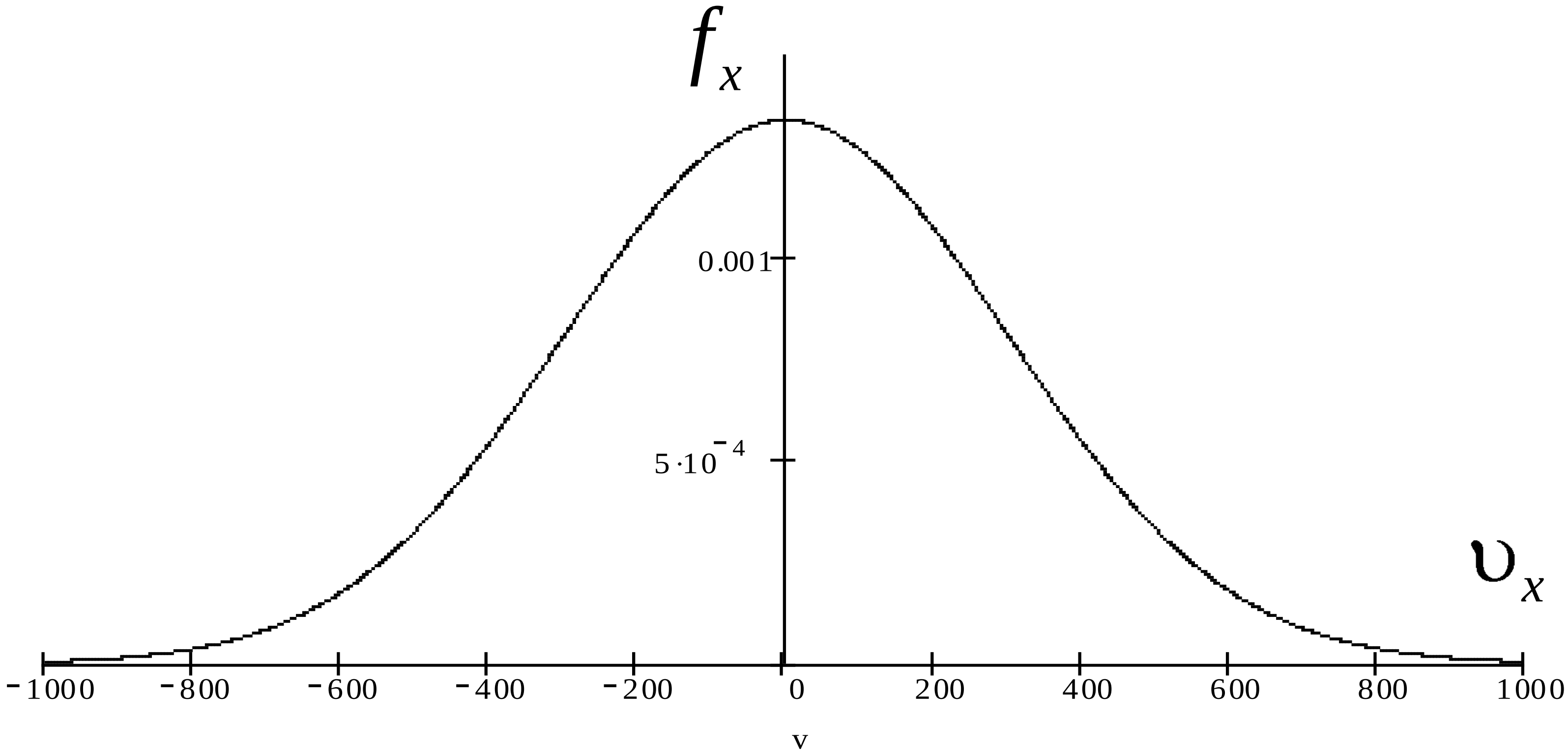
4) *т.к.* $P_{i,j,k} = P_i P_j P_k ,$ *то*

$$F \;\; \vec{\upsilon} \;\; d\upsilon_x d\upsilon_y d\upsilon_z = f \;\; \upsilon_x \;\; d\upsilon_x f \;\; \upsilon_y \;\; d\upsilon_y f \;\; \upsilon_z \;\; d\upsilon_z$$

