

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА**

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО  
ОБРАЗОВАНИЯ**

**«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ» (МГТУ ГА)**

---

**Кафедра начертательной геометрии и графики**

**Л.В. Михненко, И.Г. Хармац**

**ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ МНОГОГРАННЫХ И  
КРИВОЛИНЕЙНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ**

**Методические указания к выполнению  
расчетно-графической работы  
по начертательной геометрии**

*для студентов I курса всех  
специальностей дневного обучения*

**Москва 2007 г.**

Рецензент: доц. И.В. Подзей

Л.В. Михненко, И.Г. Хармац

Взаимное пересечение многогранных и криволинейных поверхностей: Методические указания к выполнению расчетно-графической работы по начертательной геометрии. — М.: МГТУ ГА, 2007. — 29 с.

Данные методические указания издаются в соответствии с учебной программой для студентов 1 курса всех специальностей дневного обучения.

Рассмотрены и одобрены на заседаниях кафедры НГ и Г от 22.05.2007 г. и методического совета МФ по специальности 16.09.01 от 19.06.2007 г.

## Введение

Расчетно-графическая работа (РГР), рекомендации по выполнению которой приведены в методических указаниях, знакомит студентов с основными способами построения линии пересечения двух поверхностей.

Изучение предлагаемого материала способствует выработке практических навыков, которые необходимы для решения различных задач на определение линий пересечения поверхностей, наиболее часто встречающихся в инженерной практике.

## 1. Задание на расчетно-графическую работу

Задание на РГР состоит из следующих частей:

1. Построить две проекции линии пересечения заданных поверхностей.
2. Определить видимость элементов поверхностей и линии пересечения на чертеже.
3. Нанести на чертеже размерные линии и проставить заданные размеры согласно ГОСТ 2.307-68.
4. Заполнить основную надпись по ГОСТ 2.104-68, форма 1.

Варианты заданий на расчетно-графическую работу выдаются преподавателем индивидуально каждому студенту.

## 2. Требования и рекомендации к оформлению чертежа

Чертеж должен быть выполнен в соответствии с индивидуальным вариантом задания на формате А3(297×420 мм)<sup>1</sup> в карандаше при помощи чертежных инструментов в соответствии с требованиями стандартов ЕСКД и отличаться четким и точным выполнением всех построений.

Чертеж рекомендуется выполнять на листе чертежной бумаги, размеры которой больше размеров формата, — чтобы имелся край, предназначенный для прикрепления чертежа к доске кнопками.

Формат снабжается согласно ГОСТ 2.301-68 общей рамкой на расстоянии 5 мм от всех линий обреза формата, кроме левой. Слева, для подшивки чертежей, рамка наносится на расстоянии 20 мм от границы формата. В правом нижнем углу формата вплотную к рамке размещают основную надпись по ГОСТ 2.104-68, форма 1. Пример заполнения основной надписи показан на рис. 1.

---

<sup>1</sup> Студенты некоторых специальностей выполняют чертеж на формате А4 (210×297 мм)

					<i>Название дисциплины</i>			
					<i>Порядковый номер РГР</i>			
					<i>Номер варианта задания</i>			
					..... РГР.02.06.08			
				<i>Пересечение поверхностей</i>		<i>Лит.</i>	<i>Масса</i>	<i>Масштаб</i>
<i>Изм./Лист</i>	<i>№ докум.</i>	<i>Подп.</i>	<i>Дата</i>			<i>у</i>		<i>1:1</i>
<i>Разраб.</i>	<i>Рябинин С.В.</i>		<i>06.03</i>					
<i>Проб.</i>	<i>Хармац И.Г.</i>		<i>09.03</i>			<i>Лист</i>	<i>Листов</i>	<i>1</i>
<i>Т.контр.</i>						<i>МГТУ ГА М1-3</i>		
<i>И.контр.</i>								
<i>Утв.</i>	<i>Михненко Л.В.</i>		<i>11.03</i>					
					<i>Копировал</i>		<i>Формат А3</i>	

Рис. 1

Серьезное внимание должно быть обращено на тщательность графических построений, так как их небрежное выполнение приводит к ошибкам, а следовательно, к необходимости повторного выполнения всех построений. При окончательной обводке форма и толщина линий должна соответствовать ГОСТ 2.303-68.

Все вспомогательные построения на чертеже должны сохраняться до обводки. До первой проверки чертежа преподавателем все линии рекомендуется выполнять толщиной не более 0.5 мм.

### 3. Методические указания к выполнению расчетно-графической работы

#### 3.1. Общие сведения о построении линии пересечения двух поверхностей

Линия пересечения двух поверхностей в общем виде представляет собой некоторую пространственную кривую. При пересечении гранных поверхностей в общем случае получается пространственная ломаная линия. Обычно линию пересечения двух поверхностей строят по набору точек, среди которых различают точки характерные (опорные) и случайные (произвольные).

**Опорными точками** называются точки, занимающие какое-либо частное положение относительно рассматриваемых поверхностей или плоскостей проекций. Например, опорными точками являются самая близкая и самая

удаленная точки относительно плоскостей проекций (экстремальные точки)<sup>1</sup>; точки, в которых ребра одной многогранной поверхности пересекаются с другой поверхностью (многогранной или криволинейной); точки, расположенные на очерковых<sup>2</sup> образующих поверхностей (точки видимости); точки пересечения оснований тел и т.д. Опорные точки позволяют видеть, в каких пределах расположены проекции линии пересечения и где между ними имеет смысл определить промежуточные (случайные) точки. При этом нужно учитывать, что проекции линий пересечения всегда располагаются в пределах площади наложения одноименных проекций пересекающихся поверхностей.

Итак, для построения линии пересечения двух поверхностей необходимо построить дискретный ряд точек, общих для этих поверхностей. Для этого необходимо и достаточно, чтобы эти точки принадлежали линиям, которые находятся на заданных поверхностях и пересекаются между собой. Эти линии образуются с помощью пересечения заданных поверхностей вспомогательными поверхностями или плоскостями (посредниками). Точки пересечения таких линий будут общими для заданных поверхностей, а следовательно, принадлежать линии пересечения поверхностей (рис. 2).

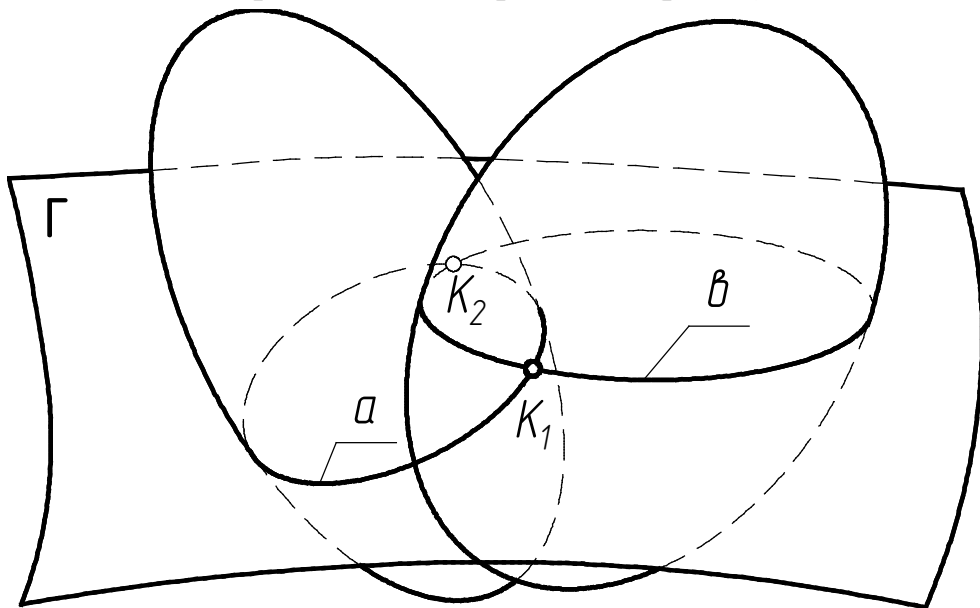


Рис. 2

В результате получим следующий алгоритм решения поставленной задачи:

1. Заданные поверхности, например  $W$  и  $D$ , пересекают вспомогательной поверхностью  $\Gamma$  (рис. 2).
2. Строят линии пересечения  $a$  и  $b$  поверхностей  $W$  и  $D$  вспомогательной поверхностью  $\Gamma$  ( $a = W \cap \Gamma$ ,  $b = D \cap \Gamma$ ).

<sup>1</sup> Если рассматриваемые поверхности имеют общую плоскость симметрии, то экстремальные точки всегда принадлежат этой плоскости.

<sup>2</sup> *Очерк* — линия, ограничивающая проекцию поверхности.

3. Точки пересечения  $K_1, K_2$  линии  $a$  с линией  $b$  принадлежат как  $W$ , так и  $D$  ( $a \cap b = K_1, K_2; K_1, K_2 \subset W; K_1, K_2 \subset D$ ).
4. Повторяют действия по п. 1 – 3 алгоритма до тех пор, пока не определят достаточное количество точек для построения линии пересечения.
5. Соединяя полученные точки между собой, строят линию пересечения поверхностей  $W$  и  $D$ .

Следует выбирать поверхности-посредники так, чтобы они давали графически простые линии пересечения с заданными поверхностями (например, прямые или окружности).

При составлении алгоритма не вкладывалось никаких конкретных понятий о виде, расположении и способе задания поверхностей  $W$  и  $D$ , поэтому приведенный алгоритм является обобщенным, пригодным для решения задач по определению линии пересечения любых поверхностей.

Если одна из пересекающихся поверхностей — плоскость, то принято говорить не о пересечении, а о сечении поверхности плоскостью. Полученная при этом линия называется *линией сечения*. Если линия замкнута, то ограниченная ей фигура называется *сечением*.

В качестве вспомогательных поверхностей при определении линии сечения обычно используются плоскости или сферы.

### 3.2. Сечение поверхности плоскостью

Секущие плоскости могут быть общего и частного положения. Плоскости общего положения имеют ограниченное применение. Их удобно использовать при построении линий пересечения конических (пирамидальных) и цилиндрических (призматических) поверхностей общего вида, когда основания этих поверхностей расположены в одной плоскости. В сечении поверхности плоскостью получается плоская линия.

Сечения поверхностей плоскостью наиболее часто применяют при определении линий пересечения гранных и криволинейных поверхностей.

Рассмотрим основные случаи пересечения поверхности плоскостью. В приведенных ниже примерах для простоты построений рассматриваются фронтально-проецирующие плоскости ( $S \perp \Pi_2$ ). Очевидно, что если поверхность пересекается плоскостью общего положения, то с помощью методов преобразования чертежа такую плоскость всегда можно преобразовать в проецирующую, то есть задачу можно свести к одной из рассмотренных ниже. Например, при использовании метода замены плоскостей проекций необходимо построить дополнительное изображение поверхности и секущей плоскости  $S$  на новой плоскости проекций  $\Pi_4$ , по отношению к которой  $S$  занимает проецирующее положение ( $S \perp \Pi_4$ ). Подробно методы преобразования чертежа рассмотрены в [1].

### 3.2.1. Сечение гранной поверхности

Линией сечения гранной поверхности является ломаная. Для ее построения достаточно определить точки пересечения ребер и сторон основания (если имеет место пересечение основания) и соединить построенные точки с учетом их видимости (рис. 3). Секущая плоскость  $S$  занимает фронтально-проецирующее положение, поэтому точки пересечения ребер определяются без дополнительных построений:

$$AS \cap S = 1 (1_1; 1_2).$$

$$BS \cap S = 2 (2_1; 2_2).$$

$$CS \cap S = 3 (3_1; 3_2).$$

Так как грань  $ASC$  относительно плоскости  $\Pi_1$  невидима, то и линия  $1_13_1$  тоже невидима.

