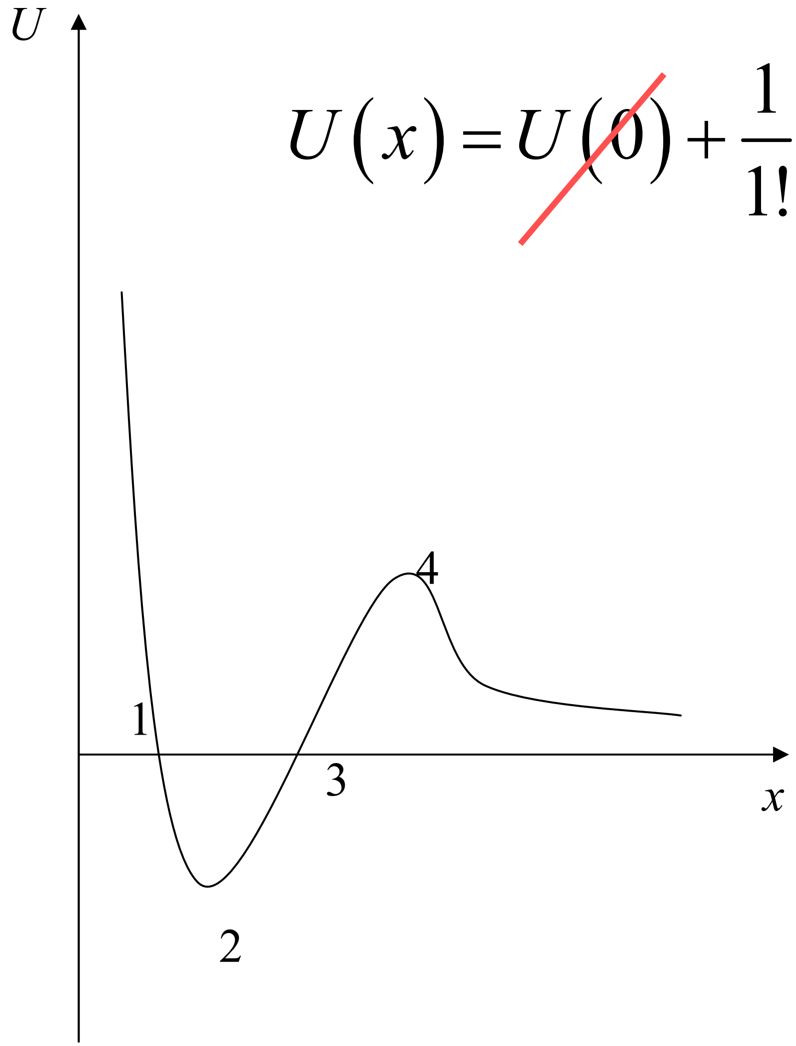
Тема 8. Механические колебания

8.1. Свободные или собственные колебания

$$U = U(x)$$



$$U(x) = \cancel{U(0)} + \cancel{\frac{1}{1!}U'(0)x} + \frac{1}{2!}U''(0)x^2 + \cancel{\ldots}$$

$$U''(0) = k$$

$$\boxed{U(x) = \frac{kx^2}{2}}$$

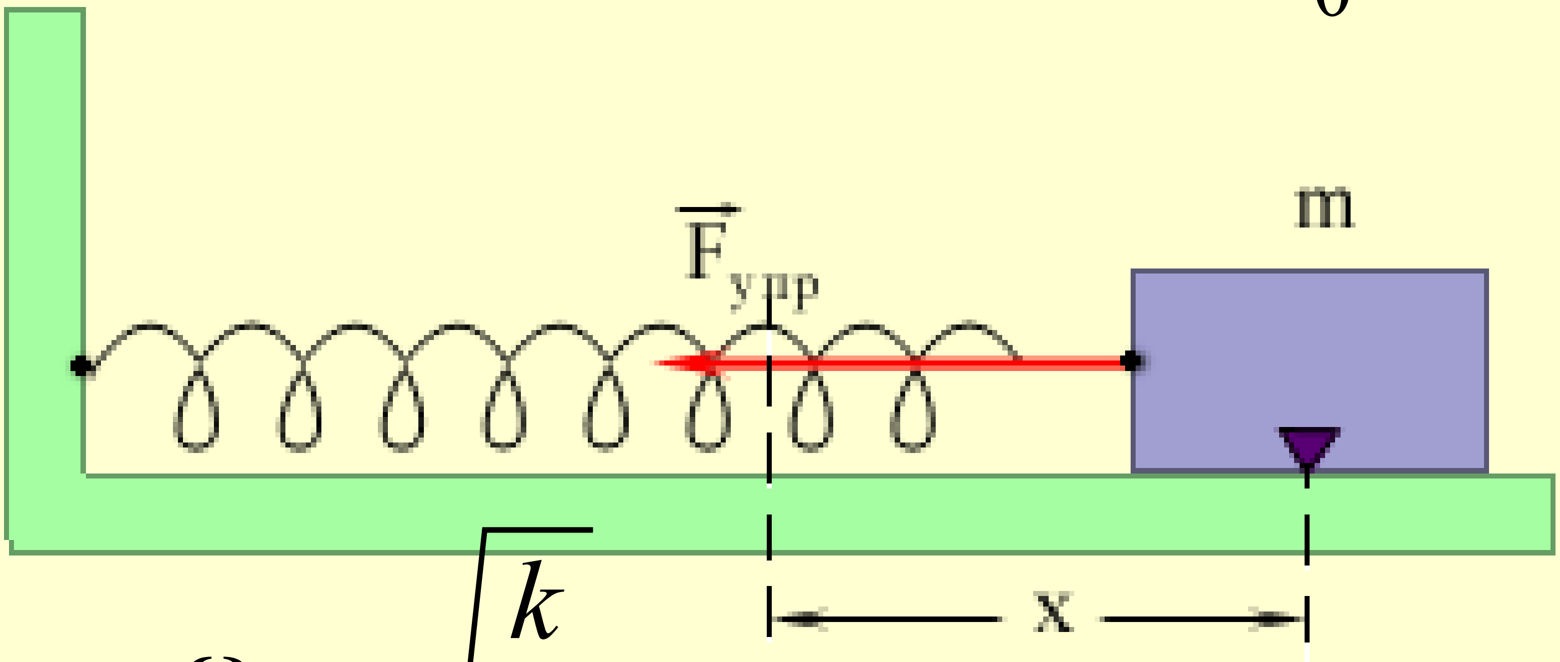
$$\vec{F} = -\operatorname{grad} U$$

$$\boxed{F_x = -kx}$$

Квазиупругая сила
(возвращающая сила)

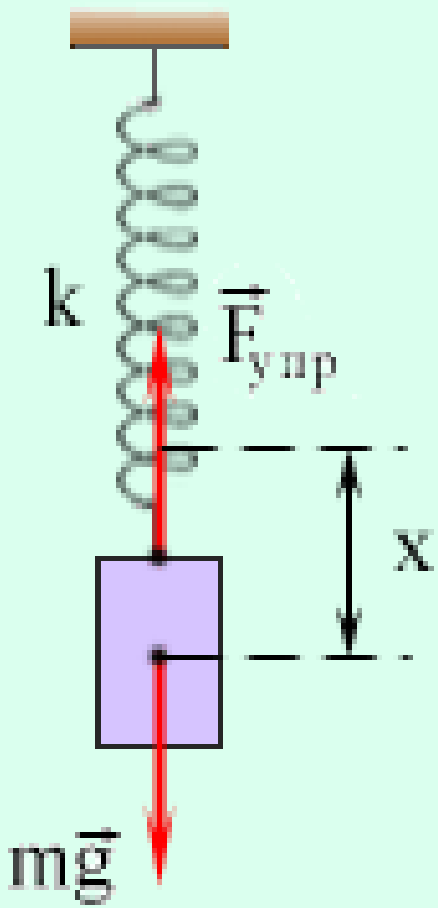
Колебания груза на пружине. Трения нет

$$m\ddot{x} = -kx \qquad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$



$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Механические колебательные системы



$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

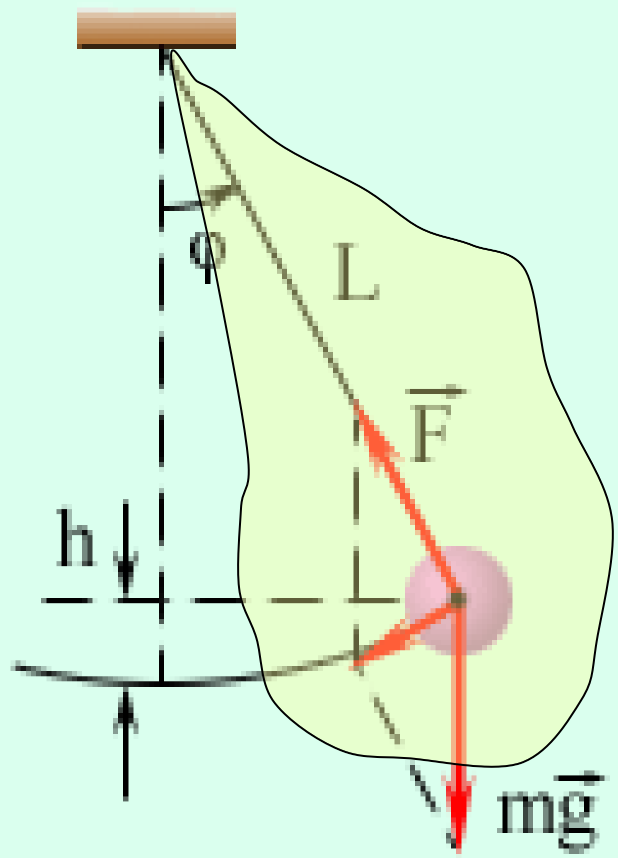
Физический маятник

$$I\ddot{\varphi} = -mgL\sin\varphi$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgL}{I}}$$

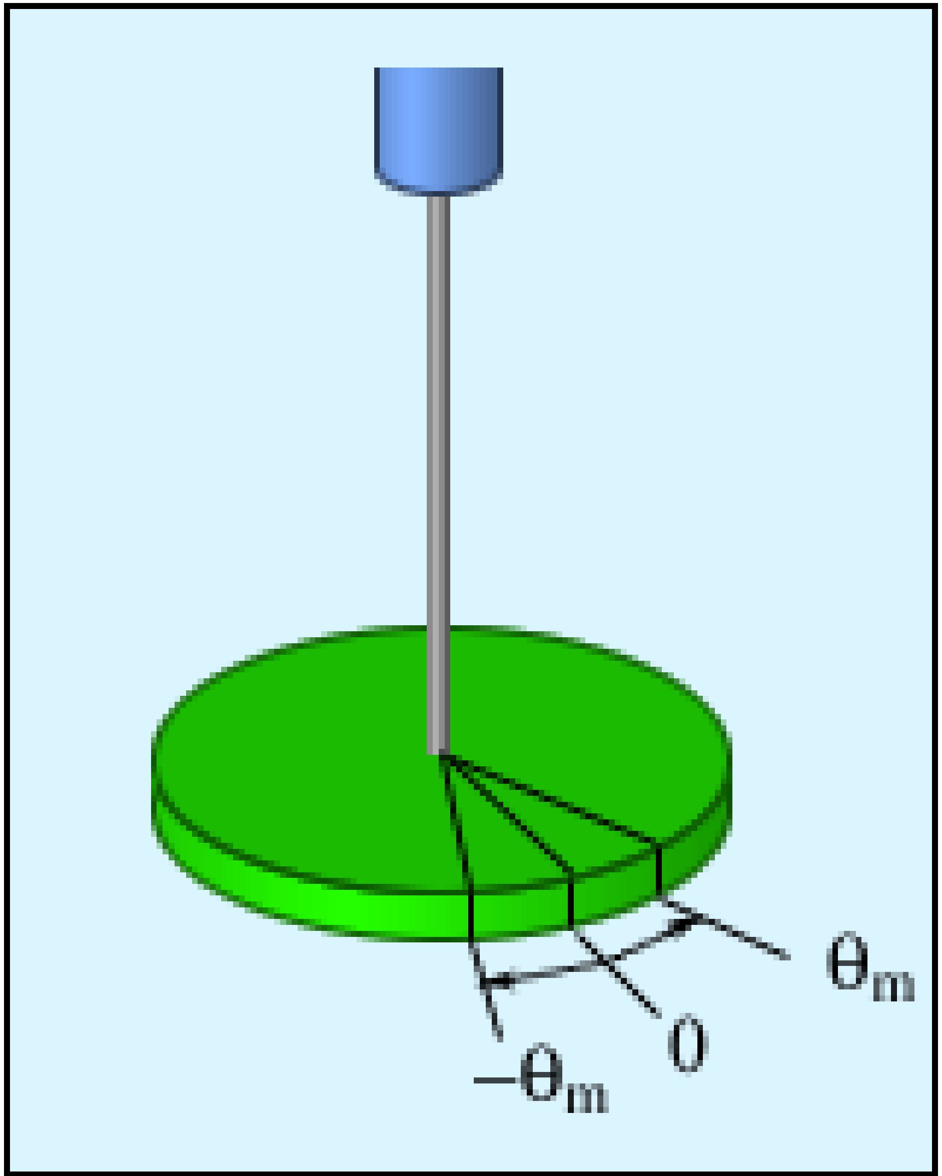
Для математического маятника

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgL}{mL^2}} = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