Распределение Максвелла по проекции скорости

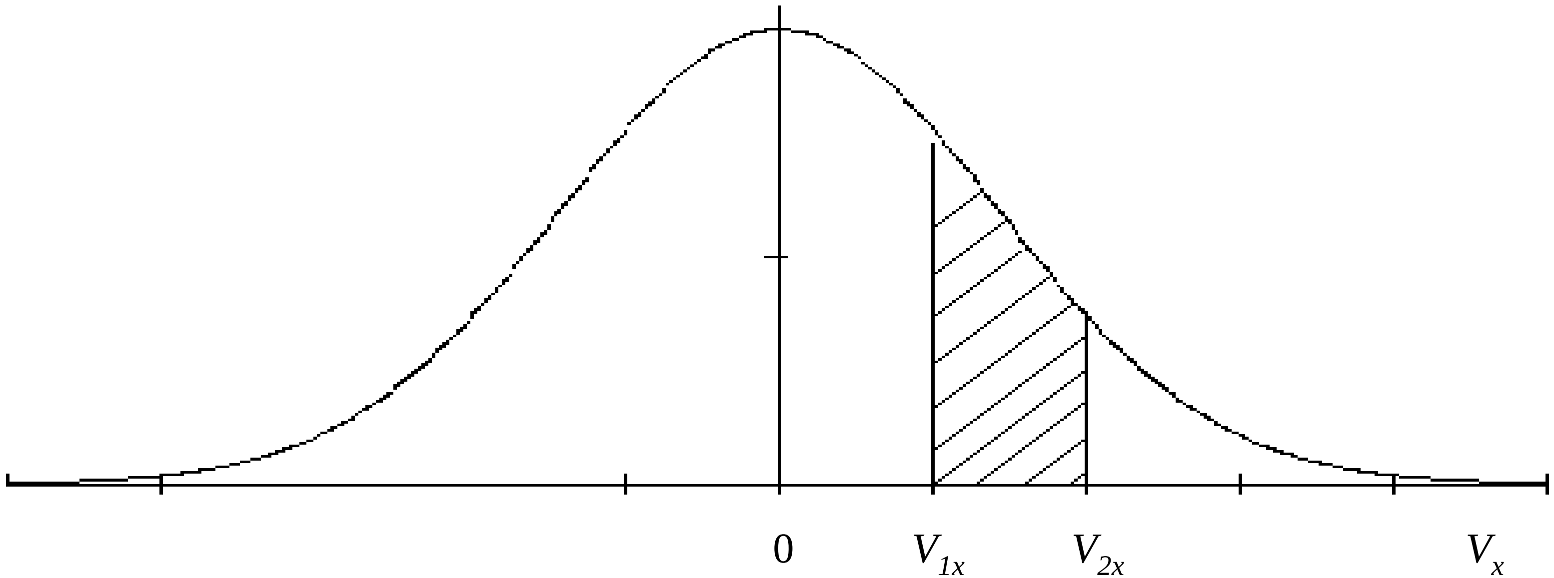
$\mu := 28$ R := 8300 T := 300

$$f_x = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{m\upsilon_x^2}{2kT}}$$

