Дифференциальное исчисление

§1. Производная функции

1.1. Определение производной

Рассмотрим функцию $y(x)$, определённую на некотором интервале $(a; b)$.

Разность $\triangle x = x - x_0$ $(x, x_0 \in (a; b))$ называется приращением аргумента x в точке x_0. Разность $\triangle y(x_0) = y(x_0 + \triangle x) - y(x_0)$ называется приращением функции y в точке x_0.

Если существует предел (конечный или бесконечный)

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y(x_0)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{y(x_0 + \triangle x) - y(x_0)}{x - x_0},$$

то он называется производной (конечной или бесконечной) функции y в точке x_0 и обозначается $y'(x_0)$.

Для производной функции $y = f(x)$ используются следующие обозначения:

$$y', \quad y'(x), \quad f', \quad f'(x), \quad y'_x, \quad f'_x, \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{dy(x)}{dx}, \quad \frac{df}{dx}, \quad \frac{df(x)}{dx}.$$

Замечание. Приращение $\triangle y(x_0)$ функции $y(x)$ в точке x_0 часто обозначают через $\triangle y$. Однако, не следует забывать, что эта величина зависит от точки x_0 и от приращения $\triangle x$.

Геометрический смысл производной заключается в том, что производная функции $y = f(x)$ в некоторой точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0: $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$, где α — угол между касательной и положительным направлением оси абсцисс.

Механический смысл производной — это скорость (v) изменения пути (s) по времени (t): $v = s'(t)$.

Пример 1. Найти по определению производную функции $y = \frac{1}{x}$.

Решение. Зафиксируем произвольную точку $x_0 \neq 0$. Так как $y(x) = \frac{1}{x}$, то $y(x_0)=\frac{1}{x_0}$ и $y(x_0+\triangle x)=\frac{1}{x_0+\triangle x}$, поэтому

$$\triangle\, y(x_0)=y(x_0+\triangle x)-y(x_0)=\frac{1}{x_0+\triangle x}-\frac{1}{x_0}=$$

$$=\frac{x_0-(x_0+\triangle x)}{x_0(x_0+\triangle x)}=\frac{-\triangle\, x}{x_0(x_0+\triangle x)}.$$

Отсюда,

$$\frac{\triangle y(x_0)}{\triangle x}=\frac{\frac{-\triangle x}{x_0(x_0+\triangle x)}}{\triangle x}=-\frac{1}{x_0(x_0+\triangle x)}.$$

Следовательно,

$$y'(x_0)=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle y(x_0)}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\to 0}\left(-\frac{1}{x_0(x_0+\triangle x)}\right)=-\lim_{\triangle x\to 0}\frac{1}{x_0^2+x_0\triangle x}=-\frac{1}{x_0^2}.$$

Так как в качестве x_0 можно взять любое число неравное нулю, то для любого числа $x\neq 0$ получаем

$$y'(x)=\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}.$$

Например, $y'(-2)=-\frac{1}{(-2)^2}=-\frac{1}{4}$.

Пример 2. Найти по определению производную функции $y=\sin x$.

Решение. Зафиксируем произвольную точку x_0. Так как $y(x)=\sin x$, то $y(x_0)=\sin x_0$ и $y(x_0+\triangle x)=\sin(x_0+\triangle x)$, поэтому

$$\triangle y(x_0)=y(x_0+\triangle x)-y(x_0)=\sin(x_0+\triangle x)-\sin x_0.$$

Следовательно,

$$\frac{\triangle y(x_0)}{\triangle x}=\frac{\sin(x_0+\triangle x)-\sin x_0}{\triangle x}=$$

$$=\frac{2\sin\frac{\triangle x}{2}\cos\left(x_0+\frac{\triangle x}{2}\right)}{\triangle x}=\frac{\sin\frac{\triangle x}{2}}{\frac{\triangle x}{2}}\cos\left(x_0+\frac{\triangle x}{2}\right).$$

Воспользовавшись непрерывностью функции $\sin x$ и первым замечательным пределом

$$\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\sin\frac{\triangle x}{2}}{\frac{\triangle x}{2}}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1,$$

получаем

$$y'(x_0)=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle y(x_0)}{\triangle x}=1\cdot\cos x_0=\cos x_0.$$

Так как в качестве x_0 можно взять любое число, то для любого числа x выводим

$$y'(x) = (\sin x)' = \cos x.$$

Например, $y'(\frac{\pi}{2}) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$.

1.2. Производные основных элементарных функций

Приведём производные основных элементарных функций.
$(c)' = 0$ (c — число);
$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$;
$(e^x)' = e^x$;
$(a^x)' = a^x \ln a$ $(a > 0, a \neq 1)$;
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$;
$(\log_a x)'x = \frac{1}{x \ln a}$ $(a > 0, a \neq 1, x > 0)$;
$(\sin x)' = \cos x$;
$(\cos x)' = -\sin x$;
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;
$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$, $x \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$;
$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$;
$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$;
$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$;
$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$, где $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$;
$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$, где $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$;
$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$, где $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$;
$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$, $x \neq 0$, где $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$.

Пример 3. Найти производные следующих выражений: 5, $\ln\operatorname{tg}\frac{3}{7}$, 6^x, $\log_3 x$.

Решение. Производная числа равна нулю, поэтому $5' = 0$, $\left(\ln\operatorname{tg}\frac{3}{7}\right)' = 0$, так как 5 и $\ln\operatorname{tg}\frac{3}{7}$ — числа.

Для нахождения производных функций 6^x и $\log_3 x$ воспользуемся табличными формулами для производных показательной (при $a = 6$) и логарифмической (при $a = 3$) функций, имеем: $(6^x)' = 6^x \ln 6$, $(\log_3 x)' = \frac{1}{x \ln 3}$.

Пример 4. Вычислить производные следующих функций: x^{17}, $x^{\pi-e}$, $\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x^2}$, $\frac{1}{\sqrt[5]{x^7}}$.

Решение. Каждая из данных функций является степенной функцией, поэтому все производные находятся по формуле $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$. Имеем:

$$\left(x^{17}\right)' = 17x^{17-1} = 17x^{16};$$
$$\left(x^{\pi-e}\right)' = (\pi-e)x^{\pi-e-1};$$
$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = -1\cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2};$$
$$\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$
$$\left(\sqrt[3]{x^2}\right)' = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}};$$
$$\left(\frac{1}{\sqrt[5]{x^7}}\right)' = \left(\frac{1}{x^{\frac{7}{5}}}\right)' = \left(x^{-\frac{7}{5}}\right)' = -\frac{7}{5}x^{-\frac{7}{5}-1} = -\frac{7}{5}x^{-\frac{12}{5}} = -\frac{7}{5}\cdot\frac{1}{x^{\frac{12}{5}}} = -\frac{7}{5\sqrt[5]{x^{12}}}.$$

1.3. Производная суммы, разности, произведения и частного

Производные суммы, разности, произведения и частного двух функций $u = u(x)$ и $v = v(x)$ находятся по следующим формулам:

$$(u+v)' = u' + v', \qquad (u-v)' = u' - v',$$
$$(uv)' = u'v + uv', \qquad (cu)' = cu',\ \text{c — число},$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2},\ v \neq 0.$$

Пример 5. Найти производную функции $\frac{1}{x^3} - 5\ln x$.
Решение.

$$\left(\frac{1}{x^3} - 5\ln x\right)' = \left(\frac{1}{x^3}\right)' - (5\ln x)' = \left(x^{-3}\right)' - 5\left(\ln x\right)' =$$
$$= -3x^{-4} - 5\frac{1}{x} = -\frac{3}{x^4} - \frac{5}{x} = -\frac{3+5x^3}{x^4}.$$

Пример 6. Найти производную функции $\frac{2\operatorname{ch} x}{3} + \frac{\operatorname{cth} x}{4}$.
Решение.

$$\left(\frac{2\operatorname{ch} x}{3} + \frac{\operatorname{cth} x}{4}\right)' = \left(\frac{2\operatorname{ch} x}{3}\right)' + \left(\frac{\operatorname{cth} x}{4}\right)' = \frac{2}{3}(\operatorname{ch} x)' + \frac{1}{4}(\operatorname{cth} x)' =$$
$$= \frac{2}{3}\operatorname{sh} x + \frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}\right) = \frac{2\operatorname{sh} x}{3} - \frac{1}{4\operatorname{sh}^2 x}.$$

Пример 7. $f(x) = 5x^3 - 3x^2 - 2x + 7$, найти $f'(0)$, $f'(2)$, $f'(-1)$.

Решение. Сначала найдём производную функции $f(x)$:

$$f'(x) = (5x^3 - 3x^2 - 2x + 7)' = (5x^3)' - (3x^2)' - (2x)' + 7' =$$
$$= 5(x^3)' - 3(x^2)' - 2x' + 0 = 5 \cdot 3x^2 - 3 \cdot 2x - 2 \cdot 1 = 15x^2 - 6x - 2.$$

Итак, $f'(x) = 15x^2 - 6x - 2$. Теперь находим значения производных при конкретных значениях x:

$$f'(0) = 15 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 - 2 = 0 - 0 - 2 = -2,$$
$$f'(2) = 15 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 - 2 = 60 - 12 - 2 = 46,$$
$$f'(-1) = 15 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) - 2 = 15 + 6 - 2 = 19.$$

Пример 8. Найти производную функции $f(x) = (x^2 + x)\cos x$.
Решение.

$$f'(x) = \big((x^2 + x)\cos x\big)' = (x^2 + x)'\cos x + (x^2 + x)(\cos x)' =$$
$$= (2x + 1)\cos x + (x^2 + x)(-\sin x).$$

Пример 9. Найти производную функции $f(x) = \frac{x^3+2x^2+5x+1}{x^2+2^x}$.
Решение.

$$f'(x) = \left(\frac{x^3 + 2x^2 + 5x + 1}{x^2 + 2^x}\right)' =$$
$$= \frac{(x^3 + 2x^2 + 5x + 1)'(x^2 + 2^x) - (x^3 + 2x^2 + 5x + 1)(x^2 + 2^x)'}{(x^2 + 2^x)^2} =$$
$$= \frac{(3x^2 + 4x + 5)(x^2 + 2^x) - (x^3 + 2x^2 + 5x + 1)(2x + 2^x \ln 2)}{(x^2 + 2^x)^2}.$$

Пример 10. Найти производную функции $f(x) = \arccos x \ln x \operatorname{sh} x$.
Решение.

$$f'(x) = (\arccos x \ln x \operatorname{sh} x)' = ((\arccos x \ln x)\operatorname{sh} x)' =$$
$$= (\arccos x \ln x)' \operatorname{sh} x + (\arccos x \ln x)(\operatorname{sh} x)' =$$
$$= ((\arccos x)' \ln x + \arccos x(\ln x)')\operatorname{sh} x + (\arccos x \ln x)\operatorname{sh} x =$$
$$= \left(-\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\ln x + \arccos x\frac{1}{x}\right)\operatorname{sh} x + \arccos x \ln x \operatorname{ch} x =$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\ln x \operatorname{sh} x + \arccos x\frac{1}{x}\operatorname{sh} x + \arccos x \ln x \operatorname{ch} x =$$
$$= \frac{\arccos x \operatorname{sh} x}{x} - \frac{\ln x \operatorname{sh} x}{\sqrt{1 - x^2}} + \arccos x \ln x \operatorname{ch} x.$$

Пример 11. Найти производную функции $f(x) = \frac{x^{13}\operatorname{arcctg} x}{\lg x}$.