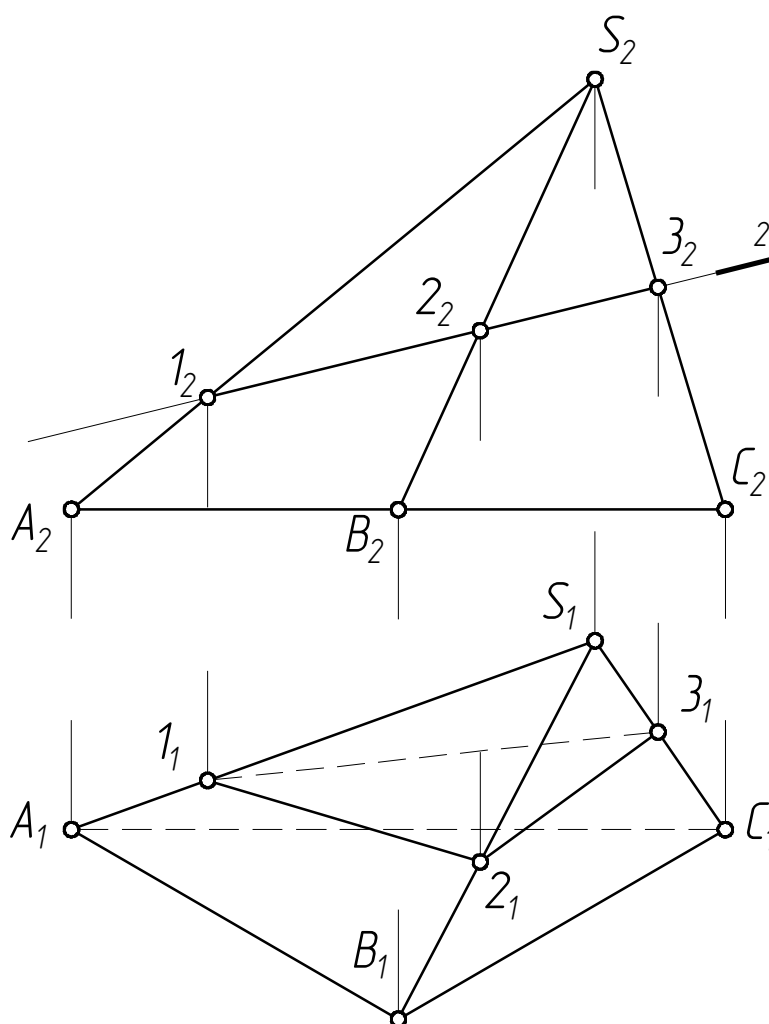


Рис. 3

### 3.2.2. Сечение цилиндрической поверхности

В сечении цилиндрической поверхности вращения плоскостью могут быть получены следующие линии (рис. 4):

- окружность, если секущая плоскость  $S$  перпендикулярна оси вращения поверхности;

- эллипс (или его части), если секущая плоскость  $Q$  не перпендикулярна и не параллельна оси вращения;
- две образующие (прямые), если секущая плоскость  $W$  параллельна оси вращения поверхности.

Боковая поверхность цилиндра, показанного на рис. 4, перпендикулярна  $\Pi_1$ , поэтому проекции его сечений плоскостями  $Q$  и  $S$  (эллипс и окружность соответственно) на  $\Pi_1$  совпадают с проекцией всего цилиндра.

Следует обратить внимание на построение промежуточных точек 3 и 4 эллиптического сечения. Здесь роль вспомогательной секущей плоскости играет плоскость  $Q$  или  $S$ . Если ввести дополнительные плоскости  $\Gamma'_2, \Gamma''_2$  и т.д., то получим другие промежуточные точки, соединяя которые на профильной проекции, строим эллипс.

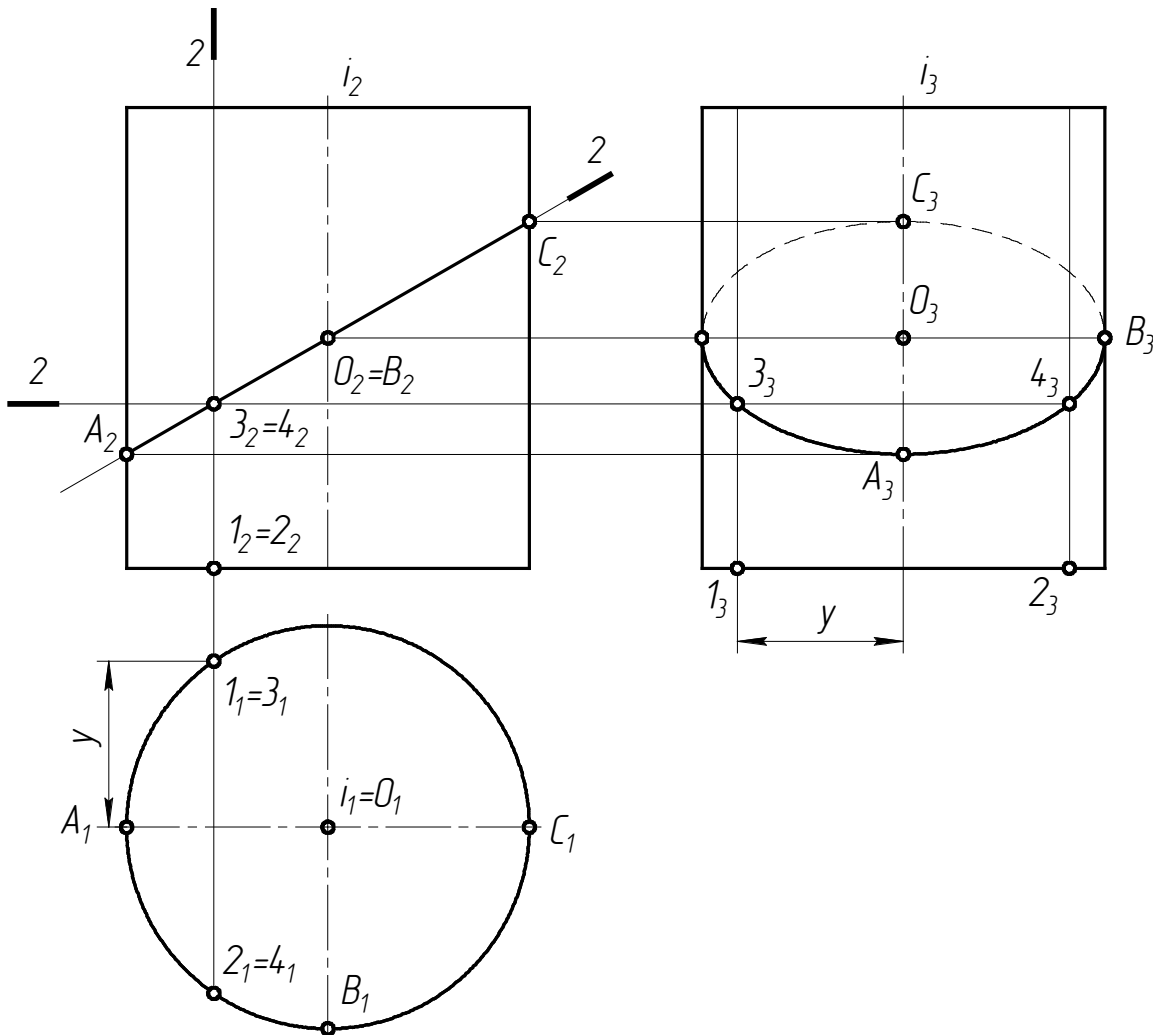


Рис. 4

### 3.2.3. Сечение конической поверхности

В сечении конической поверхности вращения плоскостью могут быть получены следующие линии (рис. 5 – 9):

- окружность, если секущая плоскость  $S$  перпендикулярна оси вращения (рис. 5);



- эллипс, если секущая плоскость  $S$  пересекает все образующие поверхности (рис. 6);
- парабола, если секущая плоскость  $S$  параллельна одной из образующих  $SL$  (рис. 7);
- гипербола, если секущая плоскость  $S$  параллельна двум образующим ( $SM$  и  $SN$ ) поверхности (рис. 8);
- две образующие прямые, если секущая плоскость  $S$  проходит через вершину  $S$  конуса (рис. 9).

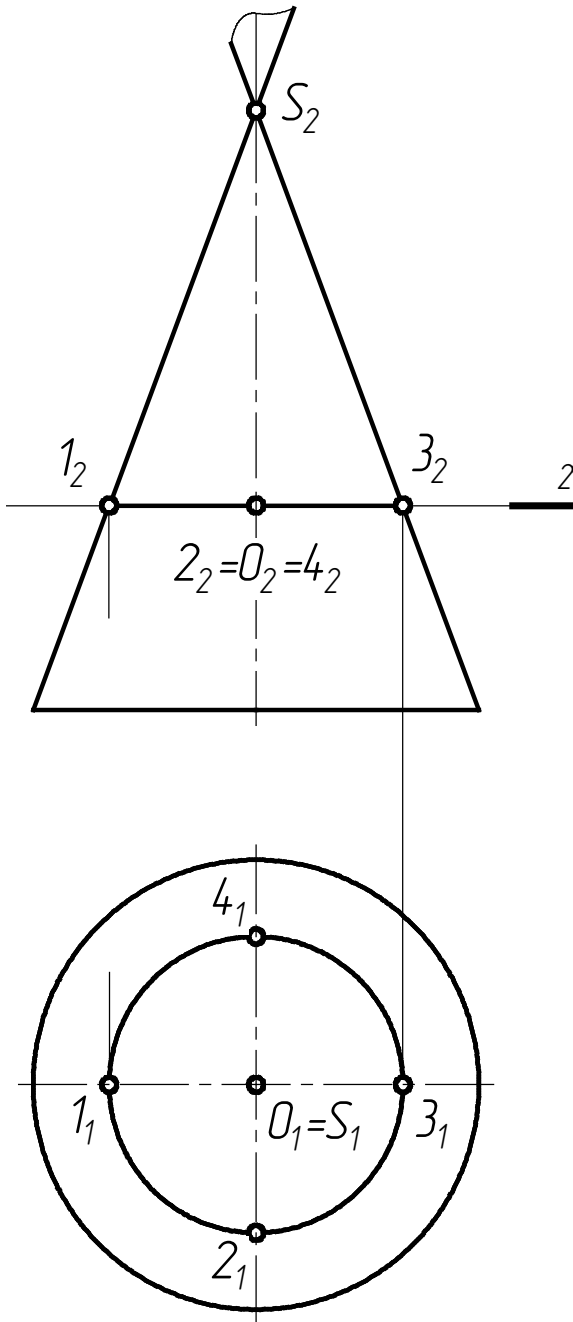


Рис. 5

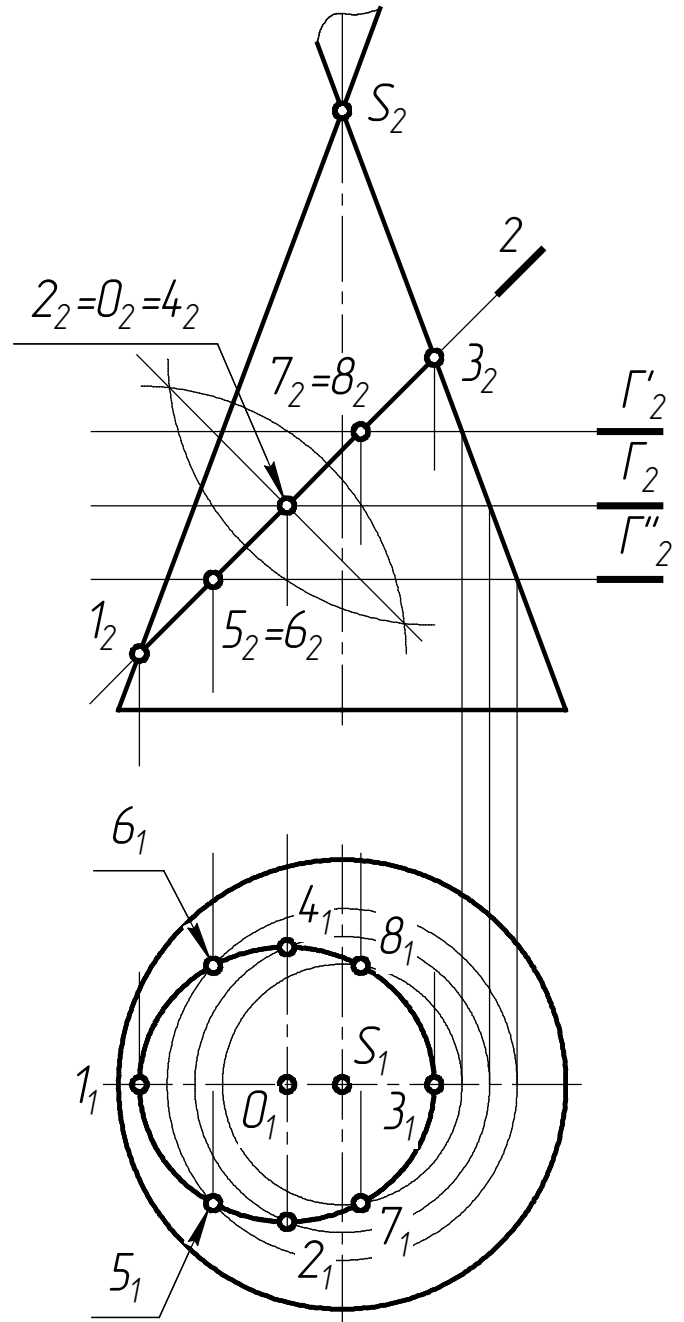


Рис. 6

Проекции кривых линий сечений конуса плоскостью строятся по отдельным точкам (например, точки 5 и 6 на рис. 6, рис. 7 и рис. 8). При этом вво-

дятся вспомогательные плоскости-посредники  $\Gamma'$ ,  $\Gamma''$  и т.д., перпендикулярные оси симметрии конуса или проходящие через его вершину. В первом случае вспомогательные плоскости пересекают поверхность конуса по окружности, во втором случае (рис. 7) — по прямым линиям (образующим). Заданная плоскость  $S$  пересекается плоскостями-посредниками по прямым линиям, перпендикулярным  $\Pi_2$ .