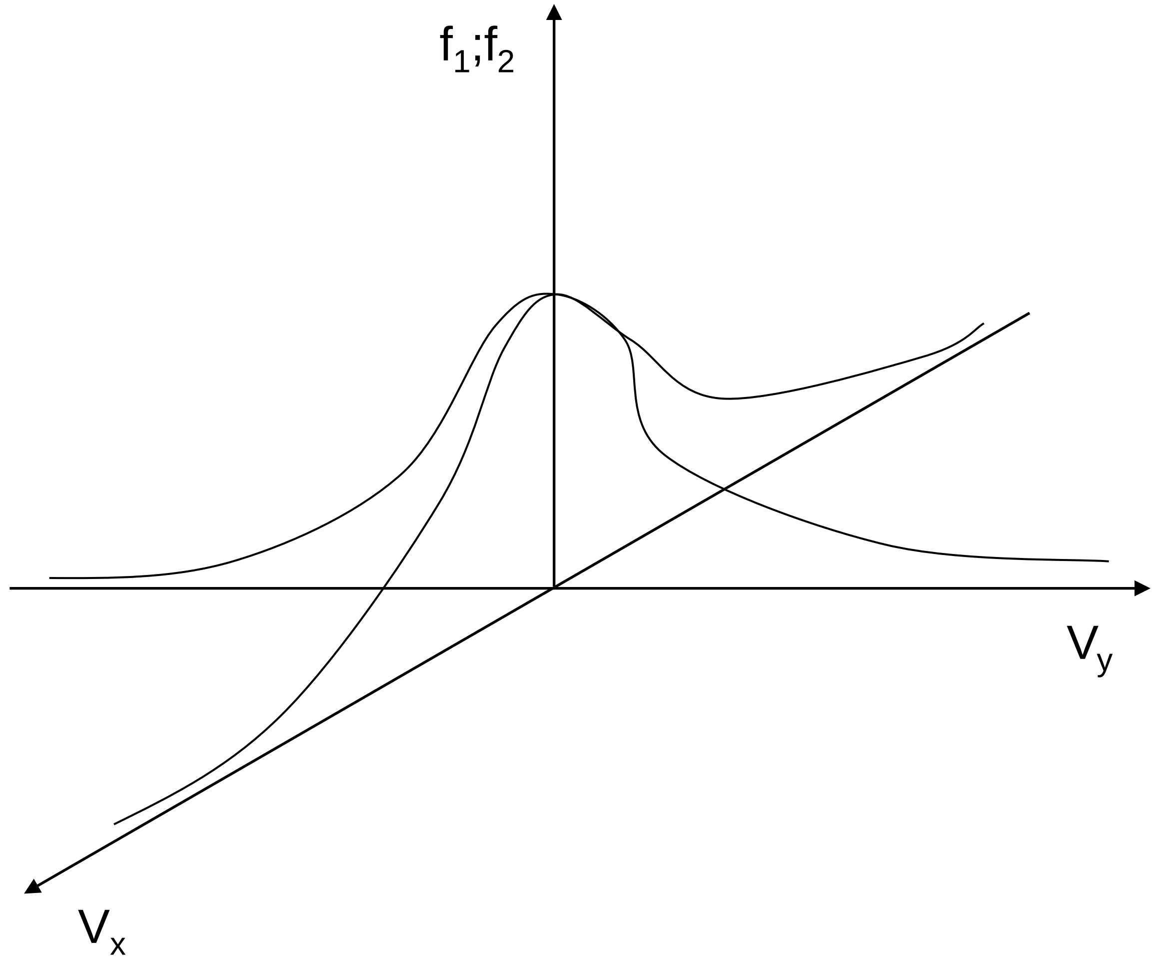


Распределение Максвелла по проекции скорости

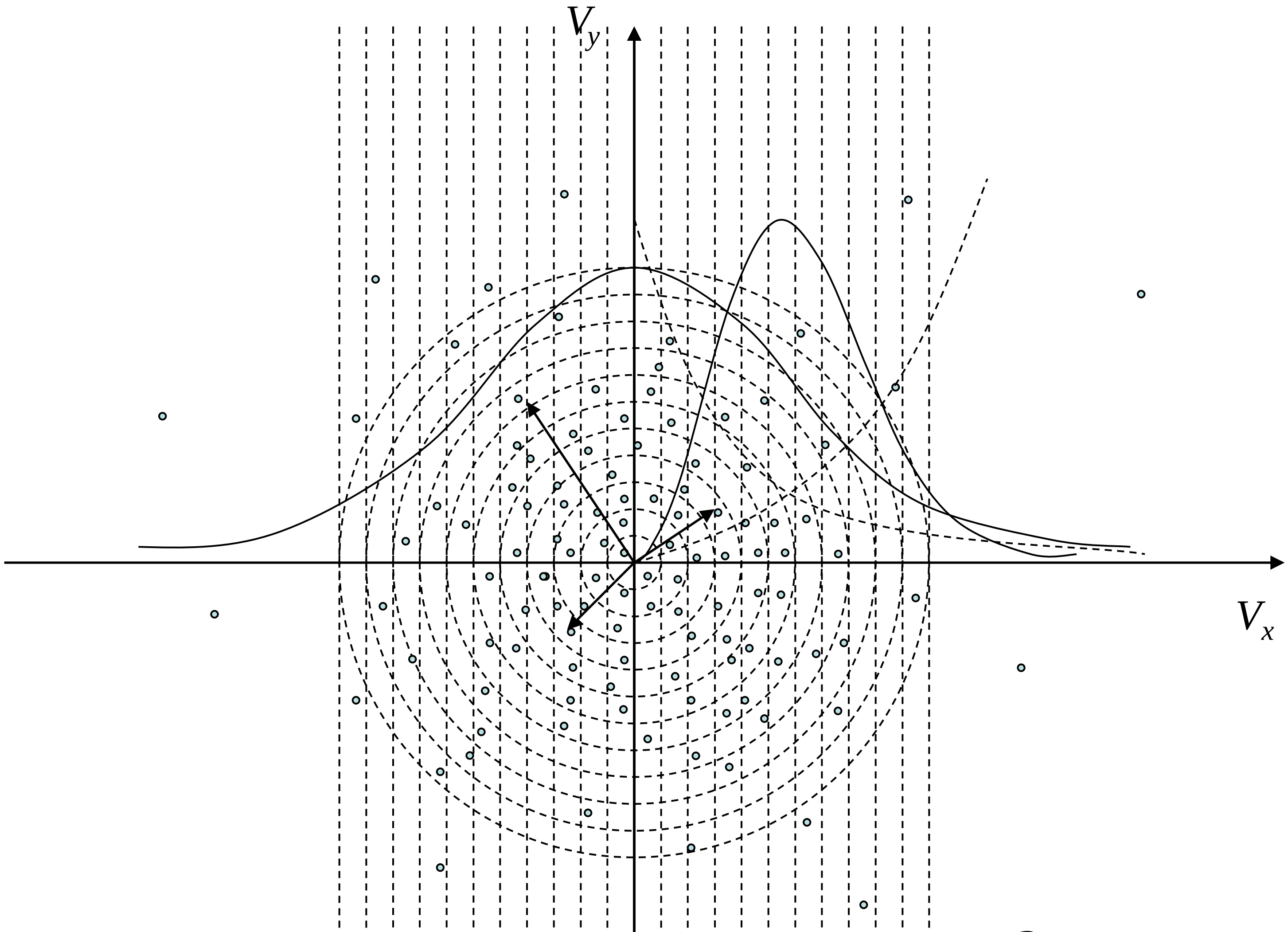
$$f_x = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{m\upsilon_x^2}{2kT}}$$



$$P_{\upsilon_{x1}-\upsilon_{x2}} = \int_{\upsilon_{x1}}^{\upsilon_{x2}} \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{m\upsilon_x^2}{2kT}} d\upsilon_x$$