Решение. Функция $\lg x$ — это десятичный логарифм, то есть $\lg x = \log_{10} x$. Применим формулы производных частного и произведения:

$$\left(\frac{x^{13}\operatorname{arcctg} x}{\lg x}\right)' = \frac{\left(x^{13}\operatorname{arcctg} x\right)' \cdot \lg x - \left(x^{13}\operatorname{arcctg} x\right) \cdot (\lg x)'}{(\lg x)^2} =$$

$$= \frac{\left(\left(x^{13}\right)'\operatorname{arcctg} x + x^{13}\left(\operatorname{arcctg} x\right)'\right) \cdot \lg x - \left(x^{13}\operatorname{arcctg} x\right) \cdot \frac{1}{x\ln 10}}{\lg^2 x} =$$

$$= \frac{\left(13x^{12}\operatorname{arcctg} x + x^{13}\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)\right) \cdot \lg x - x^{13}\operatorname{arcctg} x \frac{1}{x\ln 10}}{\lg^2 x} =$$

$$= \frac{13x^{12}\operatorname{arcctg} x \lg x - \frac{x^{13}\lg x}{1+x^2} - \frac{x^{12}\operatorname{arcctg} x}{\ln 10}}{\lg^2 x}.$$

1.4. Производная сложной функции

Пусть функция $u = \varphi(x)$ имеет производную в некоторой точке $x = x_0$, а функция $y = f(u)$ имеет производную в точке $u_0 = \varphi(x_0)$. Тогда, сложная функция $f(\varphi(x))$ имеет производную в точке $x = x_0$, которая вычисляется по формуле

$$[f(\varphi(x_0))]' = f'(u_0) \cdot \varphi'(x_0).$$

Для краткости используется следующая запись последней формулы:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Пример 12. Найти производную функции $\ln\sin x$.

Решение. Обозначим $y = \ln u$, $u = \sin x$, тогда $y = \ln\sin x$. По теореме о производной сложной функции $y'_x = y'_u \cdot u'_x$. Находим:

$$y'_u = (\ln u)'_u = \frac{1}{u}, \qquad u'_x = (\sin x)'_x = \cos x,$$

откуда

$$(\ln\sin x)' = y'_x = y'_u \cdot u'_x = \frac{1}{u} \cdot \cos x = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \operatorname{ctg} x.$$

Пример 13. Найти производную функции $y(x) = e^{x^2}$.

Решение. Обозначим $u = x^2$, тогда $y(u) = e^u$. По теореме о производной сложной функции $y'_x = y'_u \cdot u'_x$. Находим:

$$y'_u = (e^u)'_u = e^u, \qquad u'_x = \left(x^2\right)'_x = 2x,$$

откуда

$$y'_x = \left(e^{x^2}\right)' = y'_u \cdot u'_x = e^u \cdot 2x = e^{x^2} \cdot 2x = 2xe^{x^2}.$$

Часто более удобно непосредственно находить производные промежуточных функций.

Пример 14. Найти производную функции $\ln \sin x$ (см. пример 12).

Решение.

$$(\ln \sin x)' = \frac{1}{\sin x}(\sin x)' = \frac{1}{\sin x}\cos x = \operatorname{ctg} x.$$

Пример 15. Найти производную функции $y(x) = e^{x^2}$ (см. пример 13).

Решение.

$$y'(x) = \left(e^{x^2}\right)' = e^{x^2} \cdot (x^2)' = e^{x^2} \cdot 2x = 2xe^{x^2}.$$

Пример 16. Найти производную функции e^{-x}.

Решение.

$$\left(e^{-x}\right)' = e^{-x} \cdot (-x)' = e^{-x} \cdot (-1) = -e^{-x}.$$

Пример 17. Найти производную функции $(\operatorname{tg}\sqrt{x})^3$.

Решение.

$$\left((\operatorname{tg}\sqrt{x})^3\right)' = 3(\operatorname{tg}\sqrt{x})^2(\operatorname{tg}\sqrt{x})' = 3(\operatorname{tg}\sqrt{x})^2\frac{1}{\cos^2\sqrt{x}}(\sqrt{x})' =$$

$$= 3(\operatorname{tg}\sqrt{x})^2\frac{1}{\cos^2\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3\operatorname{tg}^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}.$$

Пример 18. Найти производную функции $\cos\log_6 5x - \log_6\cos 5$.

Решение.

$$(\cos\log_6 5x - \log_6\cos 5)' = (\cos\log_6 5x)' - (\log_6\cos 5)' = (\cos\log_6 5x)' =$$

$$= -\sin\log_6 5x \cdot (\log_6 5x)' = -\sin\log_6 5x \cdot \frac{1}{(5x)\ln 6} \cdot (5x)' =$$

$$= -\sin\log_6 5x \cdot \frac{1}{5x\ln 6} \cdot 5 = -\frac{\sin\log_6 5x}{x\ln 6}.$$

Замечание. Выражение $\log_6\cos 5$ из примера 18 является числом, поэтому $(\log_6\cos 5)' = 0$.

Пример 19. Найти производную функции $\operatorname{arctg}^2 e^{-x}$.

Решение.

$$\left(\operatorname{arctg}^2 e^{-x}\right)' = \left(\left(\operatorname{arctg} e^{-x}\right)^2\right)' = 2\operatorname{arctg} e^{-x} \cdot \left(\operatorname{arctg} e^{-x}\right)' =$$
$$= 2\operatorname{arctg} e^{-x} \cdot \frac{1}{1+\left(e^{-x}\right)^2} \cdot \left(e^{-x}\right)' = 2\operatorname{arctg} e^{-x} \cdot \frac{1}{1+e^{-2x}} \cdot e^{-x} \cdot (-x)' =$$
$$= 2\operatorname{arctg} e^{-x} \cdot \frac{1}{1+e^{-2x}} \cdot e^{-x} \cdot (-1) = -\frac{2e^{-x}\operatorname{arctg} e^{-x}}{1+e^{-2x}}.$$

Пример 20. Найти производную функции $2\ln^3\sqrt[4]{\operatorname{tg} 5x}$.
Решение.

$$\left(2\ln^3\sqrt[4]{\operatorname{tg} 5x}\right)' = 2\left(\ln^3\sqrt[4]{\operatorname{tg} 5x}\right)' = 2\left(\left(\ln\sqrt[4]{\operatorname{tg} 5x}\right)^3\right)' =$$
$$= 2\cdot\left(3\left(\ln\sqrt[4]{\operatorname{tg} 5x}\right)^2\right)\cdot\left(\ln\sqrt[4]{\operatorname{tg} 5x}\right)' = 6\ln^2\sqrt[4]{\operatorname{tg} 5x}\cdot\left(\ln\sqrt[4]{\operatorname{tg} 5x}\right)' =$$
$$= 6\ln^2\sqrt[4]{\operatorname{tg} 5x}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{\operatorname{tg} 5x}}\cdot\left(\sqrt[4]{\operatorname{tg} 5x}\right)' = \frac{6\ln^2\sqrt[4]{\operatorname{tg} 5x}}{\sqrt[4]{\operatorname{tg} 5x}}\cdot\left((\operatorname{tg} 5x)^{\frac{1}{4}}\right)' =$$
$$= \frac{6\ln^2\sqrt[4]{\operatorname{tg} 5x}}{\sqrt[4]{\operatorname{tg} 5x}}\cdot\frac{1}{4}\cdot(\operatorname{tg} 5x)^{-\frac{3}{4}}\cdot(\operatorname{tg} 5x)' = \frac{6\ln^2\sqrt[4]{\operatorname{tg} 5x}}{4(\operatorname{tg} 5x)^{\frac{1}{4}}(\operatorname{tg} 5x)^{\frac{3}{4}}}\cdot\frac{1}{\cos^2 5x}\cdot(5x)' =$$
$$= \frac{3\ln^2\sqrt[4]{\operatorname{tg} 5x}}{4\operatorname{tg} 5x\cos^2 5x}\cdot 5 = \frac{15\ln^2\sqrt[4]{\operatorname{tg} 5x}}{4\sin 5x\cos 5x} = \frac{15\ln^2\sqrt[4]{\operatorname{tg} 5x}}{2\sin 10x}.$$

Замечание. В некоторых случаях удобнее упростить функцию до взятия производной. Если в примере 20 сначала преобразовать функцию следующим образом, то вычисления будут проще:

$$2\ln^3\sqrt[4]{\operatorname{tg} 5x} = 2\left(\ln\sqrt[4]{\operatorname{tg} 5x}\right)^3 = 2\left(\ln(\operatorname{tg} 5x)^{\frac{1}{4}}\right)^3 =$$
$$= 2\left(\frac{1}{4}\ln\operatorname{tg} 5x\right)^3 = \frac{1}{32}\left(\ln\operatorname{tg} 5x\right)^3.$$

Пример 21. Вычислить производную функции $y(x) = \frac{\sin 14x}{2\cos 7x}$.
Решение. Сначала преобразуем функцию $y(x)$:

$$y(x) = \frac{\sin 14x}{2\cos 7x} = \frac{2\sin 7x\cos 7x}{2\cos 7x} = \sin 7x.$$

Теперь находим производную функции $y(x)$:

$$y'(x) = (\sin 7x)' = \cos 7x\cdot(7x)' = 7\cos 7x.$$

1.5. Производная степенно-показательной функции

Для вычисления производной функции вида $u(x)^{v(x)}$ предварительно надо представить данную функцию в виде

$$u(x)^{v(x)} = e^{\ln u(x)^{v(x)}} = e^{v(x)\ln u(x)}.$$

Пример 22. Найти производную функции $y(x) = x^x$.

Решение.

$$y'(x) = (x^x)' = \left(e^{\ln x^x}\right)' = \left(e^{x\ln x}\right)' = e^{x\ln x}(x\ln x)' =$$
$$= x^x(x\ln x)' = x^x\left[(x'\ln x + x(\ln x)'\right] = x^x\left(1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\right) = x^x(\ln x + 1).$$

Замечание. Функция x^x из примера 22 не является ни функцией вида x^α, ни функцией вида a^x, поэтому будет ошибкой вычислять производную данной функции одним из следующих способов:

$$(x^x)' = x\cdot x^{x-1}, \qquad (x^x)' = x^x\ln x.$$

Пример 23. Найти производную функции $y(x) = (\sin x)^{\ln x}$.

Решение.

$$y'(x) = \left((\sin x)^{\ln x}\right)' = \left(e^{\ln(\sin x)^{\ln x}}\right)' = \left(e^{\ln x\ln\sin x}\right)' =$$
$$= e^{\ln x\ln\sin x}(\ln x\ln\sin x)' = (\sin x)^{\ln x}\left[(\ln x)'\ln\sin x + \ln x(\ln\sin x)'\right] =$$
$$= (\sin x)^{\ln x}\left[\frac{1}{x}\ln\sin x + \ln x\frac{1}{\sin x}(\sin x)'\right] =$$
$$= (\sin x)^{\ln x}\left(\frac{\ln\sin x}{x} + \frac{\ln x\cos x}{\sin x}\right).$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти по определению производную функции:

1. $y = x^2$;
2. $y = x^3$;
3. $y = x^4$;
4. $y = \sqrt{x}$;
5. $y = \frac{1}{x^2}$;
6. $y = \frac{1}{x^3}$;
7. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$;
8. $y = \sin 2x$;
9. $y = \cos\frac{x}{2}$;

10. $y = \operatorname{tg} x$;
11. $y = \frac{1}{2x+2}$;
12. $y = \sqrt{1+3x}$;
13. $y = \sqrt{1+x^2}$.