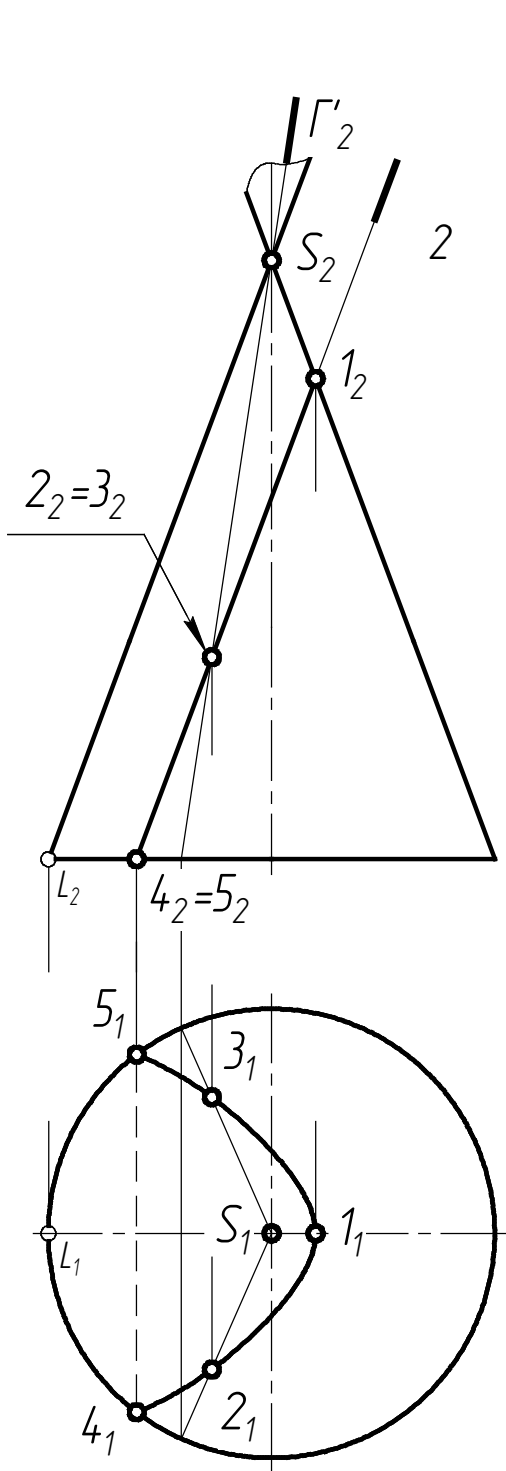


Рис. 7

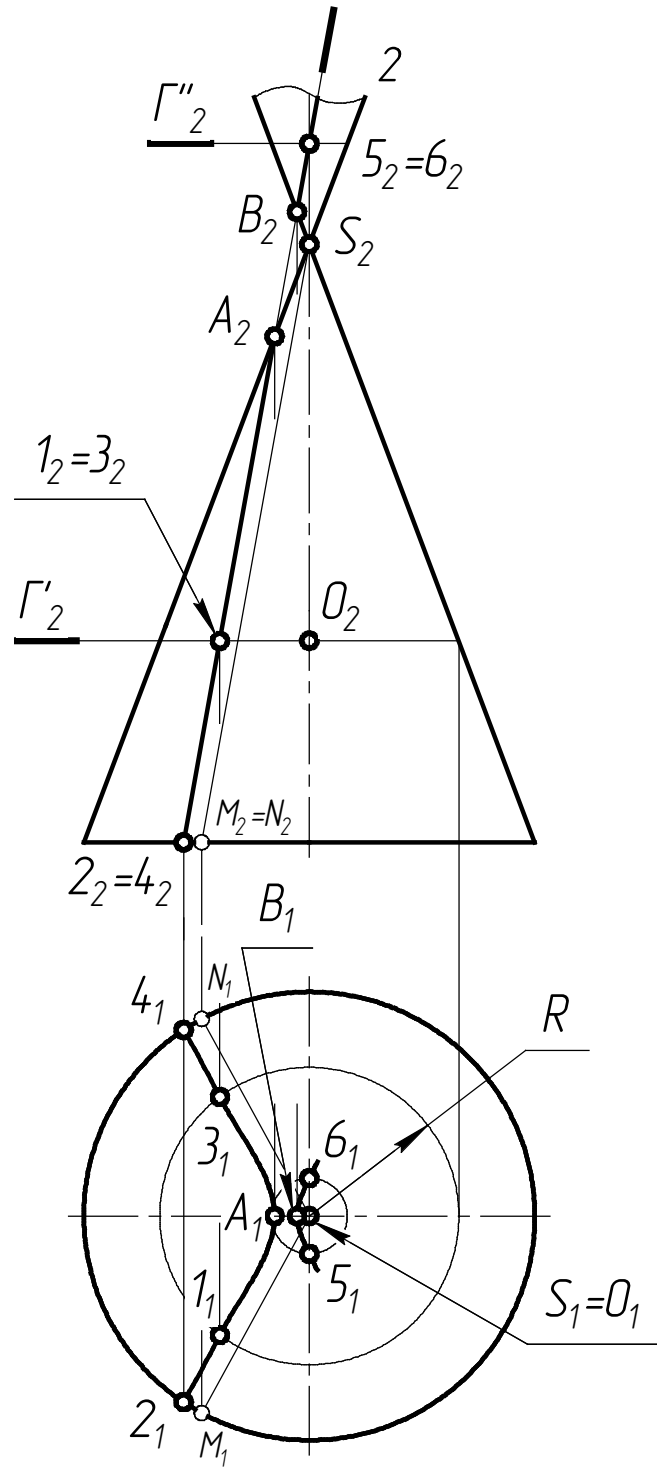


Рис. 8

Точки пересечения полученных линий (прямой и окружности на рис. 6; двух прямых на рис. 7) являются точками пересечения секущей плоскости  $S$  и поверхности конуса.

Отметим, что при построении эллипса следует вначале найти его центр (точка  $O$  на рис. 6). Большая и малая оси эллипса в точке  $O$  делятся пополам и взаимно перпендикулярны. Поэтому на рис. 6 для нахождения малой оси необходимо графически разделить  $1_2 3_2$  пополам и через найденную точку провести секущую плоскость  $\Gamma' \parallel \Pi_1$ . Горизонтальная проекция сечения — окружность радиуса  $R$ , хорда  $2_1 4_1$  которой является проекцией малой оси эллипса.

### 3.2.4. Сечение сферической поверхности

При пересечении сферы плоскостью всегда получается окружность. Если секущая плоскость параллельна какой-либо плоскости проекций, то на эту плоскость окружность сечения проецируется без искажения (окружность радиуса  $R$  на рис. 10).

Если секущая плоскость занимает проецирующее положение, то на плоскости проекций, которой секущая плоскость перпендикулярна ( $S \perp \Pi_2$  на рис. 11), окружность сечения вырождается в отрезок прямой ( $1_2 - 2_2$ ), длина которого равна диаметру окружности. На другой плоскости проекцией окружности будет эллипс, большая ось которого ( $3_1 - 4_1$ ) также равна этому диаметру. Положение оси эллипса можно определить как способом, показанным на рис. 6, так и с помощью перпендикуляра, опущенного из центра проекции сферы на проекцию сечения (отрезок  $O_2 O'_2$  на рис. 11).

Эллипс строят по точкам, пересекая сферу вспомогательными плоскостями  $\Gamma_2, \Gamma'_2$ . Так, промежуточные точки  $7_1 - 8_1$  получены на пересечении плоскости  $\Gamma'_2$  с секущей плоскостью  $S_2$  (прямая  $7_1 - 8_1$ ) и поверхностью сферы (окружность  $R'_1$ ). Точки видимости 5 и 6 относительно плоскости  $\Pi_1$  лежат на экваторе сферы.

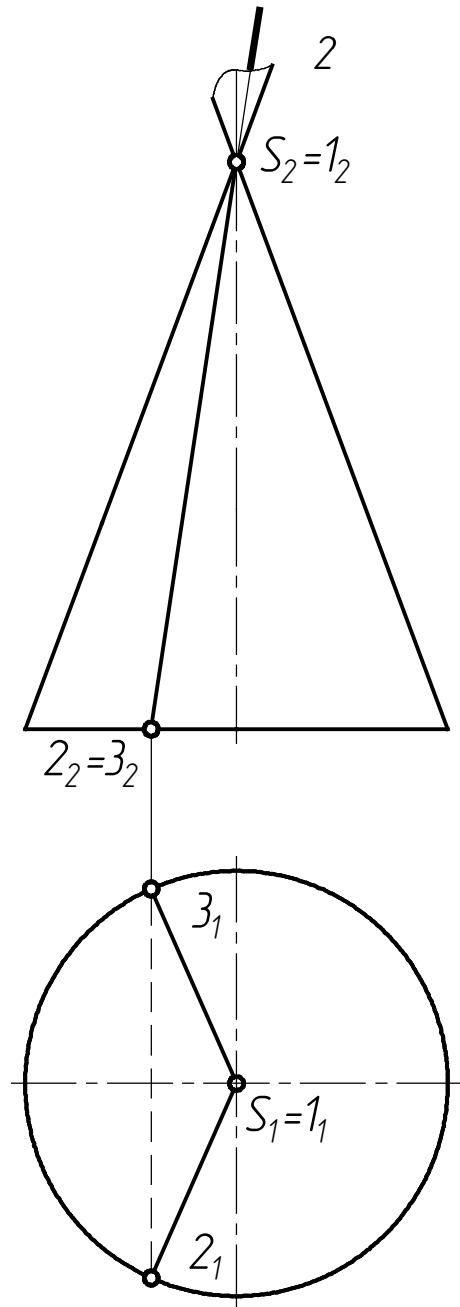


Рис. 9



гогранника с гранями другого. При этом задача сводится к нахождению точек пересечения прямой и плоскости. Обычно пользуются вторым способом.

