Кратные интегралы

§1. Определение двойного интеграла

Пусть дана на плоскости область D, ограниченная замкнутой линией L, не имеющей самопересечений, и непрерывная в D функция $z = f(x, y)$. Рассмотрим измельчение области D на площадки S_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, ΔS_i — площади площадок S_i. Сумма

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i, \qquad P_i \in S_i$$

называется *интегральной*, а предел таких сумм при стремлении наибольшего диаметра площадок к нулю и числа площадок n к бесконечности называется двойным интегралом функции $f(x, y)$ по области D, записывается $\iint\limits_D f(x, y)\, dS$.

Указанный выше предел существует для любой непрерывной в D функции

$$z = f(x, y).$$

В декартовых координатах двойной интеграл выглядит так —

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy, \quad \text{а в полярных — } \iint\limits_D f(r, \varphi) r\, dr\, d\varphi.$$

§2. Правило вычисления двойного интеграла

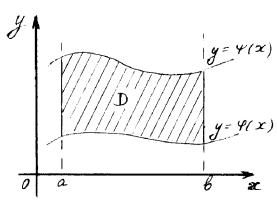
При вычислении двойных интегралов рассматривают две *основные* области интегрирования и сводят в них вычисление двойного интеграла к повторному:

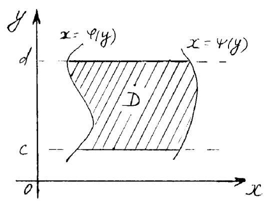
1) область интегрирования D ограничена слева и справа прямыми $x = a$ и $x = b$, $(a < b)$, а снизу и сверху — непрерывными кривыми $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$, $[\varphi(x) \leqslant \psi(x)]$.

   Для такой области интеграл вычисляется по формуле

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy, \tag{1}$$

причем сначала вычисляется интеграл $\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy$, в котором x считается постоянным.





2) область интегрирования D ограничена снизу и сверху прямыми $y = c$ и $y = d$, $(c < d)$, а слева и справа — непрерывными кривыми $x = \varphi(y)$ и $x = \psi(y)$, $[\varphi(y) \leqslant \psi(y)]$.

Для такой области двойной интеграл вычисляется по формуле:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx, \tag{2}$$

причем сначала вычисляется интеграл $\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx$, в котором y считается постоянным.

Правые части формул (1) и (2) называются *повторными* интегралами. В случае, когда область D имеет более сложный вид, ее разбивают на части вида 1) или 2).

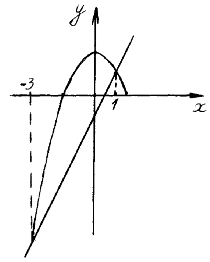
Пример 1. Вычислить $\iint\limits_D (x-y)\,dx\,dy$, если область D ограничена линиями $y = 2 - x^2$ и $y = 2x - 1$.

Решение.

Построим область D. Сверху область ограничивает парабола с вершиной в точке $(0,2)$, а снизу — прямая. Приравнивая

$$2 - x^2 = 2x - 1,$$

найдем абсциссы точек пересечения графиков. Получим $x = -3$ или $x = 1$. Область интегрирования принадлежит к типу 1). Расставляем пределы



$$I = \iint\limits_D (x-y)\,dx\,dy = \int\limits_{-3}^{1} dx \int\limits_{2x-1}^{2-x^2} (x-y)\,dy.$$

Вычисляем внутренний интеграл

$$\int\limits_{2x-1}^{2-x^2} (x-y)\,dy = \left[xy - \frac{1}{2}y^2\right]_{2x-1}^{2-x^2} = -\frac{1}{2}x^4 - x^3 + 2x^2 + x - \frac{3}{2}.$$

Подставляем в исходный интеграл

$$I = \int\limits_{-3}^{1} \left(-\frac{1}{2}x^4 - x^3 + 2x^2 + x - \frac{3}{2}\right) dx =$$

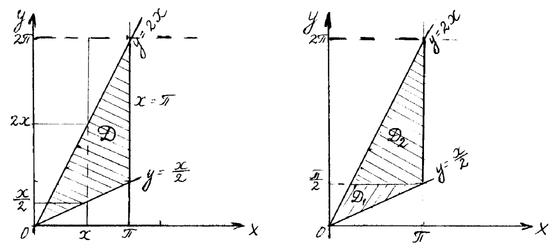
$$= \left[-\frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x\right]_{-3}^{1} = 4\frac{4}{15}.$$

Ответ: $4\frac{4}{15}$.