Найти производную функции:

14. $y = x^4 + 3x^2 - 2x + 1$;
15. $y = 7x^7 + 3x^2 - 4x - 1$;
16. $y = \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + 4$;
17. $y = \sqrt[4]{x^3} + \frac{5}{x^2} - \frac{3}{x^3} + 2$;
18. $y = 4x^5 - 3\sin x + 5\operatorname{ctg} x$;
19. $y = 3\sqrt{x} + 4\cos x - 2\operatorname{tg} x + 3$;
20. $y = 3 + 4x^2 = \sqrt[5]{x^3} + \frac{1}{x^2} + \sin x + \cos x + \ln x$;
21. $y = \sqrt[8]{x^3} - 4x^6 + 5\ln x - 7\cos x + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$;
22. $y = \log_2 x + 3\log_3 x$;
23. $y = 4e^x + \operatorname{arctg} x + \arcsin x$;
24. $y = e^x - \frac{\operatorname{tg} x}{2} + \frac{x^4}{4}$;
25. $y = 5^x + 6^x + \left(\frac{1}{7}\right)^x$;
26. $y = \arcsin x + 3\sqrt[3]{x} + 5\arccos x$;
27. $y = \frac{8}{\sqrt[4]{x}} - \frac{6}{\sqrt[3]{x}}$;
28. $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$;
29. $y = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arcctg} x$;
30. $y = x\sin x$;
31. $y = x^2 \operatorname{tg} x$;
32. $y = \sqrt[7]{x}\ln x$;
33. $y = x\arccos x$;
34. $y = \sqrt[3]{x}\operatorname{arcctg} x$;
35. $y = x^2\log_3 x$;
36. $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$;
37. $y = \frac{\ln x}{\sin x} + x\operatorname{ctg} x$;
38. $y = \frac{\cos x}{1+2\sin x}$;
39. $y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$;
40. $y = \frac{\operatorname{ctg} x}{\sqrt{x}}$;
41. $y = \frac{x\operatorname{tg} x}{1+x^2}$;
42. $y = \frac{1+e^x}{1-e^x}$;
43. $f(x) = \frac{x^2}{3} - x^2 + x$, найти $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(-1)$;
44. $f(x) = x^2 - \frac{1}{2x^2}$, найти $f'(2)$, $f'(-2)$;
45. $f(x) = \frac{x}{2x-1}$, найти $f'(0)$, $f'(2)$, $f'(-2)$;

46. $f(x) = \frac{1-10^x}{1+10^x}$, найти $f'(0)$;
47. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, найти $f'(e)$, $f'(\frac{1}{e})$, $f'(e^2)$;
48. $f(x) = x \ln x$, найти $f'(1)$, $f'(e)$, $f'(\frac{1}{e})$, $f'(\frac{1}{e^2})$;
49. $y = \sin 3x$;
50. $y = \sin(x^2 + 5x + 2)$;
51. $y = \sqrt{1 - x^2}$;
52. $y = \sqrt{1 + 5\cos x}$;
53. $y = \sqrt{2x - \sin 2x}$;
54. $y = \sin^2 x$;
55. $y = \sin^3 x$;
56. $y = \cos^{100} x$;
57. $y = \ln(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 3})$;
58. $y = \operatorname{tg}(x^2 + 3)$;
59. $y = \ln \cos x$;
60. $y = \ln \operatorname{tg} 5x$;
61. $y = \ln(1 + \cos x)$;
62. $y = e^{\operatorname{tg} x}$;
63. $y = \ln(x^2 - 3x + 7)$;
64. $y = \ln(x^2 + 2x)$;
65. $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 5})$;
66. $y = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}}$;
67. $y = \frac{1}{2} \arcsin \frac{x^2}{\sqrt{3}}$;
68. $y = \frac{1}{6} \ln \frac{x-3}{x+3}$;
69. $y = \ln \frac{x^2}{1-x^2}$;
70. $y = \ln \sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}$;
71. $y = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin x\right)$;
72. $y = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2)$;
73. $y = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x)$;
74. $y = x \operatorname{arctg} \sqrt{2x - 1} - \frac{\sqrt{2x-1}}{2}$;
75. $y = \operatorname{tg}^3 x - 3 \operatorname{tg} x + 3x$;
76. $y = \sin^2 x^3$;
77. $y = \operatorname{ctg}^3 \frac{x}{3}$;
78. $y = \frac{1}{(1+\cos 4x)^5}$;
79. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$;
80. $y = \frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}$;
81. $y = \frac{\cos x}{\sin^2 x} + \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$;
82. $y = 2^{3x} + x^5 + e^{-x^2} + \frac{1}{x}$;

83. $y=\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}$;
84. $y=x^2e^{-x}$;
85. $y=(x+2)e^{-x^2}$;
86. $y=e^{\frac{x}{3}}\cos\frac{x}{3}$;
87. $y=e^{\frac{1}{\cos x}}$;
88. $y=e^{\frac{1}{\ln x}}$;
89. $y=10^{3-\sin^3 2x}$;
90. $y=\sin 2^x$;
91. $y=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$;
92. $y=\ln\left(e^{2x}+\sqrt{e^{4x}+1}\right)$;
93. $y=\ln\sqrt{\frac{e^{4x}}{e^{4x}+1}}$;
94. $y=\frac{\ln\sin x}{\ln\cos x}$;
95. $y=\log_5\cos 7x$;
96. $y=\log_7\cos\sqrt{1+x}$;
97. $y=e^{\sqrt[7]{x^2}}$;
98. $y=\ln\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)$;
99. $y=\ln\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$;
100. $y=\ln\left(\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x}\right)$;
101. $y=\ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$;
102. $y=\arccos(1-2x)$;
103. $y=\arcsin\sqrt{1-4x}$;
104. $y=\arcsin\sqrt{\sin x}$;
105. $y=\arcsin e^{4x}$;
106. $y=\arcsin\sqrt{x}$;
107. $y=\operatorname{arctg}\sqrt{6x-1}$;
108. $y=\operatorname{arctg}e^{2x}+\ln\sqrt{\frac{1+e^{2x}}{e^{2x}-1}}$;
109. $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$;
110. $y=\ln\arccos 2x$;
111. $y=\operatorname{arctg}\ln(5x+3)$;
112. $y=\operatorname{arctg}\frac{x+3}{x-3}$;
113. $y=\operatorname{arctg}^2\frac{1}{x}$;
114. $y=\arccos e^{-\frac{x^2}{2}}$;
115. $y=\operatorname{tg}\sin\cos x$;
116. $y=e^{x^2\operatorname{ctg}3x}$;
117. $y=\ln\sin\operatorname{tg}e^{-\frac{x}{2}}$;
118. $y=\ln^5\sin x$;

119. $y = \ln \operatorname{arctg} \sqrt{1+x^2}$;

120. $y = \sqrt[5]{\ln \sin \frac{x+3}{4}}$;

121. $y = e^{\sqrt{1+\ln x}}$;

122. $y = \sqrt[5]{\operatorname{arctg} e^{5x}}$;

123. $y = \sqrt{1 - \arccos^2 x}$;

124. $y = \operatorname{arctg}\left(x - \sqrt{1+x^2}\right)$;

125. $y = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$;

126. $y = \sqrt{3}\left(\operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + \ln \frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right)$;

127. $y = 2\ln(x^2+5) - \sqrt{5} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{5}}$;

128. $y = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$;

129. $y = \frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3}$;

130. $y = \ln\left(x \sin x \cdot \sqrt{1-x^2}\right)$;

131. $y = x^{\frac{1}{x}}$;

132. $y = x^{\sin x}$;

133. $y = (\operatorname{tg} x)^{\sin x}$;

134. $y = (\cos x)^{\sin x}$.

§2. Дифференциал функции

2.1. Понятие дифференциала

Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0, если её приращение $\triangle y$ в этой точке можно представить в виде

$$\triangle y = A \triangle x + \alpha(\triangle x) \triangle x,$$

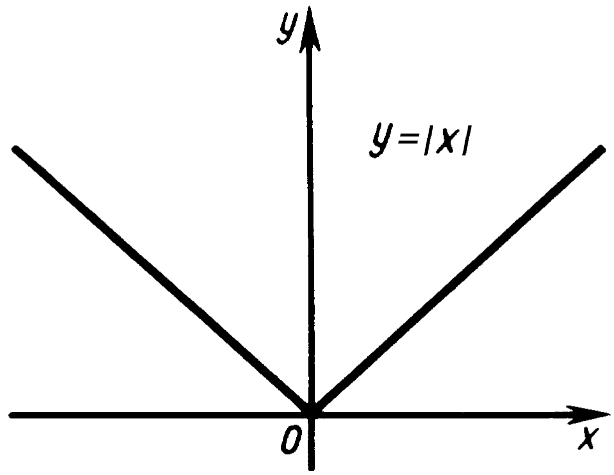
где A — некоторое число, независящее от $\triangle x$, а $\alpha(\triangle x)$ — функция аргумента $\triangle x$, являющаяся бесконечно малой при $\triangle x \to 0$, то есть $\lim\limits_{\triangle x \to 0} \alpha(\triangle x) = 0$.

Существуют зависимости между понятиями дифференцируемости функции в точке, существованием производной и непрерывностью функции в той же точке.

Для того чтобы функция $y = f(x)$ была дифференцируема в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке конечную производную.

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в данной точке x_0, то она и непрерывна в этой точке.

Замечание. Обратное утверждение неверно. Функция может быть непрерывной в точке, но не быть дифференцируемой, то есть не иметь производной в этой точке. Примером такой функции является функция $y = |x|$, которая непрерывна в точке $x = 0$, но не имеет в этой точке производной, то есть не является дифференцируемой.



Если функция $y = f(x)$ имеет производную в каждой точке некоторого промежутка (дифференцируема в каждой точке этого промежутка), то будем говорить, что функция $y = f(x)$ дифференцируема на указанном промежутке.

