

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

**«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ» (МГТУ ГА)**

С.М. Новиков

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

ФИЗИКА

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

*для студентов I и 2 курсов
всех специальностей
дневного и заочного обучения*

Москва 2011

ГЛАВА 1

МЕХАНИКА

1.1. КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Положение материальной точки (МТ) в пространственной системе отсчета задается ее **радиусом-вектором** $\vec{r}_A = \{x_A, y_A, z_A\}$ -вектором, проведенным из начала координат в данную точку А (рис.1.1).

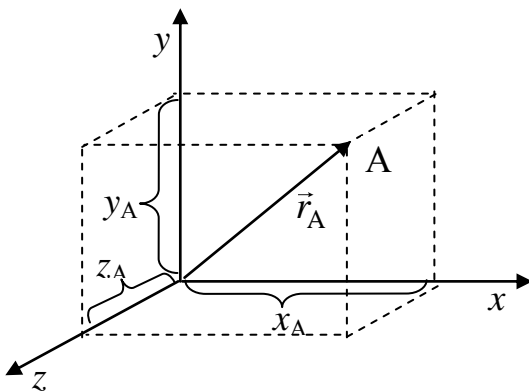


Рис. 1.1

При движении МТ ее радиус-вектор меняется. Функция, выражающая изменение радиуса-вектора во времени, называется **законом или уравнением движения**. Уравнение движения можно записать как в векторной, так и в координатной форме

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \text{ или } \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases} \quad (1.1)$$

Знание уравнения движения МТ позволяет получить всю информацию о ее движении. В частности, скорость \vec{v} и ускорение \vec{a} определяются формулами

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \text{ и } \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}. \quad (1.2)$$

Соответственно для проекций скорости и ускорения справедливы формулы

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y, \quad \frac{dz}{dt} = v_z, \quad (1.3)$$

$$\frac{dv_x}{dt} = a_x, \quad \frac{dv_y}{dt} = a_y, \quad \frac{dv_z}{dt} = a_z. \quad (1.4)$$

Зная закон движения, можно найти **вектор перемещения** $\Delta\vec{r}$, пройденный путь, радиус кривизны траектории и другие дополнительные характеристики движения. Задачи, в которых по известному закону движения путем его дифференцирования определяются скорость, ускорение и другие дополнительные кинематические характеристики движения, называются прямыми задачами кинематики. Соответственно задачи, в которых по известным дополнительным характеристикам движения “восстанавливается” закон движения, называются обратными задачами кинематики. Обратные задачи значительно труднее прямых. В простейших случаях они сводятся к интегрированию дифференциальных уравнений (1.3) и (1.4) методом разделения переменных. Например, если

3

задана зависимость проекции ускорения от времени $a_x(t)$, то уравнение (1.4) можно записать в виде $dv_x = a_x(t)dt$. Интегрируя левую и правую части этого выражения, получаем

$$v_x(t) = \int a_x(t) dt + C_1, \quad (1.5)$$

где постоянная интегрирования C_1 определяется из начальных условий, т.е. по заданному значению проекции скорости в начальный момент времени v_{0x} (см. пример 1.2). Аналогично, зная $v_x(t)$ можно записать уравнение (1.3) в виде $dx = v_x(t) dt$ и, соответственно,

$$x(t) = \int v_x(t) dt + C_2, \quad (1.6)$$

где постоянная интегрирования C_2 определяется по заданному значению проекции в начальный момент времени x_0 (см. пример 1.2). В упрощенном виде решение кинематических задач можно представить в виде следующей схемы, приведенной на рис. 1.2.

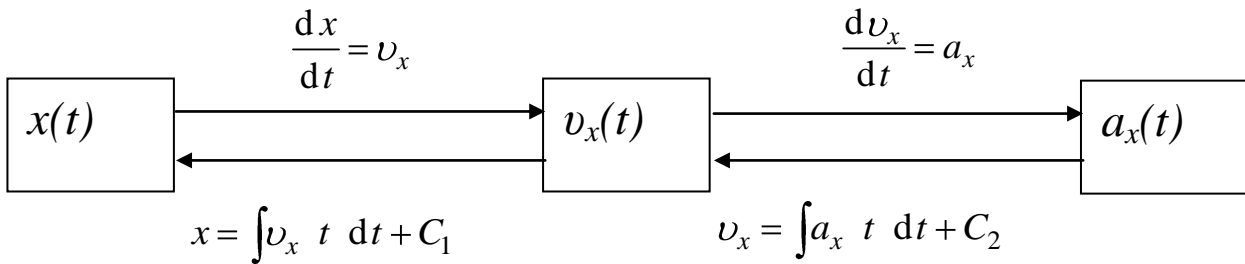


Рис.1.2

Если в процессе решения задачи возникает необходимость сопоставить движение МТ в двух системах отсчета, одна из которых K неподвижна, а другая K' движется относительно первой со скоростью v_0 , то используются **преобразования Галилея**. Например, если в начальный момент времени оси систем координат K и K' совпадают, а система K' движется со скоростью v_0 , направленной вдоль оси $0x$ (рис.1.3), то для соответствующих координат МТ можно записать

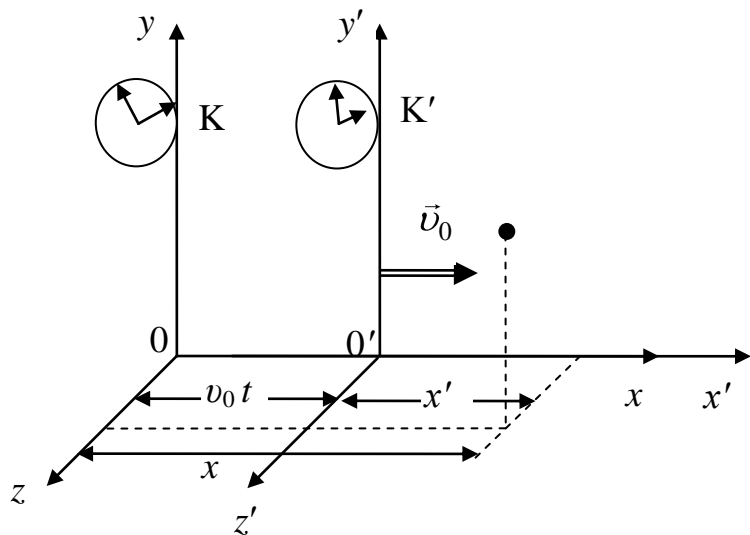


Рис. 1.3

$$\begin{cases} x = x' + v_0 t, \\ y = y', \\ z = z', \\ t = t'. \end{cases}$$

Из преобразований Галилея следует **закон сложения скоростей**

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0. \quad (1.7)$$

Для приведенного примера (рис.1.3) в координатной форме он выглядит следующим образом $v_x = v_x' + v_0$, $v_y = v_y'$, $v_z = v_z'$.

Перед решением задач своего варианта рекомендуется разобрать приведенные ниже примеры. Их нумерация соответствует порядковым номерам задач вашего варианта по данной теме. Если этой информации окажется недостаточно, то необходимо проработать теоретический материал по лекциям или по рекомендуемой лектором литературе.

1.2. НЕРЕЛЯТИВИСТСКАЯ ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Основной задачей нерелятивистской динамики материальной точки является поиск закона движения или других кинематических характеристик по заданному внешнему воздействию и начальным условиям. Ее решение, как правило, выполняется с помощью **второго закона Ньютона**

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad \text{или} \quad m\vec{a} = \vec{F}, \quad (1.8)$$

где $\vec{p} = m\vec{v}$ - импульс материальной точки, m - ее масса, \vec{a} - ускорение,

$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$ - векторная сумма всех сил \vec{F}_i , действующих на материальную точку

(результатирующая сила), n - число действующих сил.

Многообразие законов зависимости сил от координат, скорости, времени и других величин не позволяет выработать универсальный способ решения этого дифференциального уравнения. Рассмотрим некоторые частные случаи:

1. $\vec{F} = \text{const}$, т.е. на материальную точку действуют постоянные силы. В этом случае по уравнению $m\vec{a} = \vec{F}$ определяется постоянное ускорение, а затем и другие кинематические характеристики.

5

2. $\vec{F} = \vec{F} t$, т.е. результирующая сила зависит только от времени. Тогда после применения метода разделения переменных первое из уравнений (1.8) переписывается в виде

$$d\vec{v} = \frac{\vec{F}(t)}{m} dt. \quad (1.9)$$

Интегрируя это уравнение, определяем скорость тела

$$\vec{v} = \int \frac{\vec{F} t}{m} dt + C_1,$$

где постоянная интегрирования C_1 находится из начальных условий.

3. Движение одномерное поступательное и сила зависит от скорости, например, $\vec{F} = F_x v_x, 0, 0$. В этом случае первое из уравнений (1.8) после применения метода разделения переменных принимает в координатной форме вид

$$\frac{1}{F_x(v_x)} dv_x = \frac{1}{m} dt. \quad (1.10)$$

Интегрируя левую и правую части этого равенства, можно получить зависимость скорости от времени. Более сложные случаи зависимости силы от координаты, скорости и времени требуют использования специальных методов решения дифференциальных уравнений, которые рассматриваются в курсе высшей математики.

При решении некоторых задач целесообразно использовать определения **работы силы** A на траектории L и **мощности силы** N :

$$A_L = \int_L \vec{F} d\vec{r}, \quad (1.11)$$

$$N = \vec{F}\vec{v} = Fv \cos \alpha. \quad (1.12)$$

Особую группу составляют задачи, в которых масса объекта наблюдения непрерывно изменяется из-за потери или приобретения вещества. Например, при выбрасывании струи газа реактивным двигателем или при «налипании» на тело встречного потока частиц. В этом случае необходимо использовать обобщение второго закона Ньютона на систему материальных точек

$$d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_N) = \vec{F} dt, \quad (1.13)$$

где \vec{F} - результирующая всех внешних сил, действующих на рассматриваемую систему, \vec{p}_i - импульсы составляющих систему тел (в том числе потерянной или приобретенной массы). Следствием (1.13) является **уравнение движения точки переменной массы**, полученное **И.В. Мещерским**

$$m t \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \mu_1 \vec{u}_1 + \mu_2 \vec{u}_2, \quad (1.14)$$

где $\mu_1 = \frac{dm_1}{dt} > 0$ - увеличение массы за одну секунду, $\mu_2 = \frac{dm_2}{dt} < 0$ - уменьшение массы за одну секунду, \vec{u}_1 - скорость относительно ракеты присоединяющихся частиц, \vec{u}_2 - скорость относительно ракеты отделяющихся частиц. Для реактивных двигателей величину $\mu_1 \vec{u}_1$ называют **тормозящей силой**, а $\mu_2 \vec{u}_2$ - **реактивной силой тяги**. При использовании этого уравнения в проекциях на направление движения рассматриваемой точки относительную скорость встречного потока частиц необходимо записать с отрицательным знаком, т.е. $-u_1$. Проекция относительной скорости выбрасываемых частиц для разгоняющих двигателей тоже с отрицательным знаком $-u_2$, а для тормозных двигателей с положительным знаком $+u_2$.

1.3. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В СИСТЕМЕ ЧАСТИЦ

При решении задач классической нерелятивистской механики во многих случаях необходимо определить лишь отдельные состояния заданной системы без подробного описания промежуточных этапов. Наиболее эффективным при решении подобных задач, как правило, является использование **законов сохранения импульса \vec{p} , момента импульса \vec{L} и полной механической энергии $E = T + \Pi$** , где T - **кинетическая**, а Π - **потенциальная энергия тела**. В таблице 1.3 приведены условия применения и типичные ситуации, в которых рекомендуется использовать тот или иной закон сохранения.

Таблица 1.3

Закон сохранения	Условия выполнения	Типичные ситуации
Импульса	Для изолированных систем	Столкновение, объединение и разъединение поступательно движущихся тел (взрывы, удары, выстрелы и т.п.).
Момент импульса	Для изолированных систем и в поле центральных сил	Столкновение, объединение и разъединение тел, совершающих вращательное движение, изменение формы вращающегося тела.
Полной механической энергии	Только в консервативных полях	Изменение потенциальной энергии (сжатие пружины, изменение высоты или взаимного расположения тел и т.п.).

Эти фундаментальные физические законы позволяют найти связь между динамическими величинами системы в различных состояниях.

При использовании модели материальной точки импульс, момент импульса и кинетическая энергия определяются следующими формулами:

$$\vec{p} = m\vec{v}, \quad \vec{L} = \vec{r}, \vec{p}, \quad T = \frac{mv^2}{2}. \quad (1.15)$$

где \vec{r} - радиус-вектор материальной точки. В большинстве случаев момент импульса точки рассматривается относительно оси поворота Oz . Если скорость точки перпендикулярна этой оси, то $L_z = r_{\perp} p$, где r_{\perp} - "плечо" импульса (понятие, аналогичное известному из школьного курса физики "плечу" силы).

Конкретный вид формулы потенциальной энергии зависит от вида действующих сил. Для растянутой или сжатой пружины она обычно записывается в виде

$$\Pi = \frac{kx^2}{2}, \quad (1.16)$$

где k – жесткость пружины, x – растяжение пружины (разность длин в деформированном и недеформированном состояниях).

В однородном поле силы тяжести (например, вблизи поверхности планеты при $h \ll R_{\text{планеты}}$) потенциальная энергия определяется по формуле

$$\Pi = mgh, \quad (1.17)$$

где высота h отсчитывается от выбранного нулевого уровня, g - ускорение свободного падения на поверхности планеты.

При гравитационном взаимодействии двух материальных точек или шаров (планет) с симметрично распределенной массой обычно потенциальную энергию на бесконечно большом удалении их друг от друга принимают равной нулю. При таком соглашении расчетная формула для потенциальной энергии имеет вид

$$\Pi = -G \frac{m_1 m_2}{r}, \quad (1.18)$$

где $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$ - гравитационная постоянная, r – расстояние между материальными точками или центрами шаров.

В некоторых случаях при решении задач более эффективными оказываются **частные законы сохранения**, т.е. действующие в частных случаях. Например, если на систему действуют внешние силы, но их проекции на одну из осей координат равны нулю, то выполняется закон сохранения суммы проекций импульсов на эту ось (например, на ось Ox), т.е.

$$\sum_i p_{ix} = \text{const}. \quad (1.19)$$

Если система не изолированная, но моменты внешних сил относительно какой-либо оси отсутствуют (например, оси Oz), то суммарная проекция момента импульса на эту ось остается постоянной, т.е.

$$\sum_i L_{iz} = \text{const}. \quad (1.20)$$

где L_{iz} - момент импульса i -го тела относительно оси Oz . Например, суммарный момент импульса всех искусственных спутников Земли (и каждого в отдельности) остается постоянным, т.к. момент силы тяготения равен нулю.

В изолированной системе невзаимодействующих частиц сохраняется их суммарная кинетическая энергия

$$\sum_i T_i = \text{const.} \quad (1.21)$$

Эта ситуация возникает и при абсолютно упругих взаимодействиях между частицами.

Если, кроме консервативных сил на частицы системы действуют и неконсервативные силы (трение, неупругая деформация и т.п.), то полная механическая энергия не сохраняется, но ее изменение равно работе неконсервативных сил

$$E_{\text{мех}2} - E_{\text{мех}1} = A_{\text{неконс.}} \quad (1.22)$$

Движение изолированной системы взаимодействующих частиц, вообще говоря, оказывается очень сложным. Однако в такой системе имеется точка, которая либо покоится, либо движется с постоянной скоростью. Эта точка называется **центром масс**, а ее координаты определяются по формулам:

$$x_{\text{цм}} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}, \quad y_{\text{цм}} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i}, \quad z_{\text{цм}} = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i}. \quad (1.23)$$

где m_i, x_i, y_i, z_i - масса и координаты i -ой частицы. Скорость центра масс равна

$$\vec{v}_{\text{цм}} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i}. \quad (1.24)$$

Законы сохранения и следствия из них являются эффективным инструментом при решении широкого класса задач, но требуют тщательного анализа условий их выполнения. Поэтому именно с такого анализа и необходимо начинать решение задач.

1.4. ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Положение вращающегося вокруг закрепленной оси твердого тела удобно задавать углом поворота φ . Тогда величины

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad (\text{угловая скорость}) \quad \text{и} \quad (1.25)$$

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad (\text{угловое ускорение}) \quad (1.26)$$

имеют смысл, аналогичный смыслу соответствующих характеристик поступательного движения $v_x = \frac{dx}{dt}$ и $a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$.

Как и при любом криволинейном движении, вектор линейного ускорения точки во вращательном движении \vec{a} можно представить в виде двух составляющих (рис. 1.38):

-тангенциального ускорения, направленного по касательной к траектории $a_\tau = \beta R$, где R – радиус вращения, (1.27)

-нормального ускорения, направленного к оси вращения

$$a_n = \omega v = \omega^2 R = \frac{v^2}{R}. \quad (1.28)$$

При вращении твердого тела вокруг закрепленной оси Oz его проекцию момента импульса на эту ось можно представить в виде

$$L_z = I_z \omega_z, \quad (1.29)$$

где I_z называется **моментом инерции** твердого тела относительно рассматриваемой оси Oz . Физический смысл момента инерции можно уяснить, сопоставив формулы и динамические величины вращательного и поступательного движения, приведенные в таблице 1.5. Во всех случаях наблюдается соответствие между моментом инерции и массой. Поэтому можно сделать заключение, что момент инерции характеризует инертные свойства тела во вращательном движении. Например, закон сохранения проекции момента импульса для системы тел при условии отсутствия проекции момента действующих сил ($\sum_i M_{iz} = 0$) имеет вид
$$\sum_i I_{iz} \omega_{iz} = \text{const}. \quad (1.30)$$

Этот закон в сочетании с законом сохранения полной механической энергии является эффективным инструментом при решении большого класса задач на вращательное движение твердого тела.

Величина момента инерции твердого тела зависит от массы и ее распределения относительно оси вращения. Задача расчета момента инерции сводится к суммированию в случае дискретного распределения массы или к интегрированию при непрерывном распределении массы в объеме V по формулам

$$I_z = \sum_i m_i r_i^2 \quad \text{или} \quad I_z = \int_V \rho r^2 dV, \quad (1.35)$$

где $r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$ – радиус вращения массы m_i вокруг оси Oz , ρ – плотность материала, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ – радиус вращения элемента объема dV , имеющего массу ρdV .

Моменты инерции некоторых тел правильной геометрической формы относительно оси, проходящей через центр масс I_{Oz} , приведены в таблице 1.6.

Таблица 1.5. Характеристики движения твердого тела

Поступательное движение	Вращательное движение	
Масса (инерция) – m	Момент инерции - I	
Сила - \vec{F}	Момент силы - $\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$	
Проекция импульса – $p_x = m v_x$	Проекция момента импульса – $L_z = I_z \omega_z$	
Уравнение динамики (проекция)		
$F_x = \frac{d p_x}{dt} = m a_x$	$M_z = \frac{d L_z}{dt} = I_z \beta$	(1.31)
Кинетическая энергия		
$T = \frac{m v^2}{2}$	$T = \frac{I \omega^2}{2}$	(1.32)
Мощность		
$N = F_v v$	$N = M_\omega \omega$	(1.33)
Работа		
$A = \int F_v dl$	$A = \int M_\omega d\varphi$	(1.34)

Таблица 1.6. Моменты инерции тел относительно оси $00'$, проходящей через центр масс

Описание тела	Момент инерции
Обруч, кольцо радиусом R	mR^2
Однородный диск или цилиндр радиусом R	$\frac{1}{2} mR^2$
Однородный шар радиусом R	$\frac{2}{5} mR^2$
Однородный стержень длиной L	$\frac{1}{12} mL^2$

При расчете моментов инерции тел I_z относительно произвольной оси Oz используют теорему Штейнера

$$I_z = I_{Oz} + ma^2, \tag{1.36}$$

где I_{Oz} - момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс и параллельной заданной оси Oz , a - расстояние между этими осями. В большинстве случаев алгоритм решения задач при вращательном движении твердого тела напоминает алгоритм решения аналогичных задач при поступательном движении.

1.5. ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

События, происходящие с материальной точкой, характеризуются набором ее пространственных координат и моментом времени, т.е. совокупностью четырех величин $\{x, y, z, t\}$. В соответствии с основными постулатами теории относительности при переходе из одной инерциальной системы отсчета K в другую K' , движущуюся относительно первой, изменяются пространственные и временные соотношения между событиями. Например, если соответствующие оси систем координат параллельны, система K неподвижна, а K' движется со скоростью v_0 , направленной вдоль оси Ox (рис.1.52), то эти изменения определяются **преобразованиями Лоренца**

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{x' + v_0 t'}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \frac{t' + \frac{x' v_0}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} \end{array} \right.$$

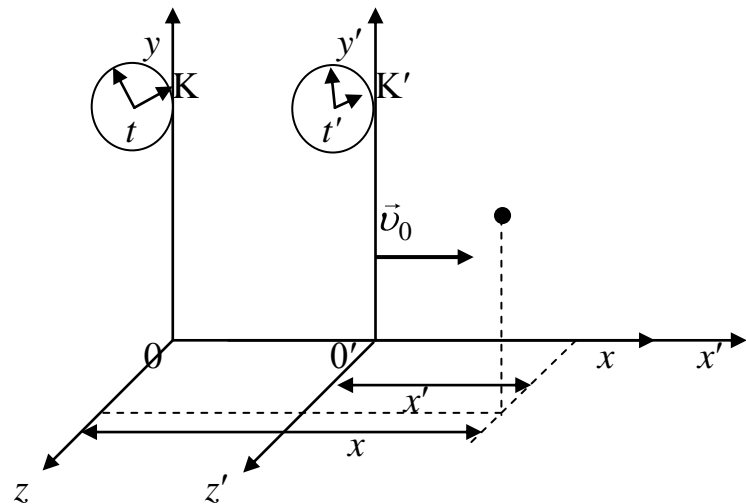


Рис. 1.52.

Следствиями преобразований Лоренца являются:

1. **Различие в системах K и K' промежутков времени** между двумя событиями. Например, если Δt_0 - промежуток времени между двумя событиями, произошедшими с одной и той же материальной точкой **в собственной системе отсчета** (в которой материальная точка неподвижна), то промежуток времени Δt между теми же событиями в системе отсчета наблюдателя (в лабораторной) определяется по формуле

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}, \quad (1.37)$$

2. **Различие размеров объекта** в системах К и К'. Например, если в системе К' объект неподвижен (т.е. она является собственной) и его размеры задаются величинами $\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta z_0$, то соответствующие размеры $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ в лабораторной системе К определим формулам

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta x = \Delta x_0 \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}, \\ \Delta y = \Delta y_0, \\ \Delta z = \Delta z_0. \end{array} \right. \quad (1.38)$$

3. Релятивистский закон сложения скоростей

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x = \frac{v'_x + v_0}{1 + \frac{v'_x v_0}{c^2}}, \\ v_y = \frac{v'_y}{1 + \frac{v'_x v_0}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}, \\ v_z = \frac{v'_z}{1 + \frac{v'_x v_0}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}. \end{array} \right. \quad (1.39)$$

где v'_x, v'_y, v'_z - проекции скорости объекта в К' системе отсчета v_x, v_y, v_z - проекции скорости объекта в К системе отсчета (рис. 1.52).

Наряду с меняющимися физическими величинами при смене системы отсчета, существуют и **инвариантные** (неизменные) величины. Одной из них является скорость света $c = c'$. Инвариантен и **пространственно-временной интервал** между двумя событиями $\Delta s = \Delta s'$. Квадрат интервала определяется формулой

$$(\Delta s)^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2.$$

Инвариантность интервала означает, что

$$c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 = c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2.$$

Если система К' является собственной, и движется со скоростью v_0 , направленной вдоль оси Ox (рис.1.52), то эта формула принимает вид

$$c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = c^2(\Delta t_0)^2. \quad (1.40)$$

Одним из основных моментов при решении задач на следствия из преобразований Лоренца является корректность в определении собственной и движущейся систем отсчета для объектов условия задачи.

1.6. ЭЛЕМЕНТЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ДИНАМИКИ

В отличие от известных из школьного курса физики понятий нерелятивистского импульса \vec{p} и нерелятивистской кинетической энергии T (формулы (1.15)) в релятивистской динамике *импульс* \vec{p} и *релятивистская энергия* E определяются следующими формулами

$$\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{и} \quad E = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (1.41)$$

где m_0 - *масса покоящейся частицы*, m - масса движущейся частицы, v - ее скорость, c - скорость света. Из этих формул следует, что:

- масса частицы зависит от скорости;
- масса и энергия частицы являются *эквивалентными* величинами.

Из формулы (1.41) следует, что для неподвижной частицы релятивистская энергия равна *энергии покоя* $E_0 = m_0c^2$. Поэтому кинетическую энергию частицы T равна разности релятивистской энергии частицы и ее энергии покоя

$$T = E - E_0 = E - m_0c^2. \quad (1.42)$$

При использовании закона сохранения релятивистской энергии в системе частиц необходимо иметь в виду, что сумма энергий покоя всех частиц системы и сумма их кинетических энергий по отдельности не сохраняются. При соответствующих условиях за счет энергии покоя частиц может возникнуть дополнительная кинетическая энергия и, наоборот, за счет кинетической энергии может появиться дополнительная масса покоя, т.е. *рождение* новых частиц.