Пример 2. Расставить пределы интегрирования двумя способами в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$, где D — область, ограниченная прямыми $2y = x$, $y = 2x$, $x = \pi$.

Решение.

Изобразив область интегрирования на чертеже (см. рис.), будем сначала интегрировать по y. Для каждой точки области D имеем $0 \leqslant x \leqslant \pi$. Если взять вертикальную прямую, отвечающую фиксированному x, то она



пересечет область D в точках, лежащих на прямых $y = \frac{x}{2}$ и $y = 2x$, следовательно,

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_0^{\pi} dx \int\limits_{\frac{x}{2}}^{2x} f(x,y)\,dy.$$

Если же начасть с интегрирования по x, то заметим, что $0 \leqslant y \leqslant 2\pi$ для каждой точки (x,y) области D и что горизонтальная прямая, отвечающая фиксированному y, пересекает область D в точках, лежащих на прямых (см. рис.):

$$x = \frac{y}{2} \quad \text{и} \quad x = 2y \quad \text{при} \quad 0 < y < \frac{\pi}{2} \quad \{D_1\}$$

либо

$$x = \frac{y}{2} \quad \text{и} \quad x = \pi \quad \text{при} \quad \frac{\pi}{2} < y < 2\pi \quad \{D_2\}\,.$$

Следовательно, в этом случае область D надо разбить на две области, после чего имеем

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{2y} f(x,y)\,dx + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{\pi} f(x,y)\,dx.$$

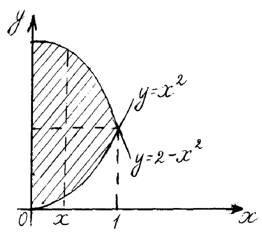
Самостоятельно вычислите интеграл по области D, положив $f(x,y) = \sin y$, проверьте ответ: $\iint\limits_D \sin y\,dx\,dy = 2$.

Пример 3. Пусть D — множество точек (x,y), для которых $x \geqslant 0$, $y \geqslant x^2$ и $y \leqslant 2 - x^2$. Вычислить $\iint\limits_D \sqrt{x}y\,dx\,dy$.

Решение.

Множество точек (x, y), для которых $x \geqslant 0$, — это правая полуплоскость. Множество точек (x, y), для которых $y \geqslant x^2$, — это область, лежащая над параболой; множество точек (x, y), для которых $y \leqslant 2 - x^2$, — это область, лежащая под параболой $y = 2 - x^2$.

Множество D изображено на рисунке, оно представляет пересечение этих трех множеств, т.е. состоит из точек, принадлежащих каждому из них.



Две параболы пересекаются в точках, где $2 - x^2 = x^2$, т.е. при $2x^2 = 2$, точка пересечения, принадлежащая правой полуплоскости, имеет координаты $(1, 1)$. Для точек области D абсцисса x изменяется от 0 до 1. Вертикальная прямая при постоянном x пересекает D по отрезку, концы которого принадлежат кривым $y = x^2$ и $y = 2 - x^2$.

Следовательно,

$$\iint\limits_D \sqrt{x}y\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{2-x^2} \sqrt{x}y\,dy = \int\limits_0^1 \sqrt{x}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=x^2}^{y=2-x^2} dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \sqrt{x}\frac{1}{2}\left[(2-x^2)^2 - x^4\right] dx = \int\limits_0^1 \left(2x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{5}{2}}\right) dx = \left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{7}x^{\frac{7}{2}}\right]_0^1 = \frac{16}{21}.$$

Самостоятельно вычислите интеграл, интегрируя сначала по x, а затем по y.

Для некоторых областей двойной интеграл удобнее вычислять, пользуясь полярными координатами

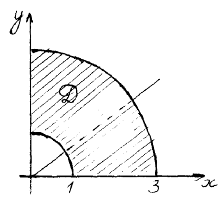
$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

В этом случае

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\,dr\,d\varphi.$$

Обратите внимание, что, если нужно вычислить двойной интеграл, используя полярные координаты, то для этого недостаточно переписать подынтегральную функцию, отнеся ее к полярным координатам (r,φ), но необходимо еще умножить ее на множитель r. Точно так же и в общем случае при переходе к новым координатам подынтегральная функция умножается на некоторый множитель, зависящий от выбранных координат. Этот множитель в честь математика Якоби называется якобианом.

Пример 4. Пусть D — часть кругового кольца, изображенного на рисунке. Вычислить $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}\,dx\,dy$.



Решение.