Дифференциалом dx независимой переменной x назовём приращение $\triangle x$ этой переменной: $dx = \triangle x$.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то есть её приращение $\triangle y$ в этой точке можно записать в виде суммы двух слагаемых:

$$\triangle y = A \triangle x + \alpha(\triangle x) \triangle x,$$

где A — число и $\lim\limits_{\triangle x \to 0} \alpha(\triangle x) = 0$. Выражение $A \triangle x$ называется дифференциалом функция $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначается dy:

$$dy = A \triangle x.$$

Учитывая зависимость между понятиями дифференцируемости и существования производной функции в точке, получаем, что $A = f'(x_0)$. Таким образом, дифференциал dy функции $y = f(x)$ в точке x_0 записывается в виде

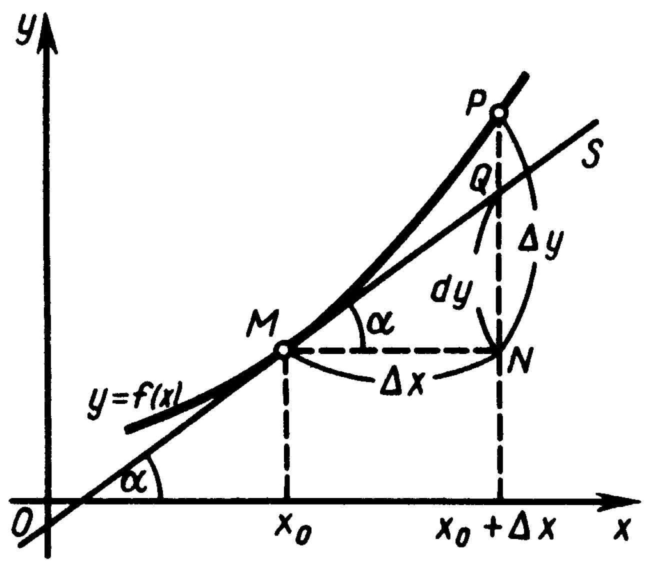
$$dy = d(f(x_0)) = f'(x_0)dx.$$

Заметим, что с помощью последней формулы производную $f'(x_0)$ можно вычислить как отношение дифференциала функции dy к дифференциалу независимой переменной, то есть

$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx}.$$

Дифференциал функции в точке x_0 имеет геометрический смысл. Пусть точка M на графике функции $y = f(x)$ соответствует значению аргумента x_0, точка P — значению аргумента $x_0 + \triangle x$, прямая MS — касательная к графику $y = f(x)$ в точке M, α — угол между касательной и осью Ox. Пусть, $MN \parallel Ox$, $PN \parallel Oy$, Q — точка пересечения касательной MS с прямой PN. Тогда приращение функции $\triangle y$ равно величине отрезка NP. В то же время из прямоугольного треугольника MNQ получаем: $NQ = = \triangle x \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0) \triangle x = dy$, то есть дифференциал функции dy равен величине отрезка NQ. Мы получили, что величины отрезков NP и NQ различны.

Таким образом, дифференциал dy функции $y = f(x)$ в точке x_0 равен приращению “ординаты касательной” MS к графику этой функции в точке $M(x_0; f(x_0))$, а приращение функции $\triangle y$ есть приращение “ординаты самой функции” $y = f(x)$ в точке x_0, соответствующее приращению аргумента, равному $\triangle x$.



2.2. Вычисление дифференциала

Правила дифференцирования функций аналогичны правилам нахождения производных. Для функций u, v и f справедливы свойства:

$$d(u+v) = du + dv; \qquad d(u-v) = du - dv;$$

$$d(uv) = udv + vdu; \qquad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2},\ v \neq 0;$$

$d(f(x)) = f'(x)dx,$ в частности, если c — число, то

$$d(cx) = c\,dx, \qquad d(x+c) = dx.$$

Пример 1. Найти дифференциал функции $y(x) = x^2$.

Решение. Дифференциал dy функции $y(x)$ находится по формуле $dy = y'(x)dx$, поэтому

$$dy = dx^2 = (x^2)'dx = 2xdx.$$

Пример 2. Найти дифференциал функции $y(x) = 5\cos 3x$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

Решение. По правилу нахождения дифференциала функции в точке, имеем

$$dy = y'\left(\frac{\pi}{2}\right)dx.$$

Находим,

$$y'(x) = (5\cos 3x)' = -15\sin 3x \quad \Rightarrow \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -15\sin\frac{3\pi}{2} = 15.$$

Следовательно, дифференциал dy в точке $x_0 = \frac{\pi}{2}$ равен $15\,dx$:

$$dy = 15\,dx.$$

Пример 3. Найти дифференциал функции $y = \sin^2 x^3$.

Решение.

$$dy = y'dx = \left(\sin^2 x^3\right)' = 2\sin x^3(\sin x^3)'dx = \\ = 2\sin x^3\cos x^3(x^3)'dx = 2\sin x^3\cos x^3 \cdot 3x^2dx = 3x^2\sin 2x^3dx.$$

Пример 4. Найти дифференциал функции xe^{x^2}.

Решение.

1-й способ. Воспользуемся формулой $df(x) = f'(x)dx$.

$$d\left(xe^{x^2}\right) = \left(xe^{x^2}\right)'dx = \left(x'e^{x^2} + x\left(e^{x^2}\right)'\right)dx = \\ = \left(e^{x^2} + x\cdot e^{x^2}2x\right)dx = e^{x^2}\left(2x^2+1\right)dx.$$

2-й способ. Применим формулу $d(uv) = udv + vdu$, имеем

$$d\left(xe^{x^2}\right) = e^{x^2}dx + xd\left(e^{x^2}\right).$$

По формуле $df(u) = f'(u)du$ получаем

$$d\left(e^{x^2}\right) = e^{x^2}d\left(x^2\right) = e^{x^2}2xdx.$$

Таким образом,

$$d\left(xe^{x^2}\right) = e^{x^2}dx + x(2xe^{x^2}dx) = e^{x^2}\left(2x^2+1\right)dx.$$

2.3. Инвариантность формы первого дифференциала

Главным свойством дифференциала является инвариантность (неизменность) его формы относительно замены переменных. Если $y = y(x)$, $x = x(t)$, то

$$dy = y'_t\, dt = y'_x\, dx.$$

Это свойство называется свойством инвариантности формы первого дифференциала относительно замены аргумента.

Задачи для самостоятельного решения

Найти дифференциал функции:

135. $y = x^5$;

136. $y = \operatorname{tg} x$;

137. $y = \sin^3 2x$;

138. $y = \ln x$;

139. $y = \ln\left(\sin\sqrt{x}\right)$;

140. $y = e^{-\frac{1}{\cos x}}$;

141. $y = 2^{-x^2}$.

Найти дифференциал функции в точке x_0:

142. $y = x^{-4}$, $x_0 = -1$;

143. $y = x^3 - 3x^2 + 3x$, $x_0 = 0$;

144. $y = \sqrt{1 + x^2}$, $x_0 = -3$;

145. $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$, $x_0 = 2$;

146. $y = \ln\cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$;

147. $y = e^{-2x}$, $x_0 = -\frac{1}{2}$;

148. $y = \sqrt{x} + 1$, $x_0 = 4$;

149. $y = \operatorname{arctg}\sqrt{4x - 1}$, $x_0 = 3$.

§3. Производные и дифференциалы высших порядков

3.1. Понятие производной n-го порядка

Производная $f'(x)$ функции $y = f(x)$ сама является функцией аргумента x. Следовательно, по отношению к ней снова можно ставить вопрос о существовании и нахождении производной.

Назовём $f'(x)$ производной первого порядка функции $f(x)$.

Производная от производной некоторой функции называется производной второго порядка (или второй производной) этой функции. Производная от второй производной называется производной третьего порядка (или третьей производной) и так далее. Производные, начиная со второй, называются производными высших порядков и обозначаются

$$y'', y''', y^{(4)}, y^{(5)}, \ldots, y^{(n)}, \ldots$$

(вместо y'' и y''' иногда пишут $y^{(2)}$ и $y^{(3)}$) или

$$f''(x), f'''(x), f^{(4)}(x), f^{(5)}(x), \ldots, f^{(n)}(x), \ldots$$

Производная n-го порядка функции является производной от производной $(n-1)$-го порядка, то есть

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'.$$

Производные высших порядков имеют широкое применение в физике. Если функция $y = f(x)$ описывает закон движения материальной точки по прямой линии, то первая производная $f'(x)$ есть мгновенная скорость точки в момент времени x, а вторая производная равна скорости изменения скорости, то есть ускорению движущейся точки в этот момент.

Пример 1. Найти производную второго порядка функции $y = \sin^2 x$.

Решение. Сначала найдём производную первого порядка.

$$y' = \left(\sin^2 x\right)' = 2\sin x \cos x = \sin 2x.$$

Теперь находим вторую производную.

$$y'' = (y')' = (\sin 2x)' = 2\cos 2x.$$

Пример 2. Найти производную третьего порядка функции $y = x \sin x$.

Решение. Последовательно находим первую, вторую и третью производные данной функции:

$$\begin{aligned}
&y' = (x\sin x)' = \sin x + x\cos x;\\
&y'' = (y')' = (\sin x + x\cos x)' = \cos x + \cos x - x\sin x = 2\cos x - x\sin x;\\
&y''' = (y'')' = (2\cos x - x\sin x)' = -2\sin x - (\sin x + x\cos x) =\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = -3\sin x - x\cos x.
\end{aligned}$$

3.2. Формулы для n-х производных некоторых функций

Пример 3. Найти $y^{(n)}(x)$, если $y(x) = x^\alpha$, $x > 0$, α — любое действительное число.

Решение. Последовательно дифференцируя, имеем:

$$y' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad y^{(2)} = (y')' = \big(\alpha x^{\alpha-1}\big)' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2},$$
$$y^{(3)} = (y^{(2)})' = \big(\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}\big)' = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}, \ldots$$
$$\ldots, y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-(n-1))x^{\alpha-n}.$$

Введём понятия факториала и двойного факториала числа.

Факториал натурального числа n определяется формулой

$$n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1,$$

читается “эн факториал”. Например, $7! = 7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 5040$. По определению полагают $0! = 1$. В вычислениях часто применяется следующая формула:

$$(n+1)! = (n+1)\cdot n!.$$

Двойной факториал натурального числа n определяется равенством

$$n!! = n\cdot(n-2)\cdot(n-4)\cdot\ldots, \qquad 0!! = 1,$$

читается “двойной факториал эн” или “эн двойной факториал”. Двойной факториал для чётных и нечётных чисел записывается так:

$$(2n)!! = 2n\cdot(2n-2)\cdot\ldots\cdot 4\cdot 2,$$
$$(2n+1)!! = (2n+1)\cdot(2n-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1.$$

Например, $10!! = 10\cdot8\cdot6\cdot4\cdot2 = 3840$, $7!! = 7\cdot5\cdot3\cdot1 = 105$.

Пример 4. Найти n-ю производную функции $y = \frac{1}{x}$.

Решение. Воспользуемся формулой n-й производной степенной функции, найденной в примере 3. В нашем случае $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$. Следовательно, $\alpha = -1$. Получаем

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot\ldots\cdot(-n)\cdot x^{-1-n} = \frac{(-1)^n\cdot n!}{x^{n+1}}.$$

Пример 5. Найти производную n-го порядка от функции $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Решение. Применим формулу n-й производной, найденную в примере 3. В данном случае $y = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$. Таким образом, $\alpha = -\frac{1}{2}$. Имеем,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{(n)} = \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(-\frac{2n-1}{2}\right)\cdot x^{-\frac{1}{2}-n} =$$
$$= \frac{(-1)^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{(2x)^n\cdot\sqrt{x}} = \frac{(-1)^n\cdot(2n-1)!!}{(2x)^n\cdot\sqrt{x}}.$$

Пример 6. Найти производные всех порядков от функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$.

Решение. Найдём n-ю производную функции $y = \sin x$. Последовательно дифференцируя, имеем:

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$
$$y^{(2)} = (y')' = (\cos x)' = -\sin x = \sin(x+\pi) = \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$
$$y^{(3)} = \left(y^{(2)}\right)' = (-\sin x)' = -\cos x = \sin\left(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right), \ldots$$
$$\ldots, y^{(n)} = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

Таким образом, производную любого порядка функции $\sin x$ можно вычислять по формуле

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

Например, $(\sin x)^{(10)} = \sin\left(x + 10\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \sin(x+5\pi) = -\sin x$.