Во многих случаях решение задач можно упростить, если использовать следствия из формул (1.41) и (1.42):

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{T(2m_0c^2 + T)}, \quad (1.43)$$

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}, \quad (1.44)$$

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}c^2}{E}. \quad (1.45)$$

Для частиц, не имеющих массы покоя (энергии покоя), эти формулы преобразуются к виду

$$p = T/c, \quad E = pc = T, \quad v = c. \quad (1.46)$$

Для удобства расчета энергетического баланса в реакциях с элементарными частицами используют специальную единицу энергии – *электронвольт* (эВ) и *мегаэлектронвольт* (МэВ):

$$1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}, \quad 1 \text{ МэВ} = 10^6 \text{ эВ}.$$

В приложении приведены энергии (массы) покоя некоторых элементарных частиц, выраженные в МэВ.

1.7. КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Колебаниями называются процессы, характеризующиеся той или иной степенью повторяемости во времени. Простейшим колебательным движением является *гармоническое*, т.е. такое колебание, при котором какая-либо характеристика системы (например, координата груза на пружинке, угол отклонения маятника и т.п.) изменяется со временем по закону синуса или косинуса. Такая система называется *гармоническим осциллятором* и реализуется, если соответствующее рассматриваемой модели уравнение динамики (например, второй закон Ньютона или основное уравнение динамики вращательного движения) можно привести к виду

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \quad (1.47)$$

где под x понимается упомянутая выше характеристика системы. Общим решением дифференциального уравнения (1.47) является уравнение гармонических колебаний

$$x = A \cos \omega_0 t + \varphi_0 \quad (1.48)$$

где A – *амплитуда*, $(\omega_0 t + \varphi_0)$ – *фаза*, φ_0 – *начальная фаза* колебаний. Значения A и φ_0 определяются из начальных условий, т.е. по значениям отклонения x_0 и скорости v_0 в начальный момент времени.

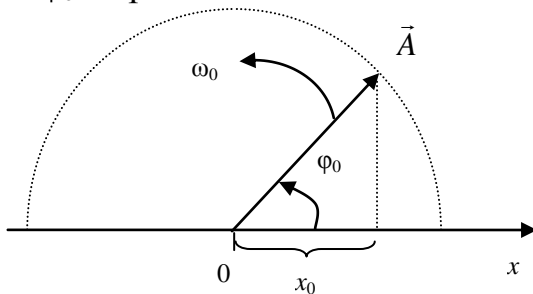


Рис. 1.56

Входящий в это уравнение параметр колебательного процесса ω_0 , называемый *циклической частотой собственных колебаний* (или *собственной частотой*), связан с *периодом* T и *частотой* ν колебаний соотношением

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu. \quad (1.49)$$

Собственная частота ω_0 зависит от свойств колеблющейся системы. Например, при малых колебаниях математического маятника она выражается через ускорение свободного падения g и длину маятника l

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad (1.50)$$

при малых колебаниях груза на пружине она выражается через его массу m и коэффициент упругости пружины k

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (1.51)$$

Решение ряда вопросов, в частности, сложение нескольких колебаний одинакового направления, значительно облегчается, если воспользоваться **методом векторных диаграмм**. Этот метод основан на том, что при вращении вектора \vec{A} с угловой скоростью ω_0 значение его проекции на ось Ox изменяется по гармоническому закону $x = A \cos \omega_0 t + \varphi_0$ (рис.1.56).

Если характеристика x участвует одновременно в нескольких колебательных движениях одного направления, то результирующее движение можно представить в виде суммы проекций вращающихся векторов. На рис. 1.57 показан результат сложения характеристик двух колебаний $x = x_1 + x_2$ с одинаковой частотой. Смещение характеристики x , равное сумме смещений $x_1 = A_1 \cos \omega_0 t + \varphi_{01}$ и $x_2 = A_2 \cos \omega_0 t + \varphi_{02}$, можно пред-

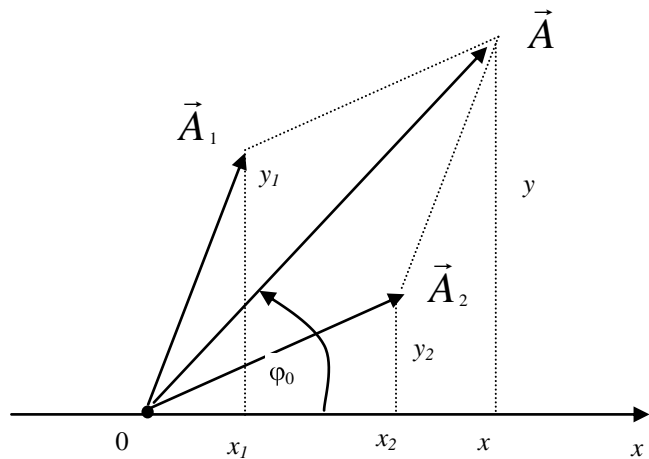


Рис. 1.57

ставить в виде проекции вращающегося вектора $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$. Применив теорему косинусов, получим амплитуду результирующего колебания

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \varphi_{02} - \varphi_{01}. \quad (1.52)$$

Начальную фазу результирующего колебания определяют по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = \frac{A_1 \sin \varphi_{01} + A_2 \sin \varphi_{02}}{A_1 \cos \varphi_{01} + A_2 \cos \varphi_{02}}. \quad (1.53)$$

Если тело совершает одновременно два взаимно перпендикулярных колебания по законам $x = A \cos \omega_{01} t + \varphi_{01}$ и $y = B \cos \omega_{02} t + \varphi_{02}$, то характер его движения будет зависеть от разности начальных фаз и соотношения частот колебаний. Например, если частоты обоих колебаний одинаковы, то траектория движения тела представляет собой эллипс, ориентация и величина полуосей

которого зависят от амплитуд A , B и разности начальных фаз $(\varphi_{02}-\varphi_{01})$. Если же частоты различны, то траектория результирующего движения имеет вид сложных кривых. В частном случае рационального отношения частот $\omega_{01}:\omega_{02}$ движущаяся точка через определенные промежутки времени возвращается в то же положение. Такая траектория называется *фигурой Лиссажу* (см. пример 24).

На практике гармонические колебания реализуются только с некоторой степенью приближения. Во всякой реальной колебательной системе имеются силы сопротивления, которые приводят к затуханиям колебаний. В наиболее часто встречающемся случае сила сопротивления \vec{F}_c пропорциональна величине скорости \vec{v}

$$\vec{F}_c = -r\vec{v}, \quad (1.54)$$

где r - *коэффициент сопротивления*. При не слишком сильном затухании закон движения колеблющегося тела можно написать в виде

$$x = Ae^{-\beta t} \cos \omega t + \varphi, \quad (1.55)$$

где $\beta = \frac{r}{2m}$ - *коэффициент затухания*, *циклическая частота* ω связана с

собственной частотой ω_0 формулой $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, m - масса колеблющегося тела. На рис. 1.58 приведен характерный график закона движения в этом случае.

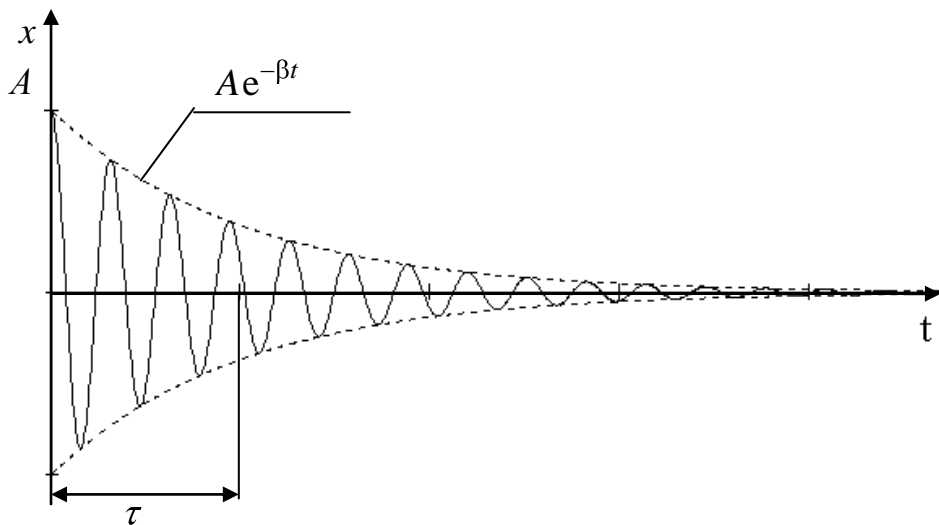


Рис. 1.58

Множитель перед косинусом является изменяющейся амплитудой, которая в момент времени $\tau = 1/\beta$ уменьшается в $e \approx 2,7$ раз по сравнению с первоначальной. За это время происходят $N_e = \tau/T$ колебаний. При малом затухании ($\beta \ll \omega_0$) энергия колеблющейся системы изменяется по закону

$$E = E_0 e^{-2\beta t}. \quad (1.56)$$

Важной характеристикой колебательной системы является **логарифмический декремент затухания** λ - логарифм отношения амплитуд двух соседних колебаний

$$\lambda = \ln \frac{A_t}{A_{t+T}} = \ln e^{\beta T} = \beta T. \quad (1.57)$$

Величиной, характеризующей резонансные свойства колебательной системы при вынужденных колебаниях, является **добротность** Q , которая определяется выражением

$$Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E}. \quad (1.58)$$

где E - запасенная в системе энергия, ΔE - убыль энергии за один период. Можно показать, что добротность и логарифмический декремент затухания связаны соотношением

$$Q = \frac{\pi}{\lambda}. \quad (1.59)$$

Поэтому добротность может служить удобной характеристикой затухающих колебаний – чем больше добротность, тем медленнее затухание.

1.8. ЭЛЕМЕНТЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Движение сплошной среды можно описать двумя способами:

- 1-задать положение и скорость каждой частицы как функцию времени,
- 2-задать скорости частиц, которые проходят через каждый физически малый элемент объема, как функцию времени.

Во втором случае для определенного момента времени получается мгновенная картина распределения скоростей - **поле скоростей**. Если поле скоростей не изменяется с течением времени, то движение сплошной среды называется **стационарным**. Линия, касательные к которой указывают направление скоростей частиц в точках касания, называется **линией тока**. Часть среды, ограниченная линиями тока, называется **трубкой тока** (рис.1.81). Частицы жидкости при своем движении не пересекают стенок трубки тока.

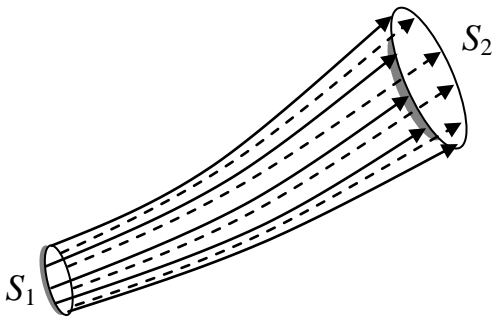


Рис. 1.81

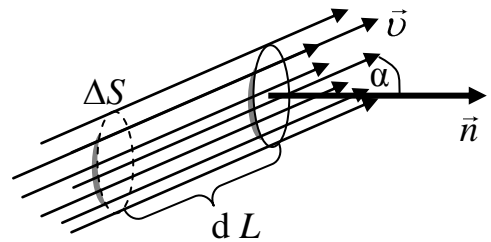


Рис. 1.82

Выберем в сплошной среде небольшой элемент плоской поверхности с площадью ΔS , в пределах которой вектор скорости \vec{v} можно считать постоянным (рис.1.82). Границы этого элемента являются направляющей линией трубки тока. За время dt через выбранный элемент поверхности успеют пройти все частицы, находившиеся внутри трубки тока длиной $dL = v dt$. Поэтому, объем среды, пересекающей выбранный элемент поверхности ΔS за время dt , равен $\Delta S \cos \alpha dL = \Delta S \cos \alpha \cdot v dt$. Соответственно определим его массу

$$dm = \rho \Delta S \cos \alpha dL = \rho v \Delta S \cos \alpha dt, \quad (1.60)$$

где ρ - плотность среды; α - угол между вектором скорости \vec{v} и вектором нормали \vec{n} к выбранному элементу поверхности. Величина

$$\vec{j} = \rho \vec{v} \quad (1.61)$$

называется **плотностью потока** массы, а величина

$$\Delta \Phi = j \Delta S \cos \alpha \quad (1.62)$$

потоком массы через поверхность ΔS , т.е. масса, пересекающая элемент поверхности ΔS в единицу времени.

Любую замкнутую поверхность можно представить как сумму элементов поверхности ΔS_i . Тогда изменение массы внутри замкнутой поверхности в единицу времени будет определяться выражением

$$-\frac{dm}{dt} = \sum_i j_i \Delta S_i \cos \alpha_i,$$

где отрицательный знак в левой части связан с тем, что при вытекании среды наружу масса уменьшается. В интегральной форме это уравнение выглядит следующим образом

$$-\frac{dm}{dt} = \oint_S \vec{j} d\vec{S}, \quad (1.63)$$

где $d\vec{S} = \vec{n} dS$. Знак \oint указывает на то, что интегрирование производится по замкнутой поверхности S . Приведенное выше уравнение называется **уравнением непрерывности**. Аналогичные уравнения можно написать для любой физической величины, для которой выполняется закон сохранения (энергии, электрического заряда и т.д.). В стационарном случае изменение массы внутри объема равно нулю и уравнение непрерывности принимает вид

$$\oint_S \vec{j} d\vec{S} = 0. \quad (1.64)$$

Применив это уравнение для трубки тока (рис.1.81) в стационарном случае, получим уравнение неразрывности струи

$$\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2. \quad (1.65)$$

Сплошная среда, в которой полностью отсутствует внутреннее трение (*вязкость*), называется *идеальной*. В такой среде вдоль любой линии тока стационарно текущей *несжимаемой* среды выполняется *уравнение Бернулли*

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho gh + p = \text{const}, \quad (1.66)$$

где p – давление, h – вертикальная координата элемента объема среды.

Уравнение Бернулли является следствием закона сохранения механической энергии. Поэтому алгоритм его использования при решении задач аналогичен алгоритму решения задач на закон сохранения механической энергии.

В реальных жидкостях и газах в большей или меньшей степени проявляется внутреннее трение между слоями среды или *вязкость*. Например, если между двумя параллельными достаточно длинными пластинами (их длина $L \gg d$, где d – расстояние между пластинками) находится жидкость (или газ), то при движении пластинок на каждую из них действует сила вязкого трения (рис.1.83), модуль которой определим по *формуле Ньютона*

$$F_{\text{тр}} = \eta \frac{|v_2 - v_1|}{d} S, \quad (1.67)$$

где S – площадь пластины, η – коэффициент пропорциональности, зависящий от природы и состояния (например, температуры) жидкости и называемый коэффициентом внутреннего трения или коэффициентом вязкости, или просто *вязкостью жидкости* (газа), v_1 и v_2 – скорости пластин.

Приведенная выше формула определяет не только силы, действующую на пластины, но и силу трения между соприкасающимися слоями жидкости. При этом последняя формула используется в общем виде

$$F_{\text{тр}} = \eta \left| \frac{dv}{dz} \right| S, \quad (1.68)$$

где величина dv/dz показывает, как быстро изменяется скорость в направлении оси $0z$, перпендикулярной рассматриваемым слоям.

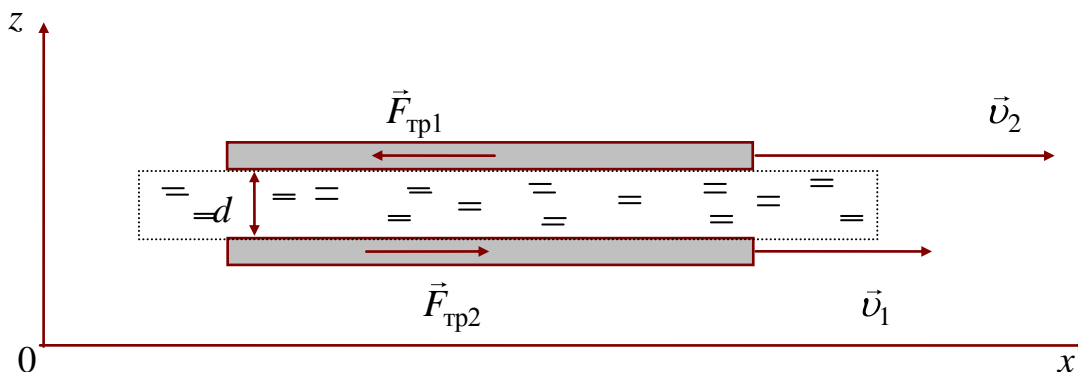


Рис.1.83

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

2.1. ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

Электрическое поле проявляется в том, что на точечный электрический заряд Q действует сила \vec{F} , не зависящая от скорости заряда. Характеристикой электрического поля является векторная величина

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q}, \quad (2.1)$$

называемая **напряженностью** электрического поля. Согласно **закону Кулона** сила взаимодействия между двумя точечными зарядами (рис. 2.1) определяется формулой

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \vec{e}_r, \quad (2.2)$$

где Q_1 и Q_2 – величины взаимодействующих точечных зарядов, r – расстояние между зарядами, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – постоянный коэффициент в СИ, $\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$ – единичный вектор, направленный от заряда 1 к заряду 2.

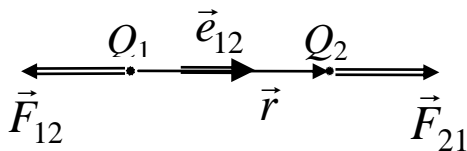


Рис. 2.1

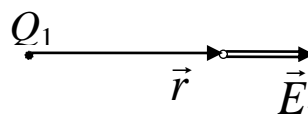


Рис. 2.2

С учетом этого напряженность электрического поля точечного заряда Q_1 (рис. 2.2) определяется по формуле

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r^2} \vec{e}_r \quad (2.3)$$

Для кулоновской силы справедлив **принцип суперпозиции**, согласно которому результирующая сила, действующая на точечный заряд, равна векторной сумме сил, действующих на этот заряд со стороны других зарядов

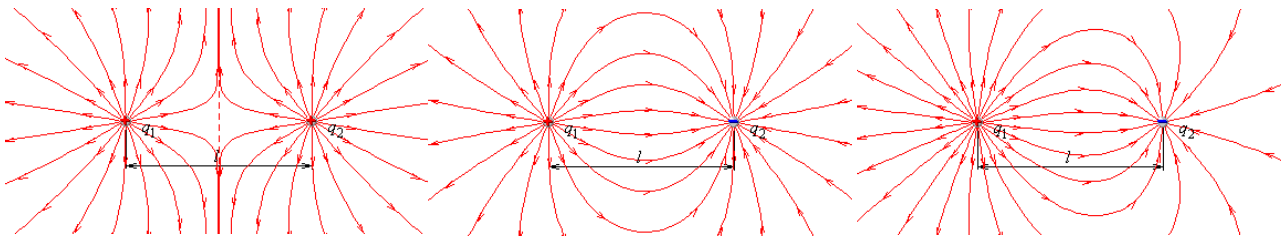
$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_N = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i. \quad (2.4)$$

Соответственно принцип суперпозиции для напряженности в некоторой точке поля имеет вид

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots + \vec{E}_N = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i. \quad (2.5)$$

где \vec{E}_i - напряженность поля, создаваемая зарядом с номером i .

Электрическое поле можно наглядно представить с помощью линий напряженности. На рис. 2.3 приведены картины линий напряженности в простейших случаях.



а) $+Q$ и $+Q$,

б) $-Q$ и $+Q$ (диполь),

в) $+2Q$ и $-Q$,

Рис. 2.3

При расчете электрического поля, создаваемого протяженным заряженным телом (рис. 2.4), необходимо записать формулу (2.3) в дифференциальной форме

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r^2} \vec{e}_r, \quad (2.6)$$

где заряд dQ можно выразить через объемную ρ , поверхностную σ или линейную τ плотности зарядов: $dQ = \rho dV$, $dQ = \sigma dS$, $dQ = \tau dl$.

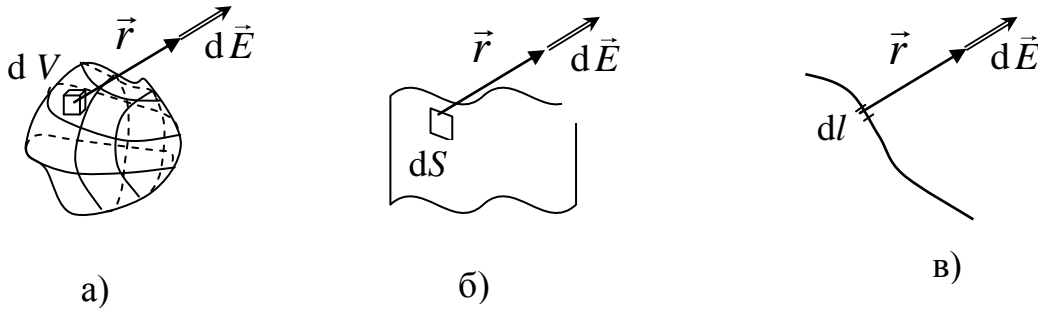


Рис 2.4

Тогда определение результирующего поля сводится к интегрированию:

– по объему V для объемно заряженных тел

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho}{r^2} \vec{e}_r dV; \quad (2.7)$$

– по поверхности S для поверхностно заряженных тел

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma}{r^2} \vec{e}_r dS; \quad (2.8)$$

– по линии L для линейно заряженных тел

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\tau}{r^2} \vec{e}_r dl. \quad (2.9)$$

Электростатическое поле **потенциально**. На расстоянии r от точечного заряда Q (рис. 2.2) величина потенциала поля находится по формуле

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}. \quad (2.10)$$

Принцип суперпозиции для электрического поля позволяет суммировать и потенциалы φ_i , создаваемые i -ми зарядами в некоторой точке поля

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots + \varphi_N = \sum_{i=1}^N \varphi_i, \quad (2.11)$$

или интегрировать потенциалы элементарных зарядов dQ от элементов объема dV , площади dS или длины dl (рис.2.4):

$$\text{— для тела, заряженного по объему } V \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho}{r} dV; \quad (2.12)$$

$$\text{— для тела, заряженного по поверхности } S \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma}{r} dS; \quad (2.13)$$

$$\text{— для тела заряженного по линии } L \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\tau}{r} dl. \quad (2.14)$$

2.2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОЛЕЙ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРЕМЫ ГАУССА

В некоторых случаях при наличии определенной симметрии в расположении зарядов расчет напряженности электрического поля может быть существенно упрощен, если применять **теорему Гаусса**

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i Q_i, \quad (2.15)$$

где в левой части поток вектора напряженности вычисляется по любой (обычно выбирается наиболее удобная) замкнутой поверхности S , а в правой части алгебраически учитываются только заряды Q_i , заключенные внутри выбранной поверхности S .

При непрерывном распределении зарядов суммирование зарядов в правой части уравнения (2.15) заменяется интегрированием плотности электрического заряда ρ по объему V , охватываемому замкнутой поверхностью S

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV. \quad (2.16)$$

Основные затруднения при использовании теоремы Гаусса связаны с выбором замкнутой поверхности S . Чтобы их избежать, необходимо придерживаться следующих рекомендаций:

1. Из соображений симметрии находится направление вектора \vec{E} в пространстве, окружающем заряженное тело.
2. Точка, в которой определяется вектор напряженности, должна принадлежать замкнутой поверхности интегрирования S .
3. Поверхность S выбирается симметричной расположению зарядов, а ее составные части должны быть либо перпендикулярны (S_i), либо касательные к вектору напряженности (S_j).

В этом случае поток вектора напряженности через замкнутую поверхность можно представить как сумму поверхностных интегралов

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \sum_i \int_{S_i} E dS \cdot \cos \alpha_i + \sum_j \int_{S_j} E dS \cdot \cos \alpha_j,$$

где вторая сумма равна нулю ($\alpha_j = \pi/2$, $\cos \pi/2 = 0$), а первая преобразуется к виду $\sum_i E_i S_i \cos \alpha_i$, где $\alpha_i = 0$ или $\alpha_i = \pi$.