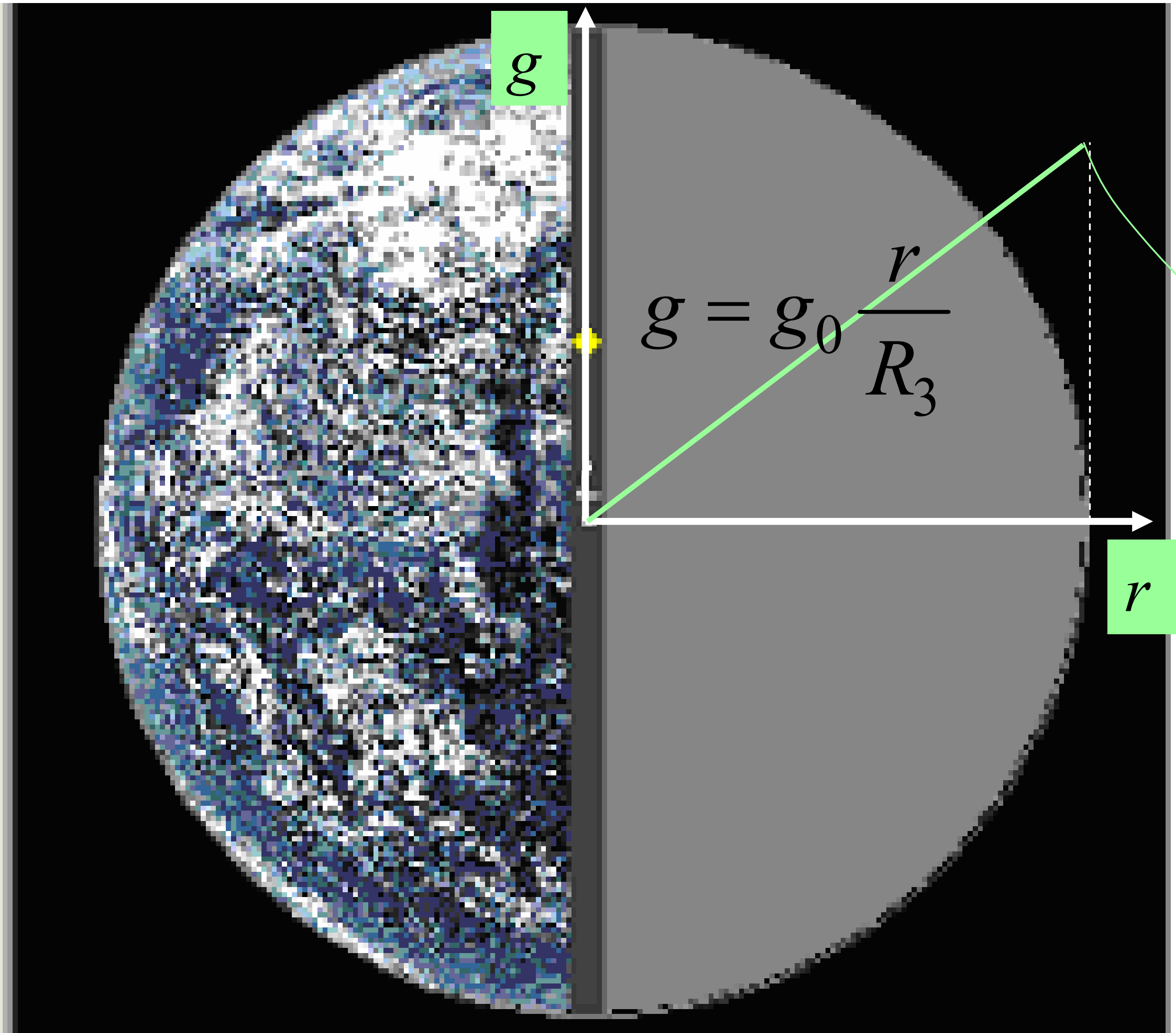


Крутильный маятник

$$I\ddot{\theta} = -G\vartheta$$



Гравитационный маятник



$$g = g_0 \frac{R_3^2}{r^2}$$

$$\cancel{m}\ddot{r} = -\cancel{m}\frac{g_0}{R_3} r$$

$$\omega_0^2 = \frac{g_0}{R_3}$$

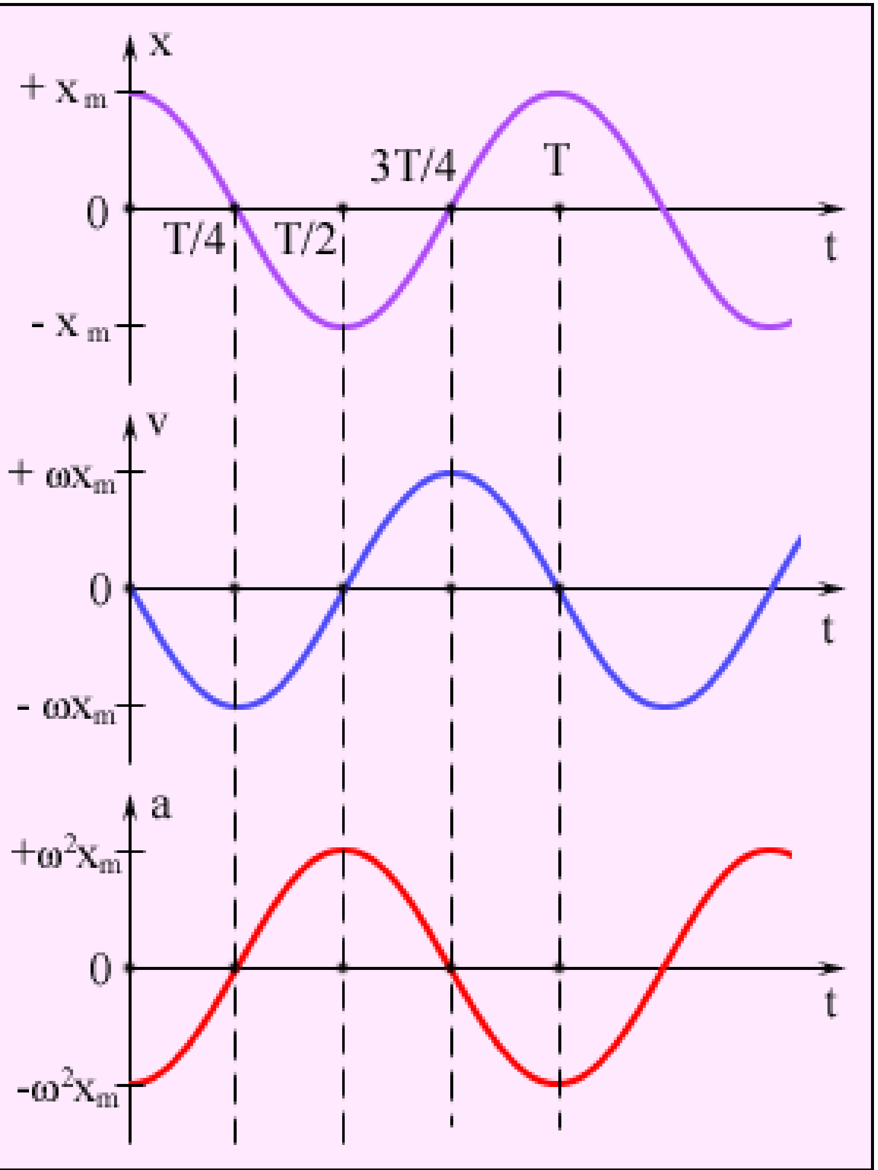
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R_3}{g_0}}$$

Решение линейного однородного дифференциального уравнения

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\boxed{x = A\cos\left(\omega_0 t + \varphi\right)}$$

Графики координаты $x(t)$, скорости $\upsilon(t)$ и ускорения $a(t)$ тела, совершающего гармонические колебания.