Ясно, что в рассматриваемой области φ изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2}$, а r изменяется от 1 до 3, далее,

$$x^2+y^2 = (r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 = r^2.$$

Следовательно,

$$\iint\limits_D e^{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_1^3 e^{r^2} r\,dr = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_1^3 \frac{1}{2}\left(e^{r^2}\,dr^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left[e^{r^2}\right]_{r=1}^{r=3} = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (e^9 - e)\,d\varphi = \frac{\pi e(e^8-1)}{4}.$$

Без использования полярных координат этот интеграл можно вычислить, только применяя методы численного интегрирования.

Двойные интегралы применяются для вычисления площадей плоских фигур и поверхностей, объемов пространственных тел, механических величин, связанных с непрерывным распределением массы в плоской области, а также для решения многих других задач.

С помощью двойных интегралов можно вычислить механические величины: массу m, статические моменты M_x, M_y, моменты инерции J_x, J_y, координаты центра тяжести плоской фигуры D (x_c, y_c) при этом считается известной плотность $\rho(x, y)$ распределения массы плоской фигуры. Пусть дана некоторая плоская фигура D, тогда

$$m = \iint\limits_D \rho(x, y)\, dx\, dy \quad \text{— масса,}$$

$$\left.\begin{aligned} M_x &= \iint\limits_D \rho(x, y) y\, dx\, dy, \\ M_y &= \iint\limits_D \rho(x, y) x\, dx\, dy, \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} J_x &= \iint\limits_D y^2 \rho(x, y)\, dx\, dy, \\ J_y &= \iint\limits_D x^2 \rho(x, y)\, dx\, dy, \end{aligned}\right\}$$

$$x_c = \frac{M_y}{m}, \quad y_c = \frac{M_x}{m}.$$

Особенно просто вычисляется повторный интеграл в случае, когда область интегрирования — прямоугольник в декартовых координатах или усеченный сектор в полярных координатах (т.е. пределы интегрирования постоянны), а подынтегральная функция $f(x, y) = u(x) \cdot v(y)$ представлена в виде произведения. Продемонстрируем это на примере.

Пример 5. Вычислить $\iint\limits_D x \ln y\, dx\, dy$, если область интегрирования прямоугольник $0 \leqslant x \leqslant 4$, $1 \leqslant y \leqslant e$.

Решение.

Область интегрирования относится и к типу 1) и к типу 2).

$$\iint\limits_D x \ln y\, dx\, dy = \int\limits_0^4 dx \int\limits_1^e x \ln y\, dy = \left(\int\limits_0^4 x\, dx \right) \cdot \left(\int\limits_1^e \ln y\, dy \right),$$

т.е. двойной интеграл является произведением двух обыкновенных интегралов.

$$\int\limits_0^4 x\,dx = \frac{4^2}{2} = 8, \quad \int\limits_1^e \ln y\,dy = y\ln y\Big|_1^e - \int\limits_1^e dy = e - e + 1 = 1.$$

Ответ: 8.

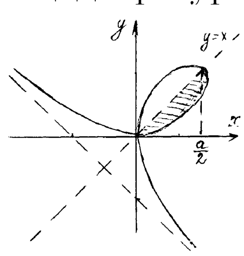
Старайтесь использовать такое упрощение в решении задач контрольной работы.

§3. "Геометрический смысл" двойного интеграла

Если $f(x,y) \geqslant 0$ в области D, то двойной интеграл $\iint f(x,y)\,dS$ равен *объему цилиндрического тела*, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x,y)$, сбоку цилиндрической поверхностью с образующими параллельными оси Oz, а снизу областью D плоскости Oxy.

Важный частный случай этой ситуации возникает, когда $f(x,y) \equiv 1$. В этом случае, численно (если пренебречь единицами измерения): объем цилиндра = площади области $D = \iint 1\,dx\,dy = \iint\limits_D dx\,dy$ (или $\iint\limits_D r\,dr\,d\varphi$ в полярных координатах).

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $x^3 + y^3 = axy$.



Решение.

Линия изображена на рисунке (обычно в решении задач контрольную линию лучше изображать после перехода к полярным координатам). Нам нужно найти площадь, ограниченную петлей линии по рисунку, если $a = 1$, то $S \approx \frac{1}{4}$, даже поменьше (эта прикидка нам пригодится при проверке).