Аналогично можно получить формулу n-й производной функции $\cos x$:

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

3.3. Формула Лейбница для n-й производной произведения двух функций

Для записи формулы Лейбница введём понятие числа сочетаний из n элементов по k элементам (каждое из чисел n и k предполагается натуральным числом или нулём, причём $0 \leqslant k \leqslant n$). Итак, для заданных чисел n и k определим число C_n^k по формуле:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!},$$

произносится “цэ из эн по ка”. Отметим, что число C_n^k обязательно натуральное при любых n и k.

Пример 7. Вычислить а) C_5^3; б) C_6^2; в) C_{10}^4.

Решение.

а) $C_5^3 = \dfrac{5!}{3!\cdot(5-3)!} = \dfrac{3!\cdot 4\cdot 5}{3!\cdot 2!} = \dfrac{4\cdot 5}{1\cdot 2} = 10;$

б) $C_6^2 = \dfrac{6!}{2!\cdot(6-2)!} = \dfrac{4!\cdot 5\cdot 6}{2!\cdot 4!} = \dfrac{5\cdot 6}{1\cdot 2} = 15;$

в) $C_{10}^4 = \dfrac{10!}{4!\cdot(10-4)!} = \dfrac{6!\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{4!\cdot 6!} = \dfrac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 210.$

Пусть $y = u\cdot v$, где u и v — некоторые функции от переменной x, имеющие производные любого порядка. Тогда справедлива формула Лейбница:

$$\begin{aligned} y^{(n)} = (uv)^{(n)} = C_n^0 u^{(n)} v + C_n^1 u^{(n-1)} v' + C_n^2 u^{(n-2)} v'' + \ldots \\ \ldots + C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} + \ldots + C_n^{n-1} u' v^{(n-1)} + C_n^n u v^{(n)} = \\ = u^{(n)} v + n u^{(n-1)} v' + \frac{n(n-1)}{2!} u^{(n-2)} v'' + \ldots \\ \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} u^{(n-k)} v^{(k)} + \ldots + n u' v^{(n-1)} + u v^{(n)}. \end{aligned}$$

Формулу Лейбница удобно применять в случае “простых” функций u и v.

В случаях $n=1$, $n=2$ и $n=3$ формула Лейбница принимает вид:

$$y' = (uv)' = u'v + uv'; \quad y'' = (uv)'' = u''v + 2u'v' + uv'';$$
$$u''' = (uv)''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''.$$

Заметим, что первая из этих формул является формулой производной произведения двух функций.

Использование следующей формулы часто позволяет сократить вычисления коэффициентов.

$$C_n^k = C_n^{n-k}.$$

Пример 8. Вычислить пятую производную функции $y = x^5 e^x$.

Решение. Полагая $u = x^5$ и $v = e^x$, находим:

$$u' = 5x^4, \quad u'' = 20x^3, \quad u''' = 60x^2, \quad u^{(4)} = 120x, \quad u^{(5)} = 120,$$
$$v' = v'' = v''' = v^{(4)} = v^{(5)} = e^x.$$

Теперь вычисляем коэффициенты при производных:

$$C_5^0 = \frac{5!}{0!\cdot(5-0)!} = 1, \quad C_5^1 = \frac{5!}{1!\cdot(5-1)!} = 5, \quad C_5^2 = \frac{5!}{2!\cdot(5-2)!} = 10,$$
$$C_5^3 = C_5^{5-2} = C_5^2 = 10, \quad C_5^4 = C_5^{5-1} = C_5^1 = 5, \quad C_5^5 = C_5^{5-0} = C_5^0 = 1.$$

Подставляя найденные производные и числа в формулу Лейбница при $n = 5$, получаем

$$y^{(5)} = (uv)^{(5)} =$$
$$= C_5^0 u^{(5)} v + C_5^1 u^{(5-1)} v' + C_5^2 u^{(5-2)} v'' + C_5^3 u^{(5-3)} v''' + C_5^4 u' v^{(5-1)} + C_5^5 u v^{(5)} =$$
$$= 1 \cdot 120 \cdot e^x + 5 \cdot 120x \cdot e^x + 10 \cdot 60x^2 \cdot e^x + 10 \cdot 20x^3 \cdot e^x + 5 \cdot 5x^4 \cdot e^x + 1 \cdot x^5 \cdot e^x =$$
$$= (120 + 600x + 600x^2 + 200x^3 + 25x^4 + x^5)e^x.$$

Пример 9. Вычислить 55-ю производную функции $y = (x^2 - 17)\cos 3x$.

Решение. Полагая $u = \cos 3x$ и $v = x^2 - 17$, находим (см. пример 6):

$$u^{(n)} = 3^n \cos\left(3x + n\frac{\pi}{2}\right),$$
$$v' = 2x, \quad v'' = 2, \quad v''' = v^{(4)} = v^{(5)} = \ldots = v^{(54)} = v^{(55)} = 0.$$

Следовательно, все слагаемые в формуле Лейбница, содержащие производные функции v выше второго порядка, будут равны нулю. Вычисляем коэффициенты при функциях v, v' и v'':

$$C_{55}^0 = 1, \quad C_{55}^1 = 55, \quad C_{55}^2 = \frac{55 \cdot 54}{2!} = 1485.$$

Подставляя найденные выражения в формулу Лейбница при $n = 55$, получаем:

$$y^{(55)} = (uv)^{(55)} = C_{55}^0 u^{(55)} v + C_{55}^1 u^{(54)} v' + C_{55}^2 u^{(53)} v'' =$$
$$= 1 \cdot 3^{55} \cos\left(3x + 55 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot (x^2 - 17) + 55 \cdot 3^{54} \cos\left(3x + 54 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot 2x +$$
$$+ 1485 \cdot 3^{53} \cos\left(3x + 53 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot 2 =$$
$$= 3^{55}(x^2 - 17)\sin(3x) - 110x \cdot 3^{54}\cos(3x) - 2970 \cdot 3^{53}\sin(3x).$$

3.4. Дифференциалы высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в каждой точке x некоторого промежутка. Тогда её дифференциал dy вычисляется по формуле

$$dy = f'(x)dx$$

и называется дифференциалом первого порядка функции $f(x)$.

Дифференциал $d(dy)$ от дифференциала dy называется дифференциалом второго порядка функции $f(x)$ и обозначается d^2y, то есть

$$d^2y = f''(x)(dx)^2.$$

Аналогично, дифференциал $d(d^2y)$ от дифференциала d^2y называется дифференциалом третьего порядка функции $f(x)$ и обозначается d^3y. Вообще, дифференциал $d(d^{n-1}y)$ от дифференциала $d^{n-1}y$ называется дифференциалом n-го порядка (или n-м дифференциалом) функции $f(x)$ и обозначается d^ny.

Для n-го дифференциала функции $y(x)$ справедлива формула

$$d^ny = y^{(n)}(x)(dx)^n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Из последней формулы следует, что для любого натурального числа n справедливо равенство

$$y^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{(dx)^n}.$$

Замечание. Свойством инвариантности (см. пункт 2.3) обладает только первый дифференциал. Второй и последующие дифференциалы этим свойством не обладают.

Пример 10. Вычислить дифференциал d^3y функции $y = x^4 - 3x^2 + 4$.

Решение. Последовательно дифференцируя, получаем

$$y'(x) = 4x^3 - 6x, \quad y''(x) = 12x^2 - 6, \quad y'''(x) = 24x.$$

Следовательно,

$$d^3y = y'''(x)(dx)^3 = 24x(dx)^3.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти производную второго порядка от функции:

150. $y = e^{-x^2}$;

151. $y = \operatorname{tg} x$;

152. $y = \arcsin \frac{x}{2}$;

153. $y = \sqrt{1 + x^2}$;

154. $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

Найти производную третьего порядка от функции:

155. $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$;

156. $y = xe^{-x}$;

157. $y = x^2 \sin x$;

158. $y = x^3 2^x$.

Найти производную n-го порядка от функции:

159. $y = e^x$;

160. $y = \ln x$;

161. $y = 3^x$;

162. $y = x^m$, m — натуральное;

163. $y = \sin 3x$;
164. $y = \ln(1+x)$;
165. $y = 2^{3x}$;
166. $y = \sin^2 x$;
167. $y = \cos^2 x$;
168. $y = \ln(2-3x)$;
169. $y = (4x+1)^n$;
170. $y = x\cos x$, $n = 10$;
171. $y = (x^3-1)e^{5x}$, $n = 37$;
172. $y = x^2 \sin\frac{x}{3}$, $n = 73$;
173. $y = x^2 \ln x$, $n = 100$.

Найти дифференциал второго порядка от функции:

174. $y = \operatorname{ctg} x$;
175. $y = \cos^2 x$;
176. $y = \ln(2x-3)$.

Найти дифференциал третьего порядка от функции:

177. $y = e^x \cos x$;
178. $y = x \ln x$.

Найти дифференциал n-го порядка от функции:

179. $y = \sin x$;
180. $y = \cos x$;
181. $y = e^{\frac{x}{2}}$.

§4. Производная функции, заданной параметрически

4.1. Производная первого порядка

Пусть даны две функции

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

одной независимой переменной t, определённые и непрерывные на некотором промежутке. Предположим теперь, что функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ имеют производные, причём $x(t) \neq 0$ на этом промежутке. Тогда y можно рассматривать как функцию, зависящую от переменной x посредством переменной t, называемой параметром. В этом случае говорят, что функция y от x задана параметрически.

Производная функции y по переменной x вычисляется по формуле

$$y'_x(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

Замечание. Индекс x у функции y' означает, что производная функции y находится по переменной x. Если индекс у функции не указан, то производная находится по аргументу. Так как функции $x(t)$ и $y(t)$ зависят от параметра t, то $x'(t)$ и $y'(t)$ означают производные по переменной t.

Пример 1. Найти $y'_x(t)$ функции, заданной параметрически:

$$x(t) = \cos^4 2t, \quad y(t) = \sin^4 2t.$$

Решение. Находим производные $x'(t)$ и $y'(t)$:

$$x'(t) = 4\cos^3 2t \cdot (-2\sin 2t) = -8\cos^3 2t \sin 2t,$$
$$y'(t) = 4\sin^3 2t \cdot (2\cos 2t) = 8\sin^3 2t \cos 2t,$$
$$x'(t) \neq 0 \text{ при } t \neq \frac{\pi}{4}k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

В точках, в которых $x'(t) \neq 0$, имеем

$$y'_x(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{8\sin^3 2t \cos 2t}{-8\cos^3 2t \sin 2t} = -\frac{\operatorname{tg}^3 2t}{\operatorname{tg} 2t} = -\operatorname{tg}^2 2t.$$

Итак, $y'_x(t) = -\operatorname{tg}^2 2t$.

4.2. Производная второго порядка

Вторая производная функции y (заданной параметрически) по переменной x находится по одной из следующих формул:

$$y''_{xx}(t) = (y'_x(t))'_x = \frac{(y'_x(t))'}{x'(t)};$$
$$y''_{xx}(t) = \frac{y''(t)x'(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t))^3}.$$

Замечание. Индекс xx у функции y'' означает, что берётся вторая производная функции y по переменной x. Там, где индекс не указан, производная ищется по аргументу, в данном случае по переменной t.