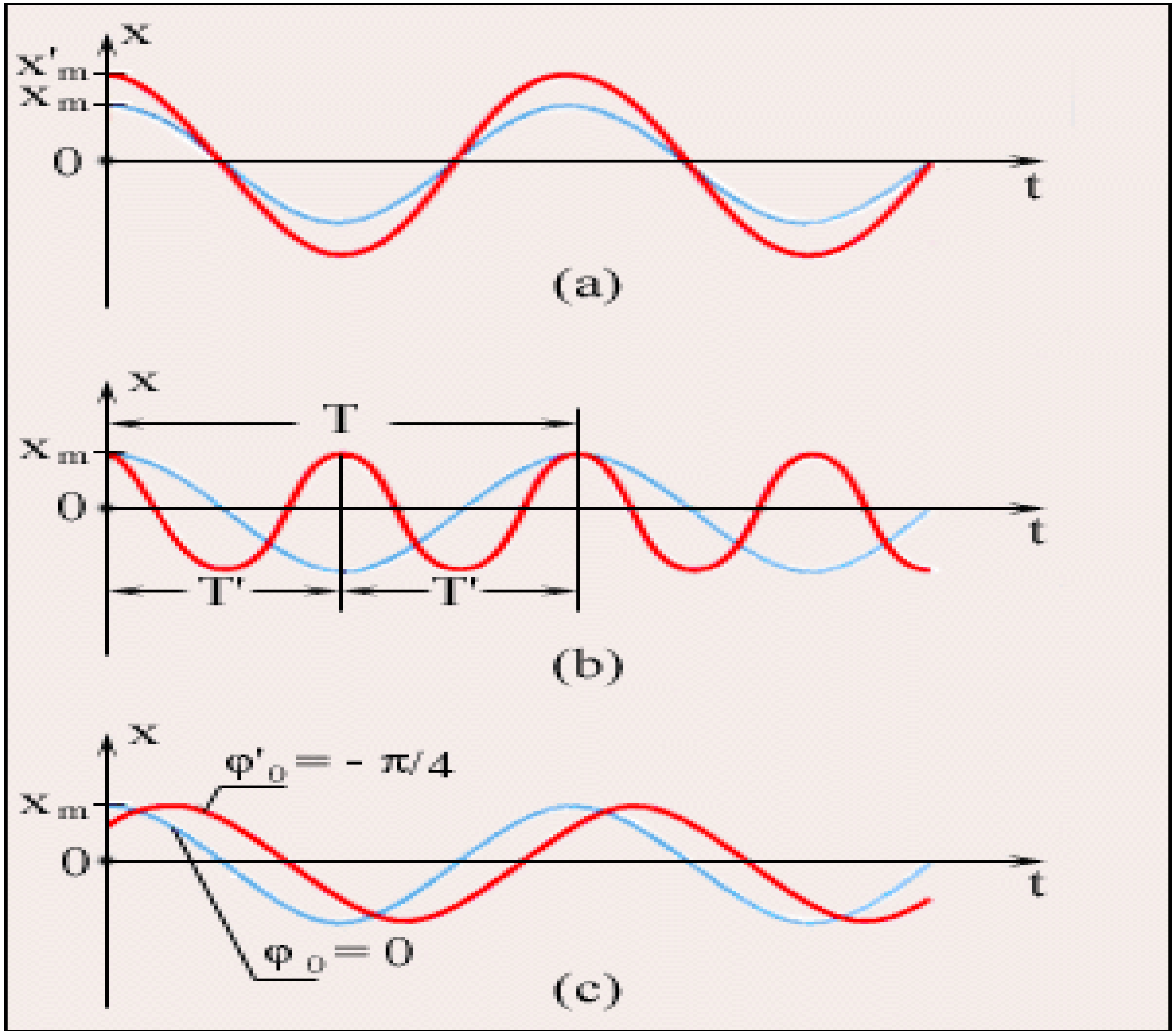


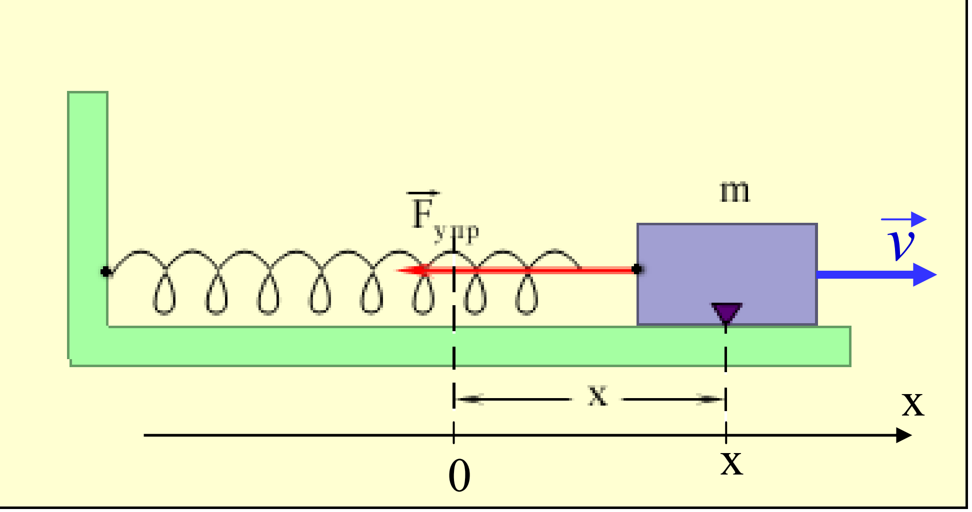
$$x = A\cos\omega_0 t = A\cos\frac{2\pi t}{T}$$

$$\dot{x} = \upsilon = -A\omega_0 \sin\omega_0 t$$

$$\ddot{x} = \dot{\upsilon} = a = -A\omega_0^2 \cos\omega_0 t$$

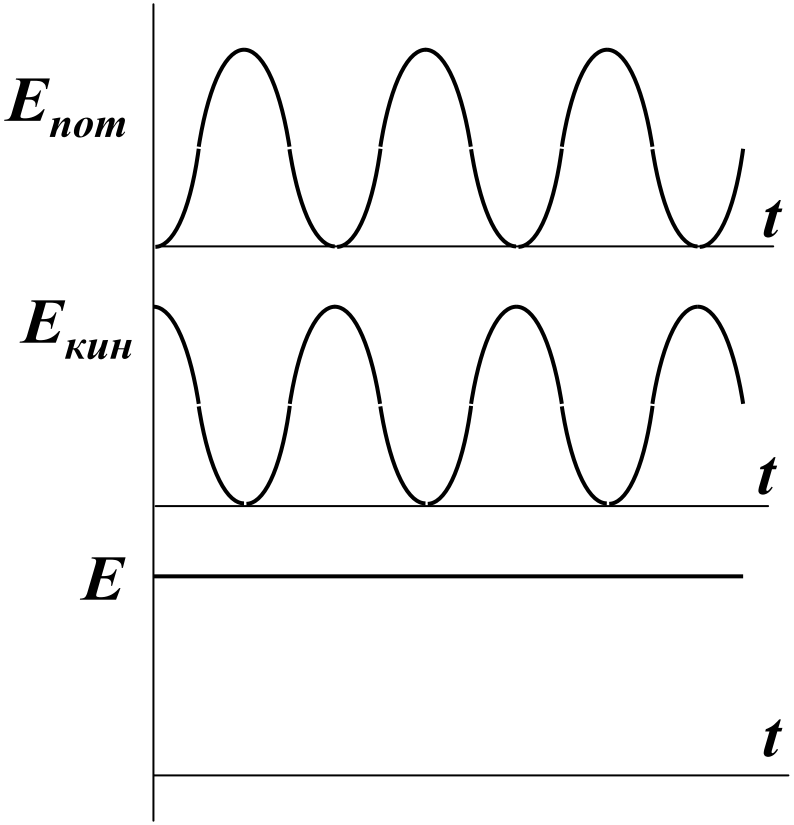
Изменения на графике гармонического процесса при изменении либо амплитуды колебаний, либо частоты, либо начальной фазы.





$$E = E_{кин} + E_{пот};$$

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2};$$

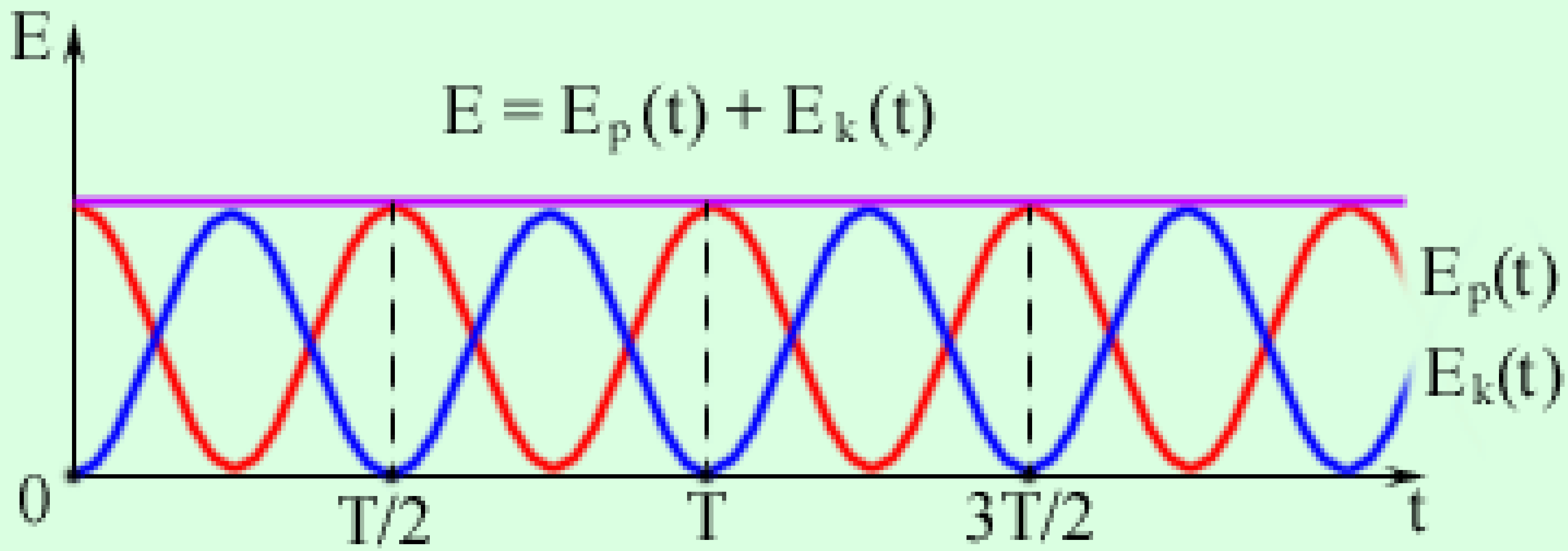


$$E = \frac{kA^2}{2} = E_{пот}^{(max)};$$

$$E = \frac{mv_{\max}^2}{2} = E_{кин}^{(max)};$$

$$\boxed{E \sim A^2}$$

Превращения энергии при свободных колебаниях.



8.2. Затухающие колебания

$$F_c = -\gamma \upsilon = -\gamma \dot{x}$$

коэффициент сопротивления

$$m\ddot{x} = -kx - \gamma \dot{x}$$

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$x = A\,\mathrm{e}^{-\beta t}\cos(\omega t + \alpha)$$

$$\beta = \frac{1}{2\tau} \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{(2\tau)^2}} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{(2\omega_0\tau)^2}} \approx \omega_0$$