Между напряженностью и потенциалом электрического поля имеется взаимосвязь

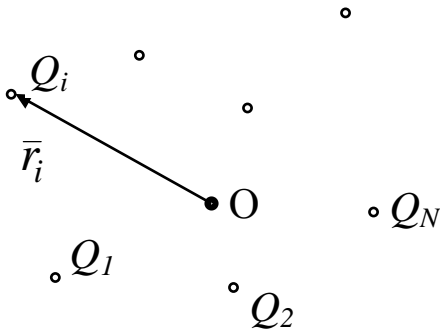
$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi; \quad \varphi_A = \int_A^P \vec{E} \cdot \vec{r} \, d\vec{r}. \quad (2.17)$$

По известной функциональной зависимости $\vec{E} \cdot \vec{r}$ определяется **потенциал** электрического поля в заданной точке А. При этом принимается, что в точке Р потенциал поля равен нулю. Для точечных и сферически симметричных зарядов эту точку удобно располагать на бесконечности. Из формулы (2.17) следует, что **разность потенциалов** между двумя точками поля А и В определяется по формуле

$$\varphi_A - \varphi_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}. \quad (2.18)$$

2.3. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ДИПОЛЬ

Поле нейтральной системы электрических зарядов ($\sum Q_i = 0$) на больших расстояниях от нее определяется величиной **дипольного электрического момента** системы (если он не равен нулю)



$$\vec{p} = \sum_{i=1}^N Q_i \vec{r}_i, \quad (2.19)$$

где \vec{r}_i - радиус-вектор Q_i заряда и суммирование ведется по всем N зарядам, входящим в состав системы (рис.2.16). При этом значение дипольного электрического момента не зависит от выбора

Рис. 2.16

начала координат. В простейшем случае система из двух одинаковых по абсолютной величине разноименных точечных зарядов называется диполем. Ее дипольный электрический момент равен

$$\vec{p} = Q^+ \vec{r}^+ + Q^- \vec{r}^- = |Q|(\vec{r}^+ - \vec{r}^-) = |Q| \vec{l},$$

где вектор \vec{l} (**плечо**) направлен от отрицательного заряда к положительному заряду (рис. 2.17а).

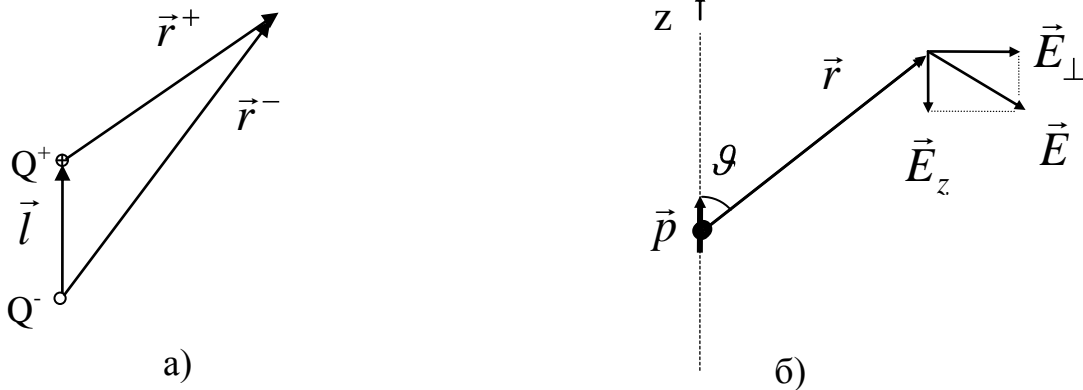


Рис. 2.17

Потенциал электрического поля нейтральной системы с ненулевым дипольным электрическим моментом на достаточно больших расстояниях r от нее (рис. 2.17б) находится по формуле

$$\varphi = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \vartheta, \quad (2.20)$$

где ϑ - угол между радиус-вектором \vec{r} и вектором \vec{p} . Соответственно модуль вектора напряженности равен

$$E = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2 \vartheta}. \quad (2.21)$$

Картина линий напряженности электрического поля диполя приведена на рис.2.3б. На диполь, помещенный в однородное электрическое поле, действует механический момент сил

$$\vec{M} = [\vec{p}, \vec{E}] \quad \text{или} \quad M = pE \sin \alpha, \quad (2.22)$$

где α - угол между направлениями векторов \vec{p} и \vec{E} . Момент сил стремится повернуть диполь так, чтобы его электрический момент \vec{p} установился по направлению поля \vec{E} . При этом совершается работа, равная изменению потенциальной энергии диполя в электрическом поле. Значение потенциальной энергии диполя вычисляется по формуле

$$\Pi = - \vec{p} \vec{E} = - pE \cos \alpha. \quad (2.23)$$

2.4. ЭЛЕКТРОЕМКОСТЬ

Огромное количество носителей электрического заряда в проводнике и их способность перемещаться под действием сколь угодно малой силы приводит к тому, что в равновесии напряженность электрического поля внутри проводника равна нулю. Это утверждение относится как к заряженным проводникам, так и к проводникам, помещенным во внешнее электрическое поле. Следствием этого является эквипотенциальность (равенство потенциала) всего объема проводника. При этом сообщенный проводнику электрический заряд распределяется в тончайшем приповерхностном слое единственным способом. Любая другая порция электрического заряда, сообщенная проводнику, распределяется пропорционально точно так же. Соответственно пропорционально увеличиваются напряженность и потенциал электрического поля в каждой точке окружающего проводник пространства. Поэтому между количеством сообщенного проводнику заряда и его потенциалом существует прямая пропорциональная зависимость $Q \sim \varphi$. Введя коэффициент пропорциональности C (от англ. *coefficient*) это утверждение можно записать в виде

$$Q = C\varphi. \quad (2.24)$$

Коэффициент C называется **электроемкостью** проводника (или просто емкостью) и зависит от геометрической формы, размеров проводника и окружающего его вещества. Из определения электроемкости следует, что она характеризует способность проводника накапливать электрический заряд. Емкость уединенных проводников разумных размеров невелика. Поэтому для накопления значительного количества электрического заряда используются устройства, называемые **конденсаторами**. Они изготавливаются в виде двух проводников (обкладок), поверхности которых находятся близко друг к другу. Ос-

новными типами конденсаторов являются плоские (рис. 2.21^а, две близкорасположенные параллельные пластины), цилиндрические (рис. 2.21^б, два коаксиальных цилиндра) и сферические (рис. 2.21^в две концентрические сферы).

Обкладкам конденсатора сообщают одинаковые по величине, но противоположные по знаку электрические заряды $+Q$ и $-Q$. В результате возникает электрическое поле, заключенное в основном в узком зазоре внутри конденсатора. Возникающая между обкладками конденсатора разность потенциалов пропорциональна сообщенному заряду $\Delta\varphi \sim Q$. По аналогии с формулой (2.24) вводится коэффициент пропорциональности

$$Q = C\Delta\varphi, \tag{2.25}$$

где коэффициент C называется *емкостью (емкостью) конденсатора*.

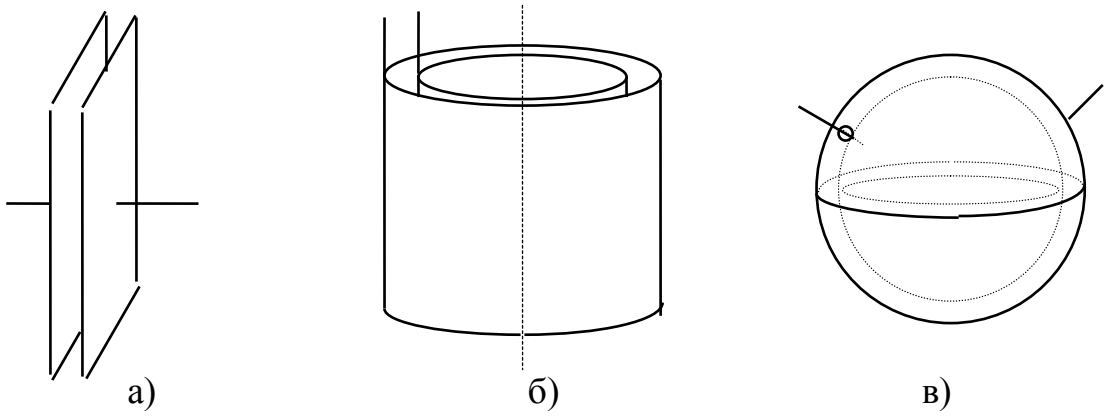


Рис. 2.21

2.5. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Полная электростатическая *энергия взаимодействия* системы из N точечных зарядов (рис. 2.23) является суммой потенциальных энергий взаимодействия всех пар зарядов системы

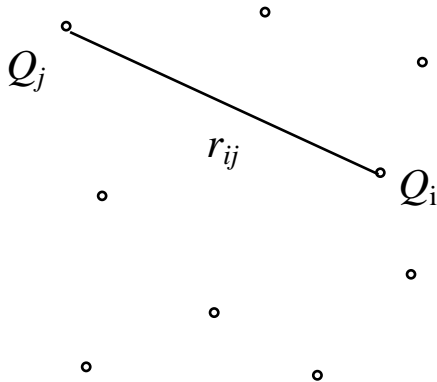


Рис.2.23

$$W = \frac{1}{2} \sum_{\text{пары } i,j} W_{ij} =$$

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i Q_j}{r_{ij}}. \tag{2.26^a}$$

$$\text{или } W = \frac{1}{2} \sum_i^N Q_i \varphi_i, \tag{2.26^b}$$

где φ_i – потенциал, создаваемый всеми зарядами, кроме Q_i , в той точке, где помещен заряд Q_i . В формуле 2.26 суммирование производится по независимым друг от друга значениям индексов i и j . Коэффициент $\frac{1}{2}$ учитывает,

что энергия взаимодействия каждой пары присутствует в сумме дважды (W_{ij} и W_{ji}). Эта энергия запасается в электрическом поле. **Плотность энергии** электрического поля в вакууме определяется по формуле

$$w = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}. \quad (2.27)$$

Зная плотность энергии поля в каждой точке, можно найти **энергию поля**, заключенного в любом объеме V . Для этого вычисляется интеграл

$$W = \int_V w dV = \int_V \frac{\epsilon_0 E^2}{2} dV. \quad (2.28)$$

Изменение этой энергии при перемещении заряда Q в электрическом поле приводит к изменению потенциальной энергии заряда Π на величину

$$\Pi_1 - \Pi_2 = Q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

В соответствии с законом сохранения механической энергии это изменение потенциальной энергии приводит к изменению кинетической энергии T заряженного тела

$$Q(\varphi_1 - \varphi_2) = T_2 - T_1. \quad (2.29)$$

2.6. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ

В классической теории электропроводности полагается, что электроны проводимости в металлах ведут себя подобно молекулам идеального газа. В отсутствие электрического поля в промежутках между соударениями с ионами они движутся совершенно свободно со средней скоростью хаотического теплового движения $\langle v_T \rangle$, пробегая в среднем некоторый путь $\langle \lambda \rangle$. При включении электрического поля у электронов появляется ускорение \vec{a} , и за среднее время пробега $\langle \tau \rangle$ этого пути электроны приобретают дополнительную скорость $\langle \vec{v}_{\max} \rangle = \vec{a} \langle \tau \rangle$. Принимая, что в результате ударов электроны останавливаются, можно представить результирующее движение электронов как направленный дрейф со средней скоростью $\langle \vec{v} \rangle = 0,5 \langle \vec{v}_{\max} \rangle$. Учитывая, что заряд электрона $q_e = -e$, где e – элементарный заряд

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{-e\vec{E}}{m} \quad \text{и} \quad \langle \tau \rangle = \frac{\langle \lambda \rangle}{\langle v_T \rangle},$$

среднюю скорость направленного движения можно записать в виде

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{-e\vec{E} \langle \lambda \rangle}{2m \langle v_T \rangle}. \quad (2.30)$$

Плотность возникающего в результате **электрического тока** определяется выражением

$$\vec{j} = -en\langle\vec{v}\rangle, \quad (2.31)$$

где n - концентрация электронов проводимости. Сравнивая формулы (2.30) и (2.31) можно записать

$$\vec{j} = \frac{e^2 n \langle\lambda\rangle}{2m\langle v_T\rangle} \vec{E}$$

или

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (2.32)$$

где $\sigma = \frac{e^2 n \langle\lambda\rangle}{2m\langle v_T\rangle}$ - **удельная проводимость** проводника, связанная с **удельным**

электрическим сопротивлением ρ соотношением $\sigma = 1/\rho$. Формула (2.32) называется **законом Ома** в локальной (дифференциальной) форме. Из нее можно получить известный из школьного курса физики закон Ома (в интегральной форме)

$$U = IR,$$

где электрическое сопротивление R зависит от длины l и площади поперечного сечения проводника S

$$R = \rho \frac{l}{S}, \text{ а сила тока } I = j S.$$

При столкновении с ионами решетки электроны передают ей дополнительно приобретенную энергию, что проявляется в нагревании проводника. В соответствии с законом **Джоуля-Ленца** в локальной (дифференциальной) форме выделяющаяся объемная плотность тепловой мощности w определяется по формуле

$$w = \sigma E^2 = \rho j^2. \quad (2.33)$$

Из нее можно получить формулу тепловой мощности P , выделяемой в проводнике с электрическим током $P = I^2 R$ (закон **Джоуля-Ленца** в интегральной форме). Решение задач по этой теме предполагает хорошее усвоение теоретического материала. Предварительно рекомендуется самостоятельно вывести формулы (2.32) и (2.33) в локальной и интегральной форме.

2.7. СИЛА ЛОРЕНЦА И СИЛА АМПЕРА

Все проявления магнетизма в природе и технике могут быть сведены к фундаментальному взаимодействию между движущимися зарядами, или между токами (поскольку движение зарядов представляет собой ток). На движущийся заряд q со стороны других зарядов действует сила

$$\vec{F} = q\vec{E} + \vec{F}_M,$$

где \vec{F}_M “дополнительная” к $q\vec{E}$ сила, пропорциональная скорости \vec{v} и величине заряда q . Эксперименты доказывают, что эту силу можно представить в виде $\vec{F}_M = q[\vec{v}, \vec{B}]$, где векторная характеристика магнитного поля \vec{B} называется *магнитной индукцией*.

Таким образом, результирующую электромагнитную силу, действующую на движущийся заряд, запишем в виде

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}]. \quad (2.34)$$

Эта сила называется *силой Лоренца*. Формула (2.34) служит *операционным определением* электрического \vec{E} и магнитного \vec{B} полей. Из свойств векторного произведения следует, что сила \vec{F}_M всегда перпендикулярна вектору скорости \vec{v} и вектору магнитной индукции \vec{B} . Поэтому мощность N и работа A силы Лоренца всегда равны нулю:

$$N = F_M v \cos \frac{\pi}{2} = 0,$$

$$A = \int N dt = 0.$$

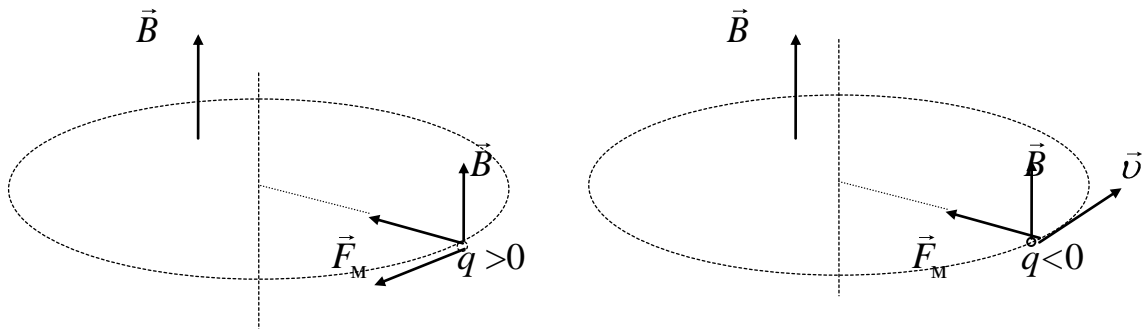


Рис. 2.30

Из этого утверждения следует, что действие силы \vec{F}_M не приводит к изменению кинетической энергии и модуля скорости заряженной частицы. Тогда при отсутствии других сил вызываемое силой \vec{F}_M ускорение является центростремительным, и заряженная частица движется по окружности или по винтовой линии. Направление центростремительного ускорения перпендикулярно плоскости, в которой находятся векторы \vec{v} и \vec{B} , и определяется векторным произведением (рис. 2.30).

Если по проводу протекает электрический ток силой I , то элемент провода длиной $d l$ (рис. 2.31) можно рассматривать как движущийся заряд $d q = \lambda d l$, где λ - линейная

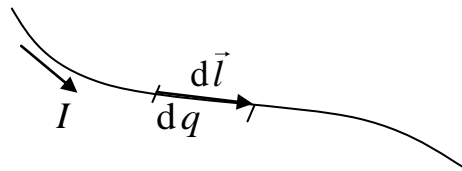


Рис. 2.31

плотность зарядов. Тогда в магнитном поле на этот элемент будет действовать сила $dF_A = dq \cdot v B \sin \alpha = \lambda v dl \cdot B \sin \alpha$, где α - угол между векторами \vec{v} и \vec{B} . Так как $\lambda v = I$, то это выражение можно преобразовать к виду

$$dF_A = I d l B \sin \alpha \text{ или } d\vec{F}_A = I [d\vec{l}, \vec{B}]. \quad (2.35)$$

Полученная формула для силы, действующей на элемент длины с током в магнитном поле, называется **законом Ампера**. Если прямолинейный проводник длиной L находится в однородном магнитном поле под углом α к вектору \vec{B} , то величину результатирующей силы определим по формуле

$$F_A = ILB \sin \alpha. \quad (2.36)$$

В остальных случаях для получения результирующей силы приходится интегрировать формулу (2.35), с учетом изменения входящих в нее величин. Например, если проводник с силой тока I_1 находится в магнитном поле другого прямого бесконечного провода с силой тока I_2 , то необходимо учитывать, что магнитное поле второго провода определяется по формуле

$$B = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r}, \quad (2.37)$$

где r – расстояние от второго провода.

2.8. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ ДВИЖУЩИХСЯ ЗАРЯДОВ

Основываясь на постулатах специальной теории относительности и инвариантности электрического заряда, можно показать, что электрическое и магнитное поля являются, в некотором смысле, различными компонентами единого физического объекта - электромагнитного поля. Одно и то же поле, рассматриваемое в различных инерциальных системах отсчета, будет представлено различными наборами значений компонент $\{E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z\}$. Если система отсчета K' движется в положительном направлении оси x со скоростью \vec{v}_0 относительно неподвижной системы отсчета K , то формулы преобразования компонент поля записываются в виде:

$$\begin{aligned} E_x &= E'_x, & B_x &= B'_x, \\ E_y &= \gamma(E'_y + v_0 B'_z), & B_y &= \gamma(B'_y - \frac{1}{c^2} v_0 E'_z), \\ E_z &= \gamma(E'_z - v_0 B'_y), & B_z &= \gamma(B'_z + \frac{1}{c^2} v_0 E'_y), \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\text{где } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}.$$

Разложив векторы напряженности электрического поля \vec{E} и магнитной индукции \vec{B} на параллельные и перпендикулярные к направлению скорости \vec{v}_0

составляющие ($\vec{E} = \vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp}$, $\vec{B} = \vec{B}_{\parallel} + \vec{B}_{\perp}$), можно записать формулы (2.38) следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\parallel} &= \vec{E}'_{\parallel}, & \vec{B}_{\parallel} &= \vec{B}'_{\parallel}, \\ \vec{E}_{\perp} &= \gamma \vec{E}'_{\perp} - [\vec{v}_0, \vec{B}'_{\perp}], & \vec{B}_{\perp} &= \gamma \left(\vec{B}'_{\perp} + \frac{1}{c^2} [\vec{v}_0, \vec{E}'_{\perp}] \right). \end{aligned} \quad (2.39)$$

При малых скоростях ($v \ll c$) $\gamma \approx 1$ и формулы (2.38) и (2.39) существенно упрощаются. Например, для неподвижного точечного заряда q (т.е. в собственной системе отсчета), находящегося в начале координат, компоненты поля в точке с радиус – вектором \vec{r} равны

$$\vec{E}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{e}_{\vec{r}}, \quad \vec{B}' = 0,$$

а для заряда, движущегося со скоростью $V \ll c$ (в системе отсчета наблюдателя) эти компоненты примут вид

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{e}_{\vec{r}}, \quad \vec{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{q v, \vec{e}_{\vec{r}}}{r^2},$$

где $\vec{e}_{\vec{r}} = \frac{\vec{r}}{r}$ - единичный вектор, направленный от заряда к точке определения поля. Обозначив $\frac{1}{\epsilon_0 c^2} = \mu_0$, последнюю формулу для магнитного поля движущегося точечного заряда можно записать в виде

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{\vec{v}, \vec{e}_{\vec{r}}}{r^2}. \quad (2.40)$$

Величина $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ Гн/м называется магнитной постоянной.

2.9. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ СТАЦИОНАРНЫХ ТОКОВ

Магнитное поле, как и электрическое, подчиняется *принципу суперпозиции*

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 + \dots + \vec{B}_n. \quad (2.41)$$

Поэтому, на основании формулы (2.40), рассматривая электрический ток как совокупность движущихся зарядов, можно получить формулу для расчета магнитного поля участка проводника длиной dl с током I (**закон Био-Савара-Лапласа**)

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I [d\vec{l}, \vec{e}_{\vec{r}}]}{r^2}, \quad (2.42)$$

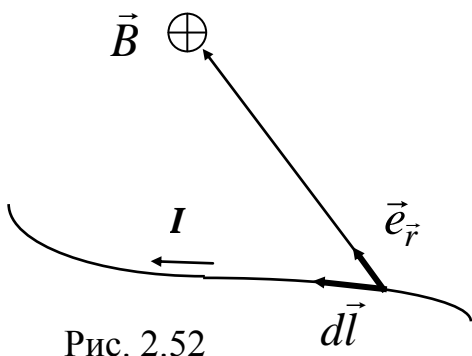


Рис. 2.52

где \vec{e}_r - единичный вектор, направленный от элемента провода к точке, в которой определяется магнитная индукция (рис. 2.52).

Магнитная индукция поля, создаваемого проводниками различной конфигурации, находится интегрированием формулы (2.42). В частности, магнитное поле прямолинейного отрезка проводника с силой тока I в точке, определяемой углами φ_1 ,

φ_2 и расстоянием r_0 (рис. 2.53), рассчитывается по формуле

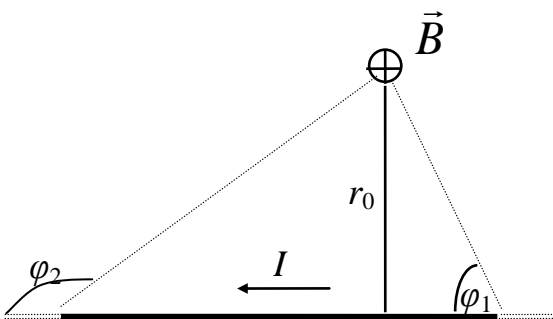


Рис. 2.53

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2) . \quad (2.43)$$

Свойства магнитного поля (вихревой характер и отсутствие источников и стоков) характеризуют уравнения для циркуляции вектора магнитной индукции $\Gamma = \oint_L \vec{B} d\vec{l}$ и

его потока через замкнутую поверхность $\Phi_0 = \oint_S \vec{B} d\vec{S}$. Для замкнутой поверхности

всегда

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0 . \quad (2.44)$$

Для незамкнутой поверхности поток вектора магнитной индукции может быть и не равным нулю. Для циркуляции вектора магнитной индукции поля постоянных токов справедлива теорема

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i , \quad (2.45)$$

где $\sum_i I_i$ - алгебраическая сумма токов, пересекающих любую поверхность, охватываемую замкнутым произвольным контуром L . При непрерывном распределении токов эту сумму можно записать через плотность тока \vec{j}

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j} d\vec{S} . \quad (2.46)$$

Применимость теоремы о циркуляции вектора магнитной индукции (2.45) и (2.46) для расчета магнитных полей ограничена кругом задач, обладающих определенной симметрией. При выборе замкнутого контура интегрирования L необходимо придерживаться следующих рекомендаций:

1. Точка, в которой определяется магнитная индукция, должна принадлежать контуру L .
2. Из соображений симметрии скалярное произведение $\vec{B} d\vec{l}$ вдоль контура должно быть постоянным или на отдельных участках равным нулю.

2.10. КОНТУР С ТОКОМ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Контур с током не только создает магнитные поля, но и сами подвергаются воздействию со стороны магнитных полей других токов. При этом результирующая сила, действующая на контур, определяется интегрированием силы Ампера (см. формулу (2.35)) по всей длине L контура

$$\vec{F} = I \oint_L [d\vec{l}, \vec{B}].$$

В однородном магнитном поле вектор \vec{B} можно вынести за знак интеграла, а векторный интеграл $\oint_L d\vec{l}$ равен нулю. Значит, в однородном магнитном поле

равна нулю и результирующая сила \vec{F} , действующая на контур с током. Однако результирующий вращательный **момент сил** Ампера, вообще говоря, не равен нулю и определяется по формуле

$$\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}], \quad (2.47)$$

где $\vec{p}_m = IS\vec{n}$ - дипольный магнитный момент контура с током I и площадью S . Направление вектора \vec{p}_m совпадает с направлением нормали \vec{n} к поверхности контура и образует с направлением тока правовинтовую систему.

Работа сил Ампера при повороте контура с током равна изменению его потенциальной энергии. Эту часть **потенциальной энергии контура** с током в однородном магнитном поле можно рассчитать по формуле

$$W_p = -\vec{p}_m \vec{B}. \quad (2.48)$$

2.11. ЗАКОН ФАРАДЕЯ - ЛЕНЦА

В **явлении электромагнитной индукции** изменяющееся во времени магнитное поле порождает вихревое (непотенциальное) электрическое поле. В этом случае циркуляция вектора напряженности электрического поля $\vec{E}_{\text{вихр}}$ по контуру L , в отличие от поля неподвижных электрических зарядов, не равна нулю и определяется формулой

$$\oint_L \vec{E}_{\text{вихр}} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}, \quad (2.49)$$

где S - любая поверхность, ограниченная контуром L .