Преобразуем данное уравнение к полярным координатам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, получим:

$$(r\cos\varphi)^3 + (r\sin\varphi)^3 = a(r\cos\varphi)\cdot(r\sin\varphi) \quad \text{или} \quad r = \frac{a\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^3\varphi + \cos^3\varphi}.$$

Поскольку первоначальное уравнение нашей фигуры не менялось при замене x на y, то линия $y = x$ является осью симметрии фигуры. Значит, мы можем вычислять только площадь половины нашей области (заштриховано на рисунке). В этом случае $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}$ и при фиксированном φ

$$0 \leqslant r \leqslant \frac{a\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^3\varphi + \cos^3\varphi}.$$

Поэтому:

$$S = 2\iint\limits_D r\,dr\,d\varphi = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{a\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^3\varphi+\cos^3\varphi}} r\,dr =$$

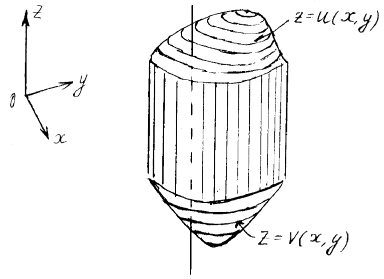
$$= a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\left(\sin^3\varphi + \cos^3\varphi\right)^2}d\varphi = a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg}^2\varphi\cos^4\varphi}{\cos^6\varphi\left(1 + \operatorname{tg}^3\varphi\right)^2}d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3\operatorname{tg}^2\varphi\,d\operatorname{tg}\varphi}{\left(1 + \operatorname{tg}^3\varphi\right)^2} = \frac{a^2}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\left(1 + \operatorname{tg}^3\varphi\right)}{\left(1 + \operatorname{tg}^3\varphi\right)^2} = -\left.\frac{a^2}{3\left(1 + \operatorname{tg}^3\varphi\right)}\right|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{6}.$$

§4. Тройной интеграл

Если дана ограниченная область V в пространстве (тело V) и функция $f(x, y, z)$, определенная в V, аналогично двойному интегралу вводится понятие тройного интеграла. Дайте самостоятельно определение тройного интеграла (аналогично §1) и прочитайте его в учебнике.

Для вычисления тройной интеграл сводят к двойному интегралу. Правило сведения тройного интеграла к двойному мы приведем для специального тела V, обладающего тем свойством, что всякая прямая, проведенная через внутреннюю точку тела V параллельно оси Oz, пересекает поверхность тела в двух точках. В верхней точке $z = u(x, y)$, а в нижней $z = v(x, y)$, где функции u и v определены в области D, а область D — проекция тела V на плоскость Oxy (см. рисунок).



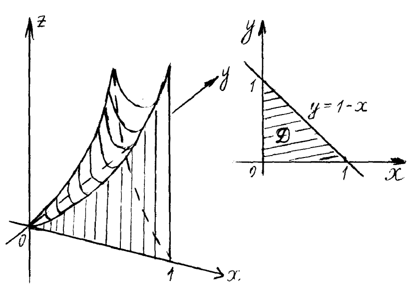
$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_D dx\,dy \left(\int\limits_{v(x,y)}^{u(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right).$$

(Внешний интеграл — двойной по области D, а во внутреннем интеграле x и y считаются постоянными). Объем тела V равен тройному интегралу по V от функции 1 ($f(x,y,z) \equiv 1$).

Пример. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 1$, $z = x^2 + y^2$.

Решение.

Изобразим тело V и его проекцию на плоскость Oxy на рисунке.



Сверху тело ограничивает часть параболоида вращения $z = x^2 + y^2$

$$v = \iint\limits_D dx\,dy \int\limits_0^{x^2+y^2} dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{x^2+y^2} dz.$$

Мы свели задачу к вычислению трехкратного интеграла. Вычислим его последовательно.

$$\int\limits_0^{x^2+y^2} dz = x^2 + y^2;$$

$$\int\limits_0^{1-x} \left(x^2 + y^2\right) dy = \left(x^2 y + \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{1-x} = x^2(1-x) + \frac{(1-x)^3}{3} = -\frac{4}{3}x^3 + 2x^2 - x + \frac{1}{3};$$

$$\int\limits_0^1 \left(-\frac{4}{3}x^3 + 2x^2 - x + \frac{1}{3}\right) dx = \left(-\frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

В задачах на вычисление объемов и площадей полезно произвести проверку. Так, в предыдущем примере можно заменить поверхность параболоида плоскостью. Объем полученной четырехугольной пирамиды v_n (вершина в точке 0) равен $\dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1$.

Должно быть выполнено неравенство $v_n > v > 0$. Действительно,

$$\frac{1}{3\sqrt{2}} > \frac{1}{6} > 0.$$

Можно ожидать, что результат верен.

Замечание. Объем тела, ограниченного указанными в данной задаче поверхностями, можно вычислить при помощи двойного интеграла

$$V = \iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right) dx\,dy,$$

где D — проекция V на плоскость Oxy.