β – коэффициент затухания

Затухающие кол.mcd

$\omega := 30$

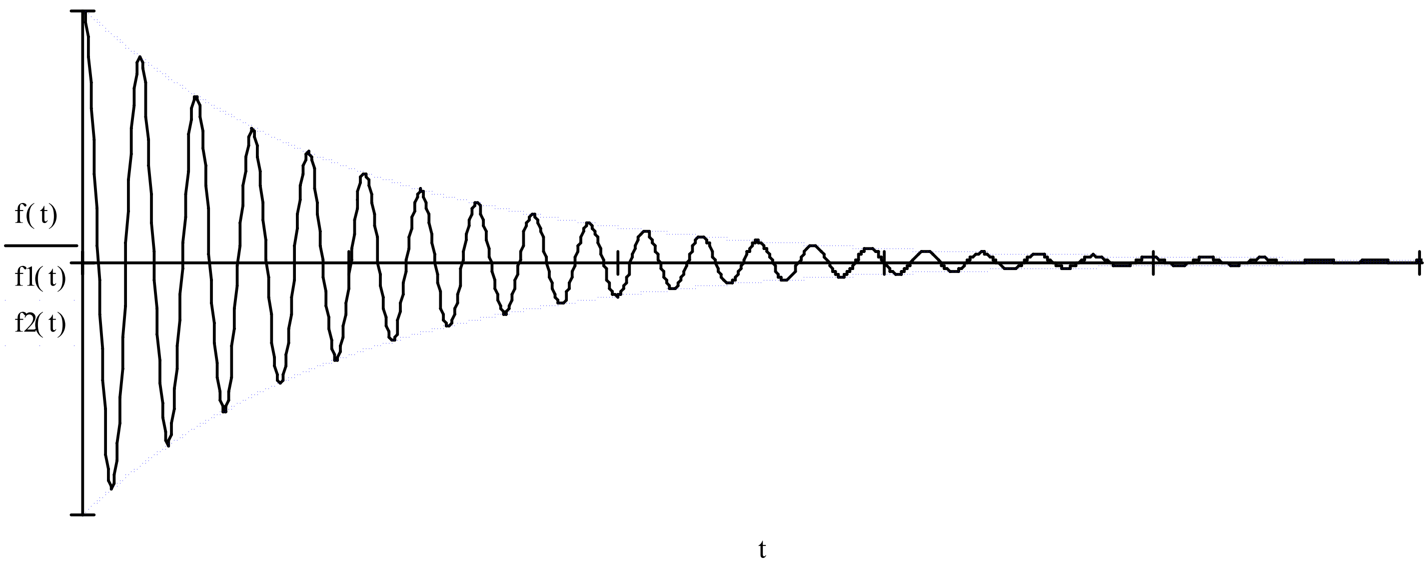
$\beta := 1$

$f(t) := e^{-\beta\, t}\cdot\cos(\omega\cdot t)$

$f1(t) := e^{-\beta\, t}$

$f2(t) := -e^{-\beta\, t}$

$t := 0.0, \blacksquare .. 5$



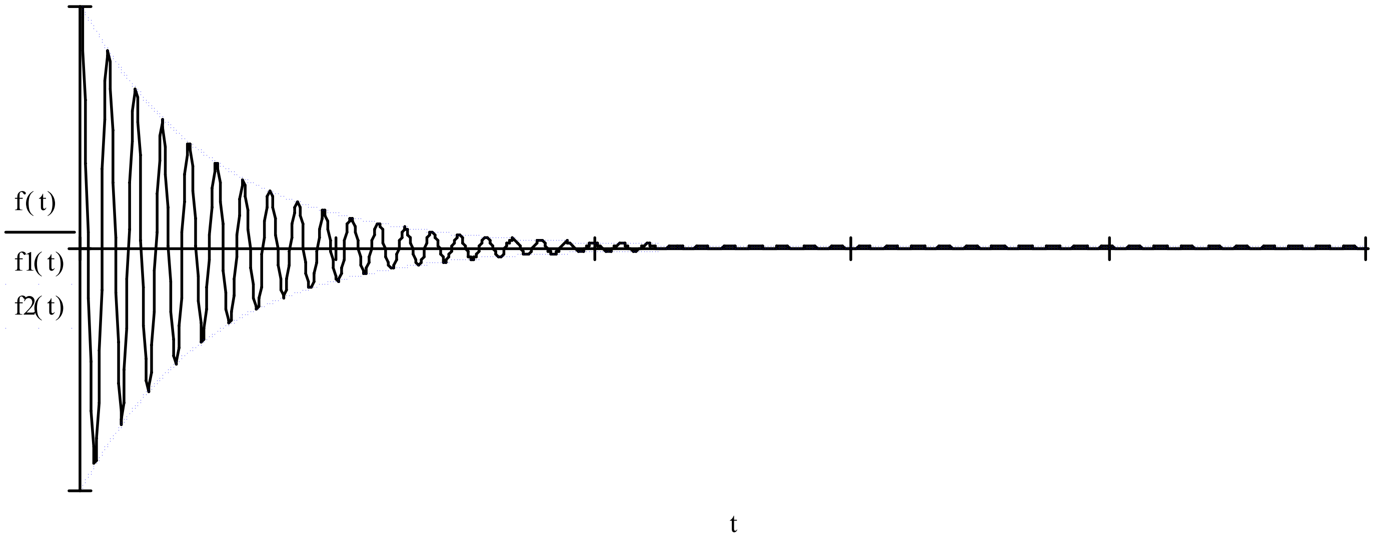
Затухающие кол.mcd

$\beta := 2$ $\omega := 60$

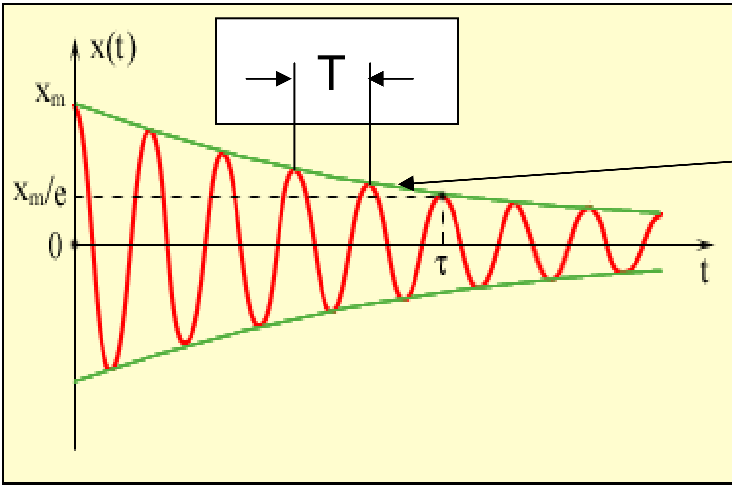
$f(t) := e^{-\beta\ t} \cdot \cos(\omega \cdot t)$ $f1(t) := e^{-\beta\ t}$

$f2(t) := -e^{-\beta\ t}$

$t := 0.0, \blacksquare .. 5$



Логарифмический декремент затухания λ



$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}$$

Логарифмический декремент затухания:

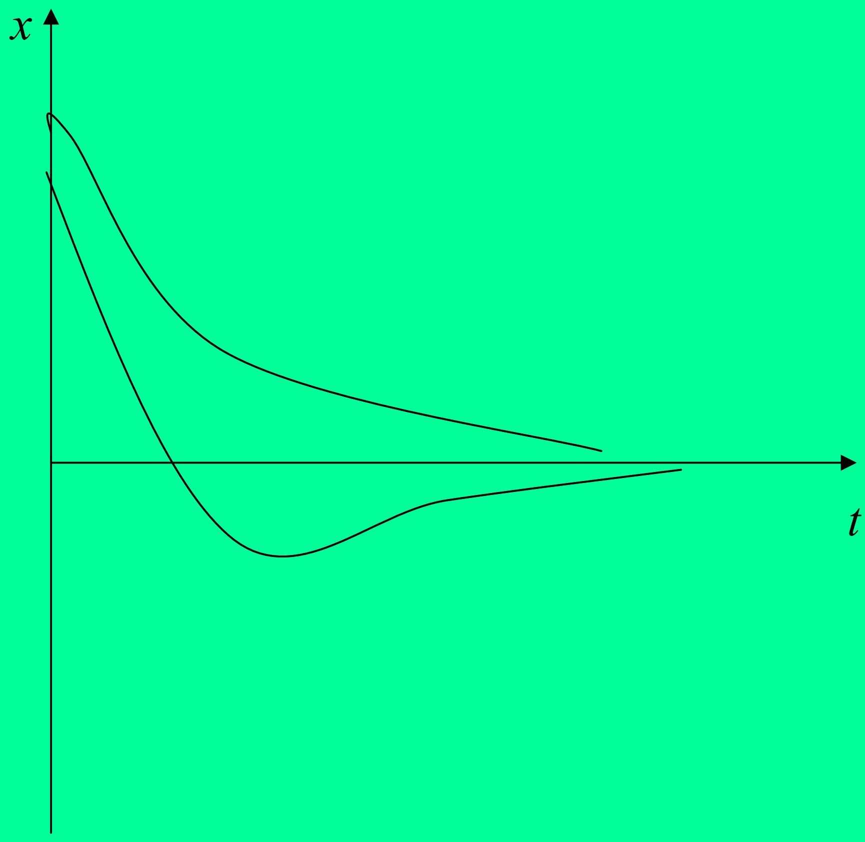
$$\boxed{\lambda = \ln \Delta = \beta T}$$

Добротность Q

$$Q = \frac{\pi}{\lambda}$$

Замечание: при $\dfrac{1}{\tau} > \omega_0$

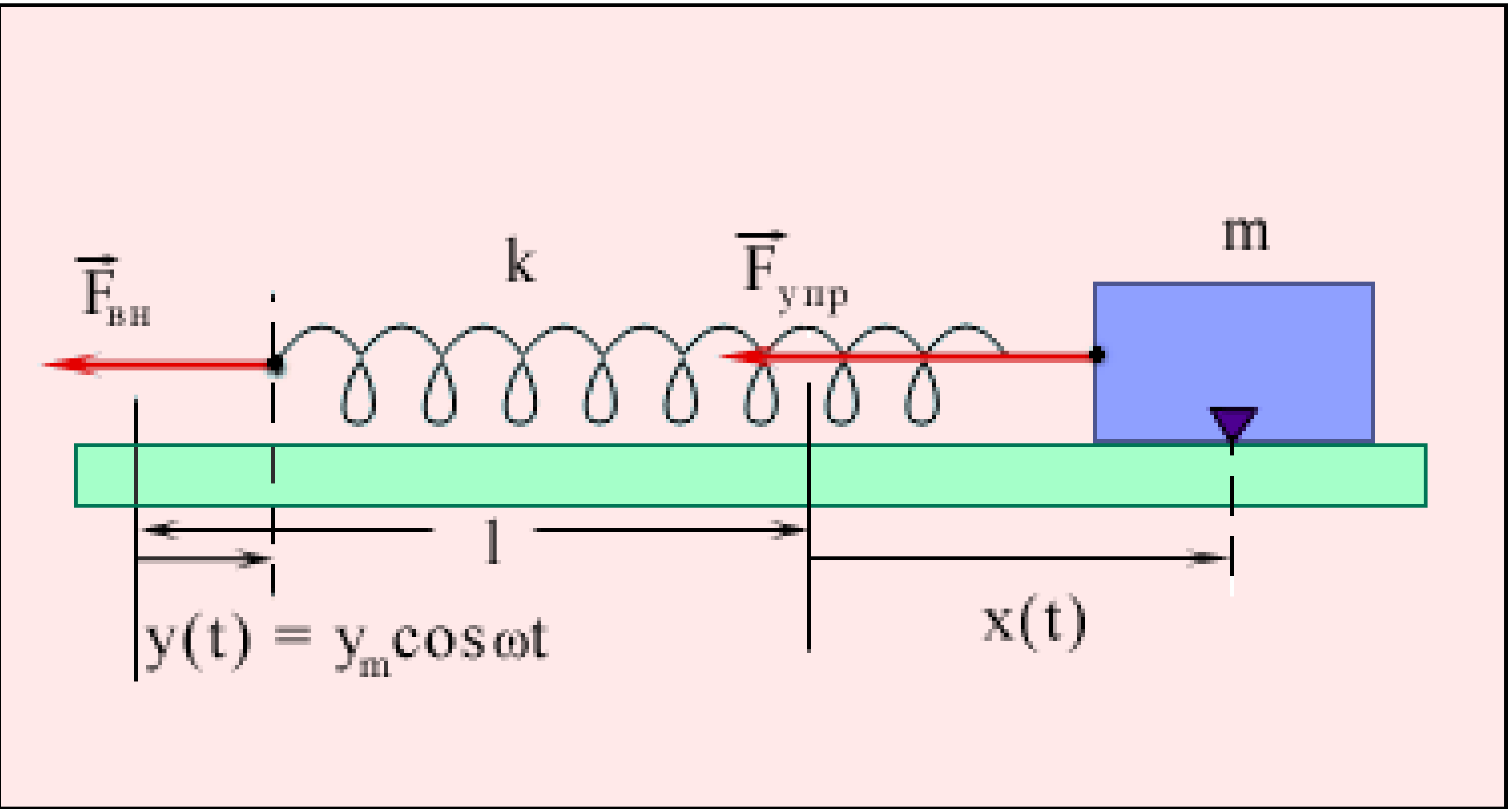
апериодические колебания



8.3. Вынужденные колебания. Резонанс

Вынужденные колебания груза на пружине

$$F(t) = \sum_i F_{0i} \sin \omega_i t$$



$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\sin\omega t$$

Линейное неоднородное
дифференциальное уравнение 2-го порядка

Решение= общее однородного+частное неоднородного

общее однородного $$x = A e^{-\beta t}\cos(\omega t + \alpha)$$

частное неоднородного $$x = x_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

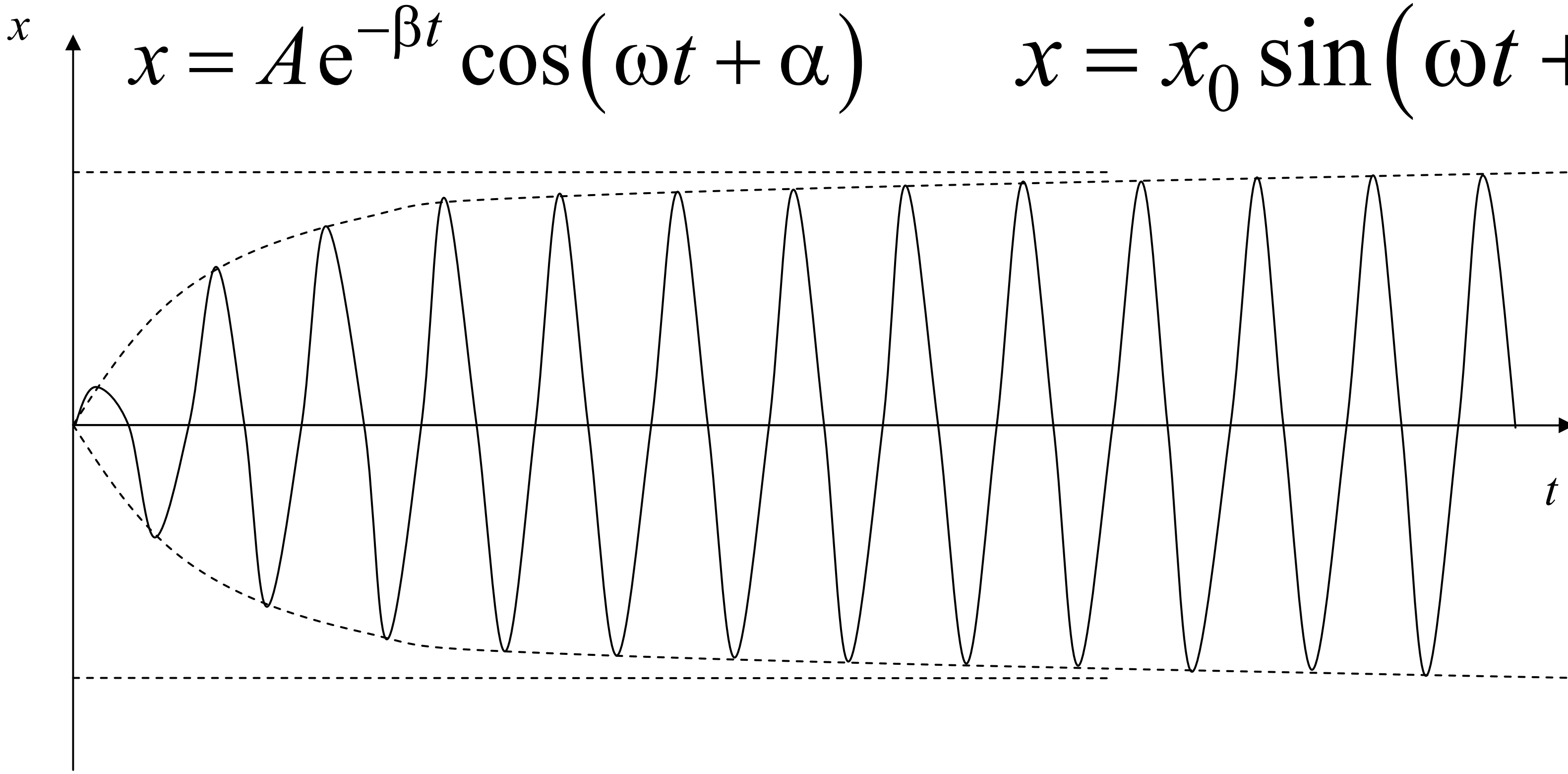
$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\sin\omega t$$