Если вдоль контура расположить проводник, то в нем под действием вихревого электрического поля начнет циркулировать электрический ток, и будет совершаться работа. Таким образом, в проводящем контуре индуцируется электродвижущая сила (ЭДС) ε_i , которая равна работе неэлектростатических сил над единичным положительным зарядом, т.е.

$$\varepsilon_i = \frac{A}{q} = \oint \vec{E}_{\text{вихр}} d\vec{l}.$$

Тогда формулу (2.49) записывают в виде

$$\varepsilon_i = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}. \quad (2.50)$$

Другой причиной возникновения ЭДС в проводящем контуре является действие магнитной части силы Лоренца на электроны при перемещении участков этого контура. В этом случае возникающую ЭДС находят по формуле

$$\varepsilon_i = \frac{A}{q} = \frac{1}{q} \oint_L \vec{F}_M d\vec{l} = \oint_L [\vec{v}, \vec{B}] d\vec{l}. \quad (2.51)$$

Если движется отдельный прямой проводящий участок контура длиной l так, что все три сомножителя \vec{v} , \vec{B} и $d\vec{l}$ взаимно перпендикулярны, то в нем индуцируется ЭДС

$$\varepsilon_i = vBl. \quad (2.52)$$

В большинстве случаев формулы (2.50) и (2.51) объединяют в виде одного **закона Фарадея-Ленца**

$$\varepsilon_i = - \frac{d\Phi}{dt}, \quad (2.53)$$

где $\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}$ - поток вектора магнитной индукции через любую поверхность

S , ограниченную выбранным контуром. Если проводящий контур состоит из N витков, то в каждом из них индуцируется соответствующая ЭДС, и для всего контура ЭДС определяется выражением

$$\varepsilon_i = - \frac{d\Psi}{dt},$$

где $\Psi = \sum_{i=1}^N \Phi_i$ - потокосцепление. При условии одинаковости всех Φ_i можно

записать $\Psi = N\Phi$. Тогда

$$\varepsilon_i = -N \frac{d\Phi}{dt}. \quad (2.54)$$

В однородных магнитных полях для плоского проводящего контура, ограничивающего площадь S , эта формула существенно упрощается и большинство задач можно разбить на следующие типы:

1. Неподвижный контур в меняющемся во времени магнитном поле. Нормаль к контуру направлена под углом α к вектору $\frac{d\vec{B}}{dt}$. В этом случае

$$\varepsilon_i = -N \frac{dB}{dt} S \cos \alpha. \quad (2.55)$$

2. Магнитное поле однородно и стационарно. Изменяется угол α между нормалью к контуру и вектором \vec{B} (например $\alpha = \omega t$)

$$\varepsilon_i = -NBS \frac{d \cos \omega t}{dt}. \quad (2.56)$$

3. Магнитное поле однородно и стационарно. Изменяется площадь контура. В этом случае

$$\varepsilon_i = -NB \frac{dS}{dt} \cos \alpha. \quad (2.57)$$

В последнем случае часто более удобной является формула (2.51) или (2.52). Кроме того, при объединении формулы (2.50) и (2.51) в закон Фарадея-Ленца отдельные случаи не учитывались. Для них необходимо использовать непосредственно формулу (2.51).

2.12. ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ. ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

При изменении электрического тока в контуре (рис. 2.77-2.81) изменяется и его магнитное поле, вследствие чего в контуре индуцируется ЭДС самоиндукции ε_c . В отсутствие ферромагнитных материалов эта ЭДС рассчитывается по формуле

$$\varepsilon_c = -L \frac{dI}{dt}, \quad (2.57)$$

где L - коэффициент пропорциональности, называемый **индуктивностью контура**. Тогда закон Ома для замкнутой цепи, содержащей индуктивность L , емкость C , электрическое сопротивление R и ЭДС источников $\mathcal{E}(t)$ записывается в виде

$$L \frac{dI}{dt} + IR + \frac{q}{C} = \varepsilon t \quad (2.58^a)$$

$$\text{или } L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = \varepsilon t. \quad (2.58^b)$$

Решение этого дифференциального уравнения зависит от входящих в него величин ε , t , L , C , R и от начальных условий.

Появление в замкнутой цепи ЭДС самоиндукции связано с изменением энергии магнитного поля при изменении силы тока в цепи. Величину энергии магнитного поля для контура, содержащего индуктивность, определяют по формуле

$$W = \frac{LI^2}{2} \quad (2.59)$$

или (в том числе и во всех остальных случаях) через плотность энергии магнитного поля

$$w_B = \frac{B^2}{2\mu_0}. \quad (2.60)$$

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

3.1. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ВАКУУМЕ

Существование явлений электромагнитной и магнитоэлектрической индукции создает возможность распространения переменного электромагнитного поля в виде бегущих волн. Наибольший интерес при изучении их свойств имеют *бегущие плоские гармонические волны*, так как любую другую волну вдали от источников можно представить через суперпозицию определенного набора таких волн. Векторы напряженности электрического поля и магнитной индукции в бегущей плоской гармонической волне взаимно *ортогональны* и изменяются *синфазно* в соответствии с уравнениями

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0), \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \vec{B}_0 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0).\end{aligned}\quad (3.1)$$

Кроме того, векторы \vec{E} и \vec{B} ортогональны и к направлению распространения волны, которое задается *волновым вектором* \vec{k} . Модуль волнового вектора называется *волновым числом* k и определяется по формуле

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (3.2)$$

Напомним, что ω – угловая или циклическая частота, ν – частота, λ – длина волны, T – период, c – скорость света, $\varphi = \omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0$ – фаза волны в точке, описываемой радиусом-вектором \vec{r} , в момент времени t , φ_0 – начальная фаза. В вакууме между ними справедливы соотношения:

$$\begin{aligned}\omega &= 2\pi\nu, & \omega &= 2\pi/T, \\ \lambda\nu &= c, & \lambda &= 2\pi c/\omega.\end{aligned}$$

В каждой точке волны векторы \vec{E} , \vec{B} и \vec{k} составляют *правовинтовую тройку* (рис. 3.1) и связаны соотношением

$$[\vec{k}, \vec{E}] = \omega\vec{B}. \quad (3.3)$$

Взяв от обеих частей этого равенства модули величин, можно получим формулу

$$E = cB. \quad (3.4)$$

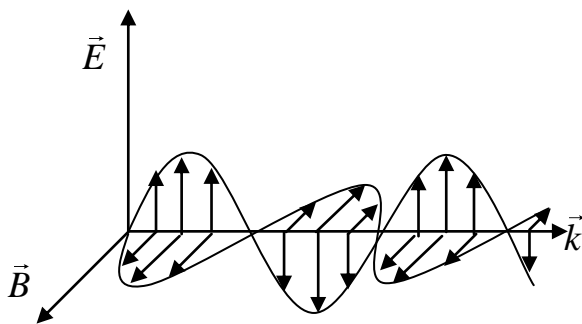


Рис. 3.1. Правовинтовая тройка векторов \vec{E} , \vec{B} и \vec{k}

Электромагнитные волны переносят энергию, плотность которой равна сумме плотностей энергии электрического w_E и магнитного w_B полей и в вакууме определяется по формуле

$$w = w_E + w_B = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}. \quad (3.5)$$

Произведение плотности энергии на скорость распространения волны дает модуль вектора плотности потока энергии

$$S = wc = \frac{1}{\mu_0} EB. \quad (3.6)$$

Сам же вектор плотности потока энергии, называемый **вектором Пойнтинга**, в вакууме определяется по формуле

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} [\vec{E}, \vec{B}] \quad (3.7)$$

На практике в типичных случаях векторы \vec{E} , \vec{B} , \vec{S} быстро осциллируют и измерить можно только модуль среднего по времени значения плотности потока энергии электромагнитной волны. Эта величина называется **интенсивностью** волны

$$I = \langle |\vec{S}| \rangle = c \langle w \rangle = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \langle E^2 \rangle = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{E_0^2}{2}. \quad (3.8)$$

3.2. ПОЛЯРИЗАЦИЯ

Из теории электромагнитных волн следует, что вектор напряженности электрического поля плоской волны \vec{E} всегда расположен в плоскости, перпендикулярной направлению ее распространения. Существует круг физических явлений, который непосредственно связан с ориентацией вектора \vec{E} в такой фиксированной в пространстве плоскости. Если его направление в каждый момент времени непредсказуемо (хаотично), то излучение называется **естественным или неполяризованным**. Если же поведение вектора \vec{E} полностью предсказуемо, т.е. зависимость $\vec{E}(\vec{r}, t)$ может быть задана детерминированной (не случайной) функцией, то говорят, что волна поляризована. Например, монохроматическая волна всегда поляризована, и в любой точке поперечной распространению волны неподвижной плоскости конец вектора \vec{E} описывает эллипс. Такая электромагнитная волна называется **эллиптически поляризованной**. Наибольший практический интерес представляют частные случаи эллиптической поляризации: **линейная (или плоская)**, когда эллипс вырождается в отрезок прямой линии (рис. 3.3), и **циркулярная (или круговая)**, когда эллипс

становится окружностью (рис. 3.4). В первом случае плоскость, в которой колеблется вектор, называется *плоскостью колебаний*.

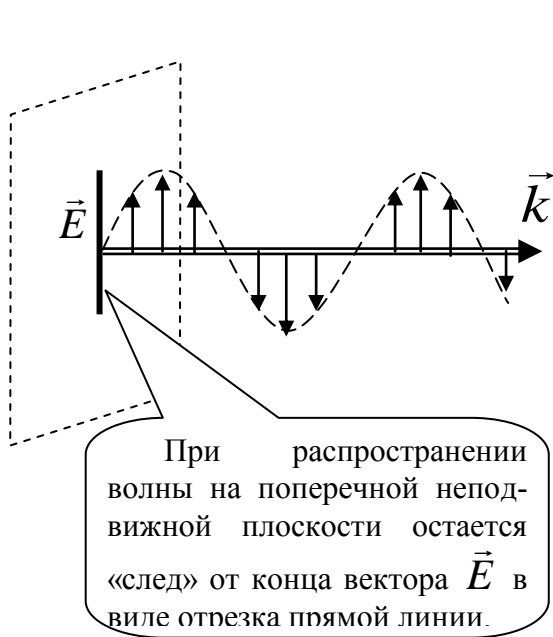


Рис. 3.3

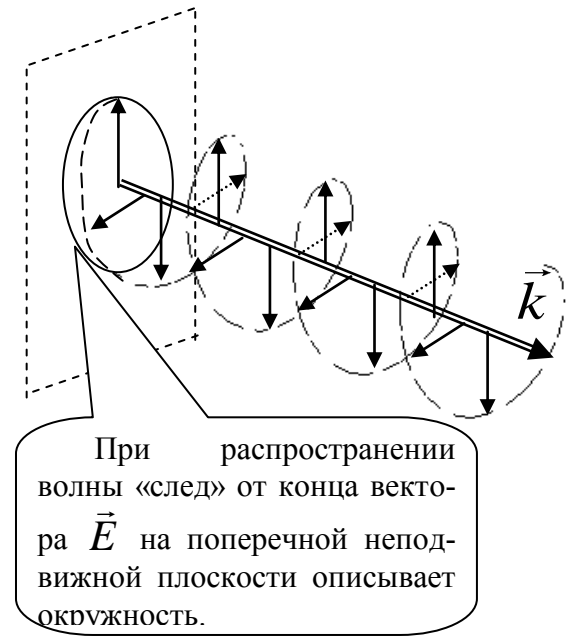


Рис. 3.4

При циркулярной поляризации в зависимости от направления вращения вектора \vec{E} различают волны, поляризованные по *правому и левому кругу*. В первом случае вектор \vec{E} совершает вращение по часовой стрелке, а во втором – против при наблюдении вдоль направления распространения волны (в отличие от терминологии, принятой в оптике, где отсчет направления вращения ведется при наблюдении навстречу световому лучу).

Можно показать, что любое состояние поляризации представляется как суперпозиция двух базисных состояний. Например, линейно-поляризованную волну можно представить как суперпозицию двух базисных (независимых) линейно-поляризованных или двух базисных волн, поляризованных по левому и правому кругу. Выбор базисных состояний произволен и определяется из соображений удобства. Например, он может быть обусловлен поляризационными характеристиками устройств, с помощью которых поляризованная волна создается или регистрируется. Такие устройства называются *поляризаторами или анализаторами*, и они пропускают через себя только проекцию состояния поляризации волны на соответствующее базисное состояние. Например, поляризатор, называемый *призмой Николя* (или просто *николь*), пропускает волну, плоскость колебаний которой параллельна некоторой плоскости призмы, называемой *плоскостью поляризатора*. При прохождении через такое устройство волны с другой плоскостью колебаний пропускается только проекция $\vec{E}_{\text{пр}}$ ее вектора \vec{E} на плоскость поляризатора (рис. 3.5):

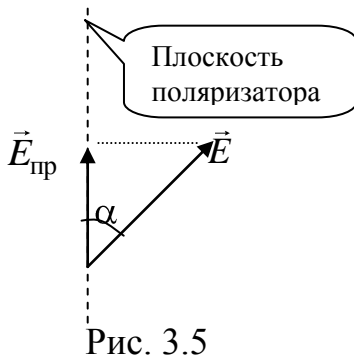


Рис. 3.5

$$E_{\text{пр}} = E \cos \alpha, \quad (3.9)$$

где α - угол между плоскостью колебаний падающей волны и плоскостью поляризатора. Тогда, с учетом формулы (3.8), для интенсивности прошедшей поляризатор волны $I_{\text{пр}}$ выполняется **закон Малюса**

$$I_{\text{пр}} = I_0 \cos^2 \alpha, \quad (3.10)$$

где I_0 – интенсивность падающей линейно-поляризованной волны.

Другие явления, связанные с явлением поляризации, описаны в рекомендуемой лектором литературе (двойное лучепреломление, вращение плоскости поляризации, поляризация при отражении и преломлении).

3.3. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ

Наложение согласованных волновых процессов при определенных условиях приводит к возникновению **явления интерференции** – устойчивого во времени пространственного распределения амплитуд колебаний суммарного поля. Основным условием наблюдения интерференции волн является их **когерентность** – постоянство во времени разности фаз складываемых волн в области регистрации. Заметим, что эта разность может изменяться (и изменяется) при переходе от одной точки пространства к другой. В идеализированном случае условие когерентности выполняется при одинаковых частотах складываемых гармонических волн. Причем наибольший контраст интерференционной картины наблюдается при сложении волн одинаковой линейной поляризации.

При решении задач на интерференцию электромагнитных волн необходимо помнить, что принцип суперпозиции справедлив лишь для ненаблюдаемого вектора напряженности (нерегистрируемого с помощью приборов вследствие высокой частоты его колебаний в электромагнитной волне)

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i. \quad (3.11)$$

Реально же наблюдается интенсивность результирующей волны, которая определяется посредством усреднения квадрата результирующего вектора напряженности по формуле (3.8) или

$$I \sim \langle E^2 \rangle, \quad (3.12)$$

и для нее при интерференции принцип суперпозиции нарушается. Поэтому при решении задачи на интерференцию электромагнитных волн необходимо сначала по формуле (3.11) найти выражение для результирующего вектора напряженности, а затем определить пространственное распределение интенсивности излучения. Как было отмечено ранее, наибольший интерес представляют бегущие плоские гармонические волны.

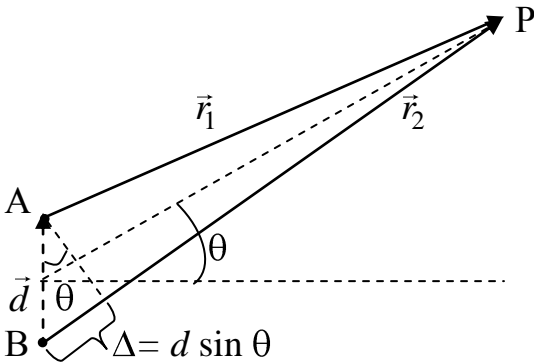


Рис. 3.9

При сложении их векторов напряженности можно использовать как тригонометрическую (см. (3.1)) так и экспоненциальную формы записи. Первая чаще используется при расчете интерференционной картины от двух источников. Например, если два источника А и В (рис. 3.9), находящиеся на расстоянии d друг от друга, излучают когерентные одинаково поляризованные волны, уравнения которых в окрестностях некоторой точки регистрации Р имеют вид

$$E_1 = E_{01} \cos(\omega t - \vec{k}_1 \vec{r}_1 + \varphi_{01}) \text{ и } E_2 = E_{02} \cos(\omega t - \vec{k}_2 \vec{r}_2 + \varphi_{02}),$$

то уравнение результирующей волны определяется как сумма

$$E = E_{01} \cos(\omega t - \vec{k}_1 \vec{r}_1 + \varphi_{01}) + E_{02} \cos(\omega t - \vec{k}_2 \vec{r}_2 + \varphi_{02}).$$

После возведения этого соотношения в квадрат и усреднения, с учетом пропорциональности (3.12), получается формула для расчета интенсивности результирующей волны в точке Р

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \left[\vec{k}_2 \vec{r}_2 - \vec{k}_1 \vec{r}_1 + \varphi_{01} - \varphi_{02} \right], \quad (3.13)$$

где I_1 и I_2 – интенсивности излучения в точке наблюдения при работе источников по отдельности. Учитывая, что векторы \vec{k}_i и \vec{r}_i сонаправлены и волновые числа когерентных волн одинаковы, разность $\vec{k}_2 \vec{r}_2 - \vec{k}_1 \vec{r}_1$ преобразуется к виду $k_2 r_2 - k_1 r_1 = k r_2 - k r_1 = k \Delta$. Величина Δ является разностью путей волн. Часто ее называют оптической разностью хода лучей и, в общем случае, она зависит от свойств среды, в которой распространяется волна. Ниже мы рассмотрим распространение волн в вакууме или в воздухе, что позволяет не учитывать этой зависимости. Из свойств косинуса вытекает, что интенсивность I в (3.13) принимает максимальное значение, когда косинус равен +1. Для этого должно выполняться условие

$$k \Delta + \varphi_{01} - \varphi_{02} = 2n\pi, \quad \text{где } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (3.14)$$

которое называется **условием максимумов**. Соответственно **условием минимумов** является соотношение

$$k \Delta + \varphi_{01} - \varphi_{02} = (2n + 1)\pi, \quad \text{где } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots. \quad (3.15)$$

Напомним, что величина Δ зависит от точки наблюдения. Поэтому в пространстве наблюдается чередование максимумов и минимумов, называемое интерференционной картиной. Часто при удаленной точке Р наблюдения интерференции ($r_i \gg d$) можно считать, что $\vec{r}_1 \uparrow \uparrow \vec{r}_2$ и $\Delta = d \sin \theta$, где θ - угол направления на точку наблюдения (рис.3.9). Тогда в случае равенства начальных фаз **условие максимумов** при интерференции от двух источников запишется в виде

$$d \sin \theta = n\lambda \quad \text{при } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.16)$$

При рассмотрении интерференционной картины от многих источников удобно складывать уравнения бегущих волн в экспоненциальной форме. Если точка регистрации Р существенно удалена от области расположения когерентных источников ($r_i \gg d$), то волны можно считать плоскими, все \vec{r}_i параллельными, а волновые векторы складываемых волн одинаковыми ($\vec{k}_i \equiv \vec{k}$). Кроме того, при суммировании удобно представить вектор расстояния через сумму $\vec{r}_i = \vec{r} + \vec{\Delta}_i$, где \vec{r} - вектор расстояния от одного из излучателей до точки наблюдения (или от некоторой средней точки между излучателями), $\vec{\Delta}_i$ - вектор разности между \vec{r}_i и \vec{r} . Например, при расположении излучателей в цепочку на одинаковых расстояниях d друг от друга (рис. 3.10) $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{\Delta}_2$, $\vec{r}_3 = \vec{r}_1 + 2\vec{\Delta}_2$, $\vec{r}_4 = \vec{r}_1 + 3\vec{\Delta}_2$ и т.д. Тогда сумму волн в точке Р можно представить в виде

$$\hat{\vec{E}} = \sum_i \vec{E}_{oi} e^{i\omega t - \vec{k}\vec{r}_i + \varphi_i} = \left[\sum_i \vec{E}_{oi} e^{i(-\vec{k}\vec{\Delta}_i + \varphi_i)} \right] e^{i\omega t - \vec{k}\vec{r}} \quad (3.17)$$

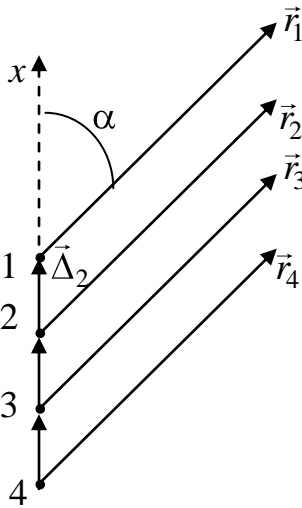


Рис. 3.10

где $\hat{\vec{E}}$ - комплексная форма записи вектора напряженности результирующего поля ($\vec{E} = \text{Re} \hat{\vec{E}}$). Выражение, стоящее в квадратных скобках является его комплексной амплитудой. Для определения интенсивности результирующей волны необходимо эту амплитуду умножить на комплексно сопряженное значение и использовать пропорциональность (3.12). Во многих конкретных случаях (и во всех предложенных ниже задачах) выражение, стоящее в квадратных скобках можно существенно упростить, если использовать формулу Эйлера $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$.

$$\text{Тогда} \quad e^0 = 1, \quad e^{\pm i\pi} = -1, \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \quad e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i. \quad (3.18)$$

3.4. ДИФРАКЦИЯ ВОЛН

В этой теме **дифракция** рассматривается в узком смысле как огибание волнами препятствий при условии, что длина волны λ сопоставима с характерным размером препятствия ($\lambda \sim d$). Для объяснения ее закономерностей используется **принцип Гюйгенса-Френеля**, согласно которому *каждый элемент волновой поверхности служит источником вторичных когерентных волн, а результирующее колебание в некоторой точке P является суперпозицией колебаний, дошедших до этой точки от вторичных источников*.