f1;f2
Vy
Vx

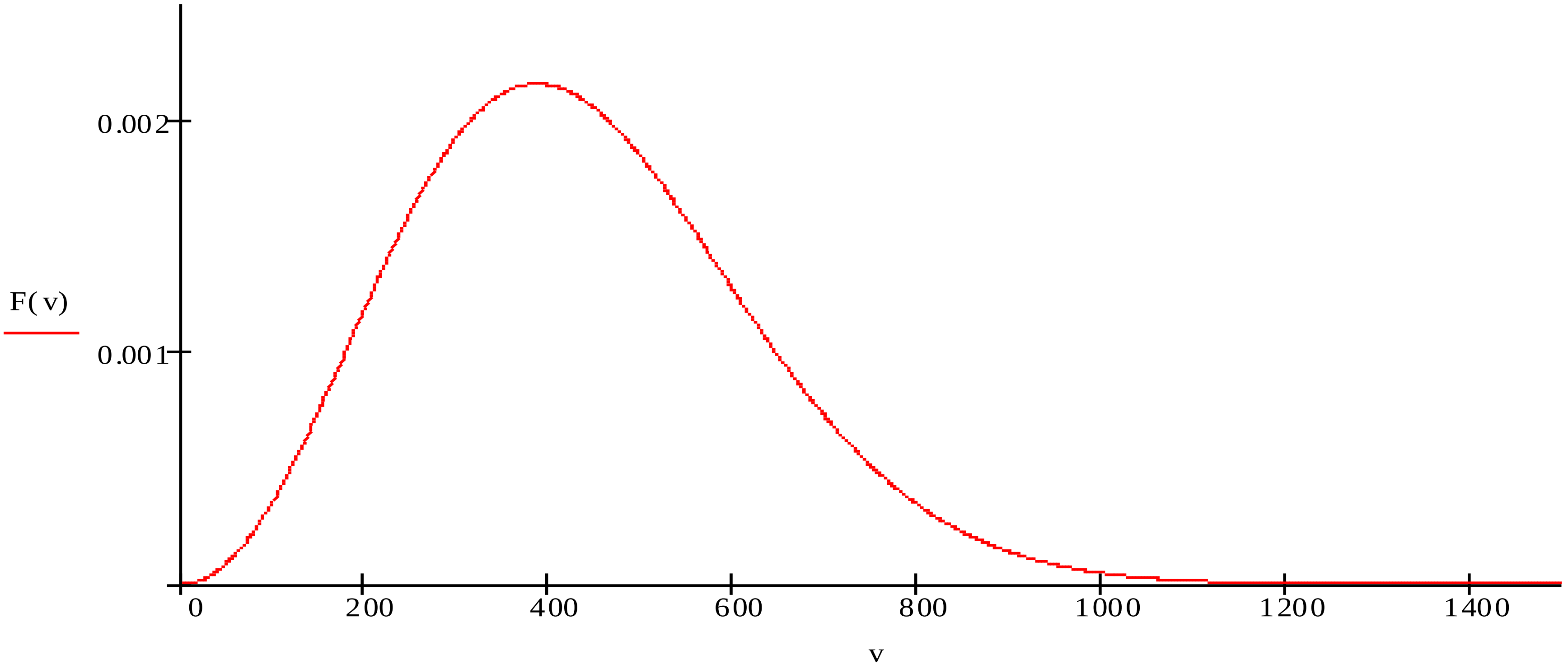


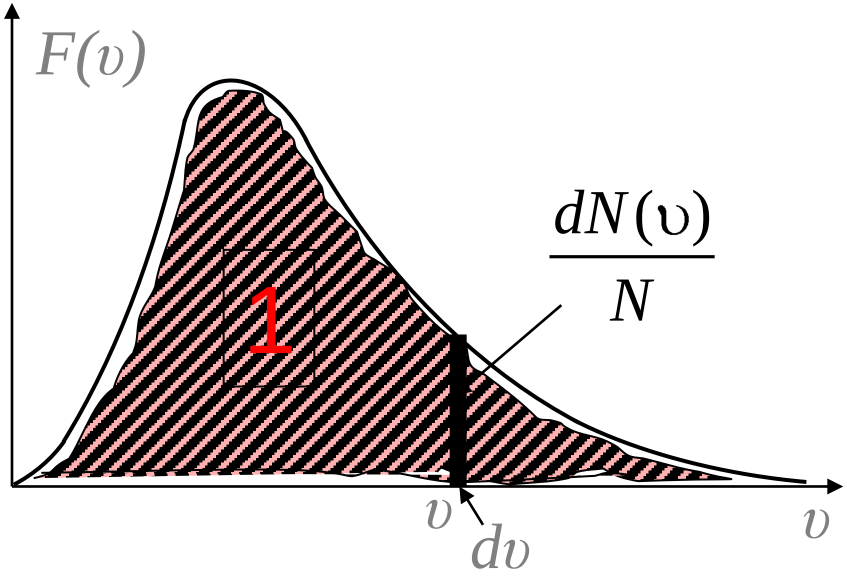
$$F(\upsilon) = 4\pi\upsilon^2 F(\vec{\upsilon}) = 4\pi\upsilon^2\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}}$$

Распределение Максвелла по скоростям

$\mu := 28 \qquad R := 8300 \qquad T := 250$

$$F(v) := 4 \cdot \pi \cdot v^2 \cdot \left(\frac{\mu}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot T}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{\frac{-\mu \cdot v^2}{2 \cdot R \cdot T}}$$