Пример 2. Найти $y'_x(t)$ и $y''_{xx}(t)$ функции, заданной параметрически:

$$x(t) = 7(t - \sin t), \quad y(t) = 7(1 - \cos t).$$

Решение. Находим производные $x'(t)$ и $y'(t)$:

$$x'(t) = 7(1 - \cos t), \quad y'(t) = 7\sin t,$$
$$x'(t) \neq 0 \text{ при } t \neq 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

В точках, в которых $x'(t) \neq 0$, имеем

$$y'_x(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{7\sin t}{7(1-\cos t)} = \frac{\sin t}{1-\cos t} =$$
$$= \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{\left(\cos^2\frac{t}{2} + \sin^2\frac{t}{2}\right) - \left(\cos^2\frac{t}{2} - \sin^2\frac{t}{2}\right)} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = \frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}.$$

Для нахождения производной $y''_{xx}(t)$ по первой формуле вычислим сначала $(y'_x(t))'$:

$$(y'_x(t))' = \left(\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right)' = -\frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}}.$$

Теперь находим $y''_{xx}(t)$:

$$y''_{xx}(t) = \frac{(y'_x(t))'}{x'(t)} = \frac{-\frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}}}{7(1-\cos t)} = -\frac{1}{28\sin^4\frac{t}{2}}.$$

Итак, $y'_x(t) = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}$, $y''_{xx}(t) = -\frac{1}{28\sin^4\frac{t}{2}}$.

Пример 3. Найти $y''_{xx}(t)$ функции, заданной параметрически:

$$x(t) = \ln(1-t), \quad y(t) = (t+1)^2.$$

Решение. Воспользуемся формулой:

$$y''_{xx}(t) = \frac{y''(t)x'(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t))^3}.$$

Для этого вычислим производные $x'(t)$, $x''(t)$, $y'(t)$, $y''(t)$:

$$x'(t) = (\ln(1-t))' = \frac{1}{1-t}(1-t)' = -\frac{1}{1-t};$$
$$x''(t) = (x'(t))' = \left(-\frac{1}{1-t}\right)' = -\left((1-t)^{-1}\right)' = (1-t^{-2})(1-t)' = -\frac{1}{(1-t)^2};$$
$$y'(t) = \left((t+1)^2\right)' = 2(t+1);$$
$$y''(t) = (y'(t))' = (2(t+1))' = 2.$$

Подставляя найденные выражения в формулу, окончательно получаем:

$$y''_{xx}(t) = \frac{2\cdot\left(-\frac{1}{1-t}\right) - \left(-\frac{1}{(1-t)^2}\right)\cdot 2(t+1)}{\left(-\frac{1}{1-t}\right)^3} =$$
$$= \left(2\cdot\frac{1}{1-t} - \frac{1}{(1-t)^2}\cdot 2(t+1)\right)\cdot(1-t)^3 =$$
$$= 2(1-t)^2 - 2(1-t)(t+1) = 4t^2 - 4t.$$

Итак, $y''_{xx}(t) = 4t^2 - 4t$.

Задачи для самостоятельного решения

Найти $y'_x(t)$ и $y''_{xx}(t)$ функции, заданной параметрически:

182. $x(t) = 3\cos t$, $y(t) = -2\sin t$;

183. $x(t) = t^2$, $y(t) = \frac{t^3}{3} - t$;

184. $x(t) = e^{2t}$, $y(t) = e^{3t}$;

185. $x(t) = t^2$, $y(t) = t^3 + t$;

186. $x(t) = 4\cos^3 t$, $y(t) = 4\sin^3 t$;

187. $x(t) = \frac{1-t}{(t+1)^2}$, $y(t) = \frac{t(1-t)}{(t+1)^2}$;

188. $x(t) = \frac{t}{t^3+1}$, $y(t) = \frac{t^2}{t^3+1}$.

§5. Производная функции, заданной неявно

Пусть функция $y = f(x)$ задана уравнением $F(x, y) = 0$. Это означает, что $F(x, f(x)) \equiv 0$ на некотором интервале (конечном или бесконечном). Тогда функция $y = f(x)$ называется неявно заданной функцией.

5.1. Производная первого порядка

Если функция $y = f(x)$ — дифференцируемая функция, заданная уравнением $F(x, y) = 0$, то её производную можно найти из уравнения

$$\frac{d}{dx}\left(F(x, f(x))\right) = 0.$$

Пример 1. Найти производную y' функции y, заданной неявно уравнением $x^2 + 2xy - y^2 = 4x$.

Решение. Пусть $y = f(x)$ — дифференцируемое решение данного уравнения. Тогда

$$x^2 + 2xf(x) - (f(x))^2 \equiv 4x \quad \text{или} \quad x^2 + 2xf(x) - (f(x))^2 - 4x \equiv 0$$

на некотором интервале. Поскольку все слагаемые в тождестве дифференцируемы, то после дифференцирования получаем

$$2x + 2f(x) + 2xf'(x) - 2f(x)f'(x) - 4 \equiv 0,$$

откуда

$$f'(x) = \frac{f(x) + x - 2}{f(x) - x}, \ f(x) \neq x.$$

Итак, $y' = \frac{y+x-2}{y-x}$.

Пример 2. Найти y' из уравнения $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$.

Решение. Подставив в данное уравнение дифференцируемое решение $y = f(x)$, получим тождество

$$x^{\frac{2}{3}} + (f(x))^{\frac{2}{3}} \equiv 1,$$

дифференцируя которое, имеем

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}\left(f(x)\right)^{-\frac{1}{3}} f'(x) \equiv 0.$$

Отсюда находим

$$f'(x) = -\sqrt[3]{\frac{f(x)}{x}}, \ x \neq 0.$$

Итак, $y' = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$.

5.2. Производная второго порядка

Пример 3. Найти производные y' и y'' функции y, заданной уравнением $x^2 + y^2 = 5xy^3$.

Решение. Пусть $y = f(x)$ — дважды дифференцируемое решение данного уравнения. Тогда дифференцируя тождество

$$x^2 + (f(x))^2 \equiv 5x\left(f(x)\right)^3$$

по x, получаем

$$2x + 2f(x)f'(x) \equiv 5\left(f(x)\right)^3 + 15xf^2(x)f'(x),$$

откуда

$$f'(x) = \frac{2x - 5f^3(x)}{15xf^2(x) - 2f(x)}, \quad \text{если } 15xf^2(x) - 2f(x) \neq 0.$$

Далее, по определению второй производной по правилу дифференцирования частного, имеем

$$f''(x) = (f'(x))' = \left(\frac{2x-5f^3(x)}{15xf^2(x)-2f(x)}\right)' =$$
$$= \frac{(2x-5f^3(x))'(15xf^2(x)-2f(x)) - (2x-5f^3(x))(15xf^2(x)-2f(x))'}{(15xf^2(x)-2f(x))^2} =$$
$$= \frac{(20f^3(x)-75xf^4(x)-60x^2f(x)+4x)f'(x)-4f(x)+75f^5(x)}{(15xf^2(x)-2f(x))^2}.$$

Подставляя значение $f'(x)$, окончательно получаем

$$f''(x) = \frac{1500xf^6(x)-120x^3+150x^2f^3(x)-250f^5(x)}{(15xf^2(x)-2)^3f^2(x)}.$$

Итак,

$$y' = \frac{2x-5y^3}{15xy^2-2y}, \quad y'' = \frac{1500xy^6-120x^3+150x^2y^3-250y^5}{(15xy-2)^3y^2}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти y' из уравнения:

189. $x^2+y^2-xy=0$;
190. $x^2+xy+y^2=6$;
191. $x^2+y^2=a^2$;
192. $y^2=2px$;
193. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$;
194. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$;
195. $e^y-e^{-x}+xy=0$;
196. $e^x\sin y-e^{-y}\cos x=0$;
197. $x=y+\operatorname{arctg} y$;
198. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$;
199. $x^3+y^3-3axy=0$;
200. $\operatorname{ctg} y=xy$;
201. $e^{xy}-x^2+y^3=0$;
202. $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$;
203. $\operatorname{arctg} y=x+y$;
204. $x^2=\frac{y-x}{x+2y}$.

Найти y'' из уравнения:

205. $x^2+y^2=a^2$;

206. $ax + by - xy = c$;
207. $x^m y^n = 1$;
208. $x^2 - y^2 = a^2$;
209. $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$;
210. $\operatorname{arctg} y = x + y$;
211. $x^2 + xy + y^2 = a^2$.

§6. Раскрытие неопределённостей. Правила Лопиталя

6.1. Раскрытие неопределённостей вида $\frac{0}{0}$. Первое правило Лопиталя

Будем говорить, что отношение двух функций $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to a$ есть неопределённость вида $\frac{0}{0}$, если

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0.$$

Раскрыть неопределённость — значит вычислить предел $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, если он существует, или установить, что он не существует.

Сформулируем первое правило Лопиталя. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a. Пусть, далее,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \quad \text{и} \quad g'(x) \neq 0$$

в указанной окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a. Тогда, если существует предел отношения производных $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (конечный или бесконечный), то существует и предел $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, причём справедлива формула

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Замечание. Формула (правило Лопиталя) остаётся верной и в случае, когда $x \to a-$, $x \to a+$, $x \to \infty$, $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$.

Пример 1.

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 5x + 4} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 4} \frac{(x^2-16)'}{(x^2-5x+4)'} = \lim_{x\to 4} \frac{2x}{2x-5} = \frac{8}{3}.$$

Пример 2.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)'}{x'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = \lim_{x\to 0} e^x = 1.$$

Пример 3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\ln(e-x)+x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-e^{-x})'}{(\ln(e-x)+x-1)'}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{-\frac{1}{e-x}+1}=\frac{1}{1-\frac{1}{e}}=\frac{2e}{e-1}.$$

Замечание. Если производные $f'(x)$ и $g'(x)$ удовлетворяют тем же требованиям, что и сами функции $f(x)$ и $g(x)$, то правило Лопиталя можно применить повторно. При этом получаем

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Пример 4.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{x'}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

Напомним, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ и по первому замечательному пределу.

Пример 5.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(3x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{6}\cdot 1=\frac{1}{6}.$$

6.2. Раскрытие неопределённостей вида $\frac{\infty}{\infty}$. Второе правило Лопиталя

Будем говорить, что отношение двух функций $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x\to a$ есть неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$, если

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=\infty,\ +\infty \text{ или } -\infty.$$

Сформулируем второе правило Лопиталя. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a. Пусть, далее,

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=\infty \quad \text{и} \quad g'(x)\neq 0$$

в указанной окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a. Тогда, если существует предел отношения производных $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (конечный или бесконечный), то существует и предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, причём справедлива формула

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Замечание. Приведённое правило раскрытия неопределённости вида $\frac{\infty}{\infty}$ аналогично правилу раскрытия неопределённости вида $\frac{0}{0}$. Замечания, относящиеся к неопределённости вида $\frac{0}{0}$ остаются в силе и для всех других неопределённостей.

Пример 6.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2-11}{5x^2+4}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{(6x^2-11)'}{(5x^2+4)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{12x}{10x}=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}.$$

Пример 7.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{x'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Пример 8.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{100}}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^{100}\right)'}{\left(e^x\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{100\cdot x^{99}}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(100\cdot x^{99}\right)'}{\left(e^x\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{100\cdot 99\cdot x^{98}}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{100\cdot 99\cdot 98\cdot x^{97}}{e^x}=\ldots=\lim_{x\to+\infty}\frac{100!}{e^x}=0.$$

6.3. Раскрытие неопределённостей вида $0\cdot\infty$ и $\infty-\infty$

Неопределённости вида $0\cdot\infty$ и $\infty-\infty$ можно свести к неопределённостям вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.

Пример 9. Найти $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x$.