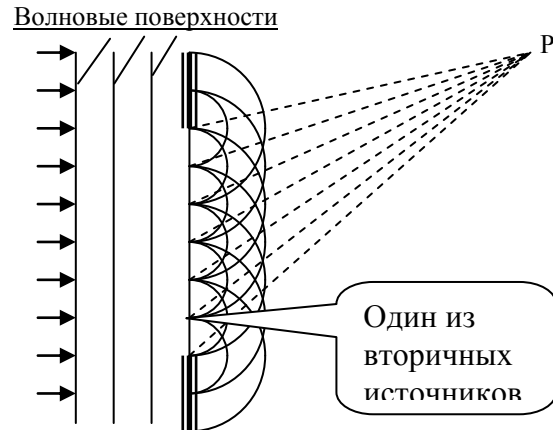


Рис. 3.17

Характер дифракционной картины за препятствием анализируется в **приближении Кирхгофа** – за экраном с отверстием или со щелью поле равно нулю всюду на неосвещенной поверхности экрана за исключением отверстия или щели. Внутри отверстия или щели оно такое же, как если бы экран отсутствовал (рис. 3.17). В зависимости от расстояний от источника волн S до преграды a , от преграды до точки наблюдения b и от длины волны λ различают два

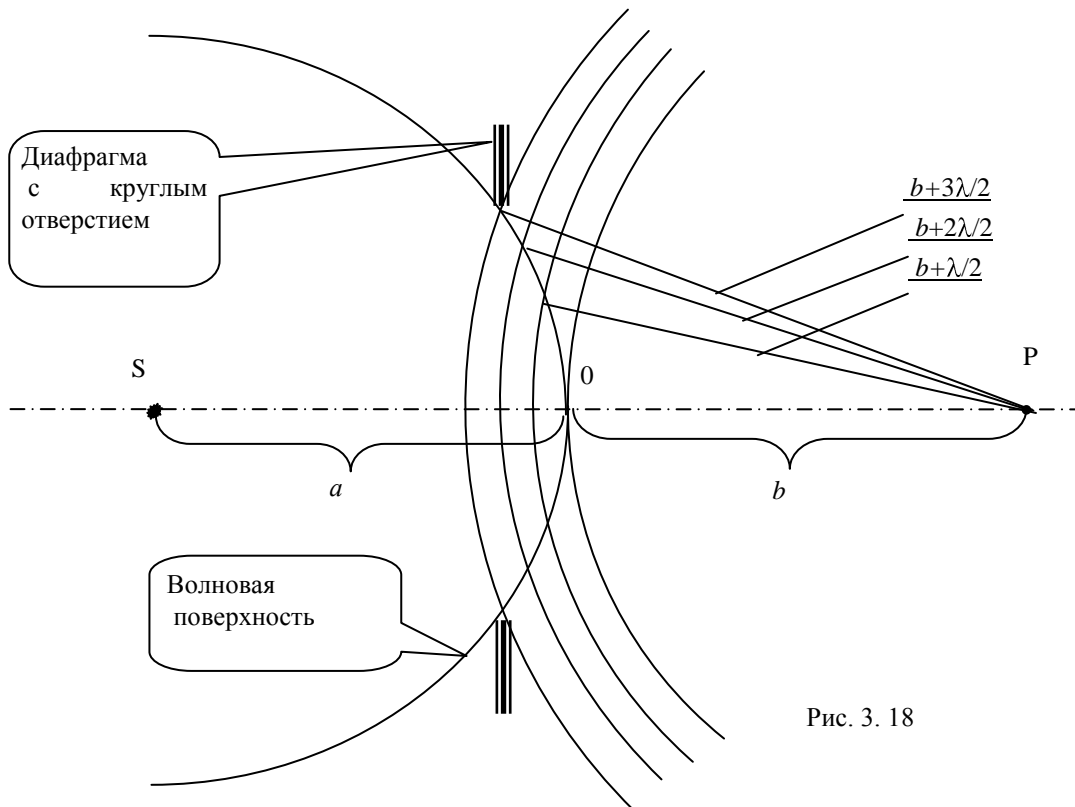


Рис. 3.18

характерных случая дифракции волн: в параллельных лучах (или **дифракцию Фраунгофера**) и в непараллельных лучах (или **дифракцию Френеля**). Доступ-

ное для анализа выражение для амплитуды результирующей волны в большинстве случаев получить трудно. Френелю удалось разработать нестрогие, но простые и наглядные методы расчета дифракционной картины. Для этого он разбил волновую поверхность в области препятствия на полуволновые зоны – **зоны Френеля**. Например, при дифракции Френеля на круглом отверстии необходимо провести сферическую волновую поверхность, касающуюся краев отверстия (рис. 3.18). Затем строятся концентрические сферы с центром в точке наблюдения Р, находящейся на оси симметрии. Линии пересечения этих сфер с выбранной волновой поверхностью создают на ней систему кольцевых зон. Радиусы сфер равны b , $b + \frac{\lambda}{2}$, $b + 2\frac{\lambda}{2}$, Соответственно расстояние от внутреннего края любой кольцевой зоны до точки Р меньше расстояния от внешнего края до этой же точки на половину длины волны. Поэтому излучения, приходящие в точку Р от двух аналогичных точек соседних зон (отстоящих на одинаковые расстояния от внутреннего края своей зоны), находятся в противофазе. Площади соседних зон приблизительно одинаковы. Тогда излучения каждой пары соседних зон будут гасить друг друга и при четном количестве открытых зон Френеля в точке Р будет минимум интенсивности или темное пятно. Соответственно при нечетном числе открытых отверстий зон излучение от одной из зон останется не скомпенсированным и в точке Р будет максимум интенсивности или светлое пятно. Если в точке Р поместить экран, то на нем будет наблюдаться дифракционная картина в виде чередующихся концентрических темных и светлых колец (рис. 3.19).

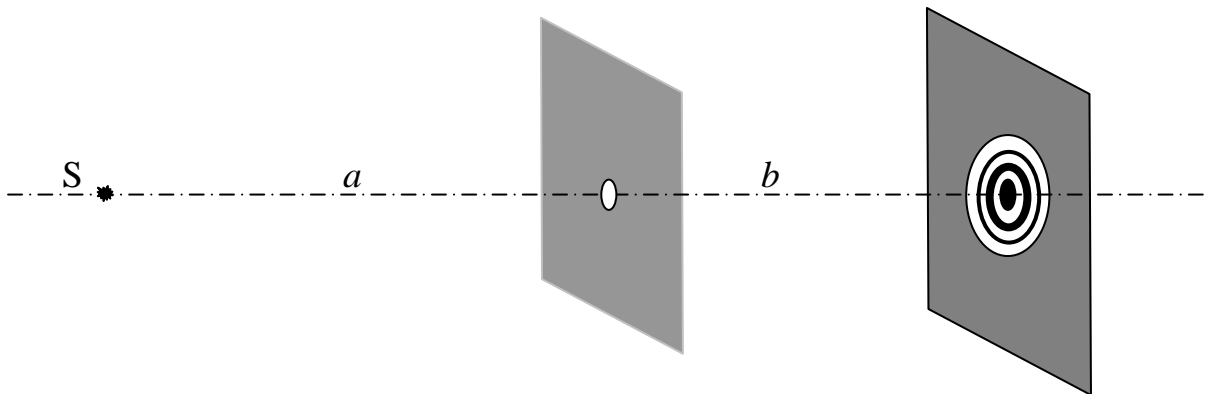


Рис. 3.19

Радиусы внешних границ зон Френеля с номером m определяются по формулам:

$$\rho_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b} m \lambda} \quad \text{– при сферическом фронте,} \quad (3.19)$$

$$\rho_m = \sqrt{b m \lambda} \quad \text{– при плоском фронте} \quad (3.20)$$

падающей на отверстие волны.

Аналогичное разбиение волнового фронта на полуволновые зоны можно произвести и при дифракции Фраунгофера на длинной узкой щели (рис. 3.20). В этом случае аналитическое решение, позволяет рассчитывать интенсивность поля в любой точке дифракционной картины

$$I_{\varphi} = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}kb \sin \varphi\right)}{\left(\frac{1}{2}kb \sin \varphi\right)^2}, \quad (3.21)$$

где I_0 – интенсивность в центре дифракционной картины (при $\varphi = 0$), b – ширина щели. Анализ этой формулы позволяет определить условие минимумов

$$b \sin \varphi = n\lambda \quad (\text{при } n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots). \quad (3.22)$$

Это выражение согласуется с выводами зонного метода (рис. 3.20б). Оно соответствует четному количеству зон Френеля на ширине щели (четное m на рис. 3.20б).

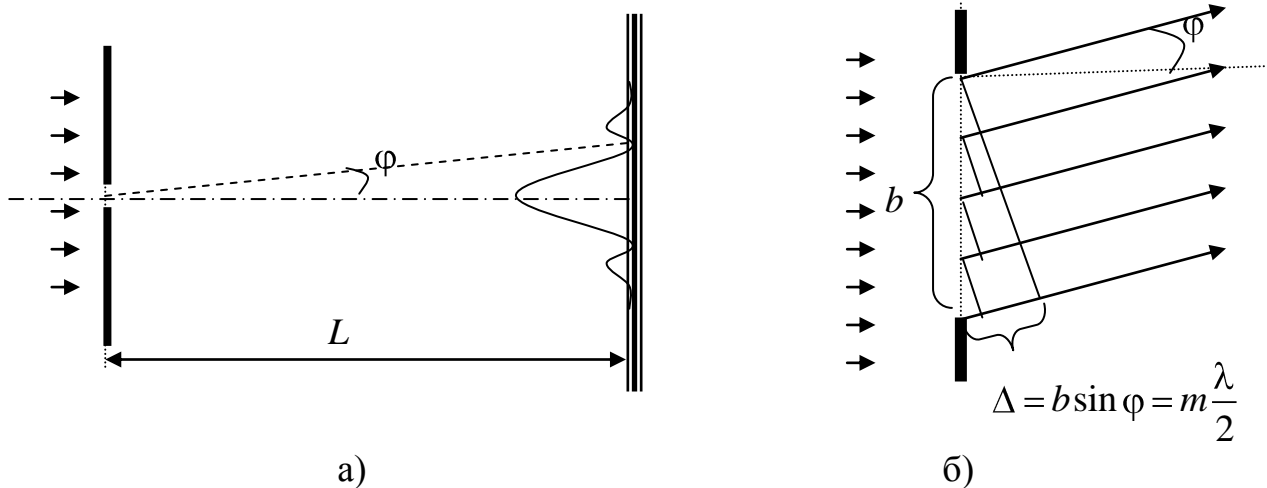


Рис. 3.20

Большой интерес для практической деятельности представляет дифракция Фраунгофера на системе узких параллельных щелей, находящихся в одной плоскости на одинаковых расстояниях друг от друга (*дифракционная решетка*). Характер дифракционной картины на удаленном от решетки экране показан на рис. 3.21 и определяется формулой

$$I_{\varphi} = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}kb \sin \varphi\right)}{\left(\frac{1}{2}kb \sin \varphi\right)^2} \frac{\sin^2\left(\frac{N}{2}kd \sin \varphi\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}kd \sin \varphi\right)}, \quad (3.23)$$

где N – число щелей, d – период решетки (расстояние между соседними щелями), I_0 – интенсивность в центре дифракционной картины за одной щелью. Излучения от соседних щелей когерентны, так как порождены одной волной. В некоторых направлениях, для которых соблюдается условие

$$d \sin \varphi = m\lambda \quad (\text{при } m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots), \quad (3.24)$$

они усиливают друг друга, создавая **максимумы** интенсивности на экране, называемые **главными**. Число m называется **порядком** максимума.

Зависимость условия максимумов от длины волны позволяет использовать дифракционную решетку во многих практических приложениях (спектральный анализ и т.п.). Распределение интенсивности на экране при дифракции Фраунгофера на решетке с $N = 4$ щелями при $d:b=3:1$ приведено на рис. 3.21. Пунктирная линия отражает характер дифракционной картины от одной щели (но ее амплитуда должна быть в N^2 раз меньше чем амплитуда центрального максимума).

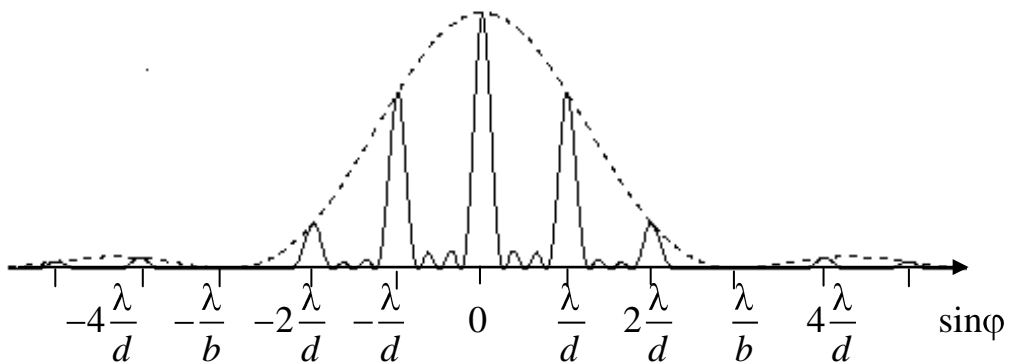


Рис. 3.21

3.5. ГРУППЫ ВОЛН. ДИСПЕРСИЯ

Как уже отмечалось, любую «разумную» волну можно представить как суперпозицию определенного набора гармонических волн. И наоборот, складывая необходимое число монохроматических волн с различными частотами, можно получить волну любой формы. Математическим обоснованием такой возможности является Фурье-анализ. В частности, периодическая функция $F(t)$ с периодом T , которой может являться сигнал излучателя волн, представляется в виде **ряда Фурье**

$$F(t) = B_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin m\omega_1 t + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \cos m\omega_1 t, \quad (3.25)$$

где $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$, $m = 1, 2, 3, \dots$, $B_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} F(t) dt$,

$$B_m = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} F(t) \cos m\omega_1 t dt, \quad A_m = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} F(t) \sin m\omega_1 t dt.$$

На рис. 3.22 показана пилообразная функция, образованная с помощью суммы девяти синусоидальных функций $F(t) = \frac{1}{2} - \sum_{m=1}^9 \frac{1}{m\pi} \sin m\omega_1 t$.

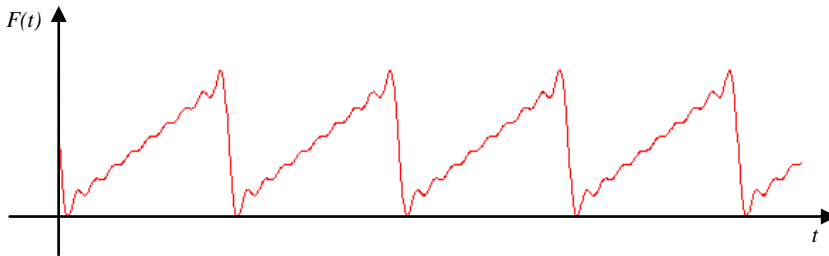


Рис. 3.22

Если же излучаемый сигнал $\psi(t)$ имеет форму отдельного импульса ограниченной длительности, то его можно представить через **интеграл Фурье**

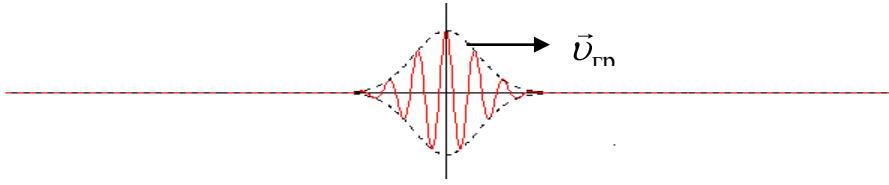
$$\psi(t) = \int_0^{\infty} A(\omega) \sin \omega t d\omega + \int_0^{\infty} B(\omega) \cos \omega t d\omega, \quad (3.26)$$

где коэффициенты $A(\omega)$ и $B(\omega)$ равны

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \sin \omega t dt, \quad B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \cos \omega t dt.$$

На рис.3.23 показан типичный сигнал (волновой пакет), полученный суммированием бесконечно большого числа монохроматических волн, частоты которых лежат в узком интервале $\Delta\omega$.

Рис. 3.23



Каждая гармоническая составляющая суперпозиций (3.25) и (3.26) определяет свою

собственную гармоническую бегущую волну с волновым числом $k_m = k_m(\omega_m)$. Результирующая волна $F(t, x)$ или $\psi(t, x)$ является суперпозицией этих гармонических волн

$$F(t, x) = B_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin m\omega_1 t - k_m x + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \cos m\omega_1 t - k_m x, \quad (3.27)$$

$$\psi(t, x) = \int_0^{\infty} A(\omega) \sin \omega t - k(\omega) x d\omega + \int_0^{\infty} B(\omega) \cos \omega t - k(\omega) x d\omega. \quad (3.28)$$

В результате взаимодействия электромагнитной волны с зарядами вещества соотношение между волновым числом и циклической частотой $k = k(\omega)$ принимает вид, отличный от того, который был в вакууме.

$$\text{В вакууме } k = \frac{\omega}{c}, \text{ в веществе без поглощения } k = \frac{\omega}{c} n(\omega), \quad (3.29)$$

где $n(\omega)$ – показатель преломления вещества, зависящий от частоты. В результате каждая гармоническая составляющая бегущей волны в веществе распространяется со своей собственной **фазовой скоростью**, зависящей от частоты волны

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n(\omega)}. \quad (3.30)$$

Это явление и называется **дисперсией**, а уравнение (5.5) **дисперсионным соотношением** или **законом дисперсии**. Вследствие дисперсии форма сигнала $F(t, x)$ или $\psi(t, x)$ не остается постоянной по мере прохождения слоя вещества. Скорость распространения волнового пакета (скорость передачи энергии, информации) называется **групповой скоростью** и определяется уравнением

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk}. \quad (3.31)$$

При слабой дисперсии (когда форма сигнала изменяется незначительно) ее можно сопоставить со скоростью перемещения максимума огибающей сигнал пунктирной линии на рис. 3.23. При наличии дисперсии групповая скорость становится отличной от фазовой скорости, оставаясь меньше скорости света.

Наряду с изменением формы волновых пакетов при распространении волн в веществе наблюдается их поглощение, преломление и отражение на границах сред, рассеяние и т.п. Подробнее о дисперсии и этих явлениях написано в рекомендуемой лектором литературе.

ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

4.1. КОРПУСКУЛЯРНО-ВОЛНОВОЙ ДУАЛИЗМ.

СООТНОШЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

Корпускулярно-волновой дуализм является важнейшим внутренним свойством всех материальных объектов природы и заключается в том, что они обладают одновременно корпускулярными и волновыми характеристиками. Многочисленные эксперименты доказывают, что электроны, нейтроны, электромагнитное излучение и т.п. в одних условиях проявляют признаки частиц, движущихся по классическим траекториям и обладающих определенными энергией и импульсом, а в других - обнаруживают свои волновые свойства, характерные для явлений интерференции и дифракции.

Впервые корпускулярно-волновой дуализм был обнаружен у света. Опыты по интерференции, дифракции и поляризации свидетельствовали о его волновой природе. Вместе с тем, закономерности равновесного теплового излучения привели в 1900 г. М. Планка к необходимости принять гипотезу о дискретном (порционном, квантовом) характере излучения. В 1905 г. А. Эйнштейн ввел понятие частиц света - **фотонов**, несущих **квант** (порцию) энергии ε_ϕ и обладающих импульсом \vec{p}_ϕ . Согласно М. Планку эти характеристики связаны с частотой ν и длиной волны λ электромагнитного излучения формулами

$$\varepsilon_\phi = h\nu \quad \text{и} \quad \vec{p}_\phi = \frac{h}{\lambda} \vec{n}, \quad (4.1)$$

где $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с - **постоянная Планка**, \vec{n} - единичный вектор направления движения фотона.

Гипотеза о фотонах была подтверждена закономерностями явления фотоэффекта, тормозного рентгеновского излучения и эффекта Комптона. Количественные сведения о фотоэффекте были получены в экспериментальной установке, схема которой приведена на рис. 4.1. С металлической пластины К (катода), помещенной внутри откачанного стеклянного баллона, при облучении светом вылетали электроны, которые, попадая на пластину А (анод), приводили к возникновению электрического тока в цепи.

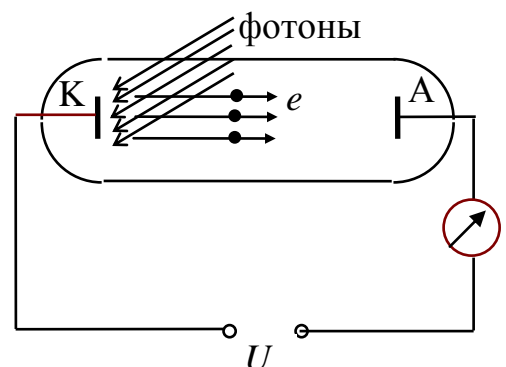


Рис. 4.1

Полученные результаты Эйнштейн объяснил как выбивание электронов при бомбардировке поверхности катода фотонами. В этом случае закон сохранения энергии записывается в виде **формулы Эйнштейна для фотоэффекта**

$$\varepsilon_{\phi} = A + T, \quad (4.2)$$

где A – работа выхода электронов из вещества анода (характерная для каждого твердого или жидкого вещества величина, равная минимальной энергии, необходимой для удаления из него электрона в вакуум), T – максимально возможная кинетическая энергия вылетевшего электрона. Ее можно измерить, приложив для прекращения фототока между пластинами К и В запирающее (задерживающее) напряжение U_3 . Тогда $T = eU_3$, где $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл – элементарный заряд. Правая часть формулы Эйнштейна минимальна при минимальной кинетической энергии вылетевшего электрона ($T = 0$) и ограничена величиной работы выхода A . Поэтому фотоэффект не наблюдается при $\varepsilon_{\phi} < A$. Определенные из условия $\varepsilon_{\phi} = A$ предельные значения частоты $\nu_{кр}$ и длины волны $\lambda_{кр}$ фотонов называются красной границей фотоэффекта. Это дает основание из соображений удобства вместо работы выхода использовать величины $h\nu_{кр}$ и $hc/\lambda_{кр}$ (здесь и далее $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость света в вакууме).

Представление о фотонах было окончательно подтверждено при изучении их упругого рассеяния на свободных электронах (**эффект Комптона** - 1922 г.). Векторная диаграмма закона сохранения импульса в процессе соударения налетающего фотона, имеющего импульс \vec{p}_{ϕ} , с покоящимся электроном приведена на рис. 4.2. После удара у фотона импульс становится \vec{p}'_{ϕ} , а электрон приобретает импульс \vec{p}_e . Используя законы сохранения энергии и импульса, можно получить формулу взаимосвязи длин волн налетающего λ и рассеянного λ' фотонов:

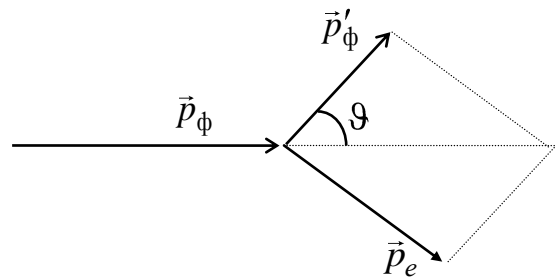


Рис. 4.2

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \vartheta) = \lambda_c (1 - \cos \vartheta), \quad (4.3)$$

где m_e – масса покоя электрона, ϑ – угол рассеяния фотона, а величина

$$\lambda_c = \frac{h}{m_e c} = 2,43 \cdot 10^{-12} \text{ м} \quad (4.4)$$

называется **комптоновской длиной волны электрона**.

Наличие у электромагнитных волн свойств частиц побудило **Луи де Бройля** высказать в 1924 г. **гипотезу** о всеобщем характере корпускулярно-волнового дуализма. Не только фотоны, но и любая движущаяся частица с энергией E и импульсом \vec{p} обладает волновыми свойствами, которые соответствуют длине волны и частоте, определяемым по формулам

$$\lambda_B = \frac{h}{p} \quad \text{и} \quad v_B = \frac{E}{h}. \quad (4.5)$$

Гипотеза де Бройля о корпускулярно-волновом дуализме всех квантовых объектов ограничивает возможность применения к микрочастицам понятий координаты и импульса в их классическом понимании. Следствием внутренних свойств микрообъектов являются **соотношения неопределенностей**, установленные **В. Гейзенбергом** в 1927 г. Математически соотношения неопределенностей имеют вид неравенств, например

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (4.6)$$

где $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, Δx и Δp_x - неопределенности значений координаты x и сопряженной с ней компоненты импульса p_x . Аналогичные соотношения справедливы и для других пар y и p_y , z и p_z , E и t .

В 1927 г. Н. Бор объединил вышеприведенные выводы в утверждение, что *если в каком-либо эксперименте мы можем наблюдать одну сторону физического явления, то одновременно мы теряем информацию о дополнительной к первой стороне явления*. Это утверждение называется **принципом дополнительности**. Свойствами дополнительности обладают такие пары, как координата и сопряженная с ней проекция импульса, волновой и корпускулярный характер поведения частицы и т.д.

4.2. КВАНТОВЫЕ СОСТОЯНИЯ ЧАСТИЦ

В классической механике состояние частицы задается радиусом-вектором \vec{r} и импульсом \vec{p} , изменение которых определяется с помощью второго закона Ньютона. В физике микромира, из-за соотношения неопределенностей, классическое определение состояния утрачивает смысл и можно говорить лишь о **вероятности** обнаружения частицы в той или иной области пространства. Эта вероятность определяется через **волновую функцию** (пси-функцию) $\Psi(x, y, z, t)$, которая является решением уравнения Шредингера и задает **состояние микрочастицы**. Для стационарных (не зависящих от времени) состояний волновую функцию можно разложить на два множителя

$\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) e^{-i \frac{E}{\hbar} t}$, где E – энергия частицы. В этом случае **уравнение Шредингера** принимает вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + U \psi = E \psi \quad \text{или} \quad \nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \psi = 0.$$

Вероятность dW обнаружения частицы в элементе объема dV в окрестности некоторой точки с координатами $\{x, y, z\}$ равна

$$dW = |\Psi(x, y, z, t)|^2 dV = |\psi(x, y, z)|^2 dV = \rho(x, y, z) dV, \quad (4.7)$$

где величина $\rho(x, y, z) = |\psi(x, y, z)|^2$ называется плотностью вероятности.

Для определения вероятности W обнаружения частицы в объеме V_0 необходимо проинтегрировать это выражение:

$$W = \int_{V_0} |\psi(x, y, z)|^2 dV. \quad (4.8)$$

Соответственно, в одномерном случае, вероятность обнаружения частицы в пределах области $[x_1, x_2]$ равна

$$W = \int_{x_1}^{x_2} |\psi(x)|^2 dx, \quad (4.9)$$

а в случае сферической симметрии задачи вероятность обнаружения частицы в сферическом слое в пределах значений расстояний от центра от r_1 до r_2

$$W = \int_{r_1}^{r_2} |\psi(r)|^2 4\pi r^2 dr. \quad (4.10)$$

Учитывая, что вероятность достоверного события равна 1, можно написать *условие нормировки* для ψ функции

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1. \quad (4.11)$$

Знание волновой функции позволяет определить *средние значения* физических величин по формуле

$$\langle A \rangle_{\text{cp}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \hat{A} \psi dx, \quad (4.12)$$

где \hat{A} - *линейный оператор* соответствующей физической величины A (см. таблицу 4.1), ψ^* - волновая функция, комплексно сопряженная ψ .

