Ряды

§1. Числовые ряды. Необходимый признак сходимости ряда

1.1. Общие понятия

Пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ – произвольные числа. Числовым рядом называется выражение

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots, \tag{1}$$

числа $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ называются членами ряда, а выражение a_n как функция числа n – общим членом ряда. Если вместо n в формулу общего члена ряда подставлять значения $1, 2, 3, \ldots$, то можно найти сколько угодно членов ряда.

Пример 1. Написать четыре первых члена ряда по данному общему члену $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$.

Решение: Полагая в формуле общего члена последовательно значения $1, 2, 3, 4$, получим:

$$a_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}, \quad a_3 = \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{12}, \quad a_4 = \frac{1}{4 \cdot 5} = \frac{1}{20}.$$

Пример 2. Написать формулу общего члена для каждого ряда:

1) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$

2) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} \ldots$

3) $\frac{2}{5} + \frac{4}{8} + \frac{6}{11} + \frac{8}{14} \ldots$

Решение: 1) Знаменатели членов данного ряда – натуральный ряд чисел. Следовательно, общий член $a_n = \frac{1}{n}$.

2) Знаменатели членов данного ряда могут быть получены из формулы 2^{n-1}, где $n = 1, 2, 3, \ldots$ Следовательно, общий член $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$.

3) Числители членов данного ряда – чётные числа вида $2n$, а знаменатели – числа, которые могут быть получены по формуле $3n+2$. Следовательно, общий член $a_n = \frac{2n}{3n+2}$.

Сумма n первых членов ряда (1) называется n-й частичной суммой ряда и обозначается через S_n, то есть

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n.$$

Частичная сумма S_n является функцией натурального числа n. Исходя из определения частичной суммы, имеем

$$\begin{array}{lcl} S_1 & = & a_1, \\ S_2 & = & a_1 + a_2, \\ S_3 & = & a_1 + a_2 + a_3, \\ \multicolumn{3}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ S_n & = & a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n. \end{array}$$

Если бесконечная последовательность частичных сумм ряда (1)

$$S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, S_{n+1}, S_{n+2}, \ldots$$

имеет конечный предел, то есть

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

то говорят, что этот ряд сходится. В этом случае число S называется суммой сходящегося ряда (1). Если же $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ или не существует, то ряд (1) называется расходящимся. В этом случае не имеет смысла говорить о его сумме.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд

$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1} + q^n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}. \tag{2}$$

Решение: Ряд (2) есть геометрическая прогрессия, знаменатель которой равен q. Известно, что сумма первых n членов геометрической прогрессии вычисляется по формуле (при $q \neq 1$)

$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1} = S_n = \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Если знаменатель прогрессии q по абсолютной величине меньше единицы, то есть $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ и

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q}\right] = \frac{1}{1-q}.$$

Следовательно, при $|q| < 1$ ряд (2) сходится и его сумма равна $\frac{1}{1-q}$.

При $q=1$, $S_n = 1+1+\ldots+1+1=n$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$; при $q=-1$ последовательность частичных сумм имеет вид $1,0,1,0,1,\ldots$ и не стремится ни к какому пределу. Таким образом, при $q=1$ и при $q=-1$ ряд (2) расходится.

Если знаменатель геометрической прогрессии $q>1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$. Ряд (2) в этом случае расходится. Если $q<-1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$ не существует, поэтому не существует и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ и, значит, ряд (2) расходится.

Итак, при $|q|<1$ ряд (2) сходится, при $|q|\geqslant 1$ – расходится.

Пример 4. Исследовать на сходимость ряд

$$1-1+1-1+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}.$$

Решение: Поскольку для этого ряда $S_{2m-1}=1$, $S_{2m}=0$ при любом натуральном m, то последовательность $\{S_n\}$ не имеет предела при $n\to\infty$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ расходится. Заметим, что этот ряд является рядом из примера 3 при $q=-1$.

Ряд

$$R_n=\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+\ldots \tag{3}$$

называется n-м остатком ряда (1) или остатком после n-го члена.

Ряд (1) сходится или расходится вместе со своим остатком (3), поэтому часто при исследовании вопроса о сходимости ряда вместо него рассматривают n-й остаток.

Заметим, что если ряд (1) сходится и его сумма равна S, то $R_n = S - S_n$, так как $S = S_n + R_n$ для любого натурального n.

Пример 5. Найти сумму ряда

$$\frac{1}{5^4}+\frac{1}{5^5}+\frac{1}{5^6}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^{n+3}}.$$

Решение: Рассмотрим ряд

$$1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^{n-1}}.$$

Этот ряд рассмотрен в примере 3 при $q=\frac{1}{5}$, его сумма равна $\frac{1}{1-\frac{1}{5}}=\frac{5}{4}$. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^{n+3}}$ можно записать в виде $\sum\limits_{n=5}^{\infty}\frac{1}{5^{n-1}}$, то он является остатком после четвёртого члена ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^{n-1}}$ и равен

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^{n+3}} = \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{5^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^{n-1}} - \left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3}\right) = \frac{5}{4} - \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^4}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{1}{500}.$$

В приведённых примерах последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм ряда вычислялась достаточно просто, так что существование и величина предела S_n устанавливались непосредственно. Таким образом, в силу определения одновременно доказывалась и сходимость ряда и вычислялась сумма рассматриваемого ряда. Чаще, однако, непросредственный анализ последовательности $\{S_n\}$ очень сложен, поэтому основной задачей в теории числовых рядов является установление сходимости или расходимости данного ряда без вычисления его суммы.

1.2. Необходимый признак сходимости ряда

Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

сходится, то его общий член a_n стремится к нулю при $n \to \infty$, то есть

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{4}$$

Пример 6. Проверить, выполняется ли необходимый признак сходимости для ряда

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \ldots$$

Решение: Общий член $a_n = \frac{n}{n+1}$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, то необходимое условие (4) сходимости ряда не выполняется. Следовательно, данный ряд расходится.

Пример 7. Проверить, выполняется ли необходимое условие сходимости для ряда

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \tag{5}$$

Решение: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Значит необходимое условие сходимости ряда выполнено.

Замечание. Из выполнения условия $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ не следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Ряд, рассмотренный в примере 7, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ называется гармоническим. Этот ряд расходится, хотя для него выполняется необходимое условие сходимости.

Задачи для самостоятельного решения

Написать формулу общего члена ряда:

1) $1 + 8 + 27 + 64 + 125 + \ldots$
2) $\dfrac{1}{1\cdot 4} + \dfrac{1}{2\cdot 5} + \dfrac{1}{3\cdot 6} + \dfrac{1}{4\cdot 7} + \ldots$
3) $1 + \dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{5} + \dfrac{8}{7} + \dfrac{16}{9} + \ldots$
4) $\dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{5} + \dfrac{6}{7} + \dfrac{8}{9} + \dfrac{10}{11} + \ldots$

Написать четыре первых члена ряда по известному общему члену:

5) $a_n = \dfrac{3n-2}{n^2+1}$.
6) $a_n = \dfrac{1}{(3+(-1)^n)^n}$.
7) $a_n = \dfrac{\left(2+\sin\frac{n\pi}{2}\right)\cos n\pi}{n!}$.
8) $a_n = \dfrac{(-1)^n n}{2n^2}$.
9) $a_n = \dfrac{2+(-1)^n}{n^2}$.

Доказать непосредственно сходимость ряда и найти его сумму:

10) $1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{3^3} + \ldots$
11) $1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{27} + \ldots$
12) $1 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{8}} + \ldots$
13) $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \ldots$
14) $\dfrac{1}{1\cdot 4} + \dfrac{1}{2\cdot 5} + \dfrac{1}{3\cdot 6} + \ldots$
15) $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \dfrac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \ldots$

16) $\frac{1}{7}+\frac{2}{7^2}+\frac{3}{7^3}+\frac{4}{7^4}+\ldots$

17) $\frac{1}{9}+\frac{2}{9^2}+\frac{3}{9^3}+\frac{4}{9^4}+\ldots$

18) $1+2a+3a^2+4a^3+\ldots,\ |a|<1.$

19) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right).$

Установить расходимость ряда, используя необходимый признак сходимости:

20) $1-1-1+1+1+1-1-1-1-1+\ldots$

21) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{n+1}.$

22) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\sin\frac{1}{n^2+n+1}.$

23) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{2n^2+3}\right)^{n^2}.$

24) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n}.$

25) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}.$

26) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{0,3}}.$

27) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}.$

28) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3n+2}.$

§2. Достаточные признаки сходимости положительных рядов

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ называется положительным, если $a_n\geqslant 0$ при всех $n\in\mathbb{N}$; ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ называется строго положительным, если $a_n>0$ при всех $n\in\mathbb{N}$.

2.1. Первый признак сравнения

Пусть даны два ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \tag{1}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots \tag{2}$$

Если ряды (1) и (2) положительны и при всех натуральных n выполнено неравенство $a_n \leqslant b_n$, то

1) Если сходится ряд (2), то сходится и ряд (1);
2) Если расходится ряд (1), то расходится и ряд (2).

Замечание. Признак сравнения остаётся верным для любых рядов (1) и (2), если для некоторого числа n_0 при всех натуральных $n \geqslant n_0$ выполнено неравенство $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots + \frac{1}{n^{n-1}} + \ldots$$

Решение: Сравним данный ряд с геометрической прогрессией

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots \tag{3}$$

Ряд (3) сходится, так как знаменатель прогрессии $q = \frac{1}{2}$ (см. пример 3 §1). Члены исходного ряда не превосходят соответствующих членов геометрической прогрессии (3), так как $\frac{1}{n^{n-1}} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$ при $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, по первому признаку сравнения исходный ряд также сходится.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$$

Решение: Общий член данного ряда $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ больше общего члена гармонического ряда $b_n = \frac{1}{n}$, который, как известно, расходится. Следовательно, данный ряд также расходится.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд

$$1 + \frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{2 \cdot 5^2} + \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \ldots + \frac{1}{n \cdot 5^n} + \ldots$$

Решение: Сравним данный ряд с бесконечной геометрической прогрессией

$$1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\ldots+\frac{1}{5^n}+\ldots$$

Так как эта прогрессия сходится, а $\frac{1}{n\cdot 5^n}<\frac{1}{5^n}$, то по первому признаку сравнения исходный ряд сходится.

2.2. Второй признак сравнения

Если ряды (1) и (2) являются строго положительными и для членов рядов выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k\neq 0,$$

где k – конечное (отличное от нуля) число, то ряды (1) и (2) либо оба сходятся, либо оба расходятся, то есть эти ряды сходятся или расходятся одновременно.

Пример 4. Исследовать сходимость ряда

$$\sin 1+\sin\frac{1}{2}+\sin\frac{1}{3}+\ldots+\sin\frac{1}{n}+\ldots$$

Решение: Общий член данного ряда $a_n=\sin\frac{1}{n}$. Общий член расходящегося гармонического ряда $b_n=\frac{1}{n}$. Применяем второй признак сравнения. Так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1\neq 0\quad\text{(первый замечательный предел)},$$

то исследуемый ряд расходится.

Пример 5. Известно, что числовой ряд, общий член которого $a_n=\frac{1}{n^2}$, сходится. Доказать сходимость ряда с общим членом $b_n=\frac{1}{n(2n+1)}$.

Решение: Применяем второй признак сравнения.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n(2n+1)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(2n+1)}{n^2}=2\neq 0.$$

Следовательно, ряд с общим членом $b_n=\frac{1}{n(2n+1)}$ сходится.

Пример 6. Доказать сходимость ряда с общим членом $a_n=\ln(1+\frac{1}{n^2})$, зная, что ряд с общим членом $b_n=\frac{1}{n^2}$ сходится.