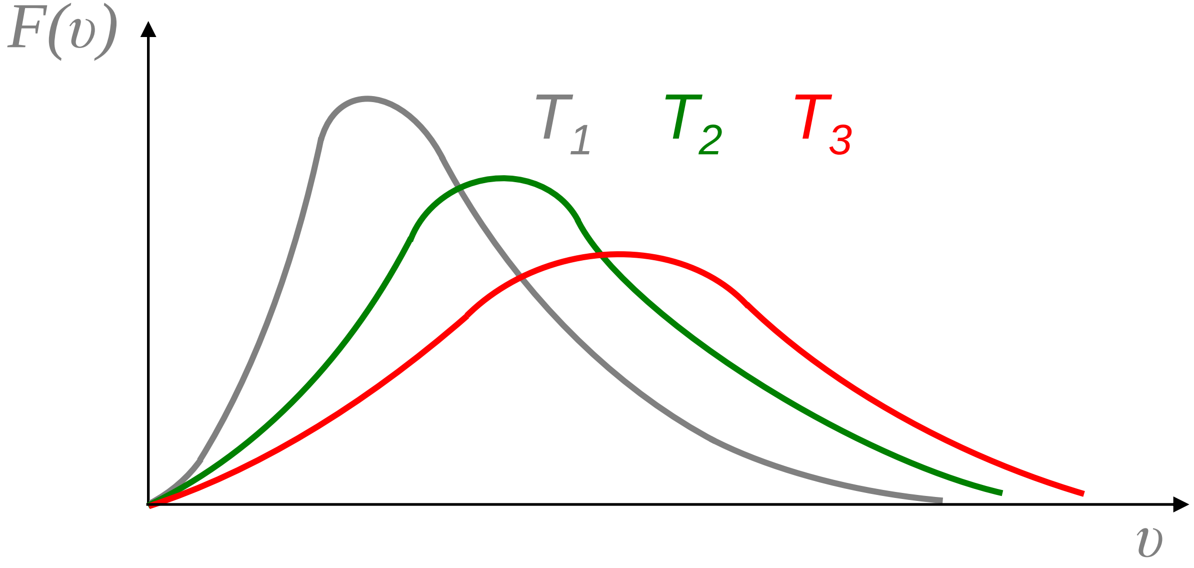




Условие нормировки: $$\boxed{\int_0^\infty F(\upsilon)\,d\upsilon = 1}$$

Влияние температуры

$$F(\upsilon) = 4\pi\upsilon^2 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}}$$



Распределение Максвелла по скоростям

$\mu := 28 \qquad R := 8300 \qquad T := 250$

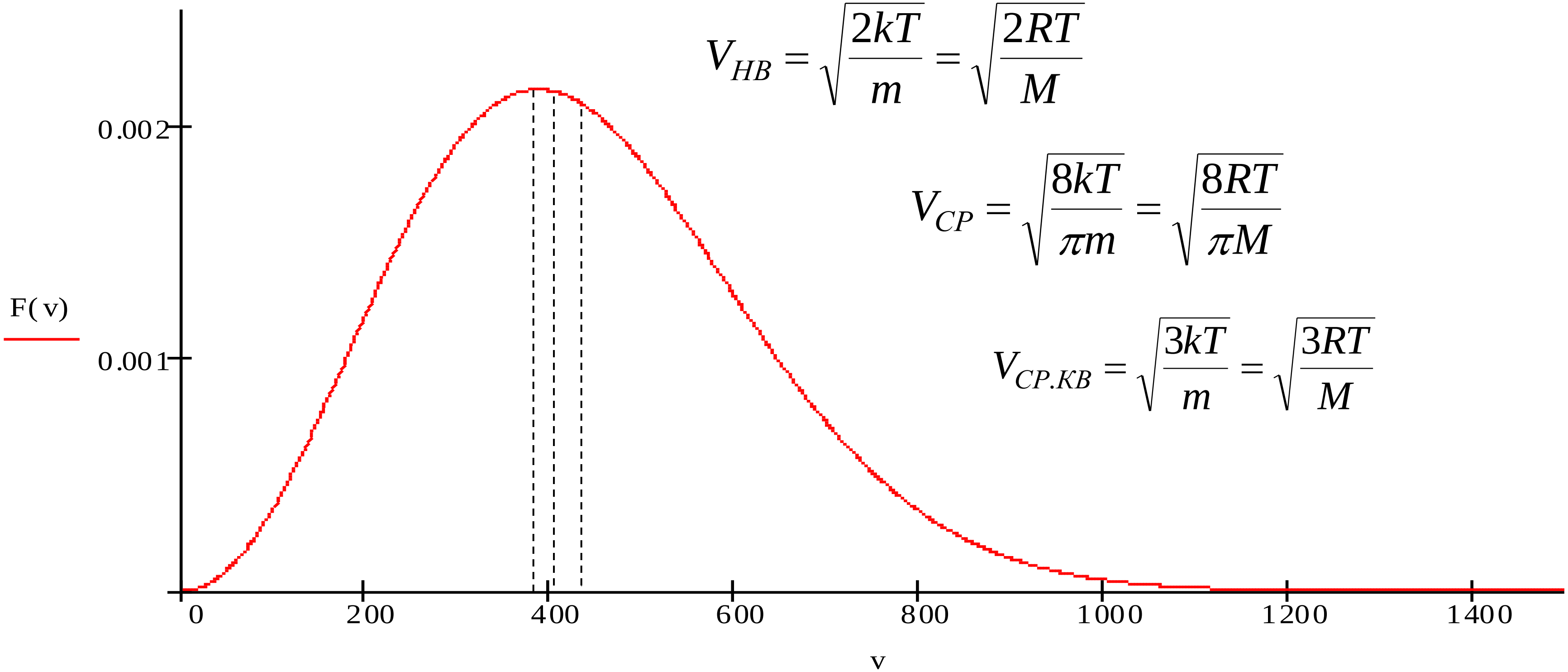
$$F(v) := 4 \cdot \pi \cdot v^2 \cdot \left(\frac{\mu}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot T}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{\frac{-\mu \cdot v^2}{2 \cdot R \cdot T}}$$