$$x = x_0 \sin\left(\omega t + \varphi\right)$$

$$x_0 = \frac{\dfrac{F_0}{m}}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\dfrac{\omega}{\tau}\right)^2}}$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi = -\frac{\omega/\tau}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$x = A\mathrm{e}^{-\beta t}\cos(\omega t + \alpha) \qquad x = x_0 \sin(\omega t + \varphi)$$



Замечания:

1) $\omega << \omega_0, \quad \varphi = 0, \quad x_0 = \dfrac{F_0}{k}$

2) $\omega >> \omega_0, \quad \varphi = \dfrac{1}{\omega\tau}, \quad x_0 = 0$

3) $\omega \approx \omega_0, \quad \varphi = \pm\dfrac{\pi}{2}, \quad x_0 = \dfrac{F_0\tau}{m\omega_0}$

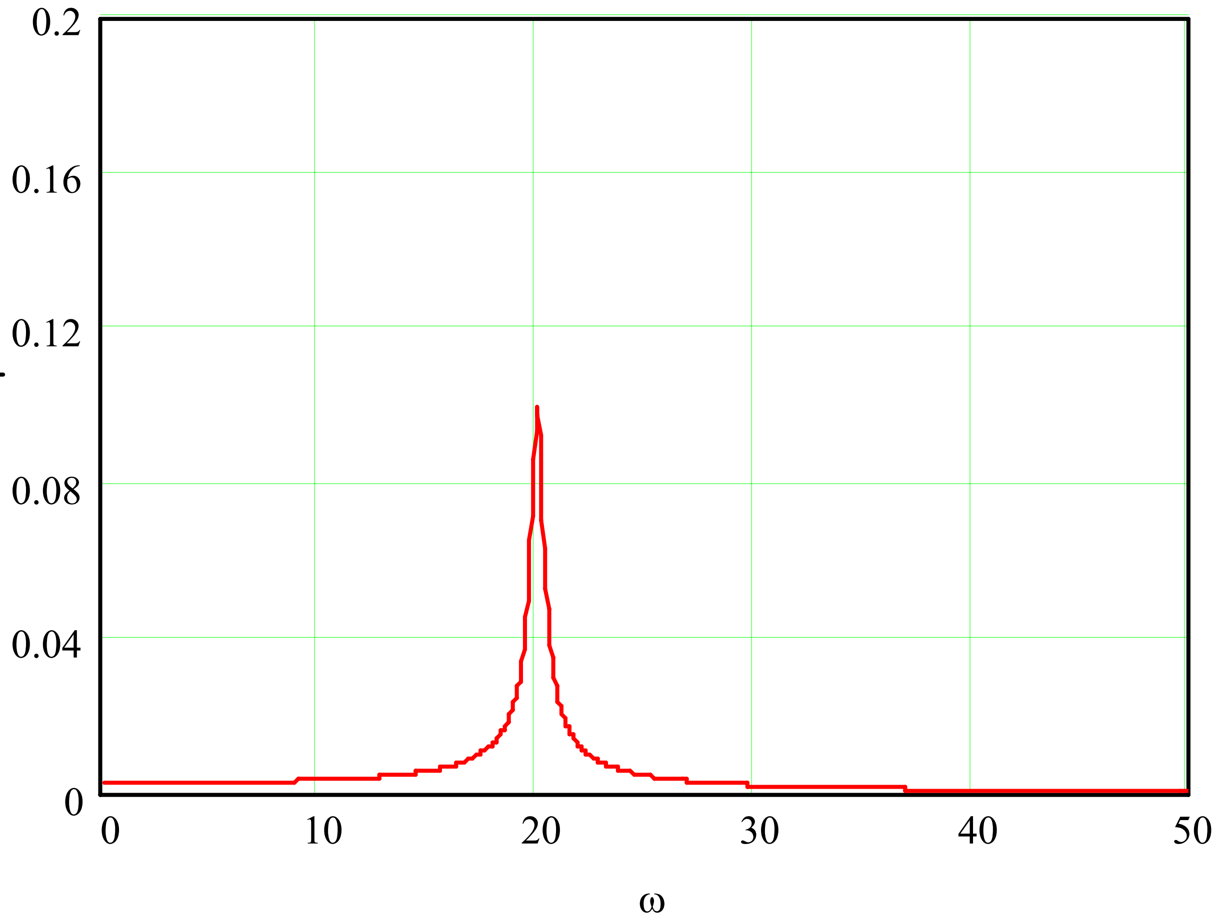
4) $\dfrac{x_0(\omega \approx \omega_0)}{x_0(0)} = \dfrac{F_0\tau k}{m\omega_0 F_0} = \tau\omega_0 = Q$

Резонанс.mcd

Резонансная кривая

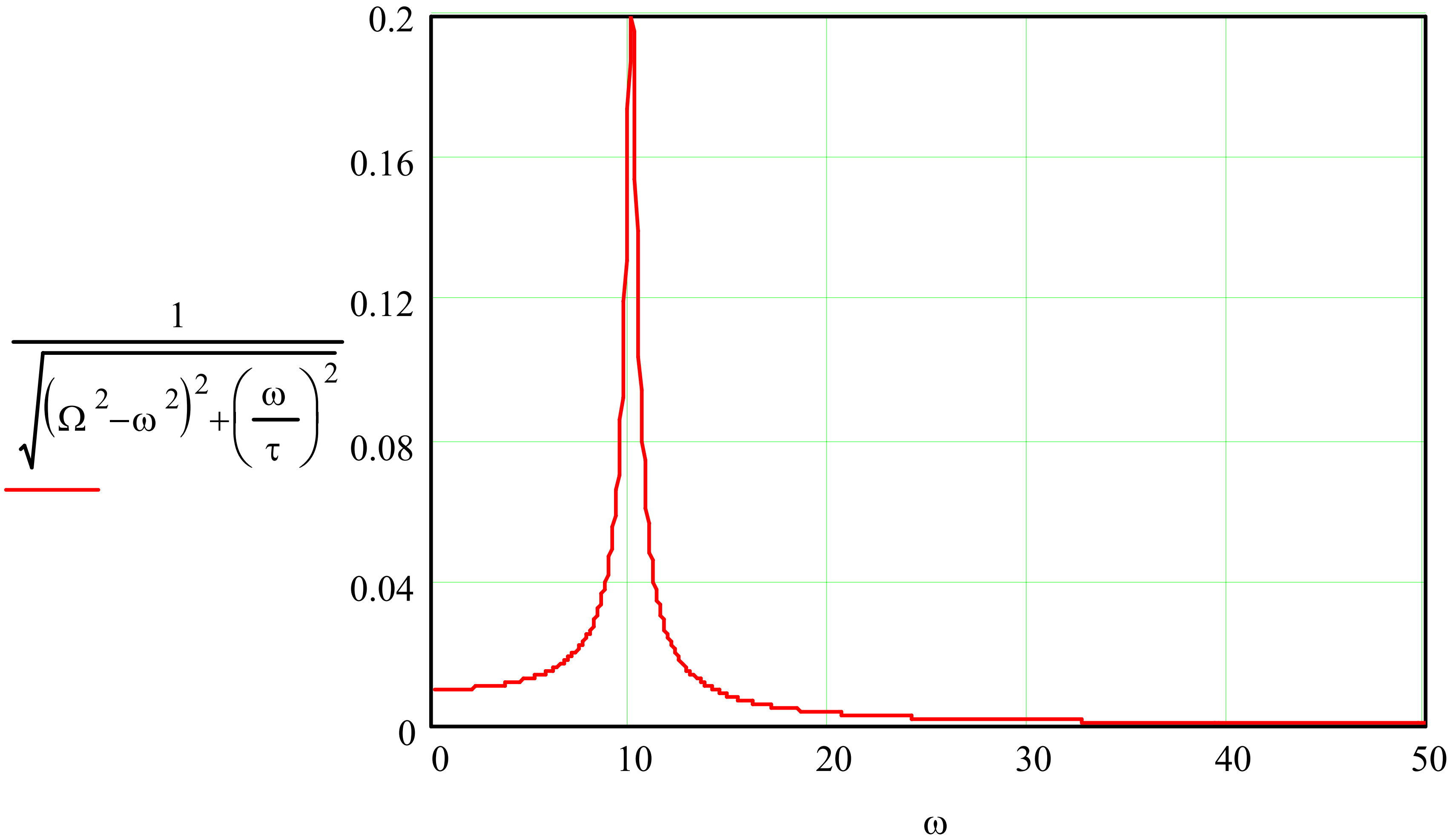
$\Omega := 20$ $\tau := 2$

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\Omega^2-\omega^2\right)^2+\left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2}}$$