Решение: Применяем второй признак сравнения.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}n^2\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}=\ln\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]=\ln e=1\neq 0$$

(второй замечательный предел). Следовательно, исследуемый ряд также сходится.

2.3. Признак сходимости Даламбера

Если для ряда с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots,\quad a_n>0, \tag{4}$$

существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q,$$

то

1) при $q<1$ ряд (4) сходится,
2) при $q>1$ или $q=+\infty$ ряд (4) расходится,
3) при $q=1$ о сходимости или расходимости ряда (4) ничего сказать нельзя и в этом случае надо применить другой признак сходимости.

Пример 7. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}.$$

Решение:

$$a_n=\frac{1}{n!},\quad a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}.$$

Применим признак Даламбера.

$$q=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)!}:\frac{1}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0.$$

Так как $q=0<1$, то по признаку Даламбера исследуемый ряд сходится.

Пример 8. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n(n+1)}.$$

Решение: Применим признак Даламбера.

$$a_n = \frac{5^n}{n(n+1)}, \quad a_{n+1} = \frac{5^{n+1}}{(n+1)(n+2)},$$

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1} n(n+1)}{(n+1)(n+2)5^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n}{n+2} = 5.$$

Так как $q = 5 > 1$, то по признаку Даламбера исследуемый ряд расходится.

Пример 9. Исследовать на сходимость ряд

$$1 + \frac{2^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \ldots + \frac{n^n}{n!} + \ldots$$

Решение: Применим признак Даламбера.

$$a_n = \frac{n^n}{n!}, \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1} n!}{(n+1)! n^n} = \frac{(n+1)^n (n+1) n!}{n!(n+1) n^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Так как $q = e > 1$, то по признаку Даламбера исследуемый ряд расходится.

2.4. Признак сходимости Коши

Если для ряда с неотрицательными членами

$$(5) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots, \quad a_n \geqslant 0,$$

существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q,$$

то

1) при $q < 1$ ряд (5) сходится,
2) при $q > 1$ или $q = +\infty$ ряд (5) расходится,
3) при $q = 1$ о сходимости или расходимости ряда (5) ничего сказать нельзя и в этом случае надо применить другой признак сходимости.

Пример 10. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}.$$

Решение: Применим признак Коши.

$$a_n = \frac{1}{(\ln n)^n},$$

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0.$$

Так как $q = 0 < 1$, то по признаку Коши исследуемый ряд сходится.

Пример 11. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{n-5}\right)^n.$$

Решение: Применим признак Коши.

$$a_n = \left(\frac{3n+1}{n-5}\right)^n,$$

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n+1}{n-5}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{n-5} = 3.$$

Так как $q = 3 > 1$, то по признаку Коши исследуемый ряд расходится.

2.5. Интегральный признак Коши–Маклорена

Если функция $f(x)$ на промежутке $[1; +\infty)$ является непрерывной, положительной и невозрастающей, то числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \text{где } a_n = f(n),$$

сходится или расходится одновременно с интегралом

$$\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Замечание. В этом интеграле в качестве нижнего предела можно брать любое число, большее или равное 1.

Пример 12. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \ldots + \frac{1}{1+n^2} + \ldots$$

Решение: Применим интегральный признак сходимости Коши–Маклорена. Чтобы составить функцию $f(x)$, достаточно в формуле общего члена ряда заменить n на x. Таким образом, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Так как функция $f(x)$

на промежутке $[1;+\infty)$ является непрерывной, положительной и убывающей, то можем воспользоваться интегральным признаком Коши–Маклорена. Рассмотрим соответствующий несобственный интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} [\operatorname{arctg} x]_1^b = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Так как несобственный интеграл сходится, то по признаку Коши–Маклорена сходится и исследуемый ряд.

Пример 13. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}.$$

Решение: Применим интегральный признак сходимости Коши–Маклорена. Для данного ряда $f(x) = \frac{1}{x(x+3)}$. Далее,

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+3)} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_1^{b} \frac{dx}{x(x+3)} = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{3} \int\limits_1^{b} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3}\right) dx =$$
$$= \frac{1}{3} \lim_{b\to+\infty} [\ln x - \ln(x+3)]_1^b = \frac{1}{3} \lim_{b\to+\infty} \left[\ln \frac{x}{x+3}\right]_1^b =$$
$$= \frac{1}{3} \lim_{b\to+\infty} \left[\ln \frac{b}{b+3} - \ln \frac{1}{4}\right] = \frac{1}{3} \ln 4 = \ln \sqrt[3]{4}.$$

Так как несобственный интеграл сходится, то по признаку Коши–Маклорена сходится и исследуемый ряд.

Пример 14. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}.$$

Решение: Применим интегральный признак сходимости Коши–Маклорена. Для данного ряда $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$. Исследуем на сходимость интеграл

$$\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_2^{b} \frac{d \ln x}{\ln x} = \lim_{b\to+\infty} [\ln \ln x]_2^b = \lim_{b\to+\infty} [\ln \ln b - \ln \ln 2] = +\infty.$$

Так как несобственный интеграл расходится, то по признаку Коши–Маклорена ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ расходится.

Пример 15. Исследовать сходимость ряда Дирихле

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p},$$

где p – любое действительное число.

Решение: Общий член ряда $a_n = \frac{1}{n^p}$. Если $p \leqslant 0$, то общий член ряда a_n не будет стремиться к нулю при $n \to \infty$. Следовательно, не выполняется необходимый признак сходимости ряда, ряд в этом случае будет расходиться. Для $p > 0$ применим признак Коши–Маклорена. Для данного ряда $f(x) = \frac{1}{x^p}$. Рассмотрим отдельно три случая.

1) Пусть $p = 1$. Тогда общий член ряда $a_n = \frac{1}{n}$, этот ряд называется гармоническим. Имеем

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} [\ln x]_1^b = \lim_{b\to+\infty} (\ln b - \ln 1) = +\infty.$$

Следовательно, по интегральному признаку Коши–Маклорена гармонический ряд расходится.

2) Пусть $p > 1$. Тогда

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b x^{-p}dx = \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^b =$$

$$= \frac{1}{1-p} \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{1}{x^{p-1}}\right]_1^b = \frac{1}{1-p} \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{1}{b^{p-1}} - 1\right] = \frac{1}{p-1}.$$

Следовательно, по интегральному признаку Коши–Маклорена ряд Дирихле при $p > 1$ сходится.

3) Если $p < 1$, то $\lim\limits_{b\to+\infty} \frac{1}{b^{p-1}} = +\infty$ и несобственный интеграл расходится.

Таким образом, ряд Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leqslant 1$.

Замечание. Следующие ряды часто используют для сравнения с другими рядами при исследовании вопроса о сходимости.

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n \quad \begin{cases} q < 1 & \text{сходится } (q > 0), \\ q \geqslant 1 & \text{расходится} \end{cases} \quad \text{(см. пример 3 §1)},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad \begin{cases} p \leqslant 1 & \text{расходится}, \\ p > 1 & \text{сходится} \end{cases} \quad \text{(см. пример 15)}.$$

Пример 16. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{e^n}.$$

Решение: Последовательность e^n при $n \to \infty$ растёт быстрее, чем любая степень n, поэтому для любого $s > 0$ существует такое число $N_0(s)$ (зависящее от s), что для любого $n > N_0(s)$ выполнено неравенство $e^n > n^s$. Отсюда, для членов ряда выполняется соотношение $\frac{n^2}{e^n} < \frac{n^2}{n^s} = \frac{1}{n^{s-2}}$ при любом $n > N_0(s)$. Для того чтобы ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{s-2}}$ сходился, необходимо выполнение условия $s - 2 > 1$, то есть $s > 3$. Положим $s = 5$ и получим неравенство $\frac{n^2}{e^n} < \frac{1}{n^3}$. Тогда, в силу первого признака сравнения, получим, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{e^n}$ сходится, поскольку сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

Пример 17. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{3/2}}.$$

Решение: Логарифмическая функция $\ln x$ при $x \to +\infty$ растёт медленнее, чем любая степенная функция x^s $(s > 0)$. Таким образом, для любого $s > 0$ существует такое $N_0(s)$, что $\ln n < n^s$ при $n > N_0(s)$. Отсюда получаем неравенство $\frac{\ln n}{n^{3/2}} < \frac{n^s}{n^{3/2}}$. Положим $s = \frac{1}{3}$, тогда $\frac{\ln n}{n^{3/2}} < \frac{1}{n^{7/6}}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{7/6}}$ сходится, поэтому, в силу первого признака сравнения, сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{3/2}}$.

Задачи для самостоятельного решения

Используя признаки сравнения, исследовать на сходимость ряд:

29) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{(n+2)2^n}$.

30) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n(n+2)}}$.

31) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{(n+2)(n^2+1)}}$.

32) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+3n+2}{3n^4+n^3+2n+1}$.

33) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{1+3^n}$.

34) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(1+2n)^3}$.

35) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{2^{n^2}}$.

36) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\ln n}$.

37) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$.

38) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \dfrac{n^4+3n^3}{n^4+1}$.

39) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)$.

40) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}\right)$.

41) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \arcsin \dfrac{1}{n^3}$.

42) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}\right) \ln \dfrac{3n+1}{3n-1}$.

Используя признак Даламбера, исследовать на сходимость ряд:

43) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n-1}{2^n}$.

44) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)!}$.

45) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{7^n}$.

46) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n(n+1)}{3^n}$.

47) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n}{2^n(2n+1)}$.

48) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{3^n}$.

49) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(5n-4)(4n-1)}$.

50) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n}$.

51) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n n!}{n^n}$.

Используя признак Коши, исследовать на сходимость ряд:

52) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+1}{2n+5}\right)^{n}$.

53) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(5-(-1)^n)^n}{n\cdot 4^n}$.

54) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\ln\dfrac{2n+1}{n+5}\right)^{n}$.

55) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sin\dfrac{1}{n}\right)^{n}$.

56) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\cos\dfrac{3}{n}\right)^{n^3}$.

Используя интегральный признак, исследовать на сходимость ряд:

57) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot\ln^2 n}$.

58) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot\ln n\cdot\ln\ln n}$.

59) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

60) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)2n}$.

61) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{3n-2}}$.

Применяя различные признаки сходимости, исследовать сходимость знакоположительных рядов:

62) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\sin\dfrac{1}{n^2}$.

63) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{(n+1)^2}$.

64) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n-\sin n}$.

65) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-n}$.

66) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}+1}{n^3+5}$.

67) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n^5}$.

68) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{(n+1)^2}$.

69) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \dfrac{n^5+1}{n^5}$.

70) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} n}{10^n - n}$.

71) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(3^{1/n} - 1\right) \sin \dfrac{\pi}{n}$.

72) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!}$.

73) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n+1}{n!}$.

74) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \dfrac{n+1}{2n+5}$.

75) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \sqrt[7]{n} \left(\ln\cos \dfrac{1}{n}\right)^2$.

76) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\arcsin \frac{1}{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$.

77) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{10} e^{-\sqrt{n}}$.

78) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\sqrt[3]{n}}$.

79) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\ln n}{e^n}$.

80) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n!}$.

81) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{\sqrt[3]{n^2}}$.

82) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a^{\frac{1}{n}} - 2 + a^{-\frac{1}{n}}\right),\ a > 0,\ a \neq 1$.

83) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^{\alpha} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{n}$.

84) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos \frac{1}{n}}{5^n}$.

85) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+5}{3n-1}\right)^n$.

86) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} \arccos \dfrac{1}{n}$.

87) $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \left(\dfrac{n-3}{n+1}\right)^n$.

88) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n+1}{n+3}\right)^{\frac{1}{n}}$.

89) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{2\cdot 7\cdot 12\cdot\ldots\cdot(5n-3)}$.

90) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{\left(3+\frac{1}{n}\right)^{n}}$.

91) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt[4]{n^2+n+3}\right)$.

92) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{\ln(n+1)}}$.

93) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{3^n\cdot n!}$.

94) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}$.

95) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{2^n}$.

96) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\log_{2^n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

97) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(n^{1/n^3}-1\right)$.

98) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\sin\dfrac{\pi}{3^n}$.

99) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sqrt{n}\ln\dfrac{n+1}{n-1}$.

100) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\cos\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n^2}$.

101) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n-\ln n}$.

102) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\dfrac{1}{n}\right)^{n}$.

103) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{2}{\sqrt{n}}\ln\dfrac{n\sqrt{n}+1}{n\sqrt{n}-1}$.

104) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\cos\dfrac{7}{n}\right)^{n}$.

105) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\ln\dfrac{1}{n^\alpha}-\ln\sin\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$.

106) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\ln\dfrac{2n+3}{n+1}\right)^n$.

107) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln^{\alpha}n}$.

108) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n^{\alpha}}$.

109) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-\alpha^2 n},\ \alpha\neq 0$.

110) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[n\left(3^{1/n}-1\right)\right]$.

111) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\dfrac{\ln\cos\frac{1}{n}}{\ln\cos\frac{3}{n}}\right)^n$.

112) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot\ln n\cdot\ln^2\ln n}$.

113) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^3}{[(2n+1)!]^{3/2}}$.

§3. Знакопеременные ряды

3.1. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница

Если среди членов данного ряда имеются как положительные, так и отрицательные (причём и тех и других бесконечное число), то такой ряд называется знакопеременным. Знакопеременный ряд называется знакочередующимся, если любые два рядом стоящие члена имеют противоположные знаки. Знакочередующийся ряд можно записать так:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n-1}a_n + \ldots$$

или так:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \ldots + (-1)^{n}a_n + \ldots,$$

где все числа a_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ положительны.

Для знакочередующихся рядов справедлив следующий признак сходимости Лейбница.

Знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n-1}a_n + \ldots, \quad a_n \geqslant 0$$

сходится, если

1) $a_n \geqslant a_{n+1}$ для всех n,
2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Пример 1. Доказать сходимость ряда

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots$$

Этот ряд называется рядом Лейбница.

Решение: Данный ряд удовлетворяет условиям признака Лейбница. Члены ряда по абсолютной величине монотонно убывают, так как

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \ldots \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

Следовательно, по признаку Лейбница этот ряд сходится.

Замечание. Для сходимости знакочередующегося ряда недостаточно, чтобы его общий член стремился к нулю. В признаке Лейбница существенно, чтобы абсолютная величина общего члена ряда стремилась к нулю монотонно.

Пример 2. Исследовать, сходится или расходится ряд

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \ldots$$

Решение: Ряд знакочередующийся, общий член данного ряда стремится к нулю при $n \to \infty$, но члены ряда убывают немонотонно (нарушено одно из условий признака Лейбница).

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} > \frac{1}{\sqrt{2}+1}, \quad \text{а} \quad \frac{1}{\sqrt{2}+1} < \frac{1}{\sqrt{3}-1} \quad \text{и так далее.}$$

Монотонность нарушается при переходе от члена $-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ к члену $\frac{1}{\sqrt{n+1}-1}$.

Исследуем сходимость этого ряда, пользуясь основным определением. Составим частичную сумму из $2n$ его членов.

$$S_{2n} = \sum_{k=2}^{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{k}-1} - \frac{1}{\sqrt{k}+1}\right) = \sum_{k=2}^{n+1}\frac{2}{k-1} = 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = 2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = +\infty,$$

так как гармонический ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ расходится. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = +\infty$, то по определению данный ряд расходится.

Замечание. Если знакочередующийся ряд сходится, то необязательно выполняется признак Лейбница. Знакочередующийся ряд может оказаться сходящимся, когда абсолютная величина его общего члена стремится к нулю немонотонно.

Пример 3. Исследовать, сходится или расходится ряд

$$1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^4} - \ldots + \frac{1}{(2n-1)^4} - \frac{1}{(2n)^3} + \ldots$$

Решение: Общий член данного ряда стремится к нулю при $n \to \infty$, хотя и немонотонно:

$$1 > \frac{1}{2^3} > \frac{1}{3^4}, \quad \text{а} \quad \frac{1}{3^4} < \frac{1}{4^3} \quad \text{и так далее.}$$

Однако этот ряд сходится (и притом абсолютно, см. пункт 3.2), так как сходится ряд

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^4} + \ldots,$$

каждый член которого не превосходит соответствующего члена сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ (см. пример 15 §2).

3.2. Абсолютная и условная сходимость рядов

Пусть дан ряд с членами произвольного знака

(1) $$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

Составим новый ряд из абсолютных величин членов ряда (1)

(2) $$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots + |a_n| + \ldots$$

Ряд (1) называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов, то есть сходится ряд (2).

Ряд (1) называется условно сходящимся, если он сходится, но ряд, составленный из абсолютных величин его членов, то есть ряд (2), расходится.

Замечание. Если сходится ряд (2), то сходится и ряд (1).

Пример 4. Доказать, что ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots$$

сходится условно.

Решение: Если составить ряд из абсолютных величин членов данного ряда, то получим гармонический ряд, который расходится. Исходный ряд сходится по признаку Лейбница (см. пример 1). Следовательно, данный ряд сходится условно.

Пример 5. Доказать, что ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}-\ldots$$

сходится абсолютно.

Решение: Данный знакочередующийся ряд сходится по признаку Лейбница. Если составить ряд из абсолютных величин его членов, то получим бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, которая сходится. Следовательно, данный ряд сходится абсолютно.

Замечание. Пусть ряд (1) с членами произвольного знака сходится абсолютно. Если в этом ряду выбрать только положительные или только отрицательные члены, то полученные ряды будут оба сходящимися. Если же ряд (1) сходится условно, то ряды, составленные только из положительных или только из отрицательных его членов, будут расходящимися рядами.

Пример 6. Доказать, что ряд

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{9}+\frac{1}{4}-\frac{1}{27}+\frac{1}{8}-\ldots$$

сходится абсолютно.

Решение: Положительные члены данного ряда образуют сходящуюся геометрическую прогрессию

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots,$$

сумма которой равна 2. Аналогично, отрицательные члены данного ряда образуют прогрессию

$$-\frac{1}{3}-\frac{1}{9}-\frac{1}{27}-\frac{1}{81}-\ldots,$$

сумма которой равна $-\frac{1}{2}$. Следовательно, данный ряд сходится абсолютно и его сумма равна $2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

Замечание. В дальнейшем часто будет использоваться ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$, который сходится при $|q|<1$, причём $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n=\frac{1}{1-q}$ (см. пример 3 §1).

Задачи для самостоятельного решения

Применяя признак Лейбница, показать, что данный ряд сходится:

114) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.

115) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{(3n+5)^2}$.

116) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n!}$.

117) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n}\sqrt{n}}{n+20}$.

118) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n}\ln n}{n}$.

Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость:

119) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^{\alpha}}$.

120) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n}}{\ln n}$.

121) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}\sqrt[3]{n}}{n+2}$.

122) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n}(n-1)}{\sqrt[8]{n}(n+1)}$.

123) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{tg} \dfrac{1}{n\sqrt[3]{n}}$.

124) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \left(\dfrac{3n+1}{4n+5}\right)^{n}$.

125) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}}$.

126) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^{10} e^{-n}$.

127) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{2n}{3n+2}$.

128) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{1000n+1}$.

129) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n}\ln n}{n}$.

130) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n}}{n\ln^3 n}$.

131) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{2n-\operatorname{arctg} n}$.

132) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{(n-1)^2}{n^2+1}$.

133) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\operatorname{arctg} n}{\sqrt{n^2+1}}$.

134) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{\ln n}{n\sqrt{n}}$.

§4. Функциональные ряды

4.1. Область сходимости функционального ряда

Пусть дана бесконечная последовательность функций

$$u_1(x), u_2(x), u_3(x), \ldots, u_n(x), \ldots,$$

имеющих общую область определения.

Функциональным рядом называется составленное из этих функций выражение вида

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x). \tag{1}$$

Функциональный ряд (1) при одних значениях аргумента x может оказаться сходящимся числовым рядом, а при других значениях аргумента x – расходящимся числовым рядом. Если функциональный ряд (1) сходится при $x=x_0$, то говорят, что ряд сходится в точке x_0.

Областью сходимости ряда (1) называется совокупность всех значений аргумента x, при которых этот ряд сходится.

Пример 1. Определить область сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}5^n x^n. \tag{2}$$

Решение: Проверим выполнение необходимого признака сходимости ряда. А именно, найдём $\lim\limits_{n\to\infty}5^n x^n$. В случае $5|x|\geqslant 1$ $\lim\limits_{n\to\infty}5^n x^n\neq 0$, значит необходимый признак не выполнен, поэтому при $|x|\geqslant\frac{1}{5}$ ряд расходится.

Пусть теперь $|x| < \frac{1}{5}$. Исследуем ряд (2) на абсолютную сходимость. Для этого рассмотрим ряд из абсолютных величин ряда (2): $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 5^n|x|^n$. Воспользуемся признаком Коши

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{5^n|x|^n} = \lim_{n\to\infty} 5|x| = 5|x|.$$

Если $|x| < \frac{1}{5}$, то $5|x| < 1$ и ряд, составленный из абсолютных значений ряда (2) сходится, а значит ряд (2) при $|x| < \frac{1}{5}$ сходится абсолютно.

$$\text{Итак, ряд (2)} \begin{cases} \text{при } |x| < \frac{1}{5} & \text{сходится абсолютно,} \\ \text{при } |x| \geqslant \frac{1}{5} & \text{расходится.} \end{cases}$$

Таким образом, получаем область сходимости ряда (2): $|x| < \frac{1}{5}$.

Пример 2. Определить область сходимости ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{n(x+1)^n}, \quad x \neq -1. \tag{3}$$

Решение: Исследуем ряд на абсолютную сходимость, то есть исследуем ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{n} \cdot \frac{1}{|x+1|^n}, \quad x \neq -1. \tag{4}$$

Воспользуемся признаком Коши сходимости ряда

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n} \cdot \frac{1}{|x+1|^n}} = \frac{2}{|x+1|},$$

поэтому

при $\frac{2}{|x+1|} < 1$, то есть при $x < -3,\ x > 1$ ряд (4) сходится,
при $\frac{2}{|x+1|} > 1$, то есть при $-3 < x < 1,\ x \neq -1$ ряд (4) расходится.

Таким образом, при $x < -3,\ x > 1$ ряд (3) сходится абсолютно, а при $-3 < x < 1,\ x \neq -1$ ряд (3) расходится.

Теперь исследуем сходимость ряда (3) на границе области сходимости, то есть в точках $x = -3$ и $x = 1$. Пусть $x = -3$, тогда ряд (3) перепишется в виде $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. По признаку Лейбница этот ряд сходится (см. пример 1 §3). Пусть $x = 1$, тогда ряд (3) перепишется в виде $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$. Получили гармонический ряд, который расходится.

Итак, ряд (3) $\begin{cases} \text{при} \quad x < -3, x > 1 & \text{сходится абсолютно,} \\ \text{при} \quad x = -3 & \text{сходится условно,} \\ \text{при} \quad -3 < x \leqslant 1 & \text{расходится.} \end{cases}$

В итоге получаем, что ряд (3) сходится при $x \leqslant -3$ и при $x > 1$.