$F := 0, 0.1, \ldots 1$

$$V_{HB} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$$

$$V_{CP} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

$$V_{CP.KB} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$



Следствия:

$$\upsilon_{HB} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$$

$$\upsilon_{CP} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

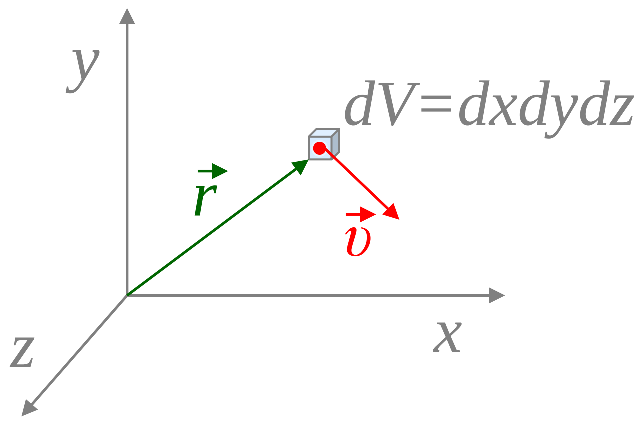
$$\upsilon_{CP.KB} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

Тема 4. Статистические распределения

- 4.5. Распределение Максвелла-Больцмана

Максвелл
Джеймс Клерк
(1831–1879)

Больцман
Людвиг
(1844–1906)



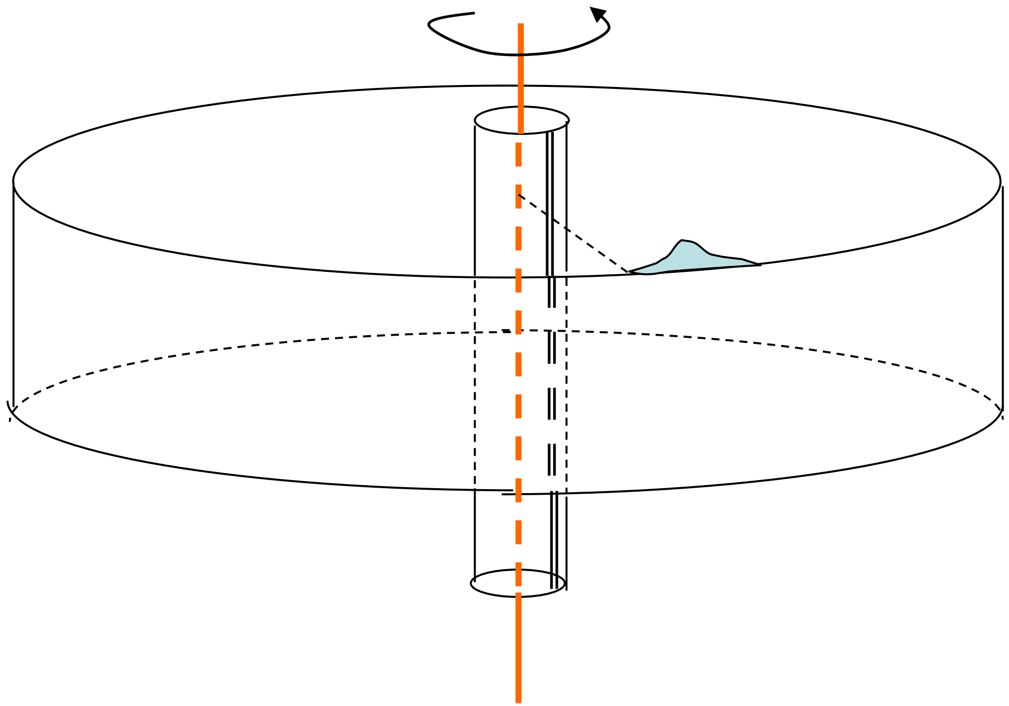
$$\frac{dN(\vec{r},\vec{\upsilon})}{N} = F(\vec{r},\vec{\upsilon})\,dV\,d\upsilon_x\,d\upsilon_y\,d\upsilon_z;$$

Функция распределения Максвелла-Больцмана:

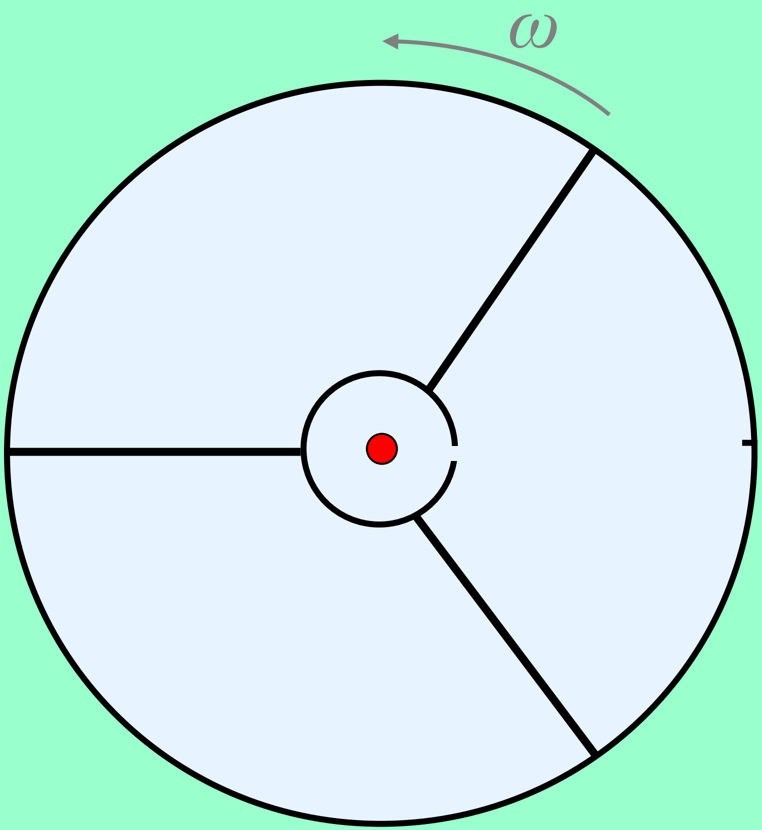
$$\boxed{F(\vec{r},\vec{\upsilon}) = Ce^{-\frac{\frac{m\upsilon^2}{2}+U(\vec{r})}{kT}}}$$

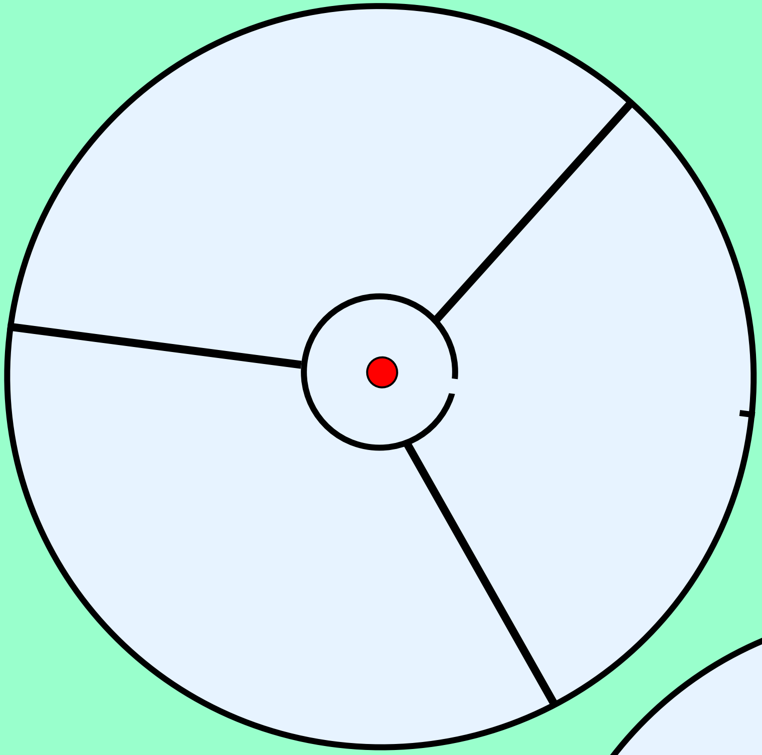
$$\boxed{C = \frac{1}{\int\limits_V e^{-\frac{U(\vec{r})}{kT}}\,dV}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}}$$

Опыт Штерна (1920)



Опыт Штерна (1920)