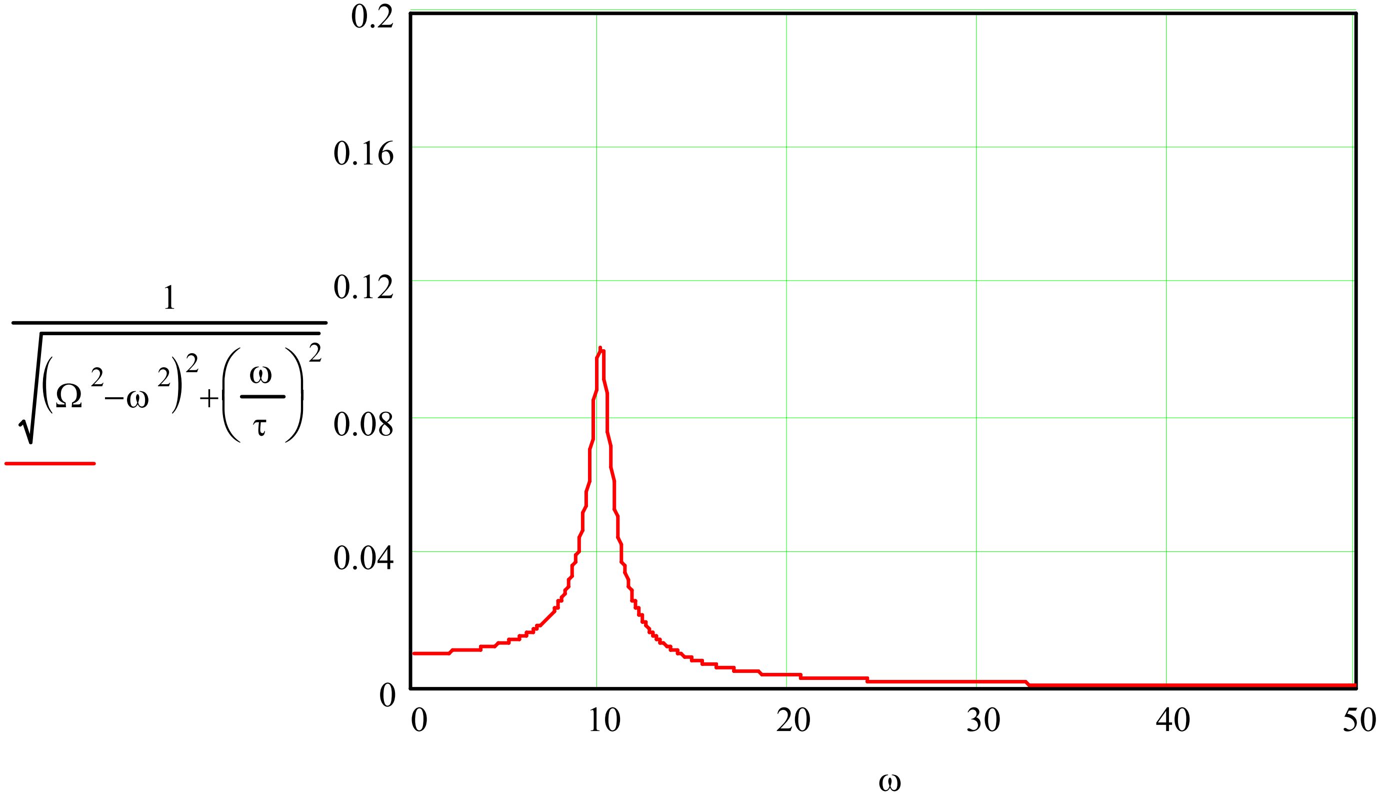
Резонансная кривая

$\Omega := 10$ $\qquad\qquad$ $\tau := 2$

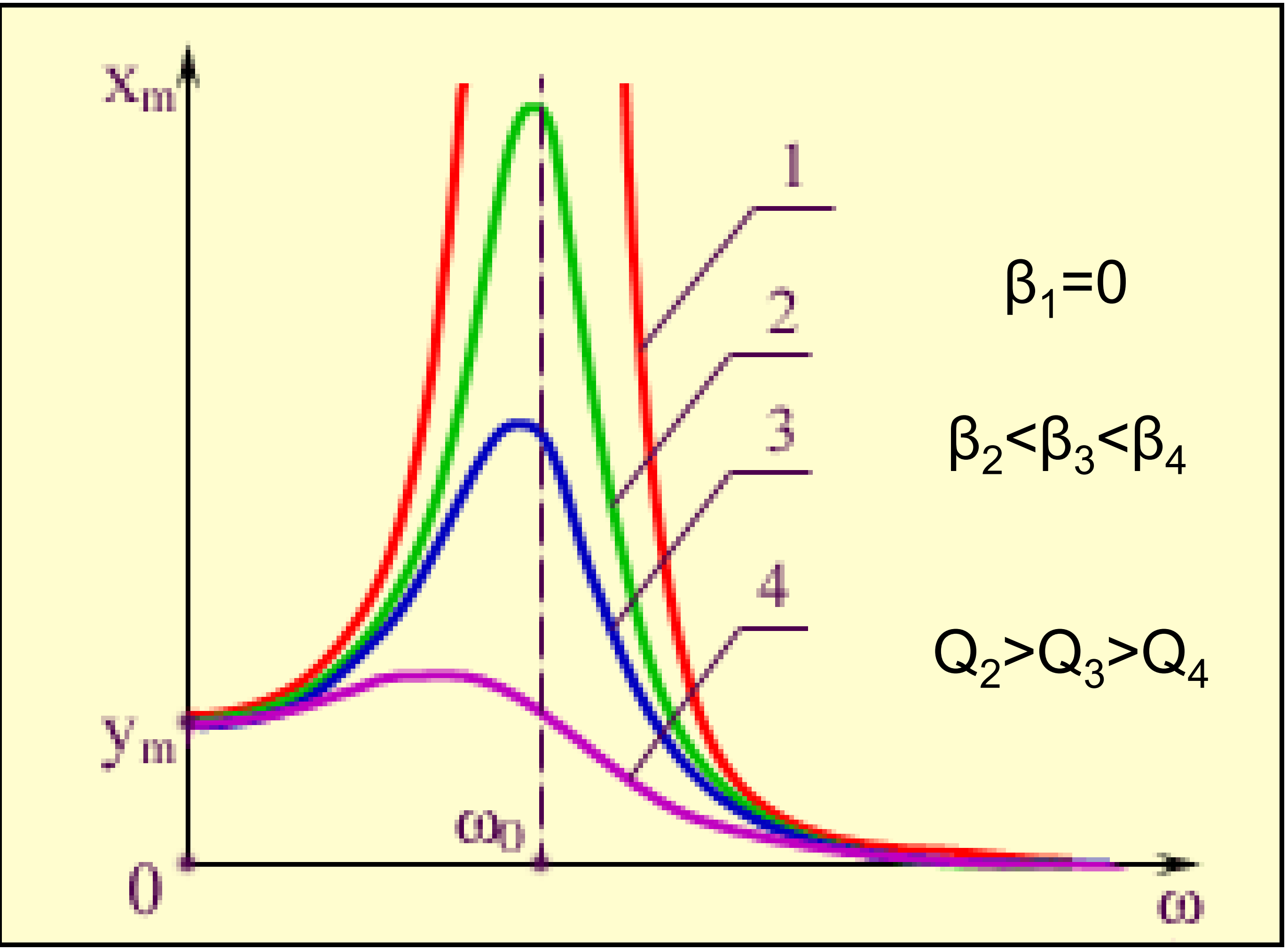


Резонансная кривая

$\Omega := 10$ $\tau := 1$



Резонансные кривые



$$Q = \frac{\pi}{\lambda}$$

$$\lambda = \beta\, T$$

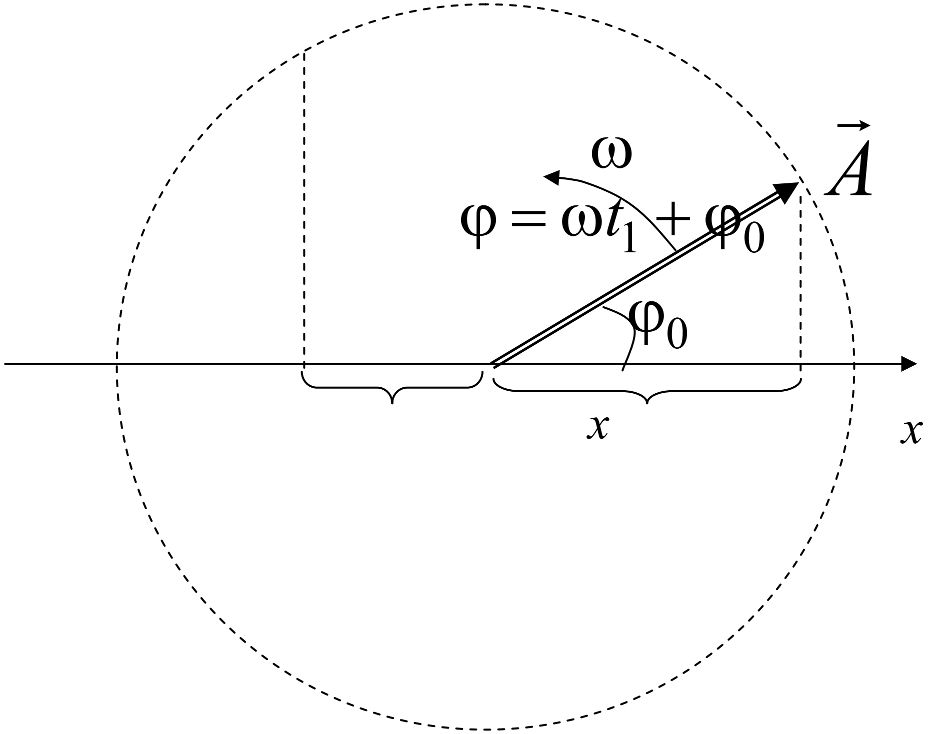
1 - колебательная система без трения;