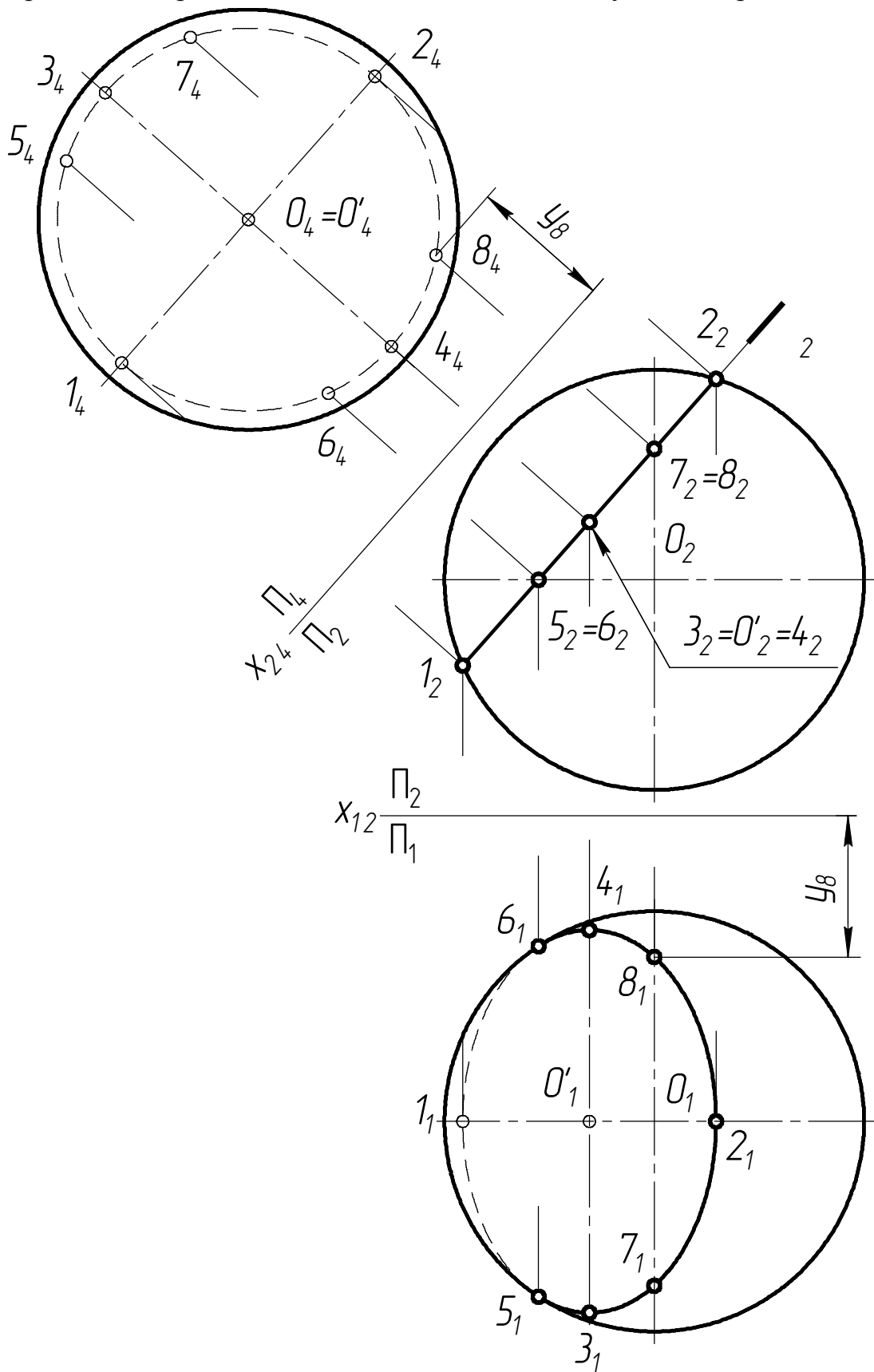


Рис. 12

Рассмотрим построение линии пересечения двух гранных поверхностей на примере рис. 13. Линия пересечения заданных многогранников распадается на две замкнутые линии. Построение этих линий выполняется следующим образом:

- через какое-либо ребро многогранника проводится плоскость-посредник — например,  $\Gamma$  проводится через ребро  $AA'$  призмы. В проекции на  $\Pi_1$  сечение пирамиды представится в виде треугольника  $9_110_111_1$  (на рис. 13 заштрихован в одном направлении), стороны  $9_111_1$  и  $10_111_1$  которого пересекают  $A_1A'_1$  в точках  $2_1$  и  $6_1$ . Эти точки являются проекциями точек пересечения 2 и 6 ребра  $AA'$  призмы с гранями  $SEF$  и  $SED$  пирамиды. Таким образом, точки 2 и 6 принадлежат линии пересечения пирамиды и призмы. После этого строятся проекции  $2_2$  и  $6_2$  этих точек на  $\Pi_2$ ;
- производя подобные операции с другими ребрами призмы, получим точки их пересечения 4 и 7 (ребро  $BB'$ ), 1 и 8 (ребро  $CC'$ ) с гранями пирамиды. Поскольку точки 6, 7, и 8 лежат на одной грани  $SED$ , соединим их между собой ломаной — первая замкнутая линия построена;
- вторая замкнутая линия проходит через две грани пирамиды ( $SFE$  и  $SFD$ ), поэтому для ее построения необходимо определить точки пересечения ребра  $SF$  пирамиды с гранями  $AA'B'B$  и  $BB'C'C$  призмы. С этой целью через  $SF$  проведем фронтально-проецирующую плоскость  $S$ . Проекция точек пересечения  $S$  с ребрами призмы —  $12_2$ ,  $13_2$  и  $14_2$  (следует учесть, что  $9_2 \equiv 14_2$ ). Соединяя их горизонтальные проекции  $12_1$ ,  $13_1$  и  $14_1$ , получим горизонтальную проекцию сечения призмы плоскостью  $S$  (на рис. 13 заштрихована в двух направлениях). Стороны  $12_114_1$  и  $12_113_1$  полученной проекции сечения пересекают горизонтальную проекцию  $S_1F_1$  ребра  $SF$  соответственно в точках  $3_1$  и  $5_1$  — проекциях искомых точек пересечения ребра  $SF$  и граней  $AA'B'B$  и  $BB'C'C$  призмы. Проекция  $3_2$  и  $5_2$  строятся из условия их принадлежности  $S_2F_2$ ;
- последовательно соединяя точки  $1_1$ ,  $2_1$ ,  $3_1$ ,  $4_1$ ,  $5_1$  (на горизонтальной проекции) и точки  $1_2$ ,  $2_2$ ,  $3_2$ ,  $4_2$ ,  $5_2$  (на фронтальной проекции), получим проекции второй замкнутой линии, составляющей линию пересечения пирамиды и призмы;
- определим относительную видимость отрезков полученной линии пересечения и ребер заданных многогранников. Анализируя выполненные построения, можно сделать следующие выводы: на  $\Pi_2$  невидимы отрезки  $1_22_2$ ,  $2_23_2$ ,  $1_25_2$  и  $6_28_2$ ; на  $\Pi_1$  невидимы отрезки  $1_15_1$ ,  $4_15_1$  и  $7_18_1$ .

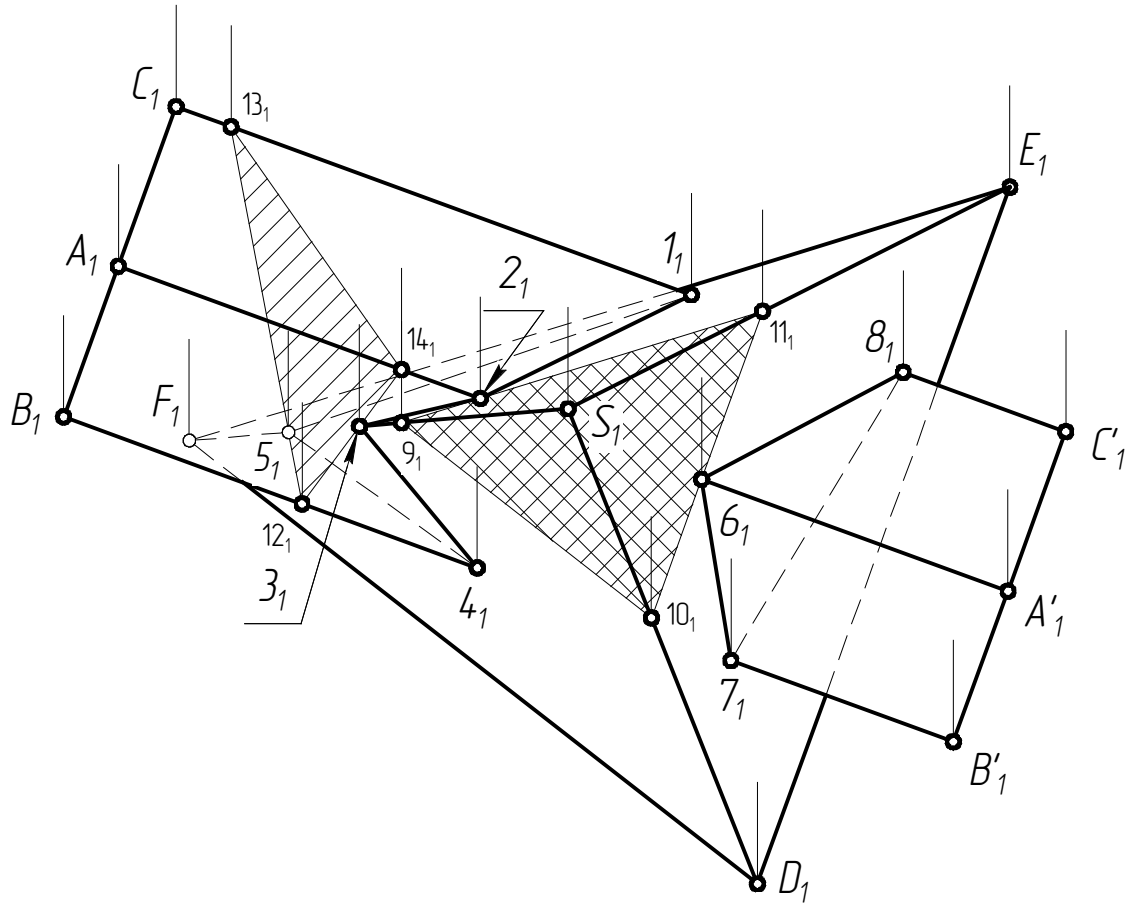
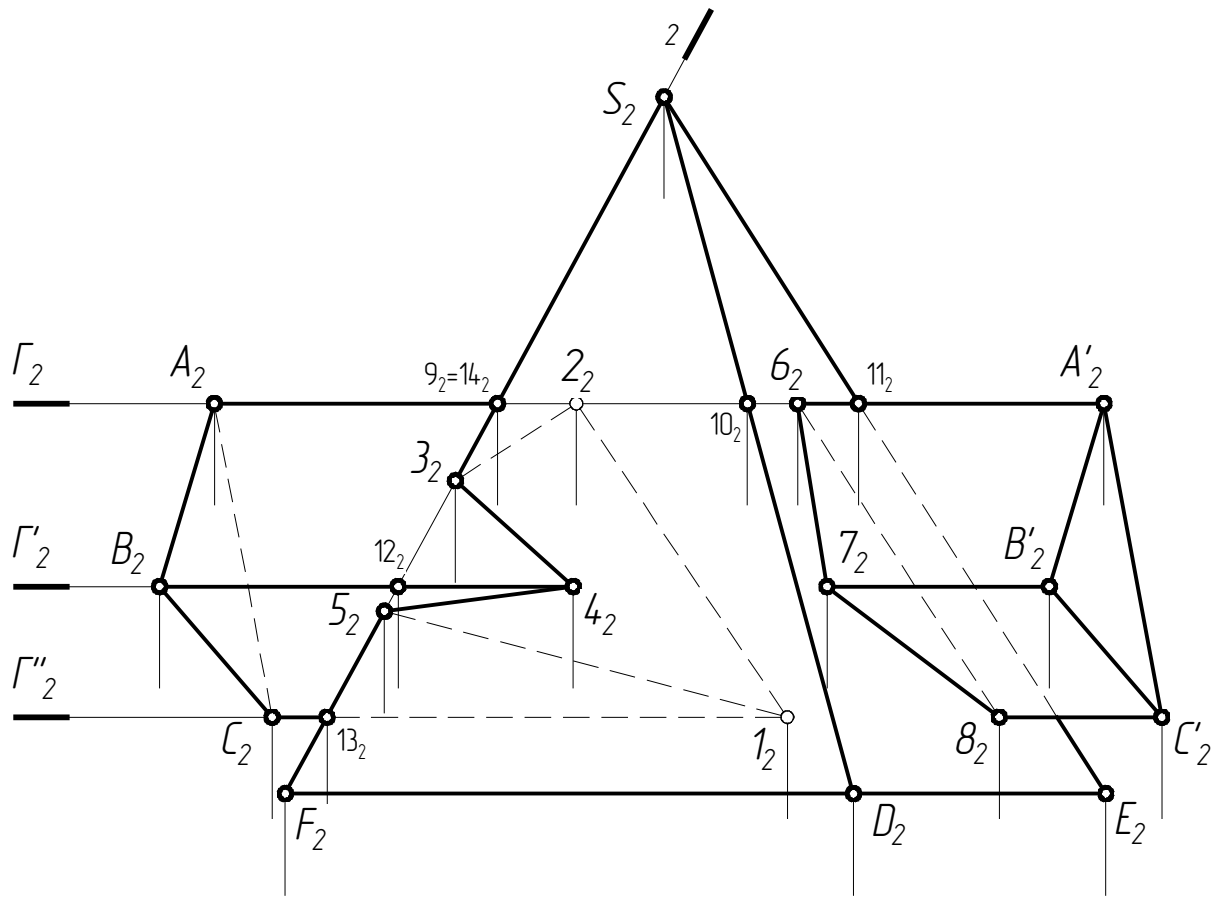


Рис. 13

### 3.4. Пересечение гранной и криволинейной поверхности

В качестве примера рассмотрим пересечение поверхностей трехгранной призмы и полусферы (рис. 14). Решение задачи сводится к решению двух позиционных задач: пересечение поверхности с плоскостями (гранями многогранника) и с прямыми (ребрами многогранника).