4.2. Степенные ряды. Радиус сходимости степенного ряда

Если члены $u_n(x)$ функционального ряда (1) являются степенными функциями аргумента x, то ряд называется степенным, то есть степенным рядом называется ряд вида

$$(5) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \\ = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots,$$

где x_0 – фиксированное число, а $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ – известные числовые коэффициенты. В частности, если $x_0 = 0$, то получаем степенной ряд

$$(6) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

Заметим, что степенные ряды (5) и (6) всегда сходятся при $x = x_0$ или $x = 0$ соответственно. Каждый степенной ряд (5) сходится внутри интервала сходимости $\{x : \ |x - x_0| < R\}$. Множество сходимости ряда (5) или совпадает с интервалом сходимости, или получается добавлением к нему одной или обеих концевых точек.

Число R называется радиусом сходимости степенного ряда. Если радиус сходимости $R = 0$, то множество сходимости ряда состоит из одной точки $x = x_0$. Если радиус сходимости $R = +\infty$, то множеством сходимости ряда является вся числовая прямая, то есть ряд сходится при любом $x \in (-\infty; +\infty)$. Если радиус сходимости есть число $R > 0$, то множество сходимости этого ряда представляет собой интервал $(x_0 - R; x_0 + R)$, возможно, с добавлением к нему одной или обеих концевых точек.

Радиус сходимости R определяется по формуле Коши–Адамара

$$(7) \qquad \frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \quad \text{(если предел существует).}$$

Радиус сходимости R может быть вычислен также по формуле

$$(8) \qquad R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad \text{(если предел существует).}$$

При $R \neq 0$ сходимость ряда (5) в точках $x = x_0 - R$ и $x = x_0 + R$ проверяется отдельно. Абсолютная сходимость ряда (5) на одном из концов интервала сходимости влечёт абсолютную сходимость ряда и на другом конце этого интервала.

Пример 3. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n^2}.$$

Решение: Так как $a_n = \frac{3^n}{n^2}$, то применим формулу (7).

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{n^2}} = 3 \quad \Longrightarrow \quad R = \frac{1}{3}.$$

Для полного определения множества сходимости исследуем поведение этого ряда в точках $x = -\frac{1}{3}$ и $x = \frac{1}{3}$. Пусть $x = -\frac{1}{3}$, тогда $\frac{3^n}{n^2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \frac{(-1)^n}{n^2}$, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ сходится по признаку Лейбница. Теперь пусть $x = \frac{1}{3}$, тогда $\frac{3^n}{n^2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{n^2}$, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится (см. пример 15 §2).

Таким образом, множество сходимости данного ряда представляет собой отрезок $\left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right]$.

Пример 4. Найти область сходимости ряда

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots \tag{9}$$

Решение: У этого ряда $a_n = \frac{1}{n}$. Применим формулу (8). Радиус сходимости

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Следовательно, ряд сходится абсолютно в интервале $(-1; 1)$. Теперь исследуем поведение ряда на границах найденного интервала, то есть при $x = -1$ и при $x = 1$. Если $x = -1$, то получаем ряд

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n} + \ldots,$$

который сходится по признаку Лейбница. Если $x = 1$, то из (9) получаем гармонический ряд, который расходится.

Таким образом, областью сходимости данного ряда является промежуток $[-1; 1)$.

Пример 5. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Решение: Для данного ряда

$$a_n = \frac{1}{n!}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}.$$

Применим формулу (8). Радиус сходимости

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = +\infty.$$

Так как $R = +\infty$, то исследуемый ряд сходится при любом значении переменной x.

4.3. Действия со степенными рядами

Внутри общего интервала сходимости $|x - x_0| < R$ степенных рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$$

справедливы равенства

а) сложение степенных рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(x - x_0)^n,$$

б) умножение степенных рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n,$$

$$\text{где } c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0,$$

в) дифференцирование степенного ряда

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \right]' = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x - x_0)^n,$$

г) интегрирование степенного ряда

$$\int\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right]dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}+C, \text{ где } C \text{ – любое число.}$$

Пример 6. Известно, что

$$\ln(1-x^3) = -x^3-\frac{x^6}{2}-\frac{x^9}{3}-\ldots-\frac{x^{3n}}{n}-\ldots \text{ при } |x|<1 \tag{10}$$

и

$$\ln(1-x) = -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\ldots-\frac{x^n}{n}-\ldots \text{ при } |x|<1. \tag{11}$$

Найти разложение в степенной ряд с центром в точке $x_0=0$ функции $f(x)=\ln(1+x+x^2)$ на интервале $(-1;1)$.

Решение: Представим функцию $f(x)$ в виде

$$f(x)=\ln(1+x+x^2)=\ln\frac{1-x^3}{1-x}=\ln(1-x^3)-\ln(1-x).$$

Следовательно, используя свойство сложения двух степенных рядов и формулы (10) и (11), получим

$$\ln(1+x+x^2)=$$
$$=-x-\frac{x^2}{2}-\left(1+\frac{1}{3}\right)x^3-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)x^6-\frac{x^7}{7}-\ldots,\quad |x|<1.$$

Пример 7. Разложить функцию $f(x)=\operatorname{arctg}x$ в степенной ряд с центром в точке 0 на интервале $(-1;1)$, если известно разложение функции

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\ldots+(-1)^{n-1}x^{2n-2}+\ldots,\quad |x|<1. \tag{12}$$

Решение: Поскольку

$$\operatorname{arctg}x=\int\limits_0^x\frac{dt}{1+t^2},$$

то, используя разложение (12) и свойство о почленном интегрировании степенных рядов, получим

$$\operatorname{arctg}x=\int\limits_0^x(1-t^2+t^4-t^6+\ldots+(-1)^{n-1}t^{2n-2}+\ldots)\,dt=$$
$$=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots,\quad |x|<1.$$

Пример 8. Разложить функцию

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

в степенной ряд с центром в точке 0 на интервале $(-1;1)$, если известно разложение функции

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$$

Решение: Воспользуемся тем, что

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = (1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots)' =$$
$$= 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} + \ldots$$

Так как при дифференцировании интервал сходимости степенного ряда не меняется, то найденное разложение имеет место при x, удовлетворяющих условию $-1 < x < 1$.

Пример 9. Найти сумму ряда

$$1 + 3x^2 + 5x^4 + 7x^6 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n} \quad \text{при } |x| < 1.$$

Решение: При решении задач такого типа используют известное разложение

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{при } |x| < 1 \text{ (см. замечание на с. 22)},$$

которое можно переписать в виде

$$\frac{1}{1-x^p} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{pn},\ |x| < 1$$

или в виде

$$\frac{1}{1+x^p} = \frac{1}{1-(-x^p)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^p)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{pn},\ |x| < 1,$$

а также используют свойства дифференцируемости и интегрируемости степенных рядов.

Рассмотрим ряд

$$(13)\quad \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} = x + x^3 + x^5 + x^7 + \ldots = x \cdot \left(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots\right) =$$

$$= x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = x \cdot \frac{1}{1-x^2} = \frac{x}{1-x^2} \quad \text{при } |x| < 1.$$

Продифференцируем этот ряд

$$(14)\qquad \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(x^{2n+1}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^{2n}.$$

Последовательно учитывая (14) и (13), получаем ответ

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^{2n} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}\right)' = \left(\frac{x}{1-x^2}\right)' =$$

$$= \frac{1 - x^2 - x(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} \quad \text{при } |x| < 1.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти область сходимости функционального ряда:

135) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{x^n}$.

136) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{x^{2n}+1}$.

137) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{3^{nx}-1}$.

138) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{x(x+n)}{n}\right)^n$.

139) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$.

140) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n^2+1} \left(\dfrac{1+2x}{1+3x}\right)^n$.

141) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt[5]{n}} \left(\dfrac{1+2x}{4+x}\right)^n$.

142) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \dfrac{n-1}{\sqrt[5]{n}(n+1)} \left(\dfrac{x}{3x-1}\right)^n$.

143) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^p} \left(\dfrac{2+3x}{3+x}\right)^n$.

144) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n} - \ln n} \left(\dfrac{1+x}{3+2x}\right)^n$.

145) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\ln(1+n)} \left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^n$.

146) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{1-x^n}$.

147) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} n^{\ln x}$.

148) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n^3}$.

149) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \operatorname{tg} \dfrac{x}{a^n}$.

150) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n \sin \dfrac{x}{a^n},\ a > 1$.

151) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{a^{nx}},\ a > 1$.

152) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln n} \left(\dfrac{x+5}{x+3}\right)^n$.

153) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{2^n} \left(\dfrac{2x+1}{x+5}\right)^n$.

Найти множество сходимости степенного ряда:

154) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$.

155) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 5^n x^n$.

156) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (ax)^n,\ a \neq 0$.

157) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 x^n$.

158) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{\ln n}$.

159) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{x^n}{\sqrt{n} - \ln n}$.

160) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(x-1)^n}{2n+1}$.

161) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n! x^n$.

162) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$.

163) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^5x^n}{n+2}$.

164) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{(\sqrt{n}+1)^n}$.

165) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n)!!x^n}{n!}$.

166) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^n}$.

167) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-5)^n}{n+5}$.

168) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n\cdot 10^n}$.

169) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-n}x^n$.

Применяя почленное дифференцирование или интегрирование, найти сумму ряда:

170) $x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^4}{4}+\ldots$

171) $x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\ldots$

172) $x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{x^7}{7}+\ldots$

173) $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^6}{6}+\dfrac{x^8}{8}+\ldots$

174) $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^6}{6}-\dfrac{x^8}{8}+\ldots$

175) $x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{x^7}{7}+\ldots$

176) $1+2x+3x^2+4x^3+\ldots$

177) $1-3x^2+5x^4-7x^6+\ldots$

178) $1-2x+3x^2-4x^3+\ldots$

§5. Ряды Тейлора. Разложение функции в степенной ряд

5.1. Ряды Тейлора

Ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \quad a_n = \frac{f^n(x_0)}{n!}$$

называется рядом Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0.

Замечание. Как уже говорилось (см. §4), степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

радиусом сходимости которого является положительное число R, в интервале сходимости $(x_0-R; x_0+R)$ определяет функцию

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Функции $f(x)$ и $S(x)$ необязательно совпадают на интервале $(x_0-R; x_0+R)$.

Пример 1. Вычислив значение производных $f^{(n)}(x_0)$, написать 3 отличных от нуля члена ряда Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0.

$$f(x) = 2^{\sqrt{x}}, \quad x_0 = 4, \quad n = 3.$$

Решение:

$$\begin{aligned}
f(4) &= 4, \\
f'(4) &= \tfrac{\ln 2}{2} x^{-\frac{1}{2}} 2^{\sqrt{x}}\Big|_{x=4} = \ln 2, \\
f''(4) &= \tfrac{\ln 2}{4} \cdot \tfrac{2^{\sqrt{x}}}{x} \left(\ln 2 - x^{-\frac{1}{2}}\right)\Big|_{x=4} = \tfrac{\ln 2}{4}\left(\ln 2 - \tfrac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

Получаем окончательный ответ:

$$4 + \ln 2 \cdot (x-4) + \frac{\ln 2}{16} \cdot (2\ln 2 - 1) \cdot (x-4)^2 + \ldots$$

5.2. Разложение функции в степенной ряд

Возможность почленного дифференцирования и интегрирования степенного ряда внутри его интервала сходимости (см. пункт 4.3), а также относительная простота степенной функции делают степенные ряды незаменимыми как в теоретических, так и в практических исследованиях. Естественно возникает вопрос о разложении функции в степенной ряд и исследовании области его сходимости.

Будем говорить, что функция $f(x)$ на интервале $(x_0 - R; x_0 + R)$ может быть разложена в степенной ряд, если существует степенной ряд, сходящийся к $f(x)$ на этом интервале, то есть

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad x \in (x_0 - R; x_0 + R).$$

В исследованиях о разложимости функции в степенной ряд основными являются следующие утверждения.