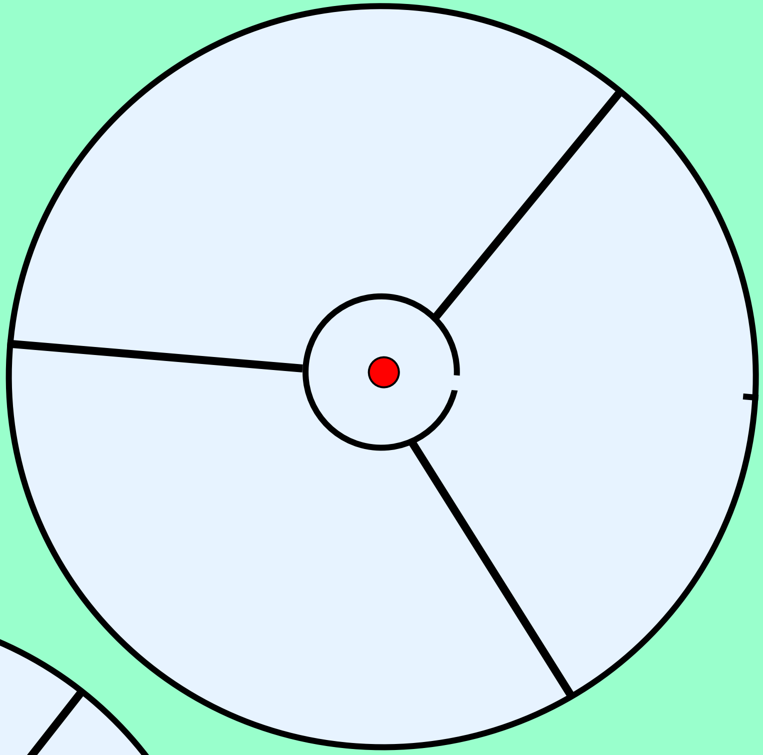


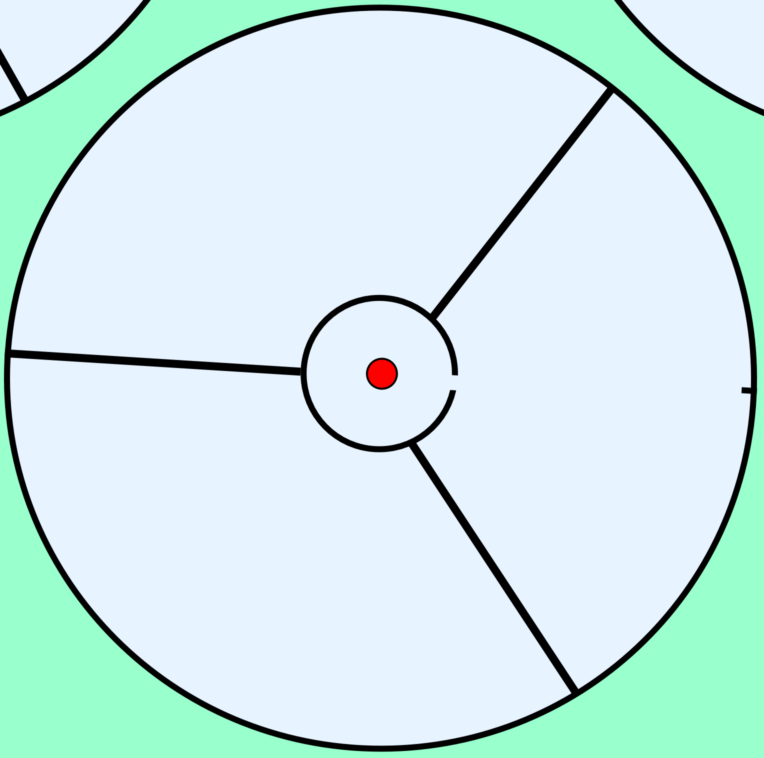


$\omega = \text{const}$

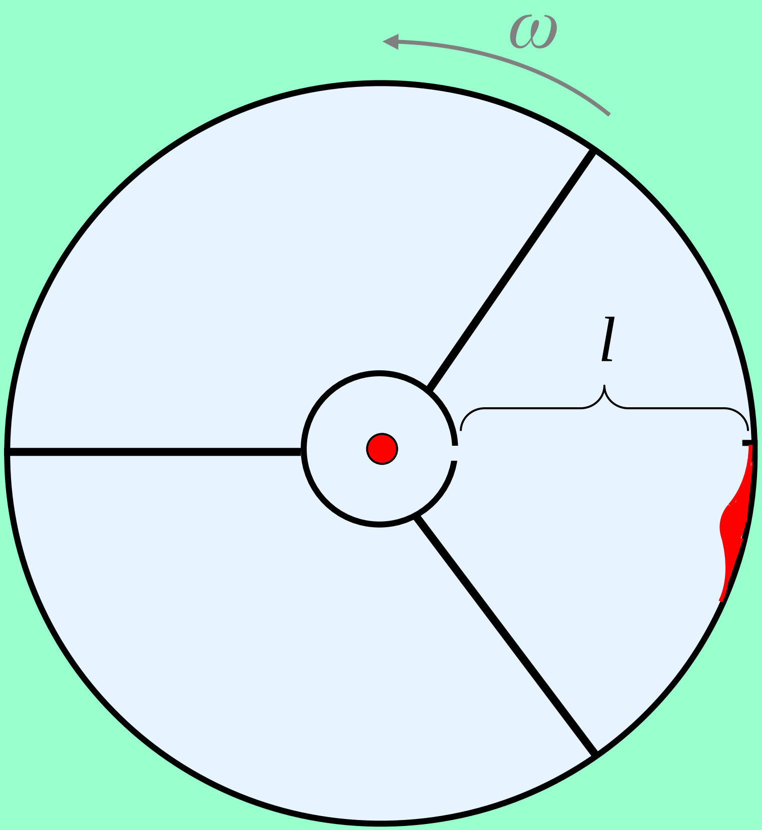
$\upsilon_2 > \upsilon_1$

$\upsilon_3 > \upsilon_2$





Опыт Штерна (1920)



$$\varphi = \omega t = \omega \frac{l}{\upsilon}$$

$$\boxed{\upsilon = \frac{\omega l}{\varphi}}$$