Боковые грани заданной призмы являются отсеками горизонтально-проецирующих плоскостей. Поэтому горизонтальные проекции линии пересечения боковых граней с поверхностью полусферы совпадут с проекциями самих боковых граней. Напомним также, что при пересечении шара плоскостью всегда получается окружность (см. подраздел 3.2.4). Отсюда можно сделать вывод, что линиями пересечения всех граней призмы с поверхностью сферы будут окружности.

Проекции опорных точек 1, 2, 3 и 4 определяются без дополнительных построений — сначала на пересечении горизонтальных проекций оснований полусферы и призмы находятся точки  $1_1, 2_1, 3_1$  и  $4_1$ , затем с помощью линий связи находятся фронтальные проекции  $1_2, 2_2, 3_2$  и  $4_2$ .

Для определения остальных точек можно воспользоваться как горизонтальными ( $S, S'$ ), так и фронтальными ( $\Gamma', \Gamma'', \Gamma'''$ ) плоскостями уровня. На чертеже примера рис. 14 приведены обе группы плоскостей.

Так, чтобы определить линию пересечения верхнего основания призмы с поверхностью полусферы, проведем плоскость  $S \equiv ABC$ . Так как  $S \parallel \Pi_1$ , то окружность радиуса  $R_2$ , полученная в сечении полусферы плоскостью  $S$ , проецируется на  $\Pi_1$  без искажения. На пересечении этой окружности с  $A_1C_1$  находятся проекции  $5_1$  и  $6_1$ , по которым с помощью линий связи определяются проекции  $5_2$  и  $6_2$  (из условия  $5 \in AC$  и  $6 \in AC$ ).

Для построения точки 7 пересечения ребра  $CC'$  с поверхностью полусферы воспользуемся вспомогательной плоскостью  $\Gamma$ , проходящей через грань  $AA'CC'$  призмы ( $\Gamma \parallel \Pi_2$ ). В сечении полусферы плоскостью  $\Gamma$  будет дуга окружности, проходящей через точку 1; так  $\Gamma \parallel \Pi_2$ , то на фронтальную плоскость проекций эта дуга радиусом  $O_21_2$  проецируется без искажения. На пересечении проекции дуги и  $C_2C'_2$  строится точка  $7_2$ . Проекция  $7_1$  определяется из очевидного условия  $7_1 \equiv C_1 \equiv C'_1$ .

Проекции линий пересечения боковых граней  $AA'BB'$  и  $BB'CC'$  с поверхностью полусферы проецируются на плоскость  $\Pi_1$  в прямые линии, совпадающие с проекциями граней, а на плоскость  $\Pi_2$  — в дуги эллипсов. Напомним, чтобы правильно построить эллипс, необходимо найти его центр и проекции точек, лежащих на большой и малой оси эллипса (см. подраздел 3.2.3 и рис. 6). В примере рис. 14 малой осью эллипса является отрезок  $2_23_2$ , а на большой оси эллипса лежит точка  $8_2$ . Чтобы найти положение точки 8, графически разделим отрезок  $2_13_1$  пополам. Затем через полученную проекцию  $8_1$  проведем фронтальную плоскость уровня  $\Gamma'$ . Плоскость пересекает полусферу по дуге окружности радиусом  $R_{\Gamma'}$  (см. рис. 14). На пересечении линии



связи и фронтальной проекции дуги строится точка  $8_2$ . Попутно с точкой 8 определяется положение проекций промежуточной точки 10.

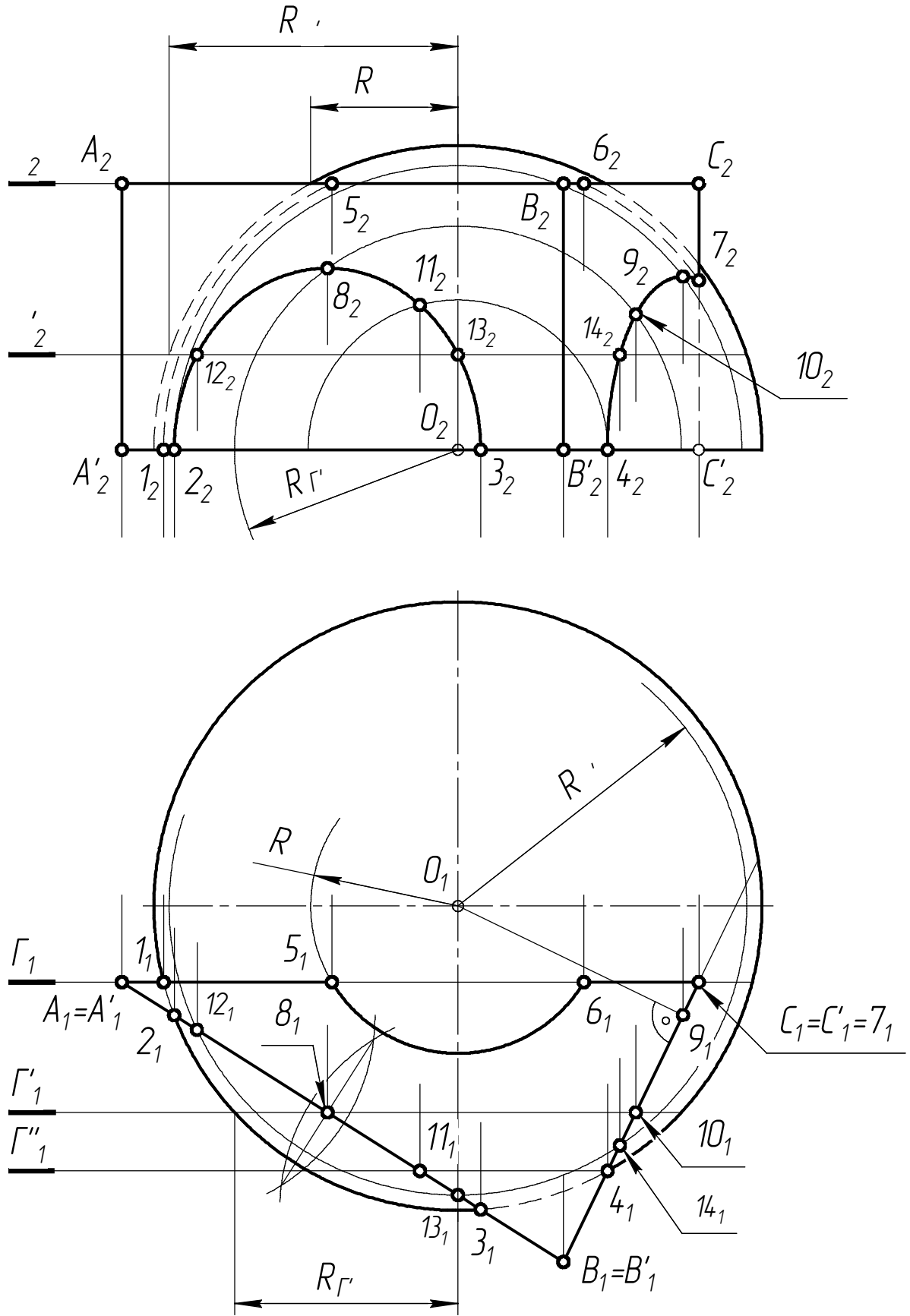


Рис. 14

Положение проекций точки 9 на рис. 14 найдено другим способом<sup>1</sup> — проекцию  $9_1$  можно получить, опустив перпендикуляр из центра  $O_1$  на проекцию грани  $BB'SS'$ . Проекция  $9_2$  точки 9 определяется по полной аналогии с построением проекции  $8_2$ .

Построение промежуточной точки 11 выполнено с помощью фронтальной плоскости уровня  $\Gamma''$ , точек 12, 13 и 14 — с помощью горизонтальной плоскости уровня  $S'$ .

### 3.5. Пересечение двух криволинейных поверхностей

Построение линии пересечения двух криволинейных поверхностей рассмотрим на примере пересечения кругового проецирующего цилиндра и конуса вращения (рис. 15). Начнем с построения опорных точек  $B$  и  $C$ , которые лежат на пересечении окружностей основания конуса и цилиндра. Проекции точек  $B$  и  $C$  определяются без дополнительных построений — сначала найдены их горизонтальные проекции  $B_1$  и  $C_1$ , а затем при помощи линий связи построены  $B_2$  и  $C_2$ .

Наивысшая точка линии пересечения  $A$  ( $A_1; A_2$ ) принадлежит общей горизонтально-проецирующей плоскости симметрии  $S$ , которая проходит через центры окружностей основания  $O_1$  и  $E_1$ . Пересечение горизонтального следа  $S_1$  с проекцией цилиндра определяет горизонтальную проекцию  $A_1$  точки  $A$ . Плоскость  $S$  пересекает поверхность конуса по образующей  $SE$  ( $S_1E_1; S_2E_2$ ). Используя линию связи, получим фронтальную проекцию  $A_2$  точки  $A$  из условия  $A_2 \in S_2E_2$ .

Отметим, проекции точки  $A$  можно также построить с помощью вспомогательной фронтально-проецирующей плоскости  $\Gamma$ . Сначала определяется горизонтальное сечение конуса этой плоскостью — окружность, касательная в точке  $A(A_1)$  к поверхности цилиндра. Затем находится положение фронтального следа  $\Gamma_2$  плоскости с помощью точки  $F$ , лежащей на очерковой образующей конуса.

Точка видимости  $D$  лежит на очерковой образующей цилиндра и определяет границу видимости линии пересечения относительно фронтальной плоскости проекций. Поскольку положение горизонтальной проекции  $D_1$  этой точки очевидно, через нее проводят окружность, которая определяет аппликату (высоту) горизонтальной плоскости уровня  $\Gamma'$ . Фронтальная проекция  $D_2$  точки  $D$  лежит на пересечении  $\Gamma'_2$  и очерковой образующей цилиндра. Участок  $C_2D_2$  фронтальной проекции линии пересечения является видимым, а далее она скрыта от наблюдателя поверхностью цилиндра.

В той же вспомогательной секущей плоскости  $\Gamma'$  лежит точка 2 ( $2_1; 2_2$ ) пересечения двух поверхностей. Сначала определяется положение проекции  $2_1$ , а затем с помощью линии связи строится ее фронтальная проекция  $2_2$ .

<sup>1</sup> Два способа определения точек на главных осях эллипсов (точек 8 и 9) приведены исключительно в учебных целях. При решении задач и выполнении РГР можно воспользоваться любым из указанных способов.