1) Если функция $f(x)$ может быть разложена на интервале $(x_0 - R; x_0 + R)$ в степенной ряд, то этот ряд является рядом Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0.
2) Для того чтобы функция $f(x)$ представлялась степенным рядом в окрестности точки x_0, необходимо, чтобы в некоторой окрестности этой точки функция $f(x)$ имела производные всех порядков.
3) Для того чтобы функция $f(x)$ могла быть разложена в ряд Тейлора на интервале $(x_0 - R; x_0 + R)$, необходимо и достаточно, чтобы остаточный член в форме Лагранжа в формуле Тейлора для этой функции

$$R_n(f, x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1$$

стремился к нулю при $n \to \infty$ на указанном интервале.

Существуют различные методы разложения функции в степенной ряд.

а) Непосредственное разложение функции в ряд Тейлора.

В этом случае, находя $f^{(n)}(x_0)$, формально составляют ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

находят область сходимости этого ряда и анализируют, для каких значений переменной x из области сходимости справедливо равенство

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Пример 2. Разложить функцию $f(x) = e^x$ в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$.

Решение: Для вычисления коэффициентов ряда Тейлора, последовательно дифференцирем функцию $f(x)$:

$$f'(x) = e^x, \quad f''(x) = e^x, \ldots, \quad f^{(n)}(x) = e^x, \ldots$$

Вычислим значения самой функции и её производных при $x = 0$.

$$f(0) = e^0 = 1, \quad f'(0) = e^0 = 1, \ldots, \quad f^{(n)}(0) = e^0 = 1, \ldots$$

Составим для функции $f(x)$ ряд Тейлора.

$$1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots \tag{1}$$

Поскольку для радиуса сходимости R этого степенного ряда имеем

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} n + 1 = +\infty,$$

то ряд сходится при любом x.

Выясним, для каких значений x найденное разложение сходится к функции e^x. Так как

$$f^{(n+1)}(x) = e^x,$$

то остаточный член в форме Лагранжа запишется в виде

$$R_n(e^x, x, 0) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1} < \frac{e^x}{(n+1)!}x^{n+1}$$

для некоторого $\theta,\ 0 < \theta < 1$.

Для произвольного фиксированного $x \in (-\infty; +\infty)$

$$\lim_{n\to\infty} R_n(e^x, x, 0) = \lim_{n\to\infty} \frac{e^x}{(n+1)!}x^{n+1} = 0.$$

Следовательно, ряд (1) сходится к функции e^x при любом $x \in (-\infty; +\infty)$.

Таким образом,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots,$$

где $-\infty < x < +\infty$.

Отметим, что метод разложения функции $f(x)$ в степенной ряд непосредственным вычислением её производных $f^{(n)}(x_0),\ n = 1, 2, 3, \ldots$ позволяет найти, как правило, только любое конечное число членов этого ряда, поскольку найти общую формулу для $f^{(n)}(x_0)$ бывает затруднительно, не говоря уже об исследовании сходимости ряда к функции $f(x)$.

б) Использование основных табличных разложений.

Для разложения конкретной функции $f(x)$ в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$ пользуются разложениями основных функций. После каждой формулы указано множество сходимости ряда.

$$
\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{x^n}{n!} = 1 + x + \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^3}{3!} + \ldots + \tfrac{x^n}{n!} + \ldots, \quad |x| < \infty,\\
\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \tfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \tfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots,\\
&\hfill |x| < \infty,\\
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \tfrac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \tfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \quad |x| < \infty,\\
\operatorname{sh} x &= \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} + \ldots + \tfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \quad |x| < \infty,\\
\operatorname{ch} x &= \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!} + \ldots + \tfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \quad |x| < \infty,\\
\ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \tfrac{x^n}{n} = x - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \tfrac{x^n}{n} + \ldots,\\
&\hfill -1 < x \leqslant 1,\\
\ln(1-x) &= -\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{x^n}{n} = -\left(x + \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{3} + \ldots + \tfrac{x^n}{n} + \ldots\right), \quad -1 \leqslant x < 1,\\
(1+x)^m &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n = 1 + mx + \tfrac{m(m-1)}{2!} x^2 +\\
&\quad + \tfrac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \ldots + \tfrac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n + \ldots,\\
&\hfill m \in \mathbb{R}, \ |x| < 1.
\end{aligned}
$$

Приведём некоторые частные случаи последней формулы.

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots, \quad |x| < 1,\\
\tfrac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots, \quad |x| < 1,\\
\tfrac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1 - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \ldots + (-1)^n \tfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n + \ldots, \quad |x| < 1,\\
\tfrac{1}{\sqrt{1-x}} &= 1 + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 + \ldots + \tfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n + \ldots, \quad |x| < 1,\\
\sqrt{1+x} &= 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2\cdot 4}x^2 + \ldots + (-1)^n \tfrac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} x^{n+1} + \ldots, \quad |x| < 1,\\
\sqrt{1-x} &= 1 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2\cdot 4}x^2 - \ldots - \tfrac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} x^{n+1} - \ldots, \quad |x| < 1.
\end{aligned}
$$

Напомним, что факториал натурального числа n определяется формулой

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1,$$

например, $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Двойной факториал числа n определяется следующим образом

$$n!! = n \cdot (n-2) \cdot (n-4) \cdot \ldots,$$

например, $7!! = 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1$, $10!! = 10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2$.

В частности,

$$(2n-1)!! = (2n-1)\cdot(2n-3)\cdot\ldots\cdot 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1,$$
$$(2n)!! = (2n)\cdot(2n-2)\cdot\ldots\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2.$$

Пример 3. Разложить функцию $f(x) = e^{1-2x^3}$ в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$.

Решение: Поскольку $e^{1-2x^3} = e\cdot e^{-2x^3}$, то, полагая $-2x^3 = y$ и используя табличное разложение для функции e^y, имеем ряд

$$e^{1-2x^3} = e\cdot e^{-2x^3} = e\cdot e^y = e\cdot\left(1 + y + \frac{y^2}{2!} + \ldots + \frac{y^n}{n!} + \ldots\right) =$$
$$= e\cdot\left(1 + (-2x^3) + \frac{(-2x^3)^2}{2!} + \ldots + \frac{(-2x^3)^n}{n!} + \ldots\right) =$$
$$= e - 2ex^3 + \frac{2^2 e}{2!}x^6 + \ldots + (-1)^n\frac{2^n e}{n!}x^{3n} + \ldots$$

Так как разложение в ряд функции e^y имеет место для всех y, то и разложение в ряд данной функции справедливо для всех $|x| < \infty$.

Пример 4. Разложить функцию $f(x) = \frac{1}{1+4x^2}$ в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$.

Решение: Полагая $4x^2 = y$ и используя табличное разложение для функции $\frac{1}{1+y}$, имеем ряд

$$\frac{1}{1+4x^2} = 1 - 4x^2 + (4x^2)^2 - (4x^2)^3 + \ldots + (-1)^n(4x^2)^n + \ldots =$$
$$= 1 - 4x^2 + 16x^4 - 64x^6 + \ldots + (-1)^n 4^n x^{2n} + \ldots$$

Этот ряд представляет исходную функцию для x таких, что $|y| < 1$, то есть $|4x^2| < 1$, и значит для x из промежутка $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$.

в) Использование сложения и вычитания рядов.

В некоторых случаях разложение функции в степенной ряд можно получить, суммируя табличные или ранее найденные разложения.

Пример 5. Разложить функцию $f(x) = \frac{1}{x^2-2x-3}$ в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$.

Решение:

$$f(x) = \frac{1}{x^2-2x-3} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+1}\right) = -\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{3}} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+x}.$$

Применяя известные разложения для функций $\frac{1}{1+y}$ и $\frac{1}{1-y}$, имеем

$$\frac{1}{1-\frac{x}{3}} = 1 + \frac{x}{3} + \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{x}{3}\right)^n + \ldots, \quad \left|\frac{x}{3}\right| < 1$$

и
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + \ldots, \quad |x| < 1,$$
следовательно получаем
$$(2) \quad f(x) = -\frac{1}{12}\left(1 + \frac{x}{3} + \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{x}{3}\right)^n + \ldots\right) - \\ - \frac{1}{4}(1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + \ldots) = \\ = -\frac{1}{3} + \frac{2}{9}x - \frac{7}{27}x^2 + \ldots + \left(\frac{(-1)^{n+1}}{4} - \frac{1}{12}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) x^n + \ldots$$
Поскольку первый ряд сходится к функции $\frac{1}{1-\frac{x}{3}}$ при $|x| < 3$, а второй – к функции $\frac{1}{1+x}$ при $|x| < 1$, то ряд (2) представляет функцию $\frac{1}{x^2-2x-3}$ при $|x| < 1$.

Пример 6. Разложить в степенной ряд функцию $f(x) = \ln(1 + x + x^2)$ в точке $x_0 = 0$.

Решение: Представим данную функцию в виде
$$\ln(1 - x + x^2) = \ln\frac{1 + x^3}{1 + x} = \ln(1 + x^3) - \ln(1 + x).$$
Теперь разложим в степенной ряд каждую из функций $\ln(1+x^3)$ и $\ln(1+x)$.
$$\begin{aligned} \ln(1 + x^3) &= x^3 - \tfrac{x^6}{2} + \tfrac{x^9}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\tfrac{x^{3n}}{n} + \ldots, \quad |x^3| < 1,\ |x| < 1, \\ \ln(1 + x) &= x - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\tfrac{x^n}{n} + \ldots, \quad |x| < 1. \end{aligned}$$
Следовательно,
$$\ln(1 - x + x^2) = \\ = x - \frac{x^2}{2} + \left(1 + \frac{1}{3}\right)x^3 - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right)x^6 + \frac{x^7}{7} - \ldots, \quad |x| < 1.$$

Для разложения функции $f(x)$ в степенной ряд с центром в точке $x_0 \neq 0$ часто применяется следующий метод: вводится новая переменная $t = x - x_0$ и ищется разложение функции $f^*(t) = f(t+x_0)$ в степенной ряд по степеням t (с центром в точке $t_0 = 0$)
$$f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad |t| < R,$$
откуда получаем, что
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad |x - x_0| < R.$$

Пример 7. Разложить функцию $f(x) = \frac{1}{x}$ в степенной ряд с центром в точке $x_0 = -3$.

Решение: Обозначим $t = x + 3$, тогда $x = t - 3$, следовательно

$$f(x) = f^*(t) = \frac{1}{t-3} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{t}{3}}.$$

Полагаем $\frac{t}{3} = y$ и, используя табличное разложение для функции $\frac{1}{1-y}$, имеем ряд

$$f^*(t) = -\frac{1}{3}\left(1 + \frac{t}{3} + \left(\frac{t}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{t}{3}\right)^n + \ldots\right),$$

$$|y| < 1, \quad \left|\frac{t}{3}\right| < 1, \quad -3 < t < 3.$$

Возвращаясь к переменной x, получаем

$$\frac{1}{x} = -\frac{1}{3} - \frac{(x+3)}{3^2} - \frac{(x+3)^2}{3^3} - \ldots - \frac{(x+3)^n}{3^{n+1}} - \ldots,$$

$$-3 < x + 3 < 3, \quad -6 < x < 0.$$

г) Почленное интегрирование рядов.

Пусть функция $f(x)$ представляется в виде

$$f(x) = f(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} \varphi(t)\,dt,$$

где разложение

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - x_0)^n$$

внутри интервала $|t - x_0| < R$ известно. Тогда справедливо равенство

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n (x - x_0)^{n+1}}{n+1}, \quad |x - x_0| < R.$$

Пример 8. Разложить функцию

$$f(x) = \int\limits_{0}^{x} \varphi(t)\,dt, \qquad \varphi(t) = \begin{cases} \frac{\ln(1+t)}{t}, & t \neq 0, \\ 1, & t = 0 \end{cases}$$

в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$ на интервале $|x| < 1$.