Решение. Имеем неопределённость вида $0\cdot\infty$. Так как $x\ln x=\frac{\ln x}{1/x}$, то получаем неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$. Применяя второе правило Лопиталя, имеем

$$\lim_{x\to 0+}x\ln x=\lim_{x\to 0+}\frac{(\ln x)'}{(1/x)'}=\lim_{x\to 0+}\frac{1/x}{-1/x^2}=-\lim_{x\to 0+}x=0.$$

Пример 10.

$$\lim_{x\to 0+}\sqrt{x}\ln x=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{x^{-1/2}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to 0+}\frac{(\ln x)'}{\left(x^{-1/2}\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{1/x}{(-1/2)x^{-3/2}}=-2\lim_{x\to 0+}\sqrt{x}=0.$$

Пример 11. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-\operatorname{tg}x\right)$.

Решение. Имеем неопределённость вида $\infty-\infty$. Так как

$$\frac{1}{\cos x}-\operatorname{tg}x=\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1-\sin x}{\cos x},$$

то при том же условии $x\to\frac{\pi}{2}$ получаем неопределённость вида $\frac{0}{0}$. Воспользовавшись первым правилом Лопиталя, получаем

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-\operatorname{tg}x\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x}=0.$$

Пример 12.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+(x-1)\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x+x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+1+1}=\frac{1}{2}.$$

6.4. Раскрытие неопределённостей вида 0^0, 1^∞ и ∞^0

Неопределённости вида 0^0, 1^∞ и ∞^0 имеют место при рассмотрении функций вида $y=f(x)^{g(x)}$, если при $x\to a$ функция $f(x)$ стремится соответственно к 0, 1 и ∞, а функция $g(x)$ — соответственно к 0, ∞ и 0.

Эти неопределённости с помощью тождества

$$f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$$

сводятся к неопределённости вида $0\cdot\infty$.

Пример 13. Найти $\lim\limits_{x\to 0+}x^x$.

Решение. Имеем неопределённость вида 0^0. Так как $x^x=e^{x\ln x}$, то в показателе степени получена неопределённость вида $0\cdot\infty$, которая рассмотрена в примере 9. Следовательно,

$$\lim_{x\to 0+}x^x=\lim_{x\to 0+}e^{x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 0+}x\ln x}=e^0=1.$$

Пример 14. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{e^x-1-x}}$.

Решение. Имеем неопределённость вида 1^∞. Так как

$$\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{e^x-1-x}}=e^{\frac{\ln(1+x^2)}{e^x-1-x}},$$

то в показателе степени получена неопределённость вида $\frac{0}{0}$. Применяя первое правило Лопиталя, получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{e^x-1-x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x/(1+x^2)}{e^x-1}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{(e^x-1)(1+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{e^x(1+x^2)+(e^x-1)2x}=\frac{2}{1}=2.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{e^x-1-x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{e^x-1-x}}=e^2.$$

Пример 15. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg}x)^{2\cos x}$.

Решение. Имеем неопределённость вида ∞^0. Так как

$$(\operatorname{tg}x)^{2\cos x}=e^{2\cos x\ln\operatorname{tg}x}=e^{\frac{2\ln\operatorname{tg}x}{1/(\cos x)}},$$

то в показателе степени получена неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$. Применяя второе правило Лопиталя, имеем

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\ln\operatorname{tg}x}{1/(\cos x)}=2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\operatorname{tg}x}{1/(\cos x)}=2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\operatorname{tg}x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{-\frac{1}{\cos^2 x}\cdot(-\sin x)}=$$
$$=2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\operatorname{tg}x}=2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x=0.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg}x)^{2\cos x}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}2\cos x\ln\operatorname{tg}x}=e^0=1.$$

В следующем примере перейдём к другой неопределённости с помощью операции логарифмирования.

Пример 16. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$.

Решение. Имеем неопределённость вида ∞^0. Положим $y(x)=\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$ и прологарифмируем обе части полученного равенства:

$$\ln y(x)=\ln\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}=\sin x\ln\frac{1}{x}=-\sin x\ln x.$$

Так как $x \to 0$, то получили неопределённость вида $0 \cdot \infty$. Преобразуем её к неопределённости вида $\frac{\infty}{\infty}$, а затем применим второе правило Лопиталя и воспользуемся первым замечательным пределом:

$$\lim_{x\to 0} \ln y(x) = \lim_{x\to 0}(-\sin x \ln x) = -\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= -\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \sin x\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \sin x = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0} y(x) = \lim_{x\to 0} e^{\ln y(x)} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \ln y(x)} = e^0 = 1.$$

Итак, $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = 1$.

Задачи для самостоятельного решения

Найти предел:

212. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{\sin 3x}$;

213. $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{\sin 7x}{\operatorname{tg} 5x}$;

214. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3x - \sin 3x}{x^3}$;

215. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x - \sin x}$;

216. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\sin 4x}$;

217. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - 1 + \cos 3x}{e^x - e^{-x}}$;

218. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{\sin x - x}$;

219. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$;

220. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \frac{1 - 2\sin x}{\cos 3x}$;

221. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$;

222. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$;

223. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - 2x}{x^3}$;

224. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{-3x} - e^{\sin x}}{x}$;

225. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^5}{e^{3x}}$;

226. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}$;

227. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{e^{2x}}$;

228. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\sin 5x}{\ln\sin 2x}$;

229. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x+1}{x+\sin x}$;

230. $\lim\limits_{x\to 0+} \operatorname{tg} x \ln x$;

231. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x+2\sin\frac{x}{2}}{x+1}$;

232. $\lim\limits_{x\to 1+} \ln x \ln(x-1)$;

233. $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\sin x}$;

234. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\log_2(1+x)}{\log_3(1+2x)}$;

235. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\pi-2x)\operatorname{tg} x$;

236. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$;

237. $\lim\limits_{x\to\infty} \left((x+3)e^{\frac{1}{x}} - x\right)$;

238. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{x}{\ln x} - \frac{1}{\ln x}\right)$;

239. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$;

240. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x\sin x} - \frac{1}{x^2}\right)$;

241. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1-x)+x^2}{(1+x)^5-1+x^2}$;

242. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{-x}-1+x-\frac{x^2}{2}}{e^{x^3}-1}$;

243. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{9}{4}} \left(\sqrt[4]{x^3+1} - \sqrt[4]{x^3-1}\right)$;

244. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x - x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$;

245. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + x\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)$;

246. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x^3}-1-x^3}{\sin^6 2x}$;

247. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}-x-1}{\cos x+\frac{x^2}{2}-1}$;

248. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2^x-1-x\ln 2}{(1-x)^{10}-1+10x}$;

249. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x\right)$;

250. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 x-\ln^2(1+x)}{e^{x^2}-1}$;

251. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin 2x)^{\cos x}$;

252. $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\frac{3}{1+\ln x}}$;

253. $\lim\limits_{x\to +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}$;

254. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\ln x}$;

255. $\lim\limits_{x\to 0+} (\operatorname{tg} x)^{x}$;

256. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$;

257. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

258. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$;

259. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} (2\sin x)^{\operatorname{ctg} 6x}$.

Приложение

Таблица производных			
	Функция $f(x)$	Производная $f'(x)$	Примечание
1	c	0	c — число
2	x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	α — число
3	e^x	e^x	
4	a^x	$a^x \ln a$	$a > 0,\ a \neq 1$
5	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	
6	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$a > 0,\ a \neq 1$
7	$\sin x$	$\cos x$	
8	$\cos x$	$-\sin x$	
9	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	
10	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	
11	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
12	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
13	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	
14	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	
15	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	
16	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	
17	$\operatorname{th} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	
18	$\operatorname{cth} x$	$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	

См. также пункт 1.2.

Ответы

1. $2x$. **2.** $3x^2$. **3.** $4x^3$. **4.** $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. **5.** $-\frac{2}{x^3}$. **6.** $-\frac{3}{x^4}$. **7.** $-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$.
8. $2\cos 2x$. **9.** $-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$. **10.** $\frac{1}{\cos^2 x}$. **11.** $-\frac{2}{(2x+1)^2}$. **12.** $-\frac{3}{2\sqrt{1+3x}}$.
13. $-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. **14.** $2(2x^2+3x-1)$. **15.** $49x^6+6x-4$. **16.** $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{x^2}+\frac{6}{x}$.
17. $\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}-\frac{10}{x^3}+\frac{9}{x^4}$. **18.** $20x^4-3\cos x-\frac{5}{\sin^2 x}$. **19.** $\frac{3}{2\sqrt{x}}-4\sin x-\frac{2}{\cos^2 x}$.
20. $8x+\frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}-\frac{2}{x^3}+\cos x-\sin x+\frac{1}{x}$. **21.** $\frac{3}{8\sqrt[8]{x^5}}-24x^5+\frac{5}{x}+7\sin x-\frac{4\operatorname{ctg}2x}{\sin 2x}$.
22. $\frac{\ln 24}{x\ln 2\cdot\ln 3}$. **23.** $4e^x+\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. **24.** $e^x-\frac{1}{2\cos^2 x}+x^3$.
25. $5^x\ln 5+6^x\ln 6-7^{-x}\ln 7$. **26.** $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{4}{\sqrt{1-x^2}}$. **27.** $\frac{2}{x}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)$.
28. $\frac{4}{\sin^2 2x}$. **29.** $\frac{2}{1+x^2}$. **30.** $\sin x+x\cos x$. **31.** $\frac{x(\sin 2x+x)}{\cos^2 x}$. **32.** $\frac{\ln x+7}{7\sqrt[7]{x^5}}$.
33. $\arccos x-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. **34.** $\frac{\operatorname{arcctg}x}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^2}$. **35.** $\frac{x(2\ln x+1)}{\ln 3}$. **36.** $\frac{4x}{(x^2+1)^2}$.
37. $\frac{\sin x-x^2+x\cos x(\sin x-\ln x)}{x\sin^2 x}$. **38.** $-\frac{2+\sin x}{(1+2\sin x)^2}$. **39.** $\frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$. **40.** $-\frac{4x+\sin 2x}{4x\sqrt{x}\sin^2 x}$.
41. $\frac{(1+x^2)(\sin x\cos x+x)-x^2\sin 2x}{(1+x^2)^2\cos^2 x}$. **42.** $\frac{2e^x}{(1-e^x)^2}$. **43.** $1,\ 0,\ 4$. **44.** $\pm\frac{33}{8}$.
45. $-1,\ -\frac{1}{9},\ -\frac{1}{25}$. **46.** $-\frac{\ln 10}{2}$. **47.** $0,\ 2e^2,\ -e^{-4}$. **48.** $1,\ 2,\ 0,\ -1$.
49. $3\cos 3x$. **50.** $(2x+5)\cos(x^2+5x+2)$. **51.** $-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. **52.** $-\frac{5\sin x}{2\sqrt{1+5\cos x}}$.
53. $\frac{2\sin^2 x}{\sqrt{2x-\sin 2x}}$. **54.** $\sin 2x$. **55.** $3\sin^2 x\cos x$. **56.** $-100\cos^{99}x\sin x$.
57. $\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}}$. **58.** $\frac{2x}{\cos^2(x^2+3)}$. **59.** $-\operatorname{tg}x$. **60.** $\frac{10}{\sin 10x}$. **61.** $-\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.
62. $\frac{e^{\operatorname{tg}x}}{\cos^2 x}$. **63.** $\frac{2x-3}{x^2-3x+7}$. **64.** $\frac{2(x+1)}{x(x+2)}$. **65.** $\frac{1}{x^2+5}$. **66.** $\frac{1}{3+x^2}$. **67.** $\frac{x}{\sqrt{3-x^4}}$.
68. $\frac{1}{x^2-9}$. **69.** $\frac{2}{x(1-x^2)}$. **70.** $\frac{2}{1-4x^2}$. **71.** $\sqrt{1-x^2}$. **72.** $\operatorname{arctg}x$.
73. $e^x\cos x$. **74.** $\operatorname{arctg}\sqrt{2x-1}$. **75.** $3\operatorname{tg}^4 x$. **76.** $3x^2\sin 2x^3$.
77. $-\frac{\cos^2\frac{x}{3}}{\sin^4\frac{x}{3}}$. **78.** $\frac{5}{8}\frac{\sin 2x}{\cos^{11}2x}$. **79.** $-\sin 4x$. **80.** $\frac{4\cos 2x}{(1-\sin 2x)^2}$. **81.** $-\frac{2\cos^2 x}{\sin^3 x}$.
82. $3\cdot 2^{3x}\ln 2+5x^4-2xe^{-x^2}-\frac{1}{x^2}$. **83.** $\frac{e^{\sqrt{x}}(1+\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$. **84.** $xe^{-x}(2-x)$.
85. $e^{-x^2}(1-2x^2-4x)$. **86.** $\frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}}\left(\cos\frac{x}{3}-\sin\frac{x}{3}\right)$. **87.** $e^{\frac{1}{\cos x}}\frac{\sin x}{\cos^2 x}$. **88.** $-\frac{e^{\frac{1}{\ln x}}}{x\ln^2 x}$.
89. $10^{3-\sin^3 2x}\ln 10\cdot(-3\sin 2x\sin 4x)$. **90.** $2^x\ln 2\cos 2^x$. **91.** $-\frac{4}{(e^x-e^{-x})^2}$.
92. $\frac{2e^2x}{\sqrt{e^{4x}+1}}$. **93.** $\frac{2}{e^{4x}+1}$. **94.** $\frac{\operatorname{ctg}x\ln\cos x+\operatorname{tg}x\ln\sin x}{(\ln\cos x)^2}$. **95.** $-\frac{7\operatorname{tg}7x}{\ln 5}$. **96.** $-\frac{\operatorname{tg}\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1+x}\cdot\ln 7}$.
97. $\frac{2e^{\sqrt[7]{x^2}}}{7\sqrt[7]{x^5}}$. **98.** $-\frac{1}{2\sqrt{x(x-1)}}$. **99.** $-\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$. **100.** $\frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$. **101.** $-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.
102. $\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$. **103.** $-\frac{1}{x-4x^2}$. **104.** $\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x-\sin^2 x}}$. **105.** $\frac{4e^{4x}}{\sqrt{1-e^{8x}}}$. **106.** $\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$.
107. $\frac{1}{2x\sqrt{6x-1}}$. **108.** $\frac{4e^2x}{1-e^{8x}}$. **109.** $\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}-\frac{1}{x^2+1}$. **110.** $-\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}\arccos 2x}$.