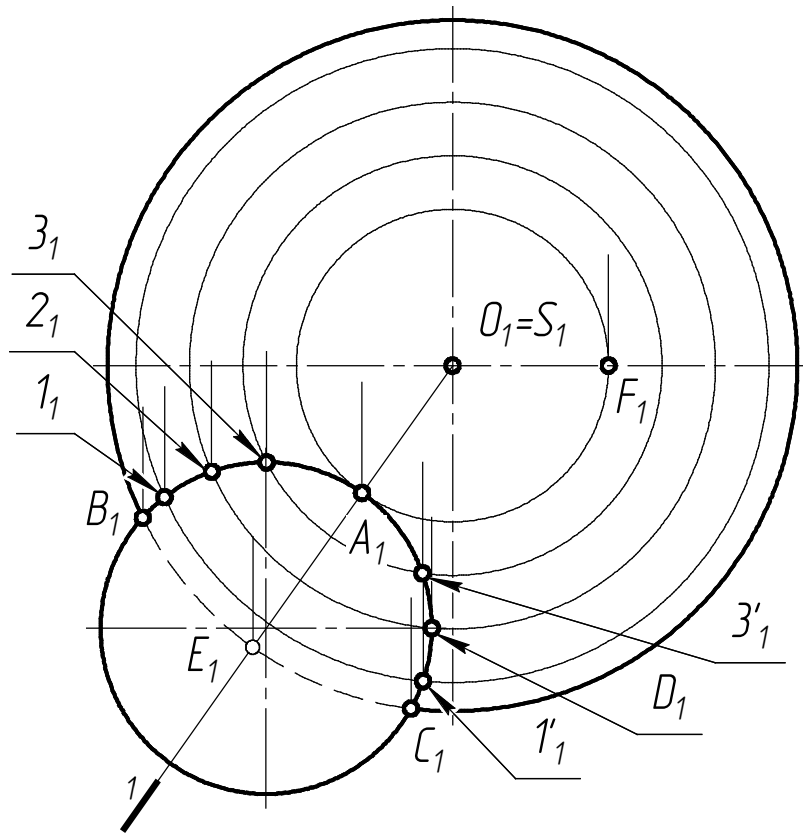
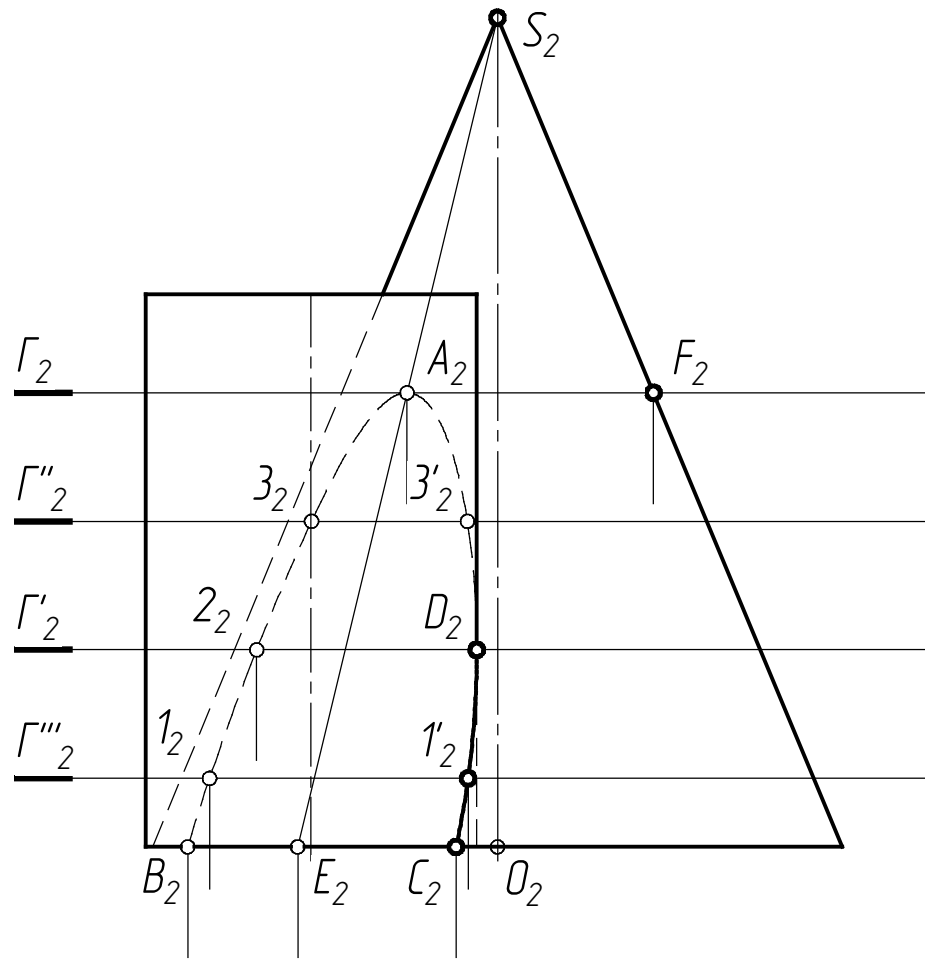


Рис. 15

Вводя секущие плоскости  $\Gamma''$ ,  $\Gamma'''$  и т.д., аналогичным образом производится построение промежуточных точек пересечения  $1, 1'$  и  $3, 3'$ , после чего все полученные точки соединяются плавной кривой.

Участки линии пересечения обоих тел будут видимы на какой-либо плоскости проекций, если они лежат на видимых участках поверхности этих тел относительно той же плоскости проекций (например, точка  $1'_2$  на фронтальной плоскости проекций).

### 3.6. Построение линии пересечения поверхностей вращения с пересекающимися осями (метод вспомогательных концентрических сфер)

Если угол между пересекающимися осями двух поверхностей вращения равен нулю, то они называются *соосными*. На рис. 16 изображены соосные цилиндр и сфера, конус и сфера, а также цилиндр и конус.

Соосные поверхности вращения всегда пересекаются по окружностям, плоскости которых перпендикулярны оси вращения. Количество этих окружностей равно количеству точек пересечения очерковых линий двух поверхностей, лежащих по одну сторону оси вращения. Поверхности, показанные на рис. 16, пересекаются по окружностям, описываемым точками 1 и 2 при их вращении вокруг общей оси. Проекции этих окружностей на плоскость, параллельную оси вращения, вырождаются в прямые линии.

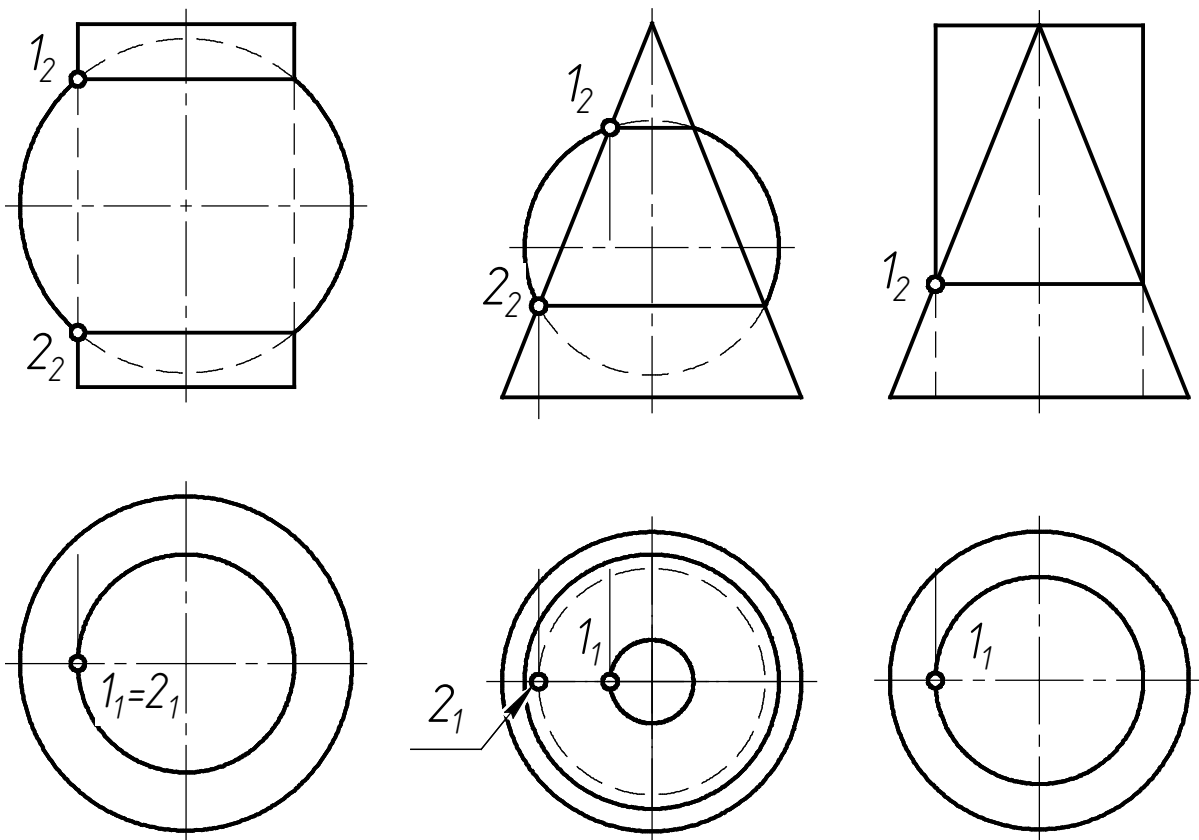


Рис. 16

Особенности пересечения соосных поверхностей вращения позволяют использовать сферы в качестве посредников при построении линии пересечения. Центр любой вспомогательной сферы находится в точке пересечения осей поверхностей (рис. 17). Такая сфера пересекает каждую поверхность по окружности. Точки пересечения этих окружностей являются общими для обеих поверхностей, а следовательно, являются точками линии их пересечения. Такой метод построения линии пересечения поверхностей называется *методом вспомогательных концентрических сфер*.

Этот метод используется тогда, когда нельзя применить метод вспомогательных секущих плоскостей по той причине, что они не дают графически простых линий при пересечении поверхностей.

Метод вспомогательных сфер может применяться и в случае, когда оси поверхностей тел вращения не пересекаются. Тогда вводятся эксцентрические сферы, центр каждой из которых располагается на соответствующей оси вращения.

Пример построения на комплексном чертеже линии пересечения двух поверхностей вращения (конуса и цилиндра) приведен на рис. 17. Оси вращения этих поверхностей пересекаются в точке  $O$  и параллельны фронтальной плоскости проекций<sup>1</sup>. Очерковые образующие обеих поверхностей лежат в плоскости  $S$ , параллельной  $\Pi_2$ . Таким образом, очерковые образующие пересекутся в точках 5, 6, 7, 8, а их фронтальные проекции  $5_2, 6_2, 7_2$  и  $8_2$ , находятся на пересечении проекций очерковых образующих на  $\Pi_2$ . Горизонтальные проекции  $5_1, 6_1, 7_1, 8_1$ , тех же точек принадлежат вырожденной горизонтальной проекции  $S_1$  плоскости  $S$ .

Для построения других точек линии пересечения из точки  $O$  (точка пересечения осей цилиндра и конуса) проводятся концентрические сферы-посредники. Эти сферы пересекают конус и цилиндр по соответствующим окружностям, плоскости которых перпендикулярны осям вращения, а следовательно, и  $\Pi_2$ . Таким образом, полученные окружности проецируются на фронтальную плоскость проекций в виде прямых линий.

При построении линии пересечения сначала проводятся два крайних посредника (в примере на рис. 17 — сферы радиусом  $R'$  и  $R''$ ), а все остальные располагаются между ними. Сфера наименьшего радиуса  $R'$  вписана в цилиндр (касается его по одной окружности  $l_2^1$ ) и пересекает поверхность конуса по двум окружностям, фронтальные проекции которых вырождены в прямые линии  $l_2^2$  и  $l_2^3$ . Пересечения этих прямых дают точки  $1_2 \equiv 2_2$  и  $3_2 \equiv 4_2$ . Для построения горизонтальных проекций точек необходимо на плоскости  $\Pi_1$  провести две окружности  $l_1^2$  и  $l_1^3$  (по которым сфера радиуса  $R'_1$  пересекает конус) и с помощью линий связи найти на них точки  $1_1, 2_1, 3_1, 4_1$ .

<sup>1</sup> Если оси вращения поверхностей занимают общее положение относительно плоскостей проекций, то их следует перевести в частное положение методами преобразования комплексного чертежа.