Решение: Разлагая функцию $\frac{\ln(1+t)}{t}$ в степенной ряд с центром в точке $t_0 = 0$ и интегрируя почленно полученный ряд, имеем

$$f(x) = \int\limits_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}\,dt = \int\limits_0^x \frac{1}{t}\left(t - \frac{t^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{t^n}{n} + \ldots\right)dt =$$
$$= \int\limits_0^x \left(1 - \frac{t}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{t^{n-1}}{n} + \ldots\right)dt, \quad -1 < t \leqslant 1,\ t \neq 0.$$

Следовательно,

$$f(x) = x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n^2} + \ldots$$

Это разложение верно и в точке $x = 0$, то есть для всех $|x| < 1$, см. также пример 7 §4.

д) Почленное дифференцирование рядов.

Пусть надо найти разложение некоторой функции в степенной ряд. Если удастся найти такую функцию $g(x)$, что $f(x) = g'(x)$, то, разложив функцию $g(x)$ в степенной ряд и продифференцировав его почленно, получим разложение в ряд функции $f(x)$. При этом полученное разложение верно на том же интервале, где соответствующее разложение верно для функции $g(x)$.

Пример 9. Разложить функцию $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$.

Решение: Поскольку $\frac{1}{(1+x)^2} = -\left(\frac{1}{1+x}\right)'$, то имеем

$$\frac{1}{(1+x)^2} = -\left(\frac{1}{1+x}\right)' = -(1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots)' =$$
$$= 1 - 2x + 3x^2 - \ldots + (-1)^{n-1} n x^{n-1} + \ldots$$

Так как при дифференцировании интервал сходимости степенного ряда не меняется, то найденное разложение имеет место при $-1 < x < 1$, см. также примеры 8 и 9 §4.

Задачи для самостоятельного решения

Написать разложение функции в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$ и найти множество сходимости полученного ряда:

179) $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

180) $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.
181) $a^x,\ a > 0,\ a \neq 1$.
182) $x^2 e^{-2x}$.
183) $\sin x^2$.
184) $\sin^2 x$.
185) $\cos^2 x$.
186) $\sin^3 x$.
187) $\dfrac{1}{1 - x^2}$.
188) $\dfrac{1}{1 + x^4}$.
189) $\dfrac{1}{1 + 2x}$.
190) $\dfrac{3}{4 - x}$.
191) $\dfrac{1}{3 + 2x}$.
192) $\dfrac{1}{2 + 3x^2}$.
193) $\dfrac{5x - 1}{x^2 - 5x + 6}$.
194) $\dfrac{2x + 3}{x^2 - 4x + 3}$.
195) $\dfrac{x - 7}{6 - x - x^2}$.
196) $\ln(1 - x^2)$.
197) $\ln \sqrt[5]{\dfrac{1 + x}{1 - x}}$.
198) $\ln \dfrac{1 + 3x}{1 - 3x}$.
199) $\ln(1 + 5x)$.
200) $\ln(5 + 2x)$.
201) $\ln(1 + 2x^2)$.
202) $\ln \dfrac{2x + 1}{3x + 1}$.
203) $\ln(x^2 - 5x + 4)$.
204) $\ln(x^2 - 10x + 9)$.
205) $\ln(6 + x - x^2)$.
206) $\ln(1 - x + x^2)$.
207) $\ln(1 + x + x^2)$.
208) $\sqrt{1 + x^2}$.

209) $\sqrt[5]{1+x}$.
210) $\sqrt[3]{27+x}$.
211) $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.
212) $\dfrac{1}{\sqrt{9+x^2}}$.
213) $x \arcsin x$.
214) $x^2 \operatorname{arctg} x$.
215) $\operatorname{arctg} \dfrac{x}{2}$.
216) $\arcsin 3x$.
217) $\ln\left(3x+\sqrt{1+9x^2}\right)$.
218) $\displaystyle\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$.
219) $\displaystyle\int\limits_0^x \frac{\operatorname{arctg} t}{t}\,dt$.
220) $\displaystyle\int\limits_0^x \frac{e^t-1}{t}\,dt$.

Написать разложение функции в степенной ряд с центром в точке x_0 и найти множество сходимости полученного ряда:

221) $x^3-x,\ x_0=-1$.
222) $e^x,\ x_0=-2$.
223) $\dfrac{1}{x},\ x_0=-3$.
224) $\sqrt{x},\ x_0=4$.
225) $\sqrt[3]{x},\ x_0=-1$.
226) $\dfrac{1}{2-x-x^2},\ x_0=-3$.
227) $\dfrac{1}{x^2+3x+2},\ x_0=-4$.
228) $\ln x,\ x_0=1$.
229) $\sin 3x,\ x_0=-\dfrac{\pi}{3}$.
230) $\sin\dfrac{\pi x}{4},\ x_0=2$.
231) $\sin\dfrac{\pi x}{3},\ x_0=1$.

§6. Приложения степенных рядов

6.1. Приложения рядов к приближённым вычислениям

Разложения основных элементарных функций в степенной ряд (см. §5) можно использовать для приближённого вычисления значений этих функций.

Пусть надо найти $f(x_0)$ для функции $f(x)$, которая раскладывается в степенной ряд

$$(1) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad |x| < R, \quad x_0 \in (-R; R).$$

Тогда

$$f(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n + \ldots$$

Заменяя значение $f(x_0)$ суммой n членов этого ряда

$$S_n = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_{n-1} x_0^{n-1},$$

получаем приближённое значение $f(x_0)$, при этом ошибка равна

$$(2) \qquad |r_n(x)| = |a_n x_0^n + a_{n+1} x_0^{n+1} + \ldots|.$$

В силу сходимости ряда (1) в точке $x = x_0$, при достаточно большом n эта ошибка станет сколь угодно малой и S_n даёт значение $f(x_0)$ с любой наперёд заданной точностью. Для вычисления $f(x_0)$ с заданной точностью надо уметь производить оценку остатка (2), что позволяет брать требуемое число членов в S_n.

Оценка остатка ряда особенно проста, если ряд удовлетворяет признаку Лейбница (см. пункт 3.1). В этом случае остаток имеет знак своего первого члена и по абсолютной величине меньше его.

В случае произвольного ряда абсолютная величина r_n не превосходит суммы абсолютных величин членов, входящих в r_n. Для уже полученного положительного ряда стараются найти легко суммируемый ряд из положительных членов, члены которого были бы не меньше абсолютных величин членов остатка, и оценивают остаток суммой этого ряда.

Пример 1. Вычислить с точностью до 10^{-4} значение $\cos 18°$.

Решение:

$$\cos 18° = \cos\frac{\pi}{10} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot \frac{\pi^{2n}}{10^{2n}}.$$

Так как этот ряд удовлетворяет признаку Лейбница, то его остаток r_n не превышает по абсолютной величине первого из членов в r_n. Найдём n из условия

$$|r_n| < 10^{-4}, \quad \text{то есть } \frac{\pi^{2n}}{(2n)! \cdot 10^{2n}} < 10^{-4}.$$

При $n = 1$ имеем

$$\frac{\pi^2}{2! \cdot 10^2} = \frac{\pi^2}{200} > \frac{3^2}{200} > 10^{-4}.$$

При $n = 2$

$$\frac{\pi^4}{4! \cdot 10^4} = \frac{1}{10^4} \cdot \frac{\pi \cdot \pi \cdot \pi^2}{2 \cdot 3 \cdot 4} > 10^{-4}.$$

При $n = 3$

$$\frac{\pi^6}{6! \cdot 10^6} = \frac{1}{10^4} \cdot \frac{\pi^6}{6! \cdot 10^2} = \frac{1}{10^4} \cdot \frac{\pi^6}{2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^3} = \frac{1}{10^4} \cdot \frac{\pi}{2^4} \cdot \frac{\pi^2}{6^2} \cdot \frac{\pi^3}{5^3} < 10^{-4}.$$

Следовательно для получения заданной точности достаточно взять три члена разложения. Имеем

$$\cos 18^\circ = 1 - \frac{\pi^2}{2! \cdot 10^2} + \frac{\pi^4}{4! \cdot 10^4} \approx 0,951.$$

Пример 2. Вычислить с точностью до 10^{-4} значение $\sqrt[4]{630}$.

Решение:

$$\sqrt[4]{630} = \sqrt[4]{625 + 5} = \sqrt[4]{625(1 + 0,008)} = 5\sqrt[4]{1 + 0,008} = 5(1 + 0,008)^{\frac{1}{4}}.$$

Используем разложение в ряд функции $(1+x)^m$. Полагая $x = 0,008$ и $m = \frac{1}{4}$, получим следующее разложение

$$\begin{aligned}(1 + 0,008)^{\frac{1}{4}} = 1 + \frac{1}{4} \cdot 0,008 - \frac{3}{16 \cdot 2!}(0,008)^2 + \frac{3 \cdot 7}{64 \cdot 3!}(0,008)^3 - \ldots = \\ = 1 + 0,002 - 0,000006 + 0,000000028 - \ldots\end{aligned}$$

Этот ряд удовлетворяет признаку Лейбница. Поэтому его остаток не превосходит по абсолютной величине первого из членов, входящих в остаток. В случае $n = 3$ $|r_3| \leqslant 5 \cdot 6 \cdot 10^{-6} = 3 \cdot 10^{-5} < 10^{-4}$. Следовательно, достаточно взять два члена ряда

$$\sqrt[4]{630} = 5\sqrt[4]{1 + 0,008} = 5(1 + 0,002) = 5,01.$$

Пример 3. Вычислить с точностью до 10^{-3} интеграл

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1 + x^2}}.$$

Решение:

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}} = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} (1+x^2)^{-\frac{1}{3}}\, dx.$$

Разложим подынтегральную функцию вида $(1+x)^m$ в степенной ряд (в данном случае $m = -\frac{1}{3}$) и заменим x на x^2.

$$(1+x^2)^{-\frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{9}x^4 - \frac{14}{81}x^6 + \ldots$$

Так как отрезок интегрирования $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ принадлежит области сходимости полученного ряда $(-1; 1)$, то можно интегрировать почленно в указанных пределах

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}} = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{9}x^4 - \frac{14}{81}x^6 + \ldots\right) dx =$$

$$= \left[x - \frac{x^3}{9} + \frac{2x^5}{45} - \frac{14x^7}{567} + \ldots\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{72} + \frac{1}{720} - \frac{7}{36288} + \ldots$$

В полученном знакочередующемся ряде четвёртый член по абсолютному значению меньше $0,001$. Следовательно, требуемая точность будет обеспечена, если учитывать только первые три члена ряда.

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}} \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{72} + \frac{1}{720} = \frac{39}{80} = 0,4875.$$

Так как первый из отброшенных членов имеет знак минус, то полученное приближённое значение будет с избытком. Поэтому ответ с точностью до $0,001$ равен $0,487$.

Пример 4. Вычислить значение $\ln 2$ с точностью до 10^{-4}.