Таблица 4.1. Операторы физических величин

Дополнительную информацию о степени разброса величины A можно получить, определив *среднее квадратичное отклонение* от средней величины по формуле

$$\delta A = \sqrt{\langle \Delta A^2 \rangle} = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}. \quad (4.13)$$

Вид волновой функции в конкретной задаче находится с помощью соответствующего уравнения. В частности, решение стационарного уравнения Шредингера для частицы массы m локализованной в *одномерной потенциальной яме* со стороной l и с абсолютно непроницаемыми стенками дает набор собственных функций ψ_n и собственных значений полной энергии E_n :

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2, \quad (4.14)$$

где $n = 1, 2, 3, \dots \infty$.

Величина в классической механике		Сокращенная запись оператора	Вид оператора
Координата	x	x	x
Проекция импульса	p_x	p_x	$-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$
Кинетическая энергия	T	T	$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2$
Потенциальная энергия	$U(r)$	U	$U(r)$
Величина, являющаяся функцией координаты	$f(x)$	$f \ x$	$f(x)$

Если потенциальная яма имеет форму куба со стороной l с абсолютно непроницаемыми стенками, то собственные функции и собственные значения энергии зависят от трех квантовых чисел $\{n_1, n_2, n_3\}$

$$\psi_{n_1 n_2 n_3} = \sqrt{\frac{2^3}{l^3}} \sin \frac{\pi n_1 x}{l} \sin \frac{\pi n_2 y}{l} \sin \frac{\pi n_3 z}{l},$$

$$E_{n_1 n_2 n_3} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2). \quad (4.15)$$

При этом возможны состояния с различными наборами квантовых чисел, но имеющие одинаковую энергию. Число таких состояний называется **кратностью вырождения** собственных значений энергии.

В квантовой механике для волновых функций справедлив **принцип суперпозиции**: если имеется ряд возможных состояний системы с волновыми функциями $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$, то может существовать сложное состояние $\psi = c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2 + \dots + c_n \psi_n$, где c_1, c_2, \dots, c_n – произвольные, вообще говоря, комплексные числа, ограниченные условием нормировки (4.11).

4.3. ПРОХОЖДЕНИЕ ЧАСТИЦ ЧЕРЕЗ ПОТЕНЦИАЛЬНЫЙ БАРЬЕР

Потенциальный барьер - пространственно ограниченная область высокой потенциальной энергии частицы в силовом поле, с одной или с двух сторон которой потенциальная энергия более или менее резко падает. На рис. 4.6 и 4.7 приведены потенциальные барьеры простейшей формы для случая движения частицы вдоль оси $0x$. Максимальное значение потенциальной энергии U_0 называется высотой барьера.

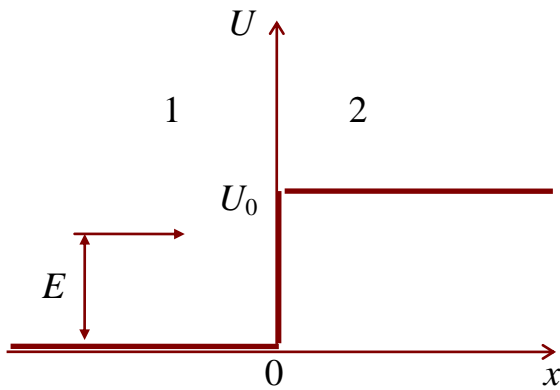


Рис. 4.6

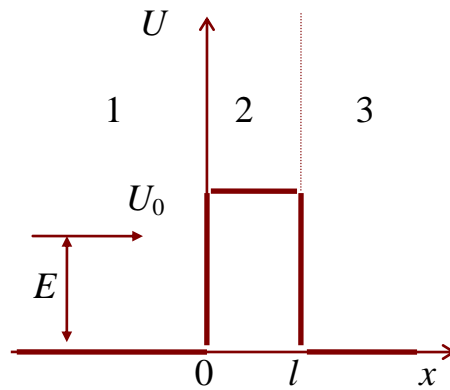


Рис. 4.7

Решение стационарного уравнения Шредингера для частиц, движущихся в области потенциального барьера, приводит к отличным от классической физики выводам:

1. Если частица, имеющая массу m и полную механическую энергию E , налетает на высокий потенциальный барьер в виде ступеньки (рис. 4.6 при $E < U_0$), то она отражается от него не на границе барьера, а проникая в глубину. Плотность вероятности обнаружить частицу “внутри” потенциального барьера (при $x > 0$) убывает экспоненциально в соответствии с формулой

$$|\psi(x)|^2 = C e^{-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)} x}, \text{ где } C - \text{const.} \quad (4.16)$$

При этом в области 1 наблюдается интерференция падающей и отраженной волн де Бройля частицы.

2. Если частица налетает на низкий потенциальный барьер в виде ступеньки (рис. 4.6 при $E > U_0$), то для нее имеется вероятность D прохождения в область 2 (где ее кинетическая энергия $T = E - U$) и вероятность R отражения от барьера, определяемые по формулам

$$D = \frac{4\sqrt{E} \sqrt{E - U_0}}{(\sqrt{E} + \sqrt{E - U_0})^2}, \quad R = \left(\frac{\sqrt{E} - \sqrt{E - U_0}}{\sqrt{E} + \sqrt{E - U_0}} \right)^2. \quad (4.17)$$

Очевидно, что $R + D = 1$. Величины D и R называют **коэффициентами прохождения (пропускания) и отражения** соответственно. Изменение кинетической энергии частицы при прохождении границы областей 1 и 2 с разной потенциальной энергией приводит к изменению ее волнового числа $k = 2\pi/\lambda$ и длины волны де Бройля. Величина

$$n = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{k_2}{k_1} \quad (4.18)$$

называется **коэффициентом преломления** волн де Бройля.

3. Если частица с энергией $E < U_0$ налетает на прямоугольный потенциальный барьер конечной ширины l (рис.3.2), то у нее имеется вероятность отразиться, вероятность проникнуть в область 2 и вероятность пройти потенциальный барьер (**туннельный эффект**) и попасть в область 3. Соответствующий **коэффициент прохождения (пропускания или прозрачности) D** определяется по формуле

$$D \approx e^{-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)} l} \quad (4.19)$$

При решении задач на прохождение частицей потенциального барьера полезно записать качественный вид функции плотности вероятности ее обнаружения $|\psi(x)|^2$ для областей 1, 2, 3 (рис. 4.6 и 4.7) и построить соответствующие графики.

4.4. АТОМЫ

Атом является наименьшей частью химического элемента, в которой сохраняется индивидуальность химического элемента. опыты Э.Резерфорда доказали, что атом состоит из положительно заряженного ядра, в котором сосредоточена почти вся масса, и движущихся на периферии электронов. Решение уравнения Шредингера с учетом взаимодействия в такой системе зарядов дает собственные функции, содержащие три целочисленные параметра n, l, m

$$\psi = \psi_{n,l,m}(r, \theta, \varphi),$$

где r, θ, φ – сферические координаты. Эти параметры называются **квантовыми числами** и могут принимать следующие значения:

- **главное** квантовое число $n = 1, 2, 3, \dots, \infty$;
- **азимутальное (орбитальное)** квантовое число $l = 0, 1, 2, \dots, n-1$;
- **магнитное** квантовое число $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$.

В атоме водорода эти числа определяют соответственно квантование энергии электрона E_n , модуля момента импульса M и проекции момента импульса электрона на физически выделенную ось (например Oz) M_z :

$$E_n = -\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{me^4}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2}; \quad M = \hbar\sqrt{l(l+1)}; \quad M_z = m\hbar. \quad (4.20)$$

Из экспериментальных фактов следует, что у электрона имеется собственный момент импульса – **спин**, проекция которого на физически выделенную ось M_{sz} определяется формулой

$$M_{sz} = m_s\hbar, \quad \text{где } m_s = \pm s, \quad s = \frac{1}{2} \text{ – спиновое квантовое число.} \quad (4.21)$$

В результате состояние электрона в атоме водорода характеризуется четырьмя квантовыми числами n, l, m, m_s . В атомной физике принята система условных обозначений состояния электрона с различными значениями числа l : если $l = 0$, то состояние называется s-состояние, при $l = 1$ – p-состояние, $l = 2$ – d-состояние, $l = 3$ – f-состояние, $l = 4$ – g-состояние и далее по алфавиту. Значение главного квантового числа указывается цифрой перед условным обозначением квантового числа l . Например, электрон в состоянии с $n = 4$ и $l = 2$ обозначается 4d. С учетом этих обозначений уровни энергии в атоме водорода удобно изображать в виде схемы, приведенной на рис. 4.8. На ней в качестве примера указаны возможные переходы из 4d в 1s состояние.

При определенном значении квантового числа n азимутальное квантовое число l может принимать n значений от 0 до $n-1$, а при каждом значении l квантовое число m может принимать $2l+1$ значение. Следовательно, с учетом спинового квантового числа кратность вырождения по энергии состояния с квантовым числом n равна

$$\sum_{l=0}^{n-1} 2(2l+1) = 2n^2. \quad (4.22)$$

Совокупность состояний электрона с одинаковым главным квантовым числом n называется оболочкой. В свою очередь, оболочка состоит из подоболочек – состояний с одинаковыми значениями квантового числа l . При переходе электрона с одного уровня энергии на другой происходит испускание или поглощение кванта энергии в виде фотона, который обладает моментом импульса. Поэтому, закон сохранения момента импульса накладывает ограничения на переходы в виде **правила отбора**: возможны переходы между состояниями, для которых выполняется условие

$$\Delta l = \pm 1. \quad (4.23)$$

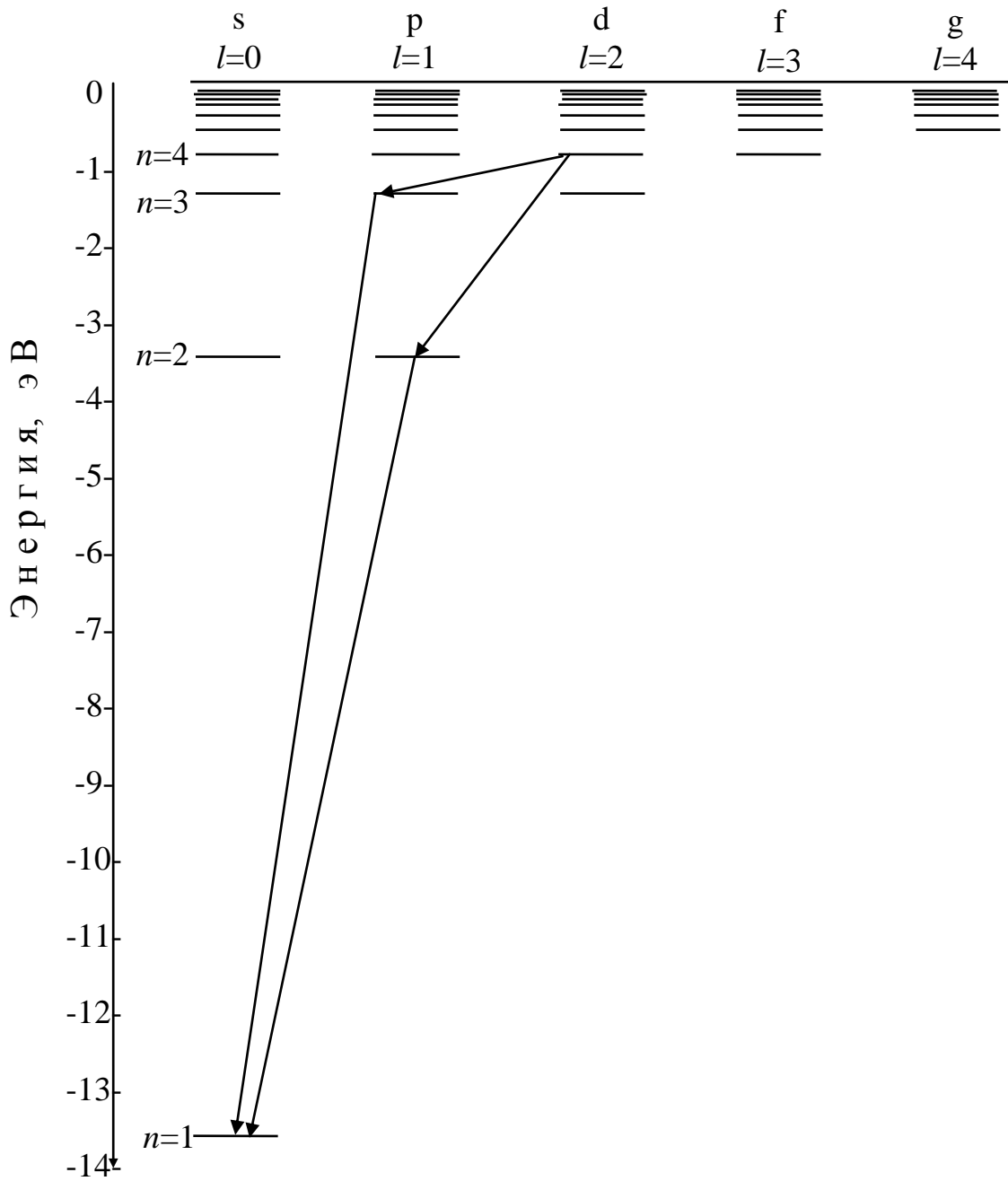


Рис.4.8

В атомах, содержащих больше одного электрона, энергия состояния зависит в основном от квантовых чисел n и l , а распределение электронов по состояниям определяется **принципом Паули**: в одном стационарном состоянии, характеризующемся четырьмя квантовыми числами $\{n, l, m, m_s\}$, не может одновременно быть больше одного электрона. В основном (невозбужденном) состоянии атома электроны располагаются на самых низких энергетических уровнях, не нарушая принципа Паули. В атоме гелия ($Z = 2$) оба электрона при разных значениях спинового числа находятся в состоянии с $n = 1$ и $l = 0$. Тогда так называемая **электронная конфигурация** атома гелия записывается как $1s^2$ (два электрона в s-состоянии на 1-ой оболочке). Следующим по порядку в

периодической системе стоит атом лития ($Z = 3$) с тремя электронами. Два из них находятся на 1-ой оболочке, а третий на 2-ой. Электронная конфигурация атома лития $1s^2 2s^1$. Для первых 18 элементов периодической системы Д.И. Менделеева выполняется следующий порядок заполнения электронами состояний: сначала заполняется оболочка с меньшим значением квантового числа n , а внутри данной оболочки вначале заполняются состояния с $l = 0$, затем по порядку с большими значениями l до $l = n - 1$. Нарушение этого порядка начинается с калия ($Z=19$). Энергия электрона в $4s$ -состоянии оказывается меньше, чем в состоянии $3d$. Поэтому вначале электроны “предпочитают” заполнять подоболочку $4s$, а затем $3d$. Например, электронная конфигурация калия ($Z = 19$) $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^1$. После заполнения подоболочек $4s$ и $3d$ порядок заполнения вновь нарушается, но об этом подробнее читайте в рекомендуемой литературе.

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

5.1. СОСТОЯНИЕ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Термодинамической системой называется совокупность макроскопических тел, которые могут обмениваться между собой и с другими телами (внешней средой) энергией и веществом. В частности, система может состоять из одного тела в твердом, жидком или газообразном состоянии. Каждое макроскопическое тело состоит из совокупности огромного числа структурных частиц (атомов и молекул). Поэтому описание *микросостояния* такой системы с подробным перечислением физических характеристик каждой составляющей ее частицы нереально и бесполезно.

Вместо этого в термодинамике для описания *макроскопического состояния* вещества используют физические величины, которые характеризуют свойства системы в большом масштабе. Это давление P , объем V , температура T , концентрация частиц n , масса тела m и т.п. Такие величины называются *макропараметрами* или *термодинамическими параметрами*. Макропараметры принято делить на *внешние*, которые задают внешние условия для системы, и *внутренние*, которые описывают поведение системы во внешних условиях. Некоторые внутренние макропараметры связаны с количеством и свойствами молекул системы.

Любая термодинамическая система независимо от начального состояния в заданных внешних условиях самопроизвольно переходит в единственное макросостояние, в котором она может находиться, пока не изменятся внешние условия. Это состояние называется *равновесным*. Функциональная зависимость между внутренними и внешними макропараметрами при равновесии называется *уравнением состояния*.

Соответственно с этим задачи по данной теме можно разделить на две группы. К первой группе относятся задачи, в которых используется или устанавливается связь значения макропараметра с количеством или свойствами отдельных молекул. Простейший пример: масса вещества равна сумме масс отдельных молекул $m = Nm_1$. Часто для решения подобных задач достаточно использовать взаимосвязь между различными способами описания количества вещества. Так, одному *молю* вещества ($\nu = 1$) соответствует масса вещества, равная *молярной массе* M , объем, равный *молярному объему* V_m , или количество молекул, равное *числу Авогадро* N_A :

$$1 \text{ моль} \Leftrightarrow M \text{ кг/моль} \Leftrightarrow V_m \text{ м}^3/\text{моль} \Leftrightarrow N_A \text{ 1/моль.}$$

Поэтому любое другое количество вещества можно выразить через пропорциональные величины ν , m , V , N

$$\nu = \frac{m}{M} = \frac{N}{N_A} = \frac{V}{V_M} . \quad (5.1)$$

Ко второй группе относятся задачи, в которых используются функциональные зависимости между внешними и внутренними макропараметрами. Эти зависимости называются уравнениями состояния. Например, для идеальных газов уравнение состояния имеет вид

$$p = nkT , \quad (5.2)$$

где $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К - постоянная Больцмана. Это же уравнение, записанное в другой форме, называется уравнением Клапейрона - Менделеева

$$pV = \nu RT , \quad (5.3)$$

где $R = 8,31$ Дж/(моль·К).

Более подробные сведения приведены в рекомендуемых лектором учебных пособиях.

5.2. ПЕРВОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

Как и в других разделах физики, в термодинамике одним из основных параметров системы является энергия. В отличие от механики, здесь рассматривается **внутренняя энергия** системы, т.е. все виды энергии системы без учета потенциальной энергии взаимодействия системы с другими системами и кинетической энергии движения всей системы как целого. Таким образом, внутренняя энергия системы U складывается из кинетической энергии движения отдельных молекул, потенциальной энергии взаимодействия между молекулами и внутримолекулярной энергии. В термодинамические формулы всегда входит изменение внутренней энергии ΔU системы в процессе перехода из одного состояния в другое. Для его расчета используется **первое начало термодинамики**, которое выражает закон сохранения энергии в макроскопических процессах и записывается в виде

$$\Delta U = Q - A, \quad (5.4)$$

где Q – полученное системой **количество теплоты**, A – совершаемая системой **работа**. Если система отдает тепло или работа совершается над системой, то знак у соответствующей величины нужно поменять на противоположный.

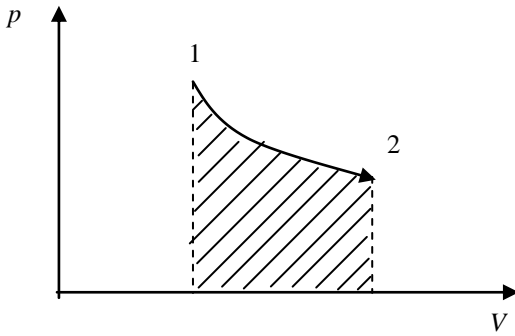


Рис. 5.1

При нагревании вещества системы от одного состояния 1 до другого 2 полученное количество теплоты можно рассчитать по формуле

$$Q = m \int_{1-2} c dT = \nu \int_{1-2} C_M dT, \quad (5.5)$$

где c - *удельная теплоемкость* вещества, C_M - его *молярная теплоемкость*. В большин-

стве задач значения c и C_M можно считать не зависящими от температуры и выносить их за знак интеграла. При этом необходимо учитывать, что количество теплоты и, соответственно, величины теплоемкостей зависят от типа процесса 1–2. Если теплообмен идет при постоянном давлении (*изобарический* процесс) или постоянном объеме (*изохорический* процесс), то разность соответствующих молярных теплоемкостей C_p и C_V определяется по *уравнению Майера*

$$C_p - C_V = R. \quad (5.6)$$

Расчет работы, совершаемой газом в процессе 1-2, производится по формуле

$$A = \int_{1-2} p dV. \quad (6.7)$$

Полученная при интегрировании величина работы также зависит от типа процесса 1–2. На графике процесса в координатах $p - V$ величина работы равна площади криволинейной трапеции под линией процесса (на рис. 5.1 заштрихованный участок). Расчет существенно облегчается, если удастся использовать уравнение соответствующего процесса. Например, при постоянстве температуры (*изотермический* процесс) можно воспользоваться уравнением Бойля-Мариотта $pV = p_1V_1$, где p_1 и V_1 параметры одного из состояний. Если же процесс идет без теплообмена, то удобно применить одно из *уравнений адиабаты*

$$pV^\gamma = p_1V_1^\gamma \quad \text{или} \quad TV^{\gamma-1} = T_1V_1^{\gamma-1}. \quad (5.8)$$

где показатель адиабаты $\gamma = \frac{C_p}{C_V} > 1$. (5.9)

Например, если состояние «1» является начальным, а состояние «2» конечным, то работа при адиабатическом процессе

$$A = \int_{1-2} p dV = p_1 V_1^\gamma \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V^\gamma} dV = \frac{p_1 V_1^\gamma}{1-\gamma} \left(\frac{1}{V_2^{\gamma-1}} - \frac{1}{V_1^{\gamma-1}} \right).$$

Расчеты работы при изобарическом и изотермическом процессах выполнены в примере 73а. Из формулы (5.7) следует, что работа при изохорическом процессе ($V = \text{const}$) равна нулю. Тогда первое начало термодинамики (5.4) можно переписать в виде

$$\Delta U = Q = \nu \int_{1-2} C_V dT = \nu C_V \Delta T. \quad (5.10)$$

Используя уравнения (5.6) и (5.9), получим полезные при решении задач формулы

$$C_p = \frac{\gamma}{\gamma-1} R \quad \text{и} \quad C_V = \frac{1}{\gamma-1} R. \quad (5.11)$$

Решение задач целесообразно начинать с построения графика процесса. При этом наиболее удобно использовать pV - диаграмму.

5.3. РАВНОВЕСНЫЕ СВОЙСТВА ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

Молекулярно-кинетическая теория позволяет установить связь между значениями макропараметров и средними значениями физических характеристик молекул. Например, давление, производимое на стенки сосуда за счет ударов молекул газа, определяется средней кинетической энергией поступательного движения молекул $\langle E_{\text{пост}} \rangle$

$$P = \frac{2}{3} n \langle E_{\text{пост}} \rangle, \quad (5.12)$$

где n - концентрация молекул газа.

Сравнение этой формулы с уравнением состояния идеального газа $P = nkT$ указывает на взаимосвязь $\langle E_{\text{пост}} \rangle$ с температурой газа

$$\langle E_{\text{пост}} \rangle = \frac{3}{2} kT. \quad (5.13)$$

В статистической физике доказывается, что средняя энергия молекулы связана с ее **числом степеней свободы** i , т.е. с числом независимых величин, с помощью которых можно задать положение молекулы, считая ее механической системой. Например, одноатомную молекулу можно смоделировать материальной точкой, положение которой в пространстве определяется тремя координатами. Тогда ее число степеней свободы равно 3. Согласно **теореме о равнораспределении энергии** по степеням свободы *при тепловом равновесии на ка-*

ждую степень свободы любой атомно-молекулярной системы приходится средняя кинетическая энергия, равная $(1/2)kT$. У многоатомных молекул, помимо кинетической энергии поступательного движения, может быть кинетическая энергия вращательного движения и механическая (кинетическая и потенциальная) энергия колебательного движения. Средняя потенциальная энергия колебательного движения молекулы равна средней кинетической энергии колебательного движения. Таким образом, средняя энергия молекулы равна

$$\langle E \rangle = \frac{i}{2}kT, \quad (5.14)$$

где i - сумма числа поступательных, числа вращательных и удвоенного числа колебательных степеней свободы молекулы (т.к. они обладают кинетической и потенциальной энергией):

$$i = n_{\text{пост}} + n_{\text{вращ}} + 2n_{\text{колеб}}. \quad (5.15)$$

В квантовой механике доказывается, что при вычислении теплоемкости газа учет степеней свободы зависит от температуры. Поступательные степени свободы необходимо учитывать практически при всех температурах. Вращательные степени свободы необходимо учитывать при не очень низких температурах (например, для молекул водорода при $T > 80$ К). Колебательные же степени свободы начинают давать ощутимый вклад в величину теплоемкости только при высоких температурах (например, для молекул водорода при $T > 6000$ К). Поэтому, при атмосферных условиях считается, что межатомные связи внутри молекул газов «жесткие» и колебательные степени свободы не учитываются. В этом случае двухатомную молекулу можно смоделировать двумя «жестко» связанными материальными точками (рис. 5.4). Ее положение в пространстве определяется тремя координатами центра масс и двумя углами вращательного движения вокруг осей $0'0'$ и $0''0''$. Вращение вокруг оси 00 для этой системы материальных точек лишено смысла. Поэтому, число степеней свободы такой молекулы равно 5. Из них три поступательных и две вращательных.