111. $\frac{5}{(5x+3)(1+\ln^2(5x+3))}$. **112.** $-\frac{3}{x^2+9}$. **113.** $\frac{2\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}}{1+x^2}$. **114.** $\frac{xe^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{1-e^{-x^2}}}$.
115. $-\frac{\sin x\cos(\cos x)}{\cos^2(\sin(\cos x))}$. **116.** $\frac{xe^{x^2\operatorname{ctg}3x}}{\sin^2 3x}(\sin 6x-3x)$. **117.** $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\left(\operatorname{tg}e^{-\frac{x}{2}}\right)\cdot\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\cos^2\left(e^{-\frac{x}{2}}\right)}$.
118. $5\operatorname{ctg}x\cdot\ln^4\sin x$. **119.** $\frac{x}{(2+x^2)\sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2}}$. **120.** $\frac{1}{20}\frac{\operatorname{ctg}\frac{x+3}{4}}{\sqrt[5]{\ln^4\sin\frac{x+3}{4}}}$.
121. $\frac{e^{\sqrt{1+\ln x}}}{2x\sqrt{1+\ln x}}$. **122.** $\frac{e^{5x}}{(1+e^{10x})\sqrt[5]{\operatorname{arctg}^4 e^{5x}}}$. **123.** $\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-\arccos^2 x}}$. **124.** $\frac{1}{2(1+x^2)}$.
125. $\frac{1}{1+x+x^2}$. **126.** $\frac{9(x^2+1)}{x^4-9}$. **127.** $\frac{4x-5}{x^2+5}$. **128.** $\operatorname{arctg}x$. **129.** $\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}$.
130. $\frac{1}{x}+\operatorname{ctg}x-\frac{x}{1-x^2}$. **131.** $x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$. **132.** $x^{\sin x}\cos x\ln x+x^{\sin x-1}\sin x$.
133. $(\operatorname{tg}x)^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln\operatorname{tg}x+\frac{1}{\cos x}\right)$. **134.** $(\cos x)^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln\cos x-\frac{\sin^2 x}{\cos x}\right)$.
135. $5x^4dx$. **136.** $\frac{dx}{\cos^2 x}$. **137.** $3\sin 2x\sin 4x\,dx$. **138.** $\frac{dx}{x}$. **139.** $\frac{\operatorname{ctg}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx$.
140. $-\frac{\operatorname{tg}x\cdot e^{-\frac{1}{\cos x}}}{\cos x}dx$. **141.** $-2x\cdot 2^{-x^2}\ln 2\,dx$. **142.** $4\,dx$. **143.** $3\,dx$.
144. $-\frac{3}{\sqrt{10}}dx$. **145.** 0. **146.** $-dx$. **147.** $-2e\,dx$. **148.** $\frac{1}{4}dx$.
149. $\frac{dx}{6\sqrt{11}}$. **150.** $2e^{-x^2}(2x^2-1)$. **151.** $\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$. **152.** $\frac{x}{\sqrt[3]{(4-x^2)^2}}$. **153.** $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}}$.
154. $-\frac{4}{(2x-3)^2}$. **155.** $\frac{4(3x^2-4)}{(4+x^2)^3}$. **156.** $e^{-x}(3-x)$. **157.** $(6-x^2)\cos x-6x\sin x$.
158. $2^x(x^3\ln^3 2+9x^2\ln^2 2+18x\ln 2+6)$. **159.** e^x. **160.** $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$.
161. $3^x(\ln 3)^n$. **162.** $m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)x^{m-n}$ при $m\geqslant n$ и 0 при $m<n$. **163.** $3^n\sin\left(3x+n\frac{\pi}{2}\right)$. **164.** $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$. **165.** $2^{3x}(3\ln 2)^n$.
166. $-2^{n-1}\cos\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right)$. **167.** $2^{n-1}\cos\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right)$. **168.** $-\frac{(n-1)!3^n}{(2-3x)^n}$. **169.** $4^n n!$.
170. $-x\cos x-10\sin x$. **171.** $(5^{37}(x^3-1)+111\cdot 5^{36}x^2+3996\cdot 5^{35}x+46620\cdot 5^{34})e^{5x}$.
172. $\frac{x^2}{3^{73}}\cos\frac{x}{3}+\frac{146x}{3^{73}}\sin\frac{x}{3}-\frac{584}{3^{69}}\cos\frac{x}{3}$. **173.** $-\frac{2\cdot 97!}{x^{98}}$. **174.** $\frac{2\cos x}{\sin^3 x}(dx)^2$.
175. $-2\cos 2x(dx)^2$. **176.** $\frac{2x}{(1+x^2)^2}(dx)^2$. **177.** $-2e^x(\cos x+\sin x)(dx)^3$.
178. $-\frac{1}{x^2}(dx)^3$. **179.** $\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)(dx)^n$. **180.** $\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)(dx)^n$.
181. $\frac{1}{2^n}e^{\frac{x}{2}}(dx)^n$. **182.** $\frac{2}{3}\operatorname{ctg}t,\ \frac{2}{9\sin^3 t}$. **183.** $\frac{t^2-1}{2t},\ \frac{1+t^2}{4t^3}$. **184.** $\frac{3}{2}e^t,\ \frac{3}{4e^t}$.
185. $\frac{3t^2+1}{2t},\ \frac{3t^2-1}{4t^3}$. **186.** $-\operatorname{tg}t,\ \frac{1}{12\cos^4 t\sin t}$. **187.** $\frac{1-3t}{t-3},\ \frac{8(t+1)^3}{(t-3)^3}$. **188.** $\frac{t(2-t^3)}{1-2t^3},\ \frac{2(t^3+1)^4}{(1-2t^3)^3}$. **189.** $\frac{2x-y}{x-2y}$. **190.** $-\frac{2x+y}{x+2y}$. **191.** $-\frac{x}{y}$. **192.** $\frac{p}{y}$. **193.** $\frac{b^2x}{a^2y}$.
194. $-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$. **195.** $\frac{e^{-x}+y}{e^y+x}$. **196.** $-\frac{e^x\sin y+e^{-y}\sin x}{e^x\cos y+e^{-y}\cos x}$. **197.** $\frac{1}{y^2}+1$. **198.** $-\frac{b^2x}{a^2y}$.
199. $\frac{x^2-ay}{ax-y^2}$. **200.** $-\frac{y\sin^2 y}{1+x\sin^2 y}$. **201.** $\frac{2x-ye^{xy}}{3y^2+xe^{xy}}$. **202.** $\frac{x+y}{x-y}$. **203.** $-\frac{1+y^2}{y^2}$.
204. $\frac{2(x+2y)^2}{3}+\frac{y}{x}$. **205.** $-\frac{a^2}{y^3}$. **206.** $\frac{2(y-a)}{(x-b)^2}$. **207.** $\frac{m(m+n)y}{n^2x^2}$. **208.** $-\frac{a^2}{y^3}$.
209. $-\frac{R^2}{(y-\beta)^3}$. **210.** $-\frac{2(1+y^2)}{y^5}$. **211.** $-\frac{6a^2}{(x+2y)^3}$. **212.** $\frac{7}{3}$. **213.** $-\frac{7}{5}$.
214. $\frac{9}{2}$. **215.** 3. **216.** $-\frac{1}{2}$. **217.** $\frac{1}{2}$. **218.** -2. **219.** $\frac{1}{3}$. **220.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$.
221. $\frac{3}{2}$. **222.** 2. **223.** $\frac{1}{6}$. **224.** -4. **225.** 0. **226.** 0. **227.** 0.

228. 1. **229.** 2. **230.** 0. **231.** 3. **232.** 0. **233.** 1. **234.** $\log_2 3$.
235. 2. **236.** e. **237.** 4. **238.** 1. **239.** $\frac{1}{2}$. **240.** $\frac{1}{6}$. **241.** $-\frac{1}{5}$.
242. $-\frac{1}{6}$. **243.** $\frac{1}{2}$. **244.** $\frac{1}{2}$. **245.** 0. **246.** $\frac{1}{128}$. **247.** 1. **248.** $\frac{\ln^2 2}{90}$.
249. $\frac{2}{3}$. **250.** 0. **251.** 1. **252.** e^3. **253.** 1. **254.** 1. **255.** 1.
256. $e^{-\frac{1}{6}}$. **257.** $\sqrt[3]{e}$. **258.** $e^{-\frac{2}{\pi}}$. **259.** $e^{\frac{\sqrt{3}}{6}}$.