Решение: Пользуясь разложениями

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\tfrac{x^n}{n} + \ldots, \quad -1 < x \leqslant 1, \\ \ln(1-x) &= -x - \tfrac{x^2}{2} - \tfrac{x^3}{3} - \ldots - \tfrac{x^n}{n} - \ldots, \quad -1 \leqslant x < 1 \end{aligned}$$

получим, что

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) =$$

$$= 2x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5 + \ldots + \frac{2}{2m+1}x^{2m+1} + \ldots, \quad |x| < 1.$$

Полагая $x = \frac{1}{3}$, имеем

$$\ln\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \ln 2 = 2\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4^4\cdot 3}+\frac{1}{3^5\cdot 5}+\frac{1}{3^7\cdot 7}+\ldots\right).$$

Заданную точность обеспечивают четыре члена этого ряда, поскольку

$$r_5 = 2\cdot\left(\frac{1}{3^9\cdot 9}+\frac{1}{3^{11}\cdot 11}+\ldots\right) = \frac{2}{3^9\cdot 9}\cdot\left(1+\frac{1}{3^2\cdot 11}+\frac{1}{3^4\cdot 13}+\ldots\right) <$$
$$< \frac{2}{3^9\cdot 9}\cdot\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}+\ldots\right) = \frac{2}{3^9\cdot 9}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{9}} < 10^{-4}.$$

Поэтому

$$\ln 2 \approx \frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{27}+\frac{1}{405}+\frac{1}{5103}\right) \approx 0,6931.$$

Заметим, что попытка вычислить $\ln 2$ путём подстановки $x = 1$ в ряд Тейлора для функции $\ln(1+x)$ приведёт к очень громоздким вычислениям, так как для нужной точности придётся взять 1000 членов ряда.

6.2. Применение рядов для решения дифференциальных уравнений

Пусть требуется решить обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x, y)$ при заданных начальных условиях $y = y_0$ при $x = x_0$, то есть $y(x_0) = y_0$. Предположим, что $y(x)$ является решением данного уравнения при указанном условии. Решение уравнения $y(x)$ ищем в виде ряда Тейлора в окрестности точки $x = x_0$.

$$(3)\quad y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 +$$
$$+ \frac{y'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \ldots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \ldots$$

Свободный член разложения (3), то есть $y(x_0)$, известен из начального условия. Значение $y'(x_0)$ можно получить, если подставить начальное условие в дифференциальное уравнение. Значение $y''(x_0)$ можно получить, если продифференцировать обе части дифференциального уравнения, а затем подставить уже известные значения $y(x_0)$ и $y'(x_0)$ при $x = x_0$. Поступая аналогично, то есть последовательно дифференцируя обе части заданного дифференциального уравнения по переменной x, можно последовательно находить значения $y'''(x_0), y^{IV}(x_0)$ и так далее.

Пример 5. Найти частное решение $y(x)$ дифференциального уравнения $y' = 2xy - x\cos x$, соответствующее начальному условию $y(0) = 1$.

Решение: Так как по условию $x_0 = 0$, то искомое частное решение $y(x)$ можно записать так

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \ldots \tag{4}$$

Свободный член $y(0) = 1$ по условию. Значение $y'(0)$ находим, подставляя в заданное уравнение начальные условия:

$$y'(0) = 2 \cdot 0 \cdot 1 - 0 \cdot \cos 0 = 0.$$

Последовательно дифференцируя данное дифференциальное уравнение, находим $y''(x), y'''(x), y^{IV}(x)$ и так далее, а затем вычисляем значения производных при $x = 0$:

$$\begin{array}{rcll}
y''(x) & = & 2y + 2xy' - \cos x + x\sin x, & y''(0) = 1, \\
y'''(x) & = & 2y' + 2y' + 2xy'' + \sin x + \sin x + x\cos x = & \\
 & = & 4y' + 2xy'' + 2\sin x + x\cos x, & y'''(0) = 0, \\
y^{IV}(x) & = & 4y'' + 2y'' + 2xy''' + 2\cos x + \cos x - x\sin x, & y^{IV}(0) = 9.
\end{array}$$

Подставив найденные значения производных при $x = 0$ в ряд (4), получим первые члены разложения в степенной ряд искомого частного решения

$$y(x) = 1 + \frac{0}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{9}{4!}x^4 + \ldots = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \ldots$$

Пример 6. Найти первые три члена разложения в степенной ряд частного решения $y(x)$ дифференциального уравнения $y'' = xy' - y + e^x$, соответствующее начальным условиям $y(0) = 1, y'(0) = 0$.

Решение: Предположим, что искомое частное решение имеет вид (4). Из начальных условий уже известны $y(0)$ и $y'(0)$. Подставив эти значения в заданное уравнение, вычислим $y''(0)$.

$$y''(0) = 0 \cdot 0 - 1 + e^0 = 0.$$

Последовательно дифференцируя данное уравнение, будем иметь

$$y'''(x) = y' + xy'' - y' + e^x = xy'' + e^x,$$
$$y^{IV}(x) = y'' + xy''' + e^x.$$

Теперь вычислим значения производных при $x = 0$.

$$y'''(0) = 1, \quad y^{IV}(0) = 1.$$

Следовательно,

$$y(x) = 1 + \frac{0}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots = 1 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \ldots$$

есть искомое частное решение.

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить с точностью до 10^{-3}:

232) $\sqrt[3]{10}$.

233) $\sqrt{e}$.

234) $\sqrt[3]{30}$.

235) $\sin 18^\circ$.

236) $\arcsin\dfrac{1}{3}$.

237) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

238) $\displaystyle\int_0^{1} e^{-x^2} dx$.

239) $\displaystyle\int_0^{3/2} x^6 \sin x\,dx$.

240) $\displaystyle\int_2^{3} \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\,dx$.

241) $\displaystyle\int_0^{1/2} \sqrt{x}e^x dx$.

Вычислить с точностью до 10^{-4}:

242) $\ln 3$.

243) $\ln 6$.

244) Вычислить значение $\sqrt{2}$ с точностью до 10^{-5}, исходя из его представления в виде

а) $\sqrt{2} = 1,4\sqrt{1+\dfrac{0,04}{1,96}}$,

б) $\sqrt{2} = 1,4\left(1-\dfrac{1}{50}\right)^{-\frac{1}{2}}$,

в) $\sqrt{2} = 1,41\left(1-\dfrac{119}{2000}\right)^{-\frac{1}{2}}$

и сравнить объём проведённых вычислений в каждом случае.

245)* Доказать, что при приближённом вычислении значения выражения $\sqrt{a^2+b}$, $b>0$ по формуле $\sqrt{a^2+b}=a\left(1+\dfrac{b}{2a^2}\right)$ ошибка не превосходит числа $\dfrac{b^2}{8a^3}$.

246)* Доказать, что при приближённом вычислении значения выражения $\sqrt[3]{a^3+b}$, $ab>0$ по формуле $\sqrt[3]{a^3+b}=a\left(1+\dfrac{b}{3a^3}\right)$ ошибка не превосходит числа $\dfrac{b^2}{9a^5}$.

247)* Оценить ошибку при приближённом вычислении значения выражения $\sqrt[n]{a^n+b}$, $a>0$, $b>0$ по формуле $\sqrt[n]{a^n+b}=a+\dfrac{b}{na^{n-1}}$.

Найти n первых членов разложения в степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ решения дифференциального уравнения с заданными начальными условиями:

248) $y'=y^2-x, \quad x_0=0, \quad y(0)=1, \quad n=5.$

249) $y'=x^2-y^2, \quad x_0=0, \quad y(0)=1, \quad n=5.$

250) $y'=x^3+y^2, \quad x_0=0, \quad y(0)=1, \quad n=5.$

251) $y'=x+\dfrac{1}{y}, \quad x_0=0, \quad y(0)=1, \quad n=4.$

252) $y'=2x+\cos y, \quad x_0=0, \quad y(0)=0, \quad n=4.$

253) $2y'-(x+y)y-e^x=0, \quad x_0=0, \quad y(0)=2, \quad n=4.$

Найти частное решение дифференциального уравнения в окрестности точки $x=0$ в виде степенного ряда с центром в нуле:

254) $xy''+y'+xy=0, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=0.$

255) $xy''+y'-xy=0, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=0.$

256) $xy''-xy'-y=0, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=1.$

257) $x^2y''+xy'+x^2y=0, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=0.$

§7. Ряды Фурье

Рядом Фурье функции $f(x)$ на интервале $(-l; l)$ называется ряд вида

$$(1)\qquad f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \right),$$

где

$$(2)\qquad a_n = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(x) \cos\frac{n\pi x}{l}\, dx, \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots),$$

$$(3)\qquad b_n = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(x) \sin\frac{n\pi x}{l}\, dx, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Знак $\sim$ означает, что функции $f(x)$ ставится в соответствие тригонометрический ряд по данной формуле.

В случае, когда $l = \pi$, то есть $f(x)$ задана на интервале $(-\pi; \pi)$, ряд Фурье функции $f(x)$ записывается в виде

$$(4)\qquad f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right),$$

где

$$(5)\qquad a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx, \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots),$$

$$(6)\qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

В частности, если функция $f(x)$ чётная на $(-l; l)$, то все коэффициенты b_n равны нулю, так как в формуле (3) интеграл берётся от нечётной функции по симметричному относительно нуля интервалу. В формуле (2) в этом случае интеграл берётся от чётной функции по симметричному относительно нуля интервалу, поэтому этот интеграл равен удвоенному интегралу от той же функции по интервалу $(0; l)$.

Итак, в случае чётной функции $f(x)$ на интервале $(-l; l)$ имеем

$$(7)\qquad f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l},$$

где

$$a_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots). \tag{8}$$

Аналогично, если функция $f(x)$ является нечётной на интервале $(-l; l)$, то получаем

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{9}$$

где

$$b_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{10}$$

Точка $x_0 \in (-l; l)$ называется регулярной точкой функции $f(x)$, определённой на интервале $(-l; l)$, если существуют конечные пределы

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0 + 0), \quad \lim_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0 - 0) \tag{11}$$

и

$$f(x_0) = \frac{1}{2}\left(f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)\right). \tag{12}$$

Заметим, что все точки непрерывности функции являются её регулярными точками.

Функция $f(x)$ называется кусочно-гладкой на интервале $(-l; l)$, если

1) множество M точек разрыва функции $f(x)$ на $(-l; l)$ конечно, и каждая точка $x_0 \in M$ есть точка разрыва первого рода,
2) функция $f(x)$ дифференцируема во всех точках интервала $(-l; l)$ за исключением конечного числа точек M_1 $(M \subset M_1)$,
3) для каждой точки $x_0 \in M_1$ существуют пределы

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(x_0 + h) - f(x_0 + 0)}{h}, \qquad \lim_{h\to 0+}\frac{f(x_0 - 0) - f(x_0 - h)}{h}.$$

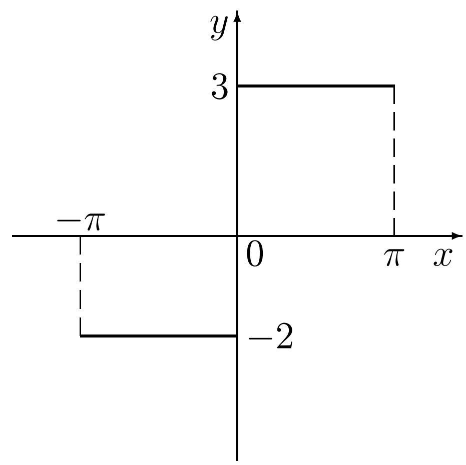
Чтобы ряд Фурье (1) функции $f(x)$ на интервале $(-l; l)$ сходился к функции $f(x)$, заданная функция $f(x)$ на $(-l; l)$ должна удовлетворять определённым условиям. Сформулируем теорему разложения.

Если функция $f(x)$ является кусочно-гладкой на интервале $(-l; l)$, то для любой регулярной точки $x_0 \in (-l; l)$ ряд Фурье (1) функции $f(x)$ в точке x_0

сходится к $f(x_0)$.

$$f(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x_0}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x_0}{l} \right).$$

Пример 1. Найти разложение в ряд Фурье функции $f(x)$ на интервале $(-\pi; \pi)$.



$$f(x) = \begin{cases} -2, & \text{если } -\pi < x < 0, \\ 3, & \text{если } \ 0 \leqslant x < \pi. \end{cases}$$

Решение: Заданная функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы о разложимости в ряд Фурье, так как на интервале $(-\pi; \pi)$ функция имеет одну точку разрыва первого рода (при $x = 0$), а во всех других точках этого интервала она дифференцируема. Следовательно, для данной функции справедливо равенство

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Чтобы найти коэффициент a_0, применяем формулу (5) при $n = 0$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \left(\int\limits_{-\pi}^{0} -2\, dx + \int\limits_{0}^{\pi} 3\, dx \right) =$$
$$= \frac{1}{\pi} \left([-2x]_{-\pi}^{0} + [3x]_{0}^{\pi} \right) = \frac{1}{\pi}(-2\pi + 3\pi) = 1.$$

Теперь находим коэффициенты a_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ по формуле (5).