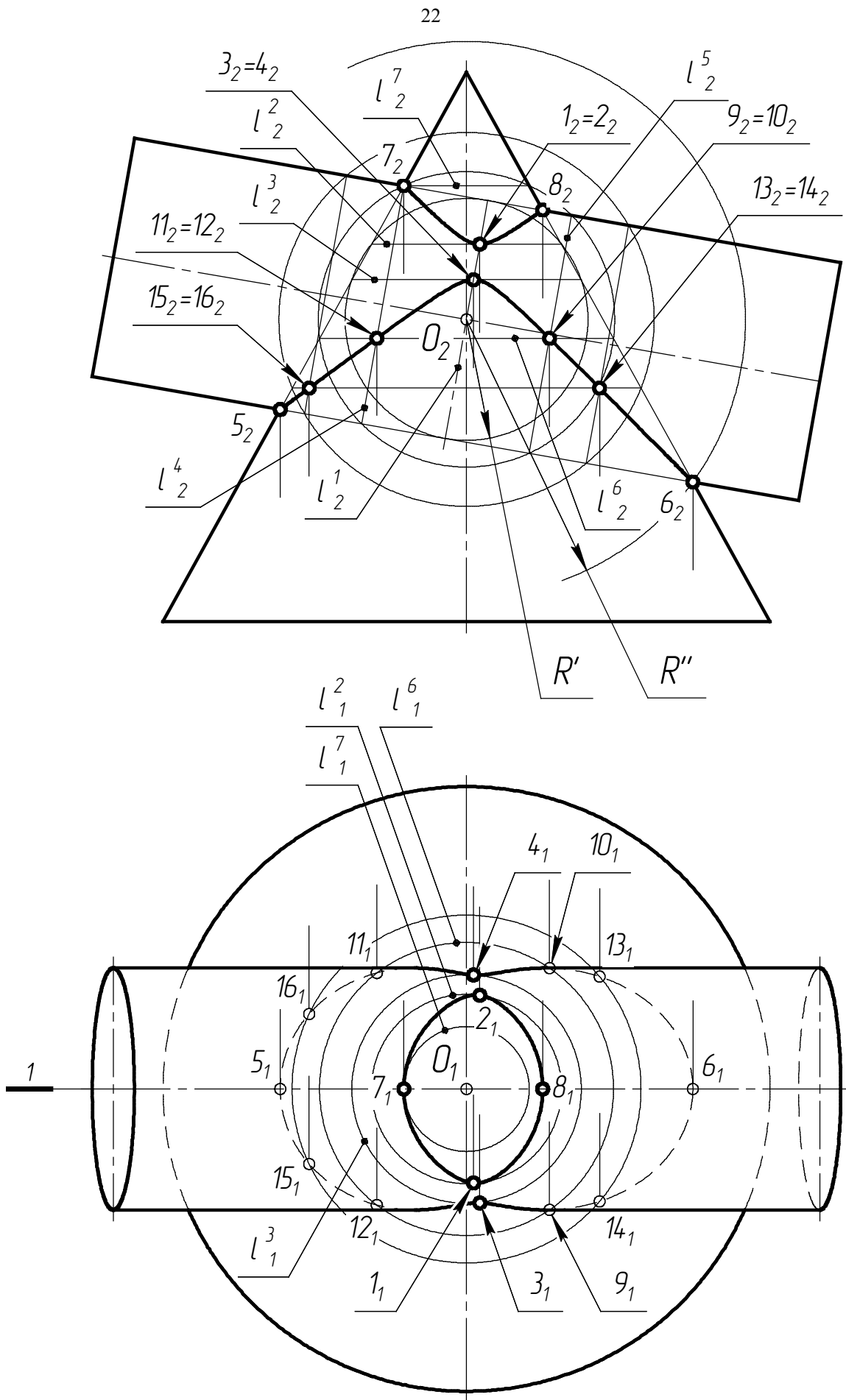


Рис. 17

Следует отметить, что в поверхность конуса можно вписать сферу меньшего диаметра, чем  $R'$ , но она не будет пересекать или касаться поверхности цилиндра, то есть будет бесполезным посредником. Поэтому из двух наименьших сфер, вписываемых в пересекающиеся поверхности, выбирают большую.

Вторым крайним посредником является сфера радиуса  $R''$ . Этот радиус равен расстоянию от центра конуса  $O$  до наиболее удаленной от него точки 6. Фронтальная проекция сферы изобразится окружностью радиуса  $R_2'' = R''$ .

Приведем также порядок построения некоторых промежуточных точек. Рассечем поверхность сферой-посредником с радиусом  $R$  ( $R' < R < R''$ ), проходящей, например, через точку 7. Сфера пересечет каждую из поверхностей по двум окружностям, которые на  $\Pi_2$  проецируются как прямые линии ( $l_2^4, l_2^5$  и  $l_2^6, l_2^7$ ) и пересекаются между собой в точках  $7_2, 9_2 \equiv 10_2$  и  $11_2 \equiv 12_2$ :

$$\begin{aligned} 7_2 &= l_2^4 \cap l_2^7; \\ (9_2 \equiv 10_2) &= l_2^5 \cap l_2^6; \\ (11_2 \equiv 12_2) &= l_2^4 \cap l_2^6. \end{aligned}$$

Горизонтальные проекции ( $9_1, 10_1, 11_1, 12_1$ ) точек 9, 10, 11, 12 определяются как пересечения соответствующих линий связи и окружности  $l_1^6$  наибольшего сечения конуса сферой радиуса  $R$ .

### 3.7. Особые случаи пересечения поверхностей вращения

На рис. 18 – 20 приведены три случая пересечения поверхностей вращения (конуса и цилиндра):

- на рис. 18 цилиндр врезается в конус, потому что сфера, вписанная в конус с центром в точке пересечения осей поверхностей, имеет диаметр больший, чем диаметр цилиндра. Все образующие цилиндра пересекаются с поверхностью конуса;
- на рис. 20 конус врезается в цилиндр, так как сфера, вписанная в конус, меньше диаметра цилиндра. Все образующие конуса пересекают поверхность цилиндра;
- на рис. 19 сфера, вписанная в одну поверхность, касается второй поверхности, поэтому в пересечении участвуют все образующие и цилиндра, и конуса. В этом случае пространственная линия пересечения поверхностей распадается на две плоские кривые (в данном примере эллипсы).

Последнее положение формулируется **теоремой Монжа**: *если две поверхности второго порядка описаны вокруг третьей поверхности второго порядка, то они пересекаются по двум плоским кривым второго порядка.*

Такие поверхности имеют две точки, в которых они касаются друг друга. В соответствии с теоремой Монжа линия пересечения двух поверхностей

вращения, имеющих две точки касания, распадается на две плоские кривые второго порядка. Плоскости этих кривых проходят через прямую, соединяющую точки соприкосновения (рис. 21).

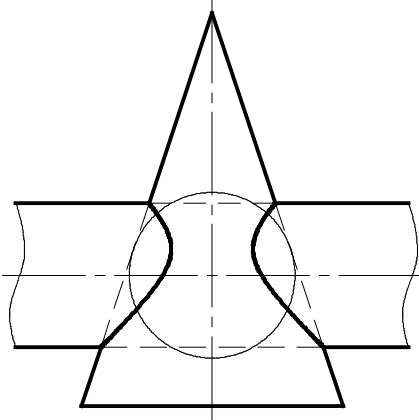


Рис. 18

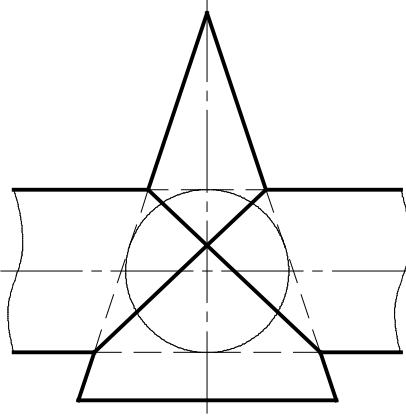


Рис. 19

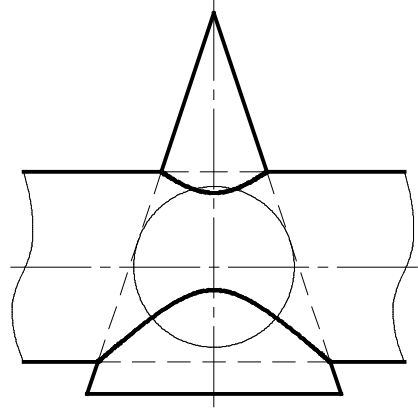


Рис. 20

Две цилиндрические поверхности вращения одного диаметра касаются друг друга в точках  $A$  и  $B$ , то есть имеют общие касательные плоскости  $\Gamma_1$  и  $\Gamma'_1$ . Прямая  $AB$  занимает фронтально-проецирующее положение, поэтому плоскости кривых пересечения будут фронтально-проецирующими. На фронтальной плоскости проекций эллипсы  $ACBF$  и  $AEBD$  изображаются отрезками прямых; горизонтальной плоскости проекций — окружностями, совпадающими с вырожденной проекцией вертикального цилиндра. На рис. 22 изображено пересечение с магистралью перпендикулярной и наклонной труб (все трубы имеют одинаковый диаметр).

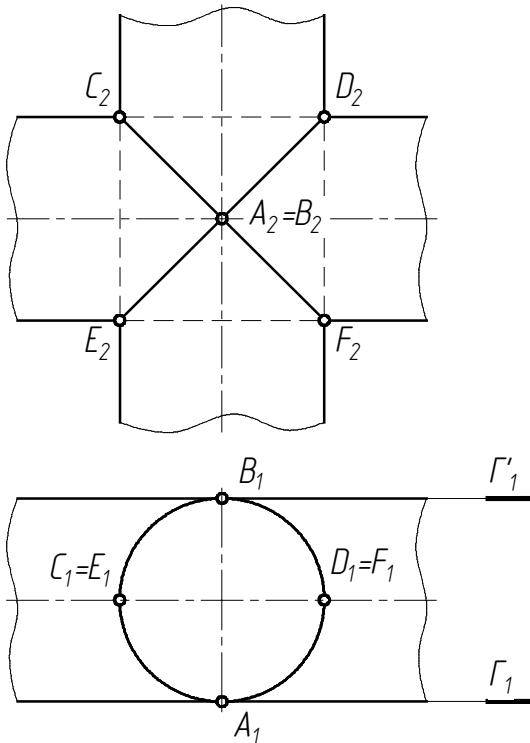


Рис. 21

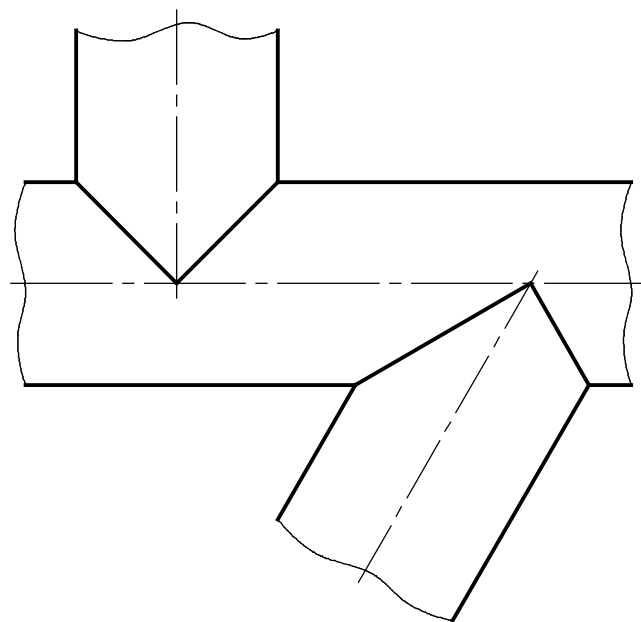


Рис. 22



На рис. 23 приведено построение линий пересечения воздуховодов. Цилиндрическая и две конические трубы пересекаются между собой и описаны около сферы с центром в точке  $O$ . Пересекающиеся с коническими цилиндрические трубы описаны около сфер с центрами в  $O_1$  и  $O_2$ . В соответствии с теоремой Монжа каждая пара труб пересекается в данном случае по эллипсам, проекции которых на  $\Pi_2$  вырождаются в прямые  $M_2N_2$ ,  $K_2L_2$ ,  $O_2P_2$ ,  $S_2T_2$ , так как оси поверхностей параллельны  $\Pi_2$ . Таким образом, в рассматриваемом случае не требуется искать отдельные промежуточные точки линий пересечения, что значительно упрощает построения.