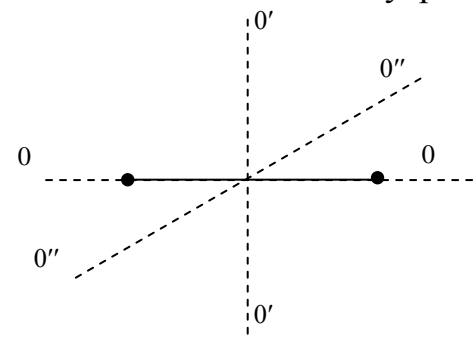


Рис. 5.4

Внутренняя энергия моля идеального газа U_M равна сумме энергий отдельных молекул. Тогда

$$U_M = \frac{i}{2}kTN_A = \frac{i}{2}RT, \quad \text{где учтено, что } kN_A = R. \quad (5.16)$$

Для идеального газа из формулы (5.10) следует, что $C_V = \left(\frac{dU_M}{dT} \right)_V$. Тогда из (5.16), (5.6) и (5.9) получим

$$C_V = \frac{i}{2}R; \quad C_P = \frac{i+2}{2}R; \quad \gamma = \frac{i+2}{i}. \quad (5.17)$$

Для лучшего понимания рассматриваемых в задачах явлений важно привлечь молекулярно-кинетические представления. Рекомендуется повторить по конспекту или учебнику вывод уравнения (5.12).

5.4. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАКСВЕЛЛА И БОЛЬЦМАНА

Из-за невозможности подробного описания состояния всех частиц в макросистемах в статической физике используют аппарат теории вероятностей. Если известна вероятность $dP(A)$ того, что значение физической величины A , характеризующей отдельную молекулу, находится в пределах от A до $A + dA$, то количество молекул dN с такими значениями величины A определяется формулой

$$dN = NdP(A) = Nf(A) dA, \quad (5.18)$$

где $f(A)$ имеет смысл плотности вероятности. Ее также называют **функцией распределения вероятностей** по величине A или просто функцией распределения.

Функция распределения молекул газа по скоростям называется **распределением Максвелла**. В частности, распределение молекул газа по значениям проекции скорости v_x имеет вид

$$f(v_x) = C_2 e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}}, \quad (5.19)$$

где m – масса отдельной молекулы. График этой функции приведен на рис. 5.5. Площадь заштрихованного участка соответствует вероятности того, что молекула обладает проекцией скорости, значение которой находится в интервале от v_{1x} до v_{2x} .

В практических задачах вместо функции распределения (5.19) часто удобнее использовать функцию распределения по модулю скорости

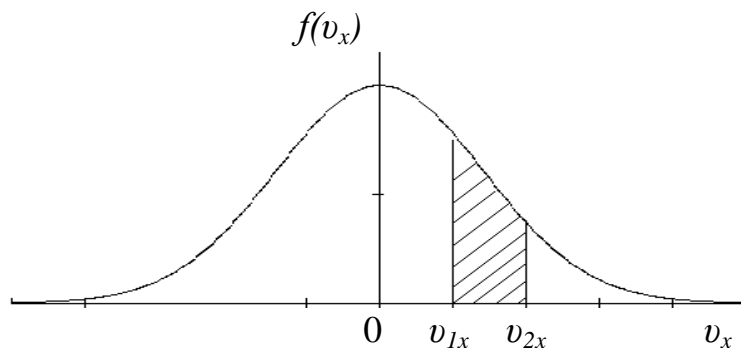


Рис. 5.5

$$F(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}}. \quad (5.20)$$

Отношение $\frac{m}{k}$ можно использовать в виде $\frac{M}{R}$.

График этой функции приведен на рис. 5.6. Максимум соответствует **наиболее вероятной скорости** молекул $v_{\text{нв}}$, которая равна

$$v_{\text{нв}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}. \quad (5.21)$$

Зная функцию распределения $f(A)$, можно найти **среднее** значение самой величины $A_{\text{ср}}$ или величины, зависящей от A , т.е. $\Phi_{\text{ср}}(A)$

$$A_{\text{ср}} = \int A f(A) dA, \quad \Phi_{\text{ср}} = \int \Phi(A) f(A) dA. \quad (5.22)$$

При этом интегрирование ведется по всей области определения величины A .

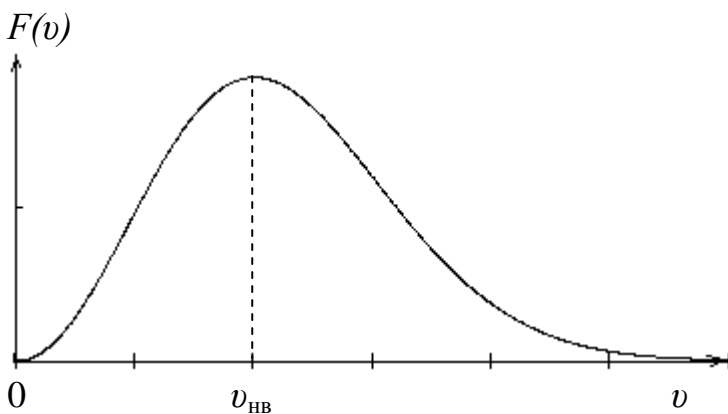


Рис. 5.6

Например, найденные таким образом **средняя скорость** $v_{\text{ср}}$ и **средняя квадратичная скорость**

$$v_{\text{ср.кв}} = \sqrt{v_{\text{ср}}^2}, \text{ равны}$$

$$v_{\text{ср}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}, \quad (5.23)$$

$$v_{\text{ср.кв}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}. \quad (5.24)$$

Функция распределения частиц по пространственным координатам в потенциальном поле сил называется **распределением Больцмана**. Например, если потенциальная энергия частиц зависит только от координаты x , то распределение Больцмана имеет вид

$$f(x) = C_1 e^{-\frac{U(x)}{kT}} = \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{U(x)}{kT}} dx} e^{-\frac{U(x)}{kT}}, \quad (5.25)$$

где $U(x)$ - потенциальная энергия частицы в точке с координатой x .

Как следствия из распределения Больцмана, можно получить:

1. **Барометрическую формулу** (зависимость атмосферного давления от высоты z в изотермических условиях)

$$p = p_0 e^{-\frac{Mgz}{RT}}, \quad (5.26)$$

где p_0 - давление воздуха при $z = 0$.

2. Формулу зависимости концентрации частиц от \vec{r} в потенциальном поле сил $U(\vec{r})$

$$n(\vec{r}) = n(\vec{r}_0) e^{-\frac{U(\vec{r})}{kT}}, \quad (5.27)$$

где $n(\vec{r}_0)$ - концентрация частиц в точке с нулевой потенциальной энергией $U(\vec{r}_0) = 0$.

5.5. ВТОРОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

Мерой вероятности осуществления какого либо макроскопического состояния системы при заданных внешних условиях является *энтропия* S , которая в статистической физике определяется как

$$S = k \ln \Omega, \quad (5.28)$$

где Ω - *статистический вес* состояния или число микросостояний, посредством которых может быть реализовано данное макросостояние.

Статистический вес и энтропию системы, состоящей из N подсистем, определяют по формулам

$$\Omega = \Omega_1 \Omega_2 \dots \Omega_N, \quad S = S_1 + S_2 + \dots + S_N. \quad (5.29)$$

Согласно одной из формулировок *второго начала термодинамики энтропия изолированной термодинамической системы может только возрастать или оставаться постоянной после достижения максимума*.

В термодинамике энтропия была введена на основе другой формулировки второго начала, которую **Р. Клаузиус** дал в виде *неравенства*

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T}, \quad (5.30)$$

где знак равенства справедлив для *равновесных (обратимых)* процессов.

Следствием этого определения являются полезные при решении задач формулы

$$Q = \int_1^2 T dS \quad \text{и} \quad \Delta S = \int_1^2 \frac{C dT}{T}, \quad (5.31)$$

где учтена связь $\delta Q = C dT$, C – теплоемкость системы.

Формулы (5.31) позволяют рассчитать теплообмен и изменение энтропии при различных процессах, в том числе происходящих в тепловых машинах. Определив количество теплоты, получаемое тепловой машиной за цикл от нагревателя Q_1 , и количество теплоты, отдаваемое за цикл холодильнику Q_2 можно рассчитать *коэффициент полезного действия* η (КПД) тепловой машины

$$\eta = \frac{A_{\text{полезн}}}{Q_{\text{получ}}} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}. \quad (5.32)$$

В реальных тепловых машинах КПД ограничен **неравенством Карно**

$$\eta \leq 1 - \frac{T_2}{T_1}, \quad (5.33)$$

где T_2 и T_1 - соответственно минимальная и максимальная температура рабочего вещества за цикл. Равенство в формуле (5.33) достигается только в **цикле Карно** (обратимом цикле, состоящем из двух изотермических и двух адиабатических процессов).

В соответствии с изложенным, задачи по данной теме подразделяются на три группы:

- задачи на расчет изменения энтропии ΔS или статистического веса Ω с использованием формул (5.28) и (5.29);
- задачи на расчет Q или ΔS в процессах с использованием формул (5.31) или (5.4), (5.5), (5.7) и (5.10);
- задачи на расчет КПД тепловых машин (термодинамических циклов) с использованием формул (5.32), (5.33), (5.4), (5.7), и (5.10).

5.6. ЭЛЕМЕНТЫ ФИЗИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ

Процесс перехода неравновесной системы к равновесному состоянию часто осуществляется за счет переноса (потоков) либо молекул, либо тепла, либо импульса и т.п. **Плотностью потока** физической величины называется ее количество, переносимое в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению переноса.

Выравнивание концентрации примесных молекул в системе называется **диффузией**. В одномерном случае плотность потока молекул j_N , вдоль направления z определяется эмпирической формулой (**первым законом Фика**)

$$j_N = -D \frac{dn}{dz}, \quad (5.34)$$

где D называется **коэффициентом диффузии**, а $\frac{dn}{dz}$ характеризует изменение (градиент) концентрации по направлению z .

Аналогично выравнивание температуры в системе сопровождается потоком тепла, плотность которого j_q определяется эмпирическим **законом теплопроводности Фурье**

$$j_q = -K \frac{dT}{dz}, \quad (5.35)$$

где K называется **коэффициентом теплопроводности**, а $\frac{dT}{dz}$ характеризует изменение температуры по направлению z .

Процесс, при котором в системе от одного участка к другому передается количество движения (импульс), называется вязкостью. Плотность потока импульса j_p определяется эмпирическим **уравнением вязкости**

$$j_p = -\eta \frac{dv}{dz}, \quad (5.36^a)$$

где η называется **коэффициентом вязкости** (или коэффициентом динамической вязкости), а $\frac{dv}{dz}$ показывает, как изменяется скорость в направлении z , перпендикулярном к направлению движения слоя жидкости или газа ($Oz \perp \vec{v}$). Обмен импульсом приводит к возникновению силы вязкого трения $F_{тр}$ между соседними слоями жидкости. Основной закон для силы вязкого трения при площади соприкосновения слоев S был установлен И. Ньютоном

$$F_{TP} = \eta \left| \frac{dv}{dz} \right| S. \quad (5.36^b)$$

Коэффициенты диффузии, теплопроводности и вязкости определяются экспериментально или оцениваются на основании молекулярно-кинетических представлений. Для газов эти оценки приводят к следующим формулам

$$D = \frac{1}{3} v_{\text{ср}} \lambda, \quad (5.37)$$

$$K = \frac{1}{3} v_{\text{ср}} \lambda \left(\frac{i}{2} kn \right) = \frac{1}{3} v_{\text{ср}} \lambda \rho c_V, \quad (5.38)$$

$$\eta = \frac{1}{3} v_{\text{ср}} \lambda \rho, \quad (5.39)$$

где $v_{\text{ср}}$ - средняя скорость теплового движения молекул ($v_{\text{ср}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$), i - число

степеней свободы молекулы газа, n - концентрация молекул, ρ - плотность газа, c_V - удельная теплоемкость газа при постоянном объеме. Среднюю длину свободного пробега молекул газа λ и частоту соударений ν можно рассчитать по формуле

$$\lambda = \frac{v_{\text{ср}}}{\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma n} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}, \quad (5.40)$$

где σ - эффективное сечение столкновений молекул, d - эффективный диаметр молекул.

Если в системе имеется локальная неоднородность по температуре или по концентрации молекул, то с течением времени она рассасывается. Для оценки характерного размера области, на границах которой температура или концентрация приблизительно в $e \approx 2,7$ раз меньше по сравнению с максимальным значением, можно использовать приближенные формулы

$$L_{\text{дифф}} \approx \sqrt{D\tau}, \quad L_{\text{тепл}} \approx \sqrt{\frac{K\tau}{\rho c_p}}, \quad (5.41)$$

где τ - время от начала "рассасывания" неоднородности, c_p - удельная теплоемкость при постоянном давлении.

ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ СТАТИСТИКИ

6.1. РАВНОВЕСНОЕ ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Равновесное электромагнитное излучение, заключенное в полости с температурой стенок T , представляет собой совокупность фотонов, распределенных по *модам* – типам волн, характеризующимся своей частотой ω , волновым вектором \vec{k} и поляризацией. Среднее число фотонов в моде $\langle n \rangle$ (заселенность моды) зависит лишь от энергии фотонов $\varepsilon_{\text{ф}} = \hbar\omega$ и от температуры стенок. Моды, характеризующиеся разным направлением распространения волн (разными \vec{k}) или разными поляризациями, при совпадающих частотах ω заселены одинаково. Это следует из *распределения Бозе-Эйнштейна*, справедливого для бозонов (частиц с целым спином), в котором следует принять значение химического потенциала равным нулю

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} . \quad (6.1)$$

В интервале частот от ω до $\omega + d\omega$ имеется $dN(\omega)$ различных мод. Величина $D \omega = \frac{dN}{d\omega}$ называется *спектральной плотностью мод* и для вакуумированной полости объемом V рассчитывается по формуле

$$D \omega = \frac{V}{\pi^2 c^3} \omega^2 . \quad (6.2)$$

Используя эти величины и формулу для энергии фотона $\varepsilon_{\text{ф}} = \hbar\omega$, можно найти среднюю энергию электромагнитного излучения в интервале частот от ω до $\omega + d\omega$

$$d\varepsilon \omega = \hbar\omega \langle n \rangle dN \omega = \hbar\omega \langle n \rangle D \omega d\omega = U(\omega) d\omega .$$

Входящая в это выражение величина $U \omega = \hbar\omega \langle n \rangle D \omega$ имеет смысл *спектральной плотности энергии электромагнитного излучения* в объеме V . Используя (6.1) и (6.2) можно записать *формулу Планка*

$$U \omega = \frac{V \hbar \omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} . \quad (6.3^a)$$

Учитывая взаимосвязь частоты ω с длиной волны λ эту формулу можно преобразовать к виду

$$U(\lambda) = \frac{8\pi hcV}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}. \quad (6.3^6)$$

При излучении с поверхности **абсолютно черного тела**, модель которого представляет собой небольшое отверстие в полости (рис. 6.1), поток энергии, испускаемый единицей площади тела (отверстия на рис. 6.1) по всем направлениям в пределах телесного угла 2π , называется **энергетической светимостью** и обозначается буквой R^* . Из этого потока на интервал длин волн $d\lambda$ придется величина $dR_\lambda^* = r_\lambda d\lambda$, где r_λ - называется **спектральной плотностью энергетической светимости** (или испускательной способностью). Она связана со спектральной плотностью энергии излучения $U(\lambda)$ соотношением

$$r_\lambda = \frac{c}{4V} U_\lambda. \quad (6.4)$$

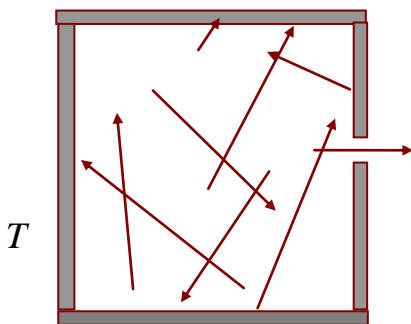


Рис. 6.1

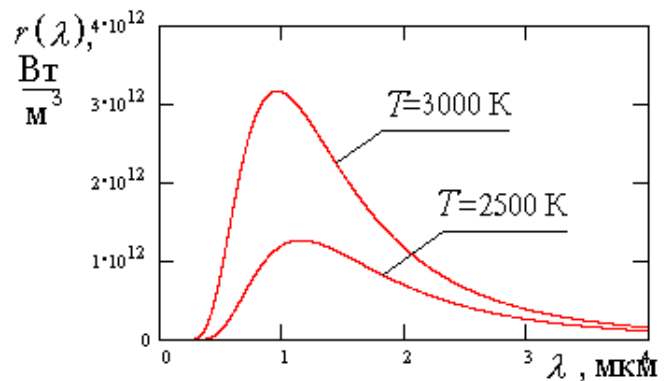


Рис. 6.2

На рис. 6.2 приведен график зависимости спектральной плотности энергетической светимости от длины волны. Интегрирование этого выражения с учетом формулы Планка по всему возможному диапазону длин волн приводит к **закону Стефана-Больцмана** для энергетической светимости абсолютно черного тела

$$R^* = \int_0^{\infty} r_\lambda d\lambda = \sigma T^4. \quad (6.5)$$

Величина $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$ называется постоянной Стефана-Больцмана. Положение максимума на графике спектральной плотности энергии электромагнитного излучения абсолютно черного тела (и на графике испускательной способности) можно определить по **закону смещения Вина**

$$T\lambda_{\max} = b, \quad (6.6)$$

где $b = 2,9 \cdot 10^{-3}$ м·К. Величина максимума спектральной плотности энергетической светимости зависит от температуры

$$r_{\max} = cT^5, \quad (6.7)$$

где $c = 1,28 \cdot 10^{-5}$ Вт/(м³·К⁵).

6.2. КОЛЕБАНИЯ КРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ РЕШЕТКИ

Колебания кристаллической решетки являются одним из основных видов внутреннего движения в твердом теле, когда составляющие его структурные частицы (атомы, молекулы, ионы) колеблются около положения равновесия - узлов кристаллической решетки. Амплитуда этих колебаний увеличивается с ростом температуры, но всегда остается значительно меньше, чем пространственный период решетки. Когда температура достигает некоторого критического значения, кристаллическая решетка разрушается, начинается процесс плавления.

При расчете энергии кристаллической решетки *П. Дебай* учел, что колебания атомов не являются независимыми. В этом случае сложное движение N упруго связанных между собой атомов, обладающих $3N$ степенями свободы и совершающих малые колебания вблизи своих равновесных положений, можно представить как суперпозицию $3N$ различных независимых друг от друга волнообразных движений атомов решетки – упругих колебаний, называемых *нормальными модами*. В соответствии с выводами квантовой механики энергия каждой моды с частотой ω может иметь только дискретные значения

$$\varepsilon_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \quad (6.8)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots, \infty$, а величина $\frac{1}{2}\hbar\omega$ характеризует *энергию нулевых колебаний*.

Квант энергии упругих колебаний $\varepsilon = \hbar\omega$ называется *фононом*. Между упругими волнами в кристаллах и электромагнитными волнами в полости существует глубокая аналогия. Среднее число фононов в одной моде с частотой ω , как и в случае с фотонами, определяется формулой

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}. \quad (6.9)$$

С учетом (6.8) и (6.9) можно записать формулу для среднего значения энергии моды с частотой ω

$$\langle \varepsilon(\omega) \rangle = \frac{1}{2} \hbar \omega + \frac{\hbar \omega}{e^{kT} - 1}. \quad (6.10)$$

В отличие от электромагнитных волн спектр фоновых мод ограничен сверху величиной ω_D , имеющей название *дебаевской частоты*. Смысл этого ограничения становится ясным, если учесть, что в кристаллах не могут существовать упругие волны, длина которых меньше расстояния между соседними атомами. Значение ω_D , определенное из требования равенства общего количества мод числу степеней свободы $3N$, рассчитывается по формуле:

$$\omega_D = \left(\frac{6\pi^2 N v_{зв}^3}{V} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (6.11)$$

где V - объем кристалла, $v_{зв}$ - скорость упругих волн в кристалле, соответствующим образом усредненная по поляризациям, частотам и направлениям.

Спектральная плотность фоновых мод $D(\omega)$ определяется схожей с (6.2) формулой, но с поправочным множителем $3/2$, который учитывает, что в твердом теле, помимо поперечных волн двух поляризаций, могут распространяться еще и продольные волны

$$D(\omega) = \frac{3V}{2\pi^2 v_{зв}^3} \omega^2. \quad (6.12)$$

С учетом формул (6.10) и (6.11) можно получить выражения для спектральной плотности энергии упругих колебаний $U(\omega)$ (типа 6.3^а) и полной энергии упругих колебаний твердого тела

$$U = \int_0^{\omega_D} U(\omega) d\omega = U_0 + \frac{9N\hbar}{\omega_D^3} \int_0^{\omega_D} \frac{\omega^3 d\omega}{e^{kT} - 1}. \quad (6.13)$$

где U_0 - энергия нулевых колебаний кристаллической решетки. Анализ приведенного соотношения становится нагляднее, если для температуры T ввести масштабную единицу, называемую *температурой Дебая*:

$$\vartheta_D = \frac{\hbar \omega_D}{k}. \quad (6.14)$$

Наибольший интерес представляют результаты вычисления в двух предельных случаях:

$$\text{– при высоких температурах } (T \gg \vartheta_D) \quad U \approx U_0 + 3NkT, \quad (6.15)$$

$$\text{– при низких температурах } (T \ll \vartheta_D) \quad U \approx U_0 + \frac{3\pi^4 NkT^4}{5\vartheta_D^3}. \quad (6.16)$$

С их помощью можно определить соответствующие теплоемкости твердого тела:

$$\text{– при } T \gg \vartheta_D \quad C_V \approx 3Nk \quad (\text{закон Дюлонга-Пти}), \quad (6.17)$$

$$- \text{при } T \ll \vartheta_D \quad C_V \approx \frac{12\pi^4 Nk}{5} \left(\frac{T}{\vartheta_D} \right)^3 \quad (\text{закон } T^3 \text{ Дебая}). \quad (6.18)$$

6.3. ЭЛЕКТРОНЫ В МЕТАЛЛАХ И ПОЛУПРОВОДНИКАХ

Определение энергетического спектра электронов в реальных кристаллах с учетом симметрии и периодичности силового поля является сложной задачей квантовой теории. Опыт показывает, что в металлах валентные электроны атомов коллективизируются и образуют своего рода газ отрицательных частиц обволакивающий положительно заряженные ионы кристаллической решетки. В первом приближении силы притяжения, действующие со стороны ионов на эти электроны, можно усреднить и представить в виде постоянного потенциала $U_0 < 0$. Такие электроны могут свободно перемещаться в области, ограниченной размерами кристалла, что дает основание применить к ним результаты решения задачи о квантовании энергии частицы, находящейся в бесконечно глубокой потенциальной яме. В этом случае, для образца металла в виде куба с объемом V формула для расчета числа электронных состояний ν_E , энергия которых не превышает некоторого значения E имеет вид

$$\nu_E = \frac{8}{3} \pi V \frac{2m_e}{h^3} \frac{E^{\frac{3}{2}}}{2}. \quad (6.19)$$

Плотность состояний g_E (число состояний, приходящееся на единичный интервал энергии) равна

$$g_E = \frac{d\nu_E}{dE} = 4\pi V \frac{2m_e}{h^3} \frac{3}{2} \sqrt{E}. \quad (6.20)$$

Электроны являются *фермионами*, так как подчиняются *принципу Паули* - в каждом квантовом состоянии может находиться не более одного электрона. В общем случае произвольной температуры электроны заселяют состояния в соответствии с *распределением Ферми-Дирака*

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{e^{\frac{E_i - \mu}{kT}} + 1}. \quad (6.21)$$

Величина $\langle n_i \rangle$ представляет собой среднее число электронов, находящихся в i -ом квантовом состоянии с энергией E_i . Параметр μ , носящий название химический потенциал, в общем случае слабо зависит от температуры. В физике твердого тела химический потенциал μ часто называют *уровнем Ферми*. При нулевой температуре в каждом квантовом состоянии с энергией меньше

некоторого значения E_F находится по одному электрону (рис. 6.4). В состояниях с большей энергией электроны при нулевой температуре отсутствуют. Величина E_F называется **энергией Ферми**. При $E_i = \mu$ вероятность заполнения состояния равна 0,5. Значение μ при нулевой температуре соответствует энергии Ферми E_F . Пренебрегая слабой зависимостью химического потенциала от температуры, распределение (6.21) можно переписать в виде

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{kT}} + 1}. \quad (6.22)$$

График этого распределения при $kT = 0,05 E_F$ приведен на рис. 6.5.