2, 3, 4 – кривые при различной добротности

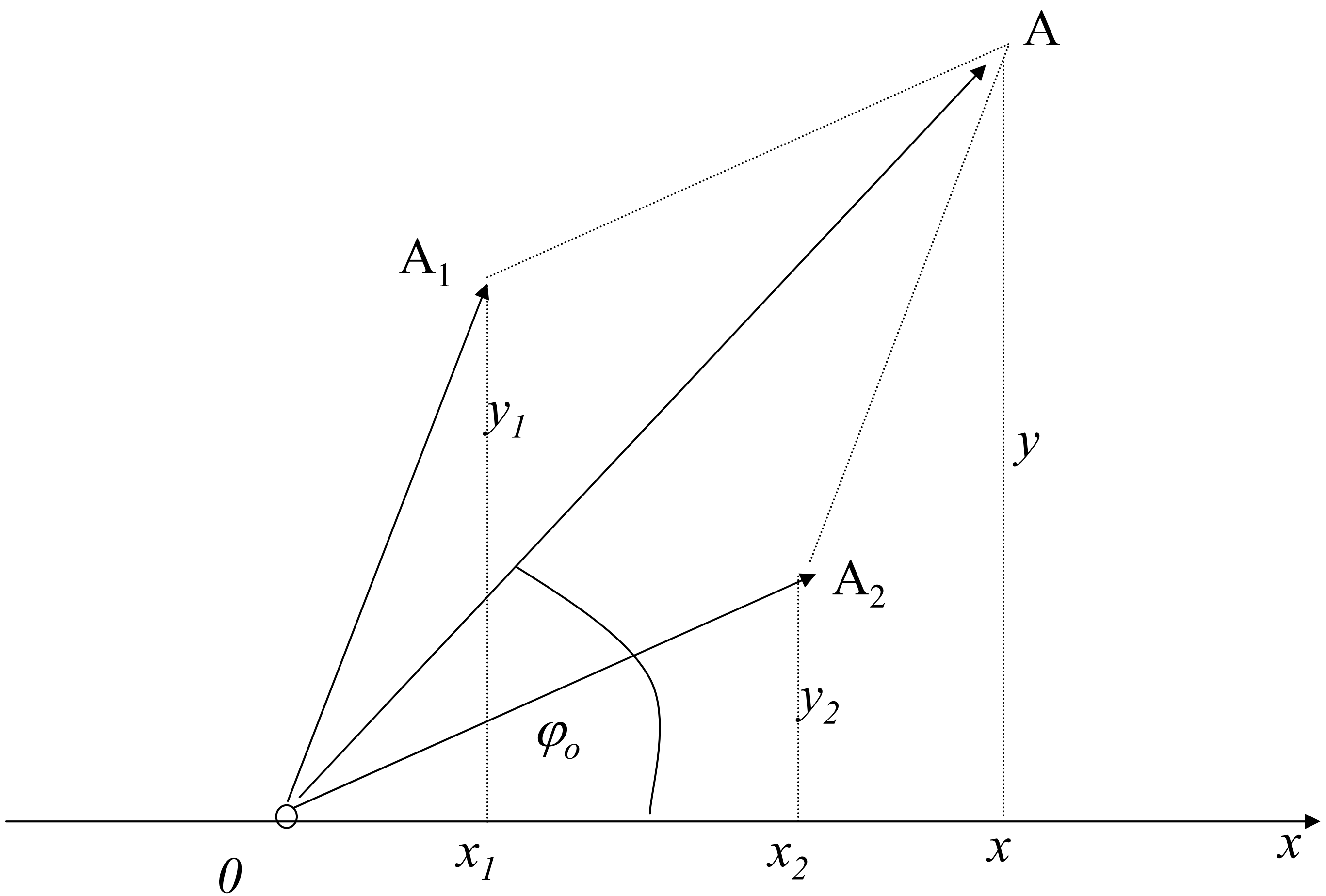
8.4. Сложение колебаний. Биения

Векторная диаграмма

$$x = A\cos\left(\omega t + \varphi_0\right)$$



Сложение однонаправленных колебаний



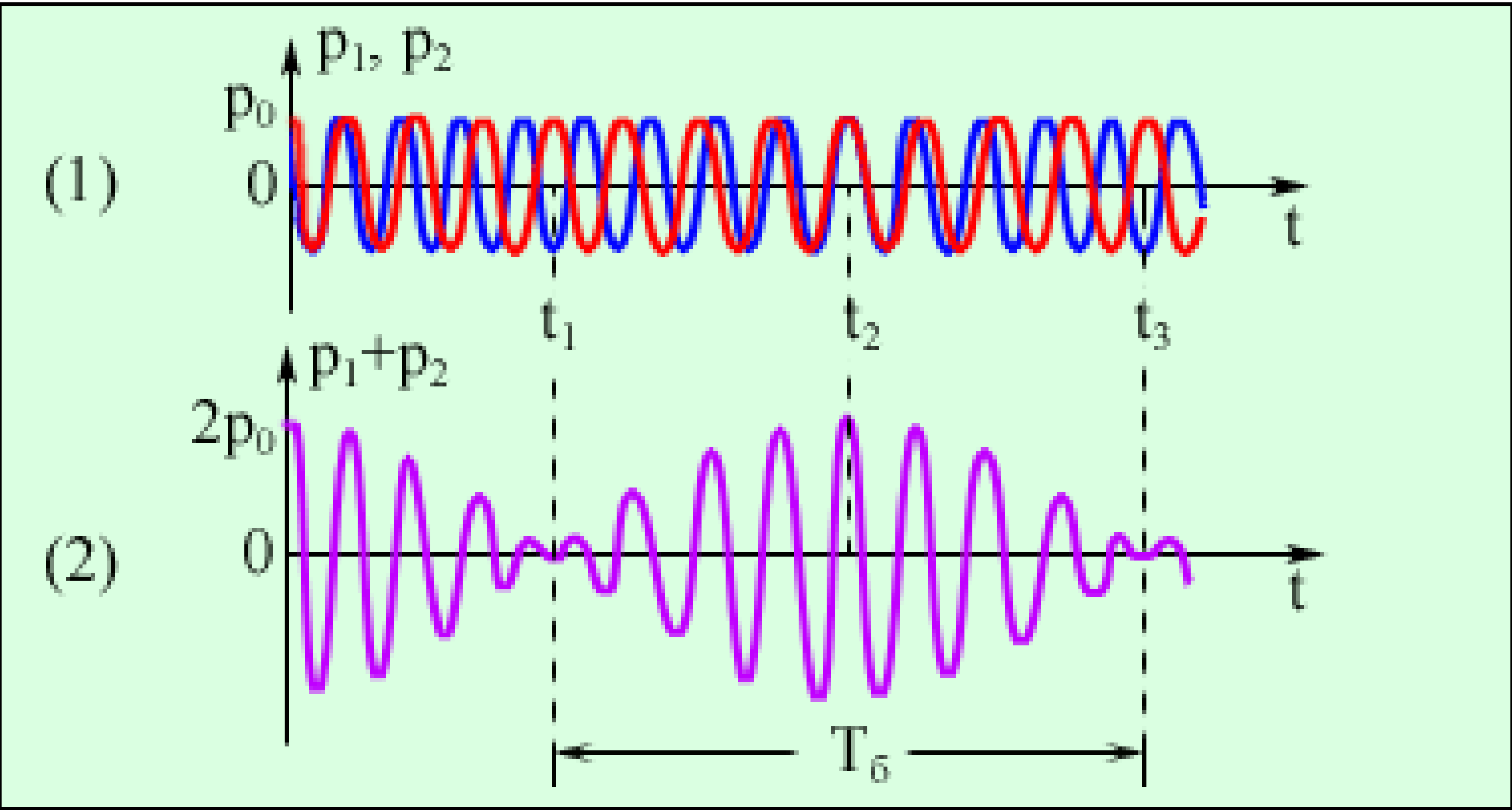
$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2Cos(\varphi_{02} - \varphi_{01})$$

$$tg\varphi_0 = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = \frac{A_1Sin\varphi_{01} + A_2Sin\varphi_{02}}{A_1Cos\varphi_{01} + A_2Cos\varphi_{02}}$$

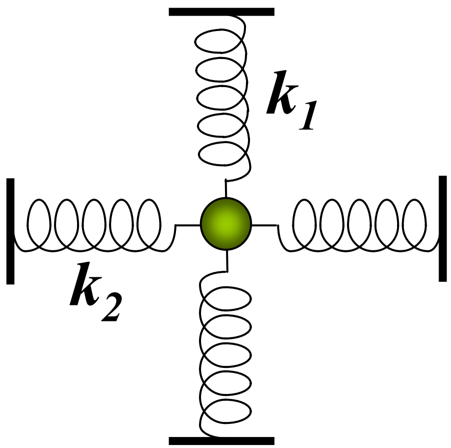
Сложение однонаправленных колебаний с близкими частотами

$$x = 2A\cos\frac{\Delta\omega}{2}t \cdot \cos\omega t$$

Биения, возникающие при наложении двух звуковых волн с близкими частотами

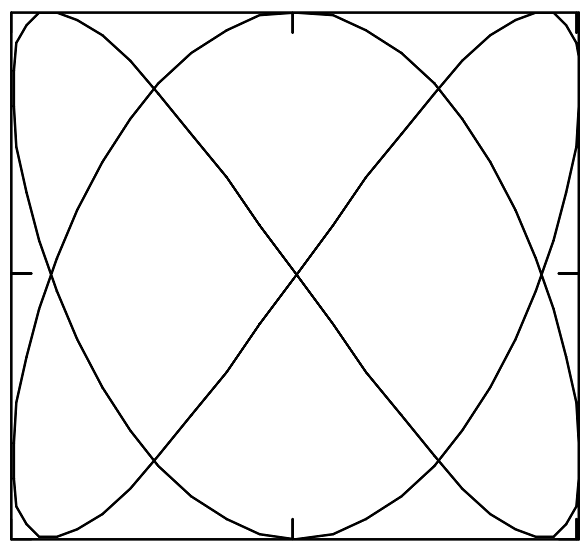


2. Сложение взаимноперпендикулярных колебаний



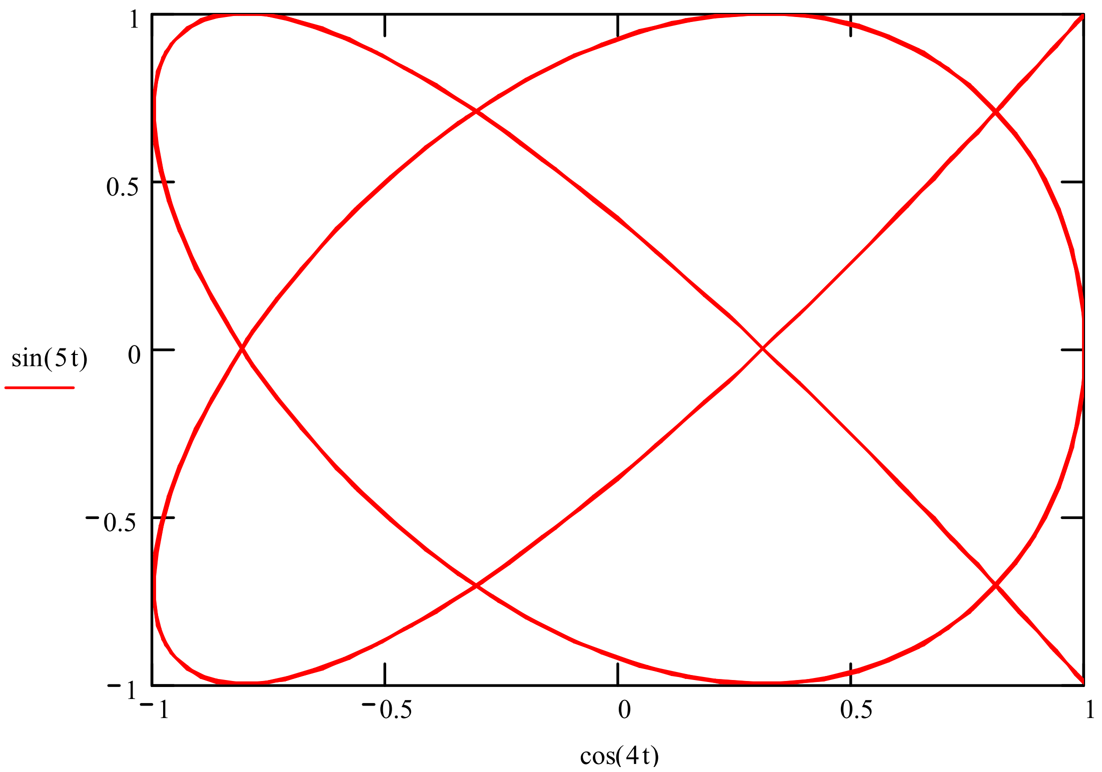
в) $x = a\sin n\omega t + b\sin(m\omega t + \pi/2)$