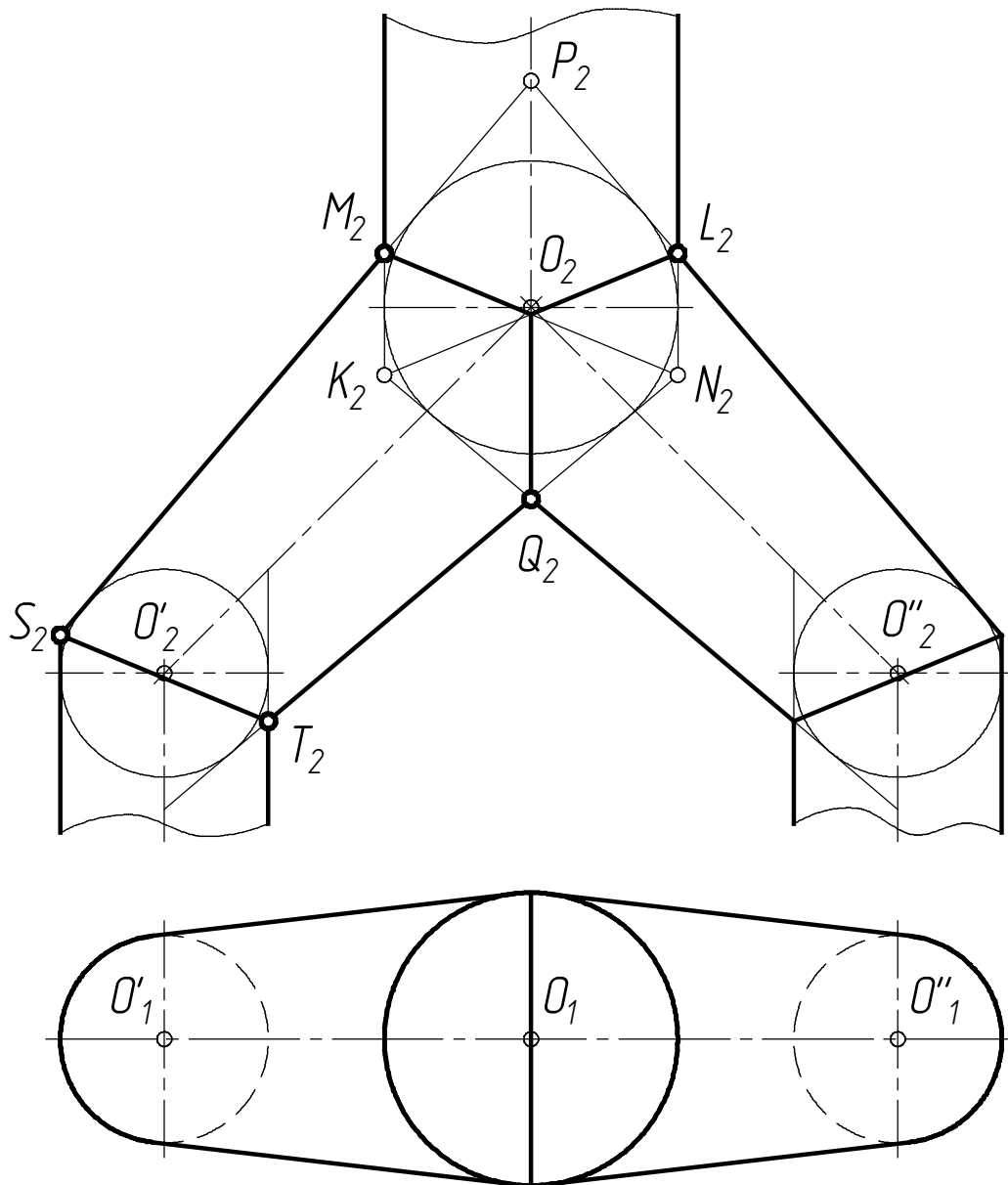


Рис. 23

В реальных деталях машин и механизмов (особенно в тех, которые изготавливаются с использованием литья) пересекающиеся поверхности плавно сопрягаются между собой по некоторому радиусу, как показано на рис. 24. Чтобы не строить две близкорасположенные линии пересечения сопрягающей поверхности с основными поверхностями, на чертеже условно проводят

одну тонкую сплошную линию, которую называют *линией перехода* (рис. 24 и 25). Линия перехода заканчивается в точках пересечения очерковых линий основных поверхностей и заменяется простыми (циркульными) кривыми.

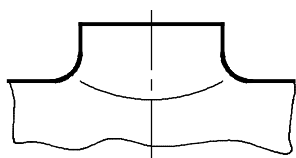


Рис. 24

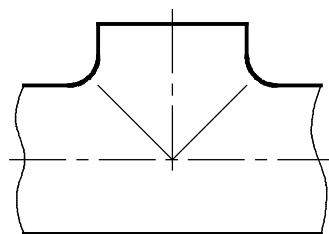
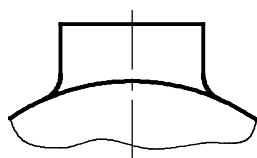


Рис. 25

## 4. Пример выполнения расчетно-графической работы

Пример выполнения РГР на листе формата А4 показан на рис. 26. В примере заданы криволинейная и гранная поверхности. Подробно построение линии пересечения гранных и криволинейных поверхностей рассмотрено в разделе 3.4. Здесь лишь обозначим последовательность построений:

1. Вычерчиваются две проекции заданных фигур в тонких линиях.
2. С помощью вспомогательной секущей плоскости  $\Gamma$  определяется положение проекций опорных точек  $1_2$  и  $2_2$ , а затем  $1_1$  и  $2_1$ .
3. С помощью вспомогательных секущих плоскостей  $\Gamma^I$  и  $\Gamma^{II}$  определяется положение проекций опорных точек  $3_2 = 4_2$ , а затем  $3_1$  и  $4_1$ .
4. Аналогичным способом определяются проекции промежуточных точек 5, 6, 7, 8, 9 и 10.
5. Строится фронтальная проекция линии пересечения — плавной линией соединяются проекции  $\{3_2 - 5_2 - 9_2 - 1_2\}$ .
6. Строится горизонтальная проекция линии пересечения — плавными линиями соединяются проекции  $\{3_1 - 5_1 - 9_1 - 1_1\}$ ,  $\{4_1 - 7_1 - 10_1 - 1_1\}$  и  $\{3_1 - 6_1 - 2_1 - 8_1 - 4_1\}$ .
7. Определяется видимость элементов фигур и линии пересечения.
8. Проставляются размеры согласно варианту задания.
9. Видимые контуры обводятся основными линиями.
10. Вычерчивается рамка и основная надпись. Основная надпись заполняется согласно требованиям ГОСТ 2.104-68.

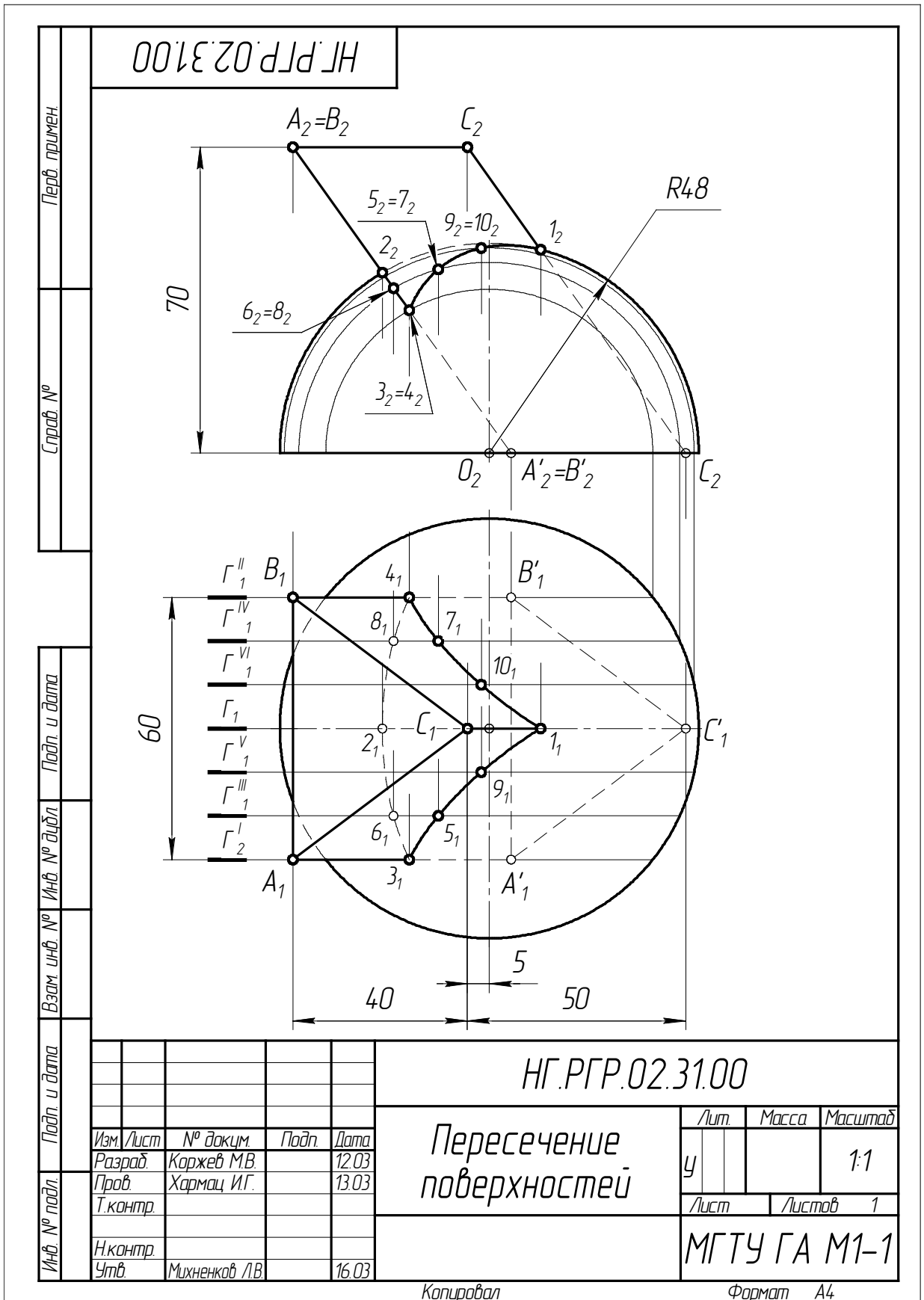


Рис. 26

## 5. Вопросы для самостоятельной подготовки

1. Как строится линия пересечения поверхности плоскостью?
2. Какие линии могут быть получены в сечении прямого кругового цилиндра, конуса, сферы?
3. Какова последовательность построения линии пересечения двух поверхностей?
4. Какие поверхности обычно используются в качестве вспомогательных при построении точек линии пересечения двух основных поверхностей?
5. В чем сущность применения вспомогательных секущих плоскостей при построении линии пересечения двух поверхностей?
6. По каким линиям пересекаются соосные поверхности вращения?
7. В каких случаях при построении линии пересечения двух поверхностей используются вспомогательные сферы?
8. Как формулируется теорема Монжа о линии пересечения поверхностей второго порядка?
9. По каким линиям пересекаются два прямых круговых цилиндра одного диаметра?
10. Какую линию называют линией перехода и как она изображается на чертеже?

## Литература

1. Гордон В.О., Семенцев-Огиевский М.А. Курс начертательной геометрии. — М.: Наука, 1988. — 271 с.
2. Михненко Л.В. Основы начертательной геометрии. — М.: КолосС, 2004. — 112 с.
3. Фролов С.А. Начертательная геометрия. — М.: Машиностроение, 1987. — 239 с.

## Содержание

<b>Введение .....</b>	<b>3</b>
<b>1. Задание на расчетно-графическую работу .....</b>	<b>3</b>
<b>2. Требования и рекомендации к оформлению чертежа.....</b>	<b>3</b>
<b>3. Методические указания к выполнению расчетно-графической работы .....</b>	<b>4</b>
<b>3.1. Общие сведения о построении линии пересечения двух поверхностей</b>	<b>4</b>
<b>3.2. Сечение поверхности плоскостью .....</b>	<b>6</b>
3.2.1. Сечение гранной поверхности.....	7
3.2.2. Сечение цилиндрической поверхности.....	7
3.2.3. Сечение конической поверхности .....	8
3.2.4. Сечение сферической поверхности .....	11
<b>3.3. Пересечение гранных поверхностей .....</b>	<b>12</b>
<b>3.4. Пересечение гранной и криволинейной поверхности .....</b>	<b>16</b>
<b>3.5. Пересечение двух криволинейных поверхностей .....</b>	<b>18</b>
<b>3.6. Построение линии пересечения поверхностей вращения с пересекающимися осями (метод вспомогательных концентрических сфер).....</b>	<b>20</b>
<b>3.7. Особые случаи пересечения поверхностей вращения .....</b>	<b>23</b>
<b>4. Пример выполнения расчетно-графической работы .....</b>	<b>26</b>
<b>5. Вопросы для самостоятельной подготовки.....</b>	<b>28</b>
<b>Литература .....</b>	<b>28</b>