В металлах с концентрацией валентных электронов n значение энергии Ферми можно найти по формуле

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} 3\pi^2 n^{\frac{2}{3}}, \quad (6.23)$$

а среднее значение энергии электронов $\langle E \rangle = \frac{3}{5} E_F$. (6.24)

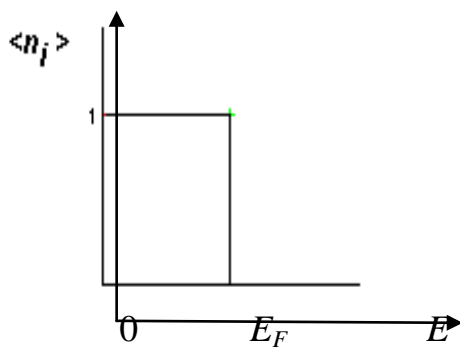


Рис. 6.4

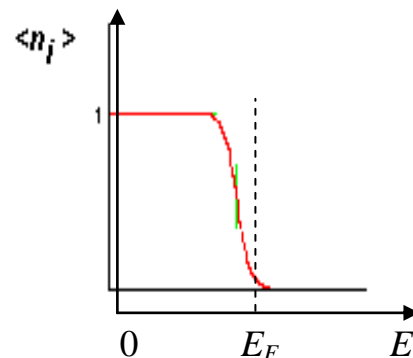


Рис. 6.5

Таким образом, в приближении свободных электронов в металлах спектр возможных значений энергии валентных электронов является квазинепрерывным, а заселенность уровней определяется распределением Ферми–Дирака. Если же при решении уравнения Шредингера учитывать периодичность силового поля ионов кристаллической решетки, то в результате получится, что спектр значений энергии электронов состоит из **разрешенных** – 1, 2, 3 и **запрещенных зон** шириной $\Delta E - 4, 5$ (рис. 6.6).

Разрешенная зона, в которой при температуре $T = 0$ К находятся валентные электроны атомов, называется валентной зоной. В зонах выше валентной при температуре $T = 0$ К электроны отсутствуют. Такие зоны называются свободными. В зависимости от степени заполнения валентной зоны и ширины запрещенной зоны ΔE между валентной и свободной химически чистые кристаллы можно разбить на три класса: металлы, диэлектрики и полупроводники. В **металлах** электроны заселяют нижнюю часть валентной зоны. При воздействии электрического поля часть электронов переходит в такие свободные квантовые

состояния этой же зоны, которые предполагают движение в направлении воздействия внешнего поля.

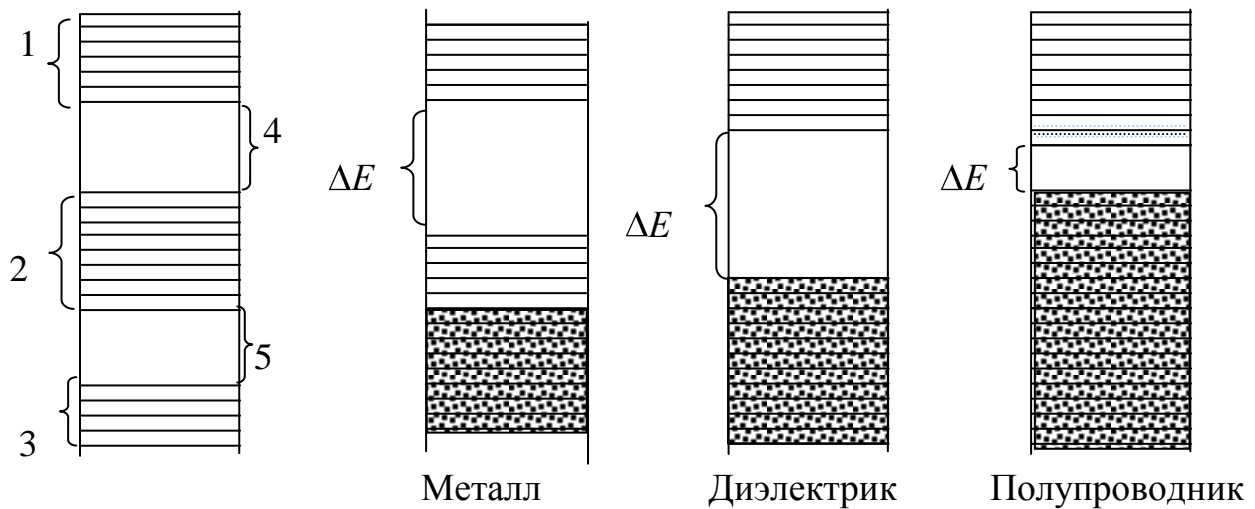


Рис. 6.6

Именно эти электроны и становятся теми упорядоченно движущимися рядами, которые создают электрический ток. В **диэлектриках** все уровни энергии в валентной зоне при температуре $T = 0$ К заполнены, а ширина запрещенной зоны ΔE настолько велика, что в обычных температурных условиях при воздействии электрического поля вероятность перехода электронов на более высокие энергетические уровни в свободной зоне практически нулевая, и электрический ток в диэлектриках не возникает. В химически **чистых полупроводниках** характер заполнения зон при температуре $T = 0$ К отличается от предыдущего случая только тем, что ширина запрещенной зоны ΔE относительно невелика и в обычных условиях энергия теплового движения оказывается достаточной для того, чтобы вероятность перехода электронов в свободную зону стала ощутимой. Перешедшие в свободную зону электроны, как и электроны в металлах, могут получить дополнительную энергию от электрического поля и создать электрический ток. В любом случае распределение электронов по энергетическим уровням в зонах описывается функцией Ферми-Дирака (6.22). При этом можно приближенно считать, что в чистых полупроводниках уровень Ферми находится посередине запрещенной зоны. Используя функцию распределения Ферми-Дирака (6.22), можно получить выражение для концентрации электронов проводимости n_e в чистом полупроводнике

$$n_e \sim e^{-\frac{\Delta E}{2kT}} \quad (6.25)$$

Поскольку электропроводность σ пропорциональна концентрации n_e носителей тока, можно сделать вывод, что для чистых полупроводников она изменяется по закону

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{\Delta E}{2kT}}, \text{ где } \sigma_0 \approx \text{const.} \quad (6.26)$$

ФИЗИКА АТОМНОГО ЯДРА И ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

7.1. ХАРАКТЕРИСТИКИ АТОМНЫХ ЯДЕР

Атомные ядра состоят из протонов и нейтронов, которые имеют одинаковый спин $\hbar/2$ и почти равные массы. Общее название этих частиц - *нуклоны*. Физические свойства ядра определяются *зарядовым числом (порядковым номером) Z* , равным числу протонов в атомном ядре, и числом нейтронов N . Число A всех нуклонов в ядре называется *массовым числом*. Очевидно, что $A = Z + N$. Для описания ядра принято слева от символа химического элемента указывать сверху число нуклонов A , а снизу – заряд ядра Z . Например, ${}_{13}^{27}\text{Al}$ - ядро атома алюминия, имеющего число протонов $Z = 13$ и массовое число $A = 27$.

В первом приближении форму атомного ядра можно смоделировать в виде шара, радиус которого определяется по эмпирической формуле

$$R = 1,3 \cdot 10^{-15} A^{\frac{1}{3}} \text{ м.} \quad (7.1)$$

Объединение нуклонов в ядро атома осуществляется посредством ядерных сил, обусловленных *сильным взаимодействием* между нуклонами. При этом освобождается энергия, соответствующая *энергии связи ядра $E_{\text{св}}$* . Для разрушения ядра на составляющие его нуклоны необходимо затратить энергию, равную энергии связи. Согласно уравнению эквивалентности массы-энергии, энергия покоя ядра $E_{\text{я}} = M_{\text{я}}c^2$, а энергия покоя составляющих его нуклонов равна $(Zm_p + Nm_n)c^2$. Следовательно:

$$E_{\text{св}} = (Zm_p + Nm_n - M_{\text{яд}})c^2, \quad (7.2)$$

где m_p - масса протона, m_n - масса нейтрона, $M_{\text{яд}}$ масса ядра атома.

Отсюда видно, что этой энергии связи соответствует разность масс между суммарной массой отдельных нуклонов и массой ядра атома, которая называется *дефектом масс*

$$\Delta m = \frac{E_{\text{св}}}{c^2}. \quad (7.3)$$

Энергию связи ядра атома можно рассчитать также с помощью полуэмпирической *формулы Вейцеккера*

$$E_{\text{св}} = C_{\text{об}}A - C_{\text{пов}}A^{\frac{2}{3}} - C_{\text{кул}}Z^2A^{-\frac{1}{3}} - C_{\text{сим}}\frac{N - Z}{A} + C_{\text{сп}}A^{-\frac{3}{4}}\delta \quad (7.4)$$

где слагаемые имеют следующий физический смысл:

$C_{об}A = 15,75A$ МэВ – энергия связи короткодействующими ядерными силами,

$C_{пов}A^{\frac{2}{3}} = 17,8A^{\frac{2}{3}}$ МэВ – уменьшение энергии связи вследствие ненасыщенности связей поверхностных нуклонов,

$C_{кул}Z^2A^{-\frac{1}{3}} = 0,71Z^2A^{-\frac{1}{3}}$ МэВ – уменьшение энергии связи из-за кулоновского отталкивания,

$C_{сим} \frac{N-Z}{A} = 23,7 \frac{N-Z}{A}$ МэВ – энергия симметрии, т.е. уменьшение энергии при отклонении от равенства $N = Z$,

$C_{сп}A^{\frac{3}{4}}\delta = 34A^{\frac{3}{4}}\delta$ МэВ – изменение энергии связи, связанное со спариванием одинаковых нуклонов в ядре, т.е. объединением в пары, как протонов, так и нейтронов,

$$\delta = \begin{cases} +1 & \text{для чётно - чётных ядер (чётное } N \text{ и чётное } Z), \\ 0 & \text{для ядер атомов с нечётным } A, \\ -1 & \text{для нечётно - нечётных ядер (нечётные } N \text{ и } Z). \end{cases}$$

Замечание: необходимо обратить особое внимание на то, что энергия связи отражает уменьшение массы ядра по сравнению с суммарной массой составляющих ядро нуклонов.

7.2. РАДИОАКТИВНОСТЬ.

ПРОХОЖДЕНИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ ЧЕРЕЗ ВЕЩЕСТВО

Радиоактивностью называется свойство атомных ядер самопроизвольно (спонтанно) изменять свой состав (заряд, массовое число). При этом испускаются элементарные частицы или ядерные фрагменты. К числу радиоактивных процессов относят: испускание ядром электрона (β^- – распад), испускание позитрона (β^+ – распад), захват ядром электрона из оболочки атома (K – захват), спонтанное деление ядра, вылет ядра гелия (α – распад) и другие виды распадов. Радиоактивный процесс может происходить, если превращение является энергетически выгодным и часто сопровождается излучением γ - квантов. В процессе радиоактивного распада выполняются **законы сохранения** энергии и электрического заряда. Кроме того, должны выполняться и другие законы сохранения (импульса, момента импульса и т.п.).

При α - распаде из ядра спонтанно вылетает α - частица (ядро атома гелия ${}^4_2\text{He}$). В результате зарядовое и массовое числа ядра уменьшаются соответ-

венно на две и четыре единицы, и образуется новый элемент, который в периодической системе находится на две позиции левее исходного элемента. При β^- – распаде из ядра вылетает электрон (и антинейтрино). Массовое число ядра не изменяется, а зарядовое возрастает на единицу. Поэтому образуется ядро следующего по порядку элемента в периодической системе.

Из вероятностного характера этих процессов следует **основной закон радиоактивного распада**

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (7.5)$$

где N - число нераспавшихся атомов к моменту времени t , N_0 - первоначальное число радиоактивных атомов, λ - постоянная радиоактивного распада, имеющая смысл вероятности распада ядра за единицу времени. На практике используется понятие периода полураспада - времени, в течение которого количество нераспавшихся атомов уменьшается в два раза. Период полураспада связан с постоянной распада соотношением

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda}. \quad (7.6)$$

С учетом этого основной закон радиоактивного распада (7.5) записывается в виде

$$N = N_0 e^{-\ln 2 \frac{t}{T_{1/2}}} = N_0 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}. \quad (7.7)$$

Число распадов радиоактивных ядер за единицу времени называется активностью. Очевидно, что **активность** можно представить в виде

$$A = \lambda N. \quad (7.8)$$

В системе СИ единицей активности является **беккерель** (Бк) - 1 распад в секунду.

При прохождении радиоактивного излучения через вещество плотность его потока уменьшается. Закон ослабления пучка моноэнергетического γ – излучения или β – частиц имеет вид

$$j = j_0 e^{-\mu x}, \quad (7.9)$$

где j_0 - плотность потока частиц, падающих на поверхность

вещества, j - плотность потока на глубине x , μ – **линейный коэффициент ослабления**. Интенсивность γ – излучения I после прохождения слоя ве-

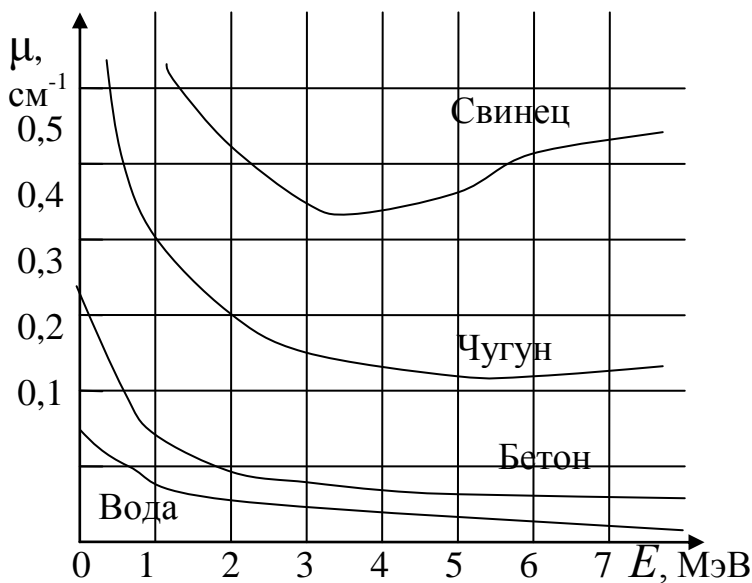


Рис. 7.1

щества толщиной x можно определить по формуле

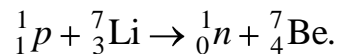
$$I = I_0 e^{-\mu x}, \quad (7.10)$$

где I_0 - интенсивность γ - излучения, падающего на поверхность вещества.

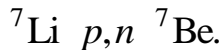
На рис. 7.1 приведена зависимость линейного коэффициента ослабления от энергии γ – фотонов для разных веществ.

7.3. ЯДЕРНЫЕ РЕАКЦИИ

Ядерной реакцией называется процесс, идущий при столкновении ядра или элементарной частицы с другим ядром, в результате которого изменяется нуклонный состав исходного ядра, а также появляются новые частицы среди продуктов реакции. При записи ядерной реакции слева пишется сумма исходных частиц, затем ставится стрелка, а за ней сумма конечных продуктов. Например,



Эту же реакцию можно записать в более короткой символической форме

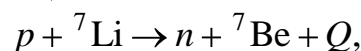


При рассмотрении ядерных реакций используются точные **законы сохранения**: энергии, импульса, момента импульса, электрического заряда и другие. Если в качестве элементарных частиц в ядерной реакции фигурируют только нейтроны, протоны и γ – кванты, то в процессе реакции сохраняется и число нуклонов. Тогда должны соблюдаться баланс нейтронов и баланс протонов в начальном и конечном состояниях. Для реакции ${}^7\text{Li} \xrightarrow{p,n} {}^7\text{Be}$ получим:

- число протонов $3 + 1 = 0 + 4$;
- число нейтронов $4 + 0 = 1 + 3$.

Пользуясь этим правилом можно идентифицировать одного из участников реакции, зная остальных. Достаточно частыми участниками ядерных реакций являются α – частицы (${}^4\text{He}$ - ядра гелия), дейтроны (${}^2\text{H}$ - ядра тяжелого изотопа водорода, содержащие кроме протона по одному нейтрону) и тритоны (${}^3\text{H}$ - ядра сверхтяжелого изотопа водорода, содержащие кроме протона два нейтрона).

Разность энергий покоя начальных и конечных частиц определяет энергию реакции. Она может быть как больше нуля, так и меньше нуля. В более полной форме рассмотренная выше реакция записывается так:



где Q – энергия реакции. Для ее расчета с помощью таблиц свойств ядер сравнивают разность суммарной массы исходных участников реакции и суммарной массы продуктов реакции. Затем полученная разность масс (обычно выражен-

ную в а.е.м.) пересчитывается в энергетические единицы (1 а.е.м. соответствует 931,5 МэВ).

7.4. ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

В современной физике элементарными называются частицы, не являющиеся атомами или их ядрами (исключение составляет протон). Кроме протонов к ним относятся фотоны, электроны, нейтроны, мезоны, гипероны – всего более 350 названий частиц. Благодаря новым открытиям их число продолжает расти. Микроскопические массы и размеры элементарных частиц обуславливают квантовый характер их поведения. Поэтому каждая элементарная частица описывается набором дискретных значений определенных физических величин. В ряде случаев эти дискретные значения выражаются через целые или дробные числа (их называют *квантовыми числами*) и некоторый общий множитель – единицу измерения. При описании элементарных частиц часто задают только эти числа, опуская единицы измерения. Общими характеристиками всех элементарных частиц являются масса m , время жизни τ , спин J и электрический заряд q . В зависимости от времени жизни элементарные частицы делятся на стабильные ($\tau > 10^{21}$ лет), квазистабильные ($\tau > 10^{-20}$ с) и нестабильные ($\tau \approx 10^{-22} - 10^{-24}$ с). Большинство частиц имеют *античастицы* («двойники»), отличающиеся от них лишь знаком некоторых характеристик взаимодействия (например, электрического заряда, магнитного момента). Обозначаются античастицы либо с противоположным знаком заряда (электрон e^- , позитрон e^+), либо над символом частицы ставится знак тильда (протон p , антипротон \tilde{p}).

Существует много возможностей для систематики элементарных частиц: по времени жизни, по массе, по наличию или отсутствию электрического заряда, по участию в фундаментальных взаимодействиях (сильном, электромагнитном и слабом) и т.п. Обычно элементарные частицы подразделяются на три основные группы (таблица 7.5).

Таблица 7.5. Классификация элементарных частиц.

Классы частиц		Тип взаимодействия	Спин	Лептонный заряд	Барионный заряд
Фотон		Электромагнитное	1	0	0
Лептоны		Слабое и электромагнитное	$\frac{1}{2}$	1	0
Адроны	Мезоны	Сильное, слабое и электромагнитное	Целый	0	0
	Барионы	Сильное, слабое и электромагнитное	Полуцелый	0	1

В одну из них выделяется только одна частица – фотон, который участвует только в электромагнитном взаимодействии. Вторую группу образуют частицы, которые участвуют только в электромагнитном и слабом взаимодействии. Их называют *лептонами*. К третьей группе относятся *адроны*, характеризующиеся наличием у них (наряду со слабым и электромагнитным) сильного взаимодействия. Наличие гравитационного взаимодействия у всех элементарных частиц подразумевается.

Лептоны

Все лептоны не участвуют в сильном взаимодействии и имеют спин $\frac{1}{2}\hbar$ (таблица 7.6). Известно три заряженных лептона: электрон (e^-), мюон (μ^-) и таон (τ^-). Каждому из них соответствует нейтральная частица: электронное нейтрино (ν_e), мюонное нейтрино (ν_μ), таонное нейтрино (ν_τ). Кроме того, у каждого лептона имеется антилептон. Всем лептонам приписывается свой лептонный заряд: электрону и электронному нейтрино $L_e = 1$, мюону и его нейтрино $L_\mu = 1$, таону и его нейтрино $L_\tau = 1$. Для соответствующих античастиц лептонные заряды имеют противоположный знак. Считается, что во всех без исключения взаимодействиях соблюдаются *законы сохранения лептонных зарядов*.

Адроны

Как уже отмечалось, адроны участвуют в сильном, слабом и электромагнитном взаимодействии. Принято подразделять адроны на две подгруппы: мезоны и барионы. *Мезонами* называются адроны с целыми спинами (т.е. бозоны). У *барионов* спин полуцелый. Кроме того барионам приписывается барионный заряд $B = 1$, антибарионам $B = -1$. У всех остальных частиц $B = 0$. Для всех процессов, протекающих с участием барионов и антибарионов выполняется *закон сохранения барионного заряда*.

Все адроны разбиваются на небольшие семейства – изомультиплеты, членам которых приписывается одинаковое значение *изоспина* T . Члены изомультиплета различаются значением *проекции изоспина* T_z , изменяющейся в пределах мультиплета от $-T$ до $+T$. При сильных взаимодействиях выполняется *закон сохранения изоспина* и *закон сохранения проекции изоспина*.

В 50-х годах прошлого века были открыты так называемые странные адроны. В связи с их странным по тем временам поведением для адронов ввели еще одно квантовое число – *странность* S . *Закон сохранения странности* выполняется только при сильных взаимодействиях.

Смысл введённых квантовых чисел в том, что они сохраняются в определённых классах взаимопревращений частиц. Во всех фундаментальных взаимодействиях частиц сохраняются энергия, импульс, момент импульса, электрический заряд (q), лептонные заряды (L_e, L_μ, L_τ) и барионный заряд (B). В

процессах взаимопревращений частиц, вызванных сильным взаимодействием, сохраняются также изоспин (T) и его проекция (T_z), странность (S), очарование (C) и другие квантовые числа.

Таблица 7.6. Квантовые числа некоторых элементарных частиц (античастицы имеют одинаковые с частицей значения спина, изоспина, но противоположные по знаку значения зарядов q , L и B , а также T_z и S).

Классы	Частицы	Символ частицы и античастицы	Спин \hbar	Заряды					Изоспин		Странность S	
				q/e	L_e	L_μ	L_τ	B	T	T_z		
Фотон			1	0	0	0	0	0	-	-	-	
Лептоны	Электрон	e^-	$\frac{1}{2}$	-1	+1	0	0	0	-	-	-	
	Мюон	μ^-	$\frac{1}{2}$	-1	0	+1	0	0	-	-	-	
	Тау	τ^-	$\frac{1}{2}$	-1	0	0	+1	0	-	-	-	
	Нейтрино	ν_e		$\frac{1}{2}$	0	+1	0	0	0	-	-	-
		ν_μ		$\frac{1}{2}$	0	0	+1	0	0	-	-	-
ν_τ			$\frac{1}{2}$	0	0	0	+1	0	-	-	-	
Мезоны	Пи-мезоны	π^0	0	0	0			0	1	0	0	
		$\pi^+ \pi^-$	0	+1	0			0	1	+1	0	
	Ка-мезоны	$K^+ K^-$	0	+1	0			0	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	+1	
		$K^0 \bar{K}^0$	0	0	0			0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	+1	
Барионы	Протон	$p \bar{p}$	$\frac{1}{2}$	+1	0			+1	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	0	
	Нейтрон	$n \bar{n}$	$\frac{1}{2}$	0	0			+1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	
	Лямбда-гиперон	$\Lambda^0 \bar{\Lambda}^0$	$\frac{1}{2}$	0	0			+1	0	0	-1	
	Сигма-гипероны	$\Sigma^+ \bar{\Sigma}^+$	$\frac{1}{2}$	+1	0			+1	1	+1	-1	
		$\Sigma^0 \bar{\Sigma}^0$	$\frac{1}{2}$	0	0			+1	1	0	-1	
		$\Sigma^- \bar{\Sigma}^-$	$\frac{1}{2}$	-1	0			+1	1	-1	-1	
	Кси-гипероны	$\Xi^0 \bar{\Xi}^0$	$\frac{1}{2}$	0	0			+1	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	-2	
		$\Xi^- \bar{\Xi}^-$	$\frac{1}{2}$	-1	0			+1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-2	
Омега-гиперон	$\Omega^- \bar{\Omega}^-$	$\frac{3}{2}$	-1	0			+1	0	0	-3		

Кварки

Согласно современным представлениям все адроны состоят из кварков (Q) – дробнозаряженных фундаментальных частиц. Имеется 6 сортов (или «арома-

тов») кварков (u, d, s, c, t, b). Значения основных квантовых чисел первых четырех кварков и их антикварков приведены в таблице 7.7. Кварковая гипотеза позволила систематизировать известные частицы, объяснить их свойства и предсказать ряд новых частиц.

Таблица 7.7. Основные квантовые числа кварков

Наименование кварка	Символ	Заряд q/e	Спин \hbar	B	T	T_z	S	C
Верхний (u)	u	$+2/3$	$1/2$	$1/3$	$1/2$	$1/2$	0	0
Нижний (d)	d	$-1/3$	$1/2$	$1/3$	$1/2$	$-1/2$	0	0
Странный (s)	s	$-1/3$	$1/2$	$1/3$	0	0	-1	0
Очарованный (c)	c	$+2/3$	$1/2$	$1/3$	0	0	0	1
Антикварки	\bar{u}	$-2/3$	$1/2$	$-1/3$	$-1/2$	$-1/2$	0	0
	\bar{d}	$+1/3$	$1/2$	$-1/3$	$-1/2$	$1/2$	0	0
	\bar{s}	$+1/3$	$1/2$	$-1/3$	0	0	1	0
	\bar{c}	$-2/3$	$1/2$	$-1/3$	0	0	0	-1

Каждый мезон M строится из одного кварка Q и одного антикварка \bar{Q} , каждый барион B – из трёх кварков:

$$M = Q \bar{Q}, B = Q Q Q. \quad (7.11)$$

В состав обычных адронов входят только кварки u и d , странные адроны включают еще один или несколько кварков s .