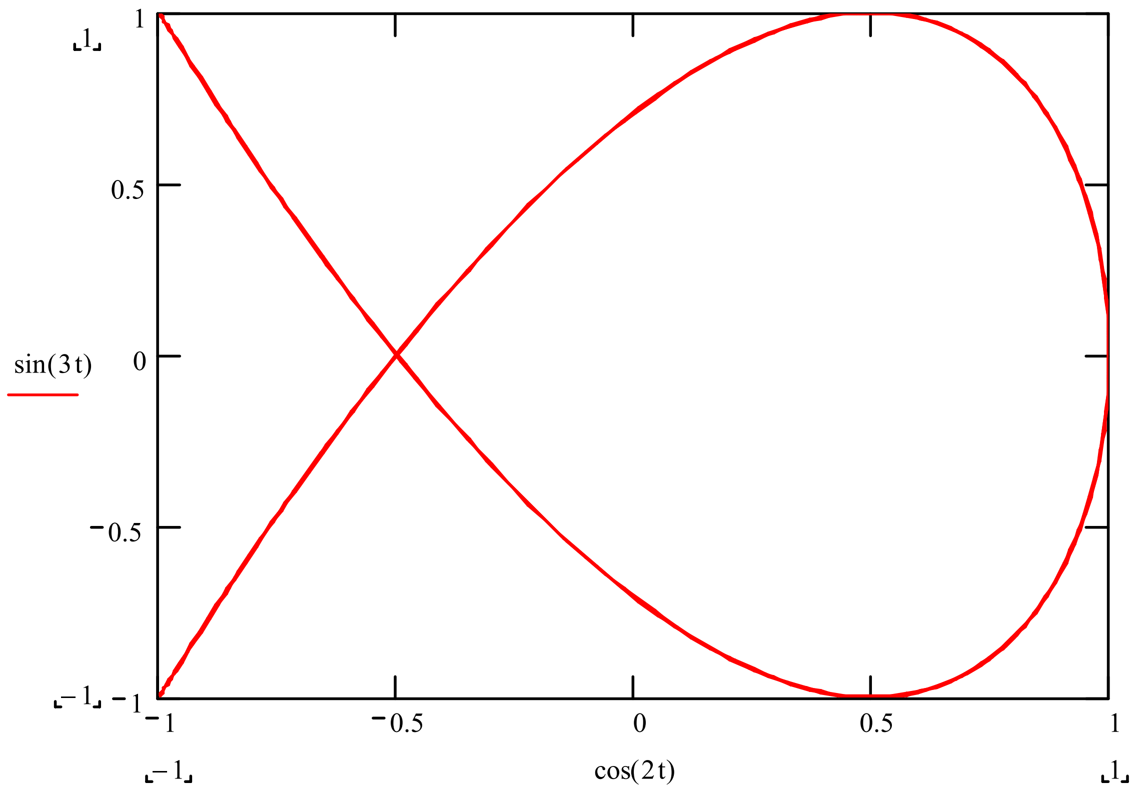
n : m = 2 : 3



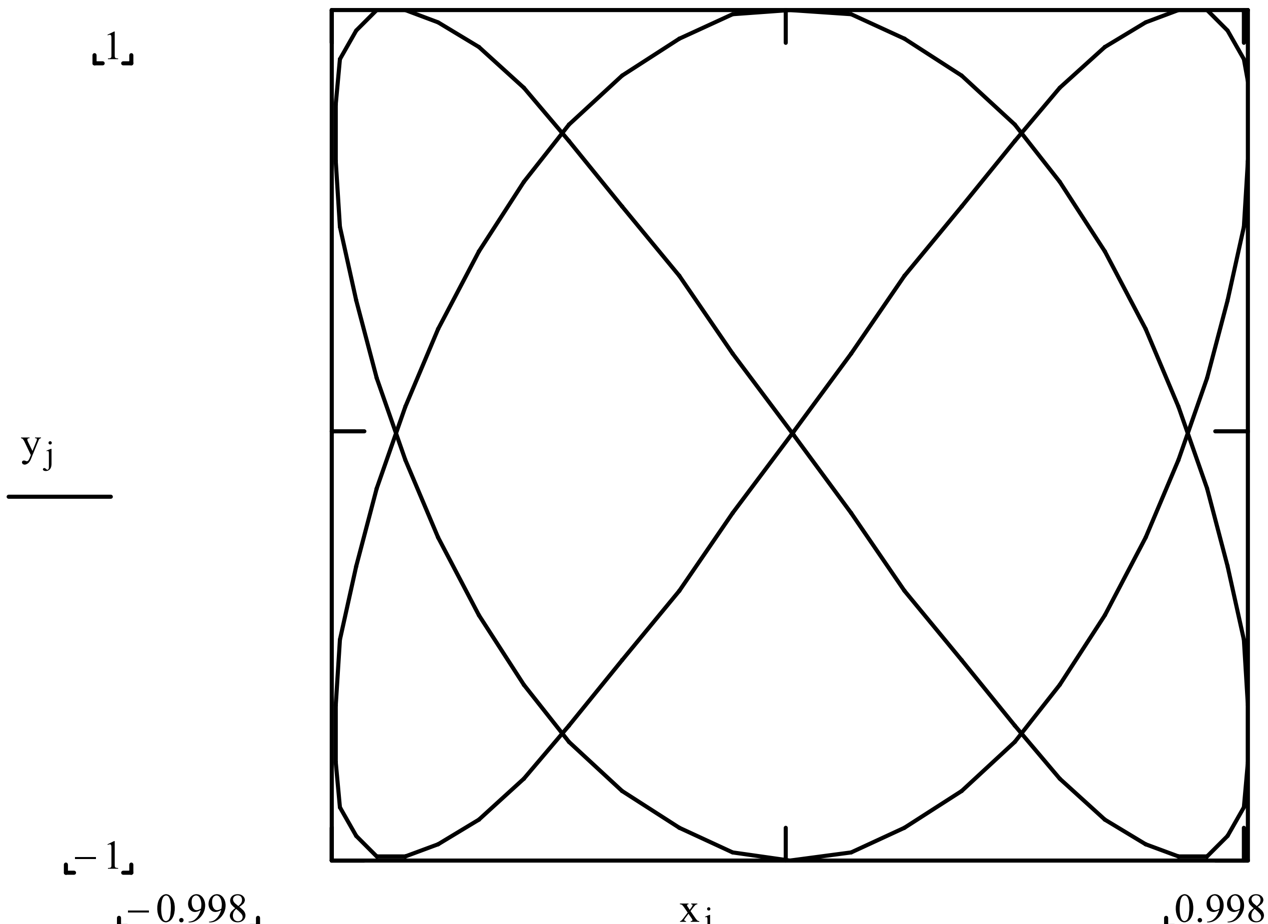
Фигуры Лиссажу

Лиссажу.mcd

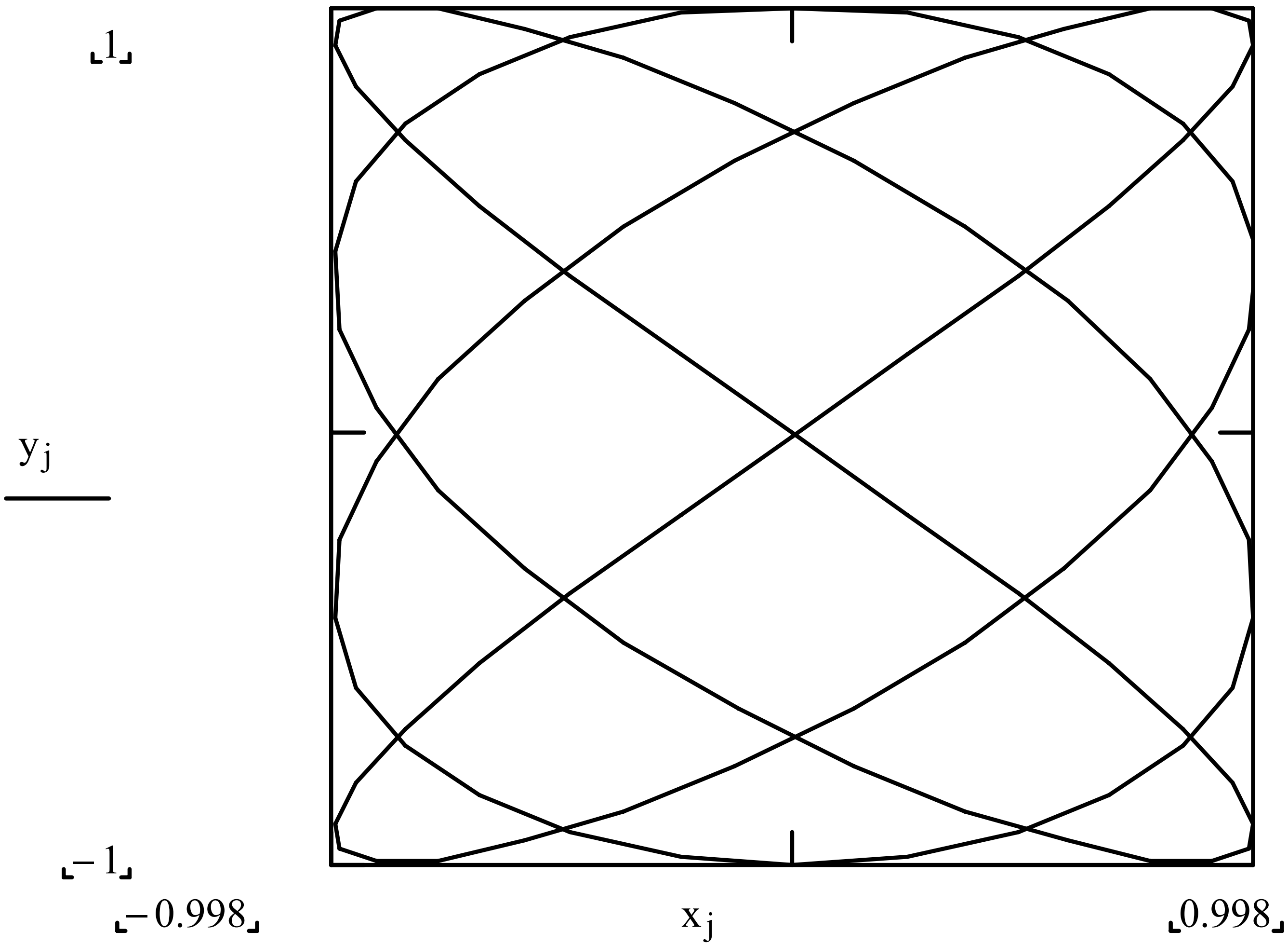



1
0.5
0
−0.5
−1
sin(3t)
1
−1
−1
−0.5
0
0.5
1
cos(2t)
−1
1

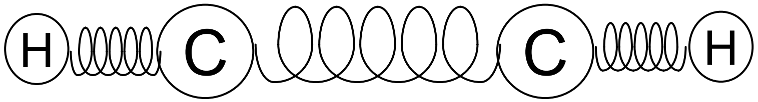
Фигура Лиссажу при sin(2ωt)+sin(3ωt+0.5π)

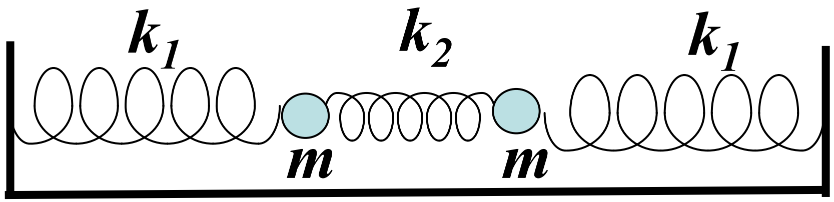


Фигура Лиссажу при $\sin(4\omega t)+\sin(3\omega t+0.5\pi)$



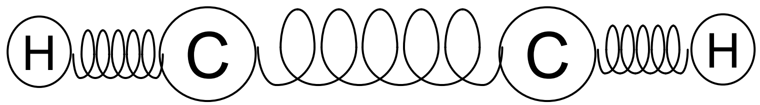
8.5. Связанные колебания

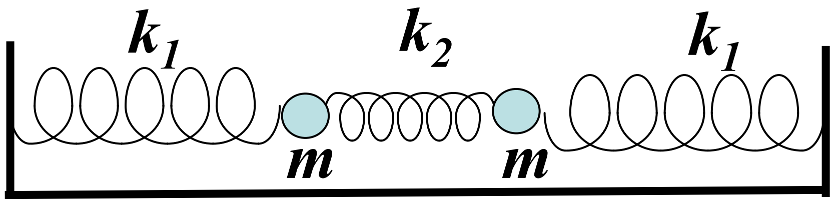




$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - k_2(x_1 - x_2) \\ m\ddot{x}_2 = -k_1 x_2 - k_2(x_2 - x_1) \end{cases}$$

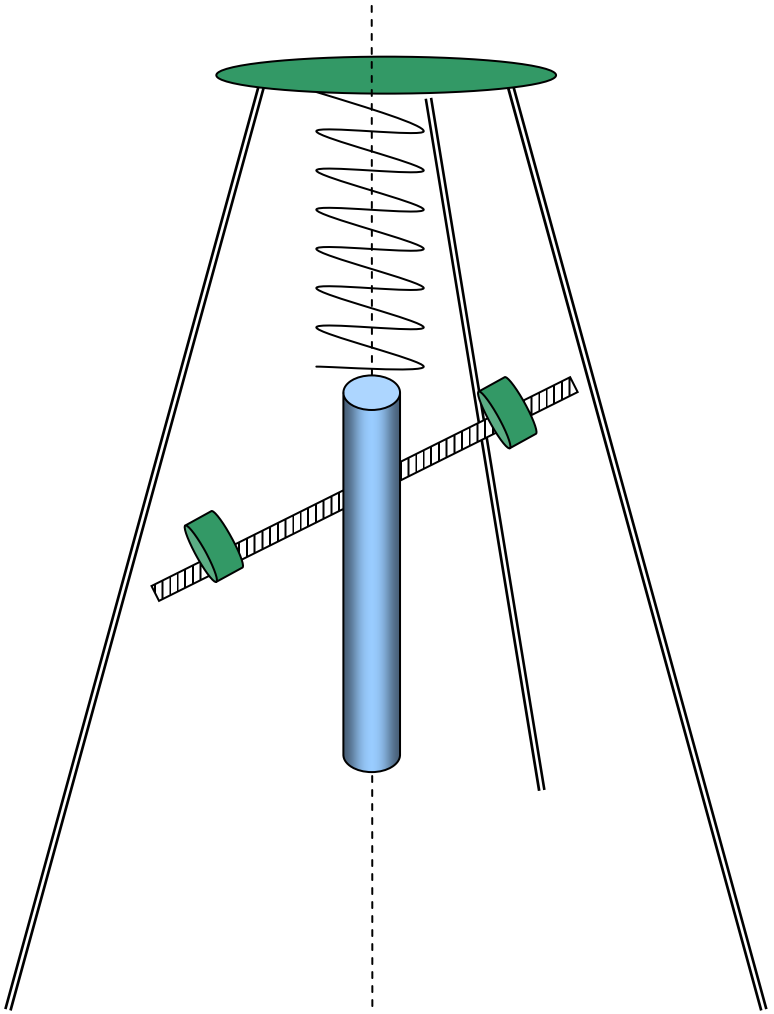
$$\omega_1^2 = \frac{k_1}{m}; \quad \omega_2^2 = \frac{k_1 + 2k_2}{m}$$





$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{A}{2}\cos\omega_1 t + \dfrac{B}{2}\cos\omega_2 t \\ x_2 = \dfrac{A}{2}\cos\omega_1 t - \dfrac{B}{2}\cos\omega_2 t \end{cases}$$

МАЯТНИК УИЛБЕРФОРСА



$$mgh + \frac{ky^2}{2} + \frac{m\upsilon^2}{2} =$$

$$= \frac{q\varphi^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$$

q – модуль кручения

Замечание:
при n степенях свободы

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} A_i \cos \omega_i t$$