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left(\int\limits_{-\pi}^{0} -2 \cos nx\, dx + \int\limits_{0}^{\pi} 3 \cos nx\, dx \right) =$$
$$= \frac{1}{\pi} \left(\left[\frac{-2 \sin nx}{n} \right]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{3 \sin nx}{n} \right]_{0}^{\pi} \right) = 0.$$

Пользуясь формулой (6) определим коэффициенты b_n.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{0} -2\sin nx\,dx + \int\limits_{0}^{\pi} 3\sin nx\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{2\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{-3\cos nx}{n}\right]_{0}^{\pi}\right) = \frac{1}{n\pi}(2 - 2\cos(-n\pi) - 3\cos n\pi + 3) =$$

$$= \frac{5}{n\pi}(1-\cos n\pi) = \frac{5}{n\pi}2\sin^2\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} \frac{10}{n\pi} & \text{при } n \text{ нечётном,} \\ 0 & \text{при } n \text{ чётном.} \end{cases}$$

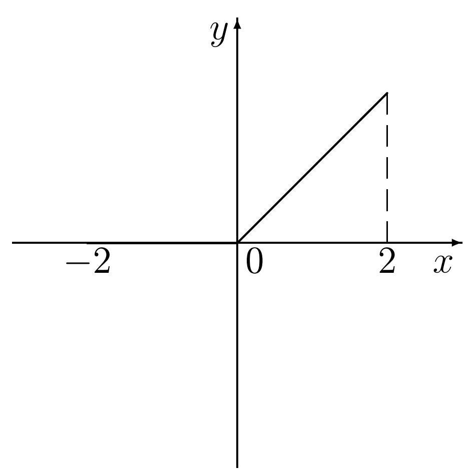
Подставив найденные коэффициенты a_n и b_n в формулу (4), получим следующее разложение в ряд Фурье данной функции $f(x)$ на заданном интервале $(-\pi;\pi)$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{10}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x + \ldots\right).$$

Полученное равенство справедливо при любом значении x, исключая точку разрыва $x = 0$, в которой сумма ряда равна $\dfrac{-2+3}{2} = \dfrac{1}{2}$, то есть равна среднему арифметическому значений данной функции слева и справа от точки разрыва.

Пример 2. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ на интервале $(-2;2)$, где

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -2 < x < 0, \\ x, & \text{если } \ 0 \leqslant x < 2. \end{cases}$$



Решение: Для вычисления коэффициентов Фурье применим формулы (2) и (3), подставив в них $l = 2$ и учитывая при этом, что функция задана различными аналитическими выражениями для различных областей изменения переменной x.

$$a_0 = \frac{1}{2}\left(\int\limits_{-2}^{0} 0\,dx + \int\limits_{0}^{2} x\,dx\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 1,$$

$$a_n = \frac{1}{2}\left(\int\limits_{-2}^{0} 0\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx + \int\limits_{0}^{2} x\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx\right) = \frac{1}{2}\left[x\frac{\sin\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}} + \frac{\cos\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n^2\pi^2}{4}}\right]_0^2 =$$

$$= \frac{2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1) = \begin{cases} -\frac{4}{n^2\pi^2} & \text{при } n \text{ нечётном,} \\ 0 & \text{при } n \text{ чётном,} \end{cases}$$

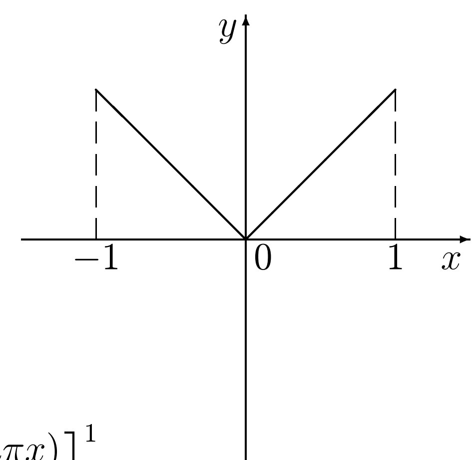
$$b_n = \frac{1}{2}\left(\int\limits_{-2}^{0} 0\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx + \int\limits_{0}^{2} x\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx\right) = \frac{1}{2}\left[-x\frac{\cos\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}} + \frac{\sin\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n^2\pi^2}{4}}\right]_0^2 =$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\cos n\pi = \begin{cases} \frac{2}{n\pi} & \text{при } n \text{ нечётном,} \\ -\frac{2}{n\pi} & \text{при } n \text{ чётном.} \end{cases}$$

Подставив найденные коэффициенты в формулу (1), получим искомое разложение заданной функции $f(x)$.

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{2} + \ldots\right) +$$
$$+ \frac{2}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2} - \frac{1}{4}\sin\frac{4\pi x}{2} + \ldots\right).$$

Пример 3. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = |x|$ на интервале $(-1; 1)$.



Решение: Эта функция является чётной. Для вычисления коэффициентов Фурье полагаем $l = 1$ в формуле (8).

$$a_0 = \frac{2}{1}\int\limits_0^1 x\,dx = 2\left|\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = 1,$$

$$a_n = 2\int\limits_0^1 x\cos(n\pi x)\,dx = 2\left[\frac{x\sin(n\pi x)}{n\pi} + \frac{\cos(n\pi x)}{n^2\pi^2}\right]_0^1 =$$

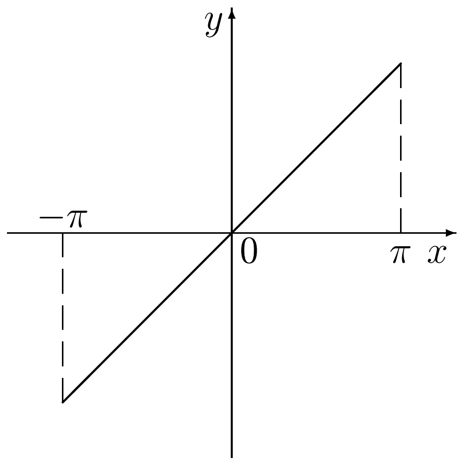
$$= \frac{2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1) = \begin{cases} -\frac{4}{n^2\pi^2} & \text{при } n \text{ нечётном,} \\ 0 & \text{при } n \text{ чётном.} \end{cases}$$

Подставив найденные коэффициенты в формулу (7), получим искомое разложение заданной функции в ряд Фурье.

$$|x| = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\left(\cos\pi x + \frac{\cos 3\pi x}{3^2} + \frac{\cos 5\pi x}{5^2} + \ldots\right).$$

Полученное равенство справедливо при любом $x \in (-1; 1)$.

Пример 4. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x$ на интервале $(-\pi; \pi)$.



Решение: Так как данная функция является нечётной, то коэффициенты $a_n = 0$. Полагая $l = \pi$ в формуле (6), находим коэффициенты b_n.

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x \sin nx\, dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi} =$$

$$= -\frac{2}{n}\cos n\pi = \begin{cases} \frac{2}{n} & \text{при } n \text{ нечётном,} \\ -\frac{2}{n} & \text{при } n \text{ чётном.} \end{cases}$$

Следовательно, разложение в ряд Фурье данной функции имеет вид

$$x = 2\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \ldots\right).$$

Функцию $f(x)$, определённую в интервале $(0; l)$ и обладающую в нём приведёнными в теореме разложения свойствами (см. с. 52), можно в этом интервале представить как формулой (7), так и формулой (9).

Пример 5. Разложить в ряд по косинусам функцию $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ на интервале $(0; \pi)$.

Решение: Для определения коэффициентов Фурье в ряде (7) применим формулу (8).

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\, dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{4}x - \frac{x^2}{4}\right]_0^{\pi} = 0,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\cos nx\, dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi}(\pi - 2x)\cos nx\, dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[(\pi - 2x)\frac{\sin nx}{n} - \frac{2\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{1 - \cos n\pi}{n^2\pi} =$$

$$= \frac{2\sin^2\frac{n\pi}{2}}{n^2\pi} = \begin{cases} \frac{2}{n^2\pi} & \text{при } n \text{ нечётном,} \\ 0 & \text{при } n \text{ чётном.} \end{cases}$$

Следовательно, получаем следующее разложение

$$\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} = \frac{2}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right).$$

Пример 6. Разложить функцию $f(x) = x$ на интервале $(0;1)$ в ряд по синусам.

Решение: Для определения коэффициентов Фурье в ряде (9) применим формулу (10).

$$b_n = 2\int_0^1 x\sin(n\pi x)\,dx = 2\left[-x\cdot\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} + \frac{\sin(n\pi x)}{n^2\pi^2}\right]_0^1 =$$

$$= -\frac{2\cos n\pi}{n\pi} = \begin{cases} \frac{2}{n\pi} & \text{при } n \text{ нечётном,} \\ -\frac{2}{n\pi} & \text{при } n \text{ чётном.} \end{cases}$$

Следовательно, получаем следующее разложение

$$x = \frac{2}{\pi}\left(\sin\pi x - \frac{1}{2}\sin 2\pi x + \frac{1}{3}\sin 3\pi x - \frac{1}{4}\sin 4\pi x + \ldots\right).$$

В силу одинаковой периодичности тригонометрических функций, ряд Фурье (1), представляющий функцию $f(x)$ на $(-l;l)$, представляет в каждом отрезке $[a;b] \supset (-l;l)$ функцию $f^*(x)$, полученную $2l$ периодическим продолжением функции $f(x)$ с интервала $(-l;l)$ на всю числовую прямую за исключением точек вида $(2m+1)l,\ m \in \mathbb{Z}$. Значения $f^*((2m+1)l),\ m \in \mathbb{Z}$ выбираются произвольно. Если определены значения $f(l-0)$ и $f(-l+0)$ (см. (11)), то обычно полагают

$$f^*((2m+1)l) = \frac{1}{2}\left(f(l-0) + f(-l+0)\right),\ m \in \mathbb{Z}.$$

Поэтому, если функция $f^*(x)$ удовлетворяет условию (12) в точке $x = l$, то ряд (1) сходится в точках $x = (2m+1)l,\ m \in \mathbb{Z}$ к функции $f^*((2m+1)l)$.

Задачи для самостоятельного решения

Разложить функцию $f(x)$ в тригонометрический ряд Фурье на заданном отрезке:

258) $f(x) = x\sin x$ на $[-\pi;\pi]$.

259) $f(x) = x\cos x$ на $[-\pi;\pi]$.

260) $f(x) = \begin{cases} bx, & -\pi < x \leqslant 0, \\ ax, & 0 < x < \pi \end{cases}$ на $[-\pi;\pi]$.

261) $f(x)=\begin{cases} x, & 0<x\leqslant\dfrac{\pi}{2},\\ \pi-x, & \dfrac{\pi}{2}<x<\pi\end{cases}$ на $[0;\pi]$.

262) $f(x)=\begin{cases} 1, & -\pi<x\leqslant 0,\\ 1-x, & 0<x<\pi\end{cases}$ на $[-\pi;\pi]$.

263) $f(x)=\begin{cases} x, & -1\leqslant x<0,\\ x+1, & 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$ на $[-1;1]$.

264) $f(x)=x^2$ на $[-\pi;\pi]$.

265) $f(x)=x^2$ на $[0;2\pi]$.

266) $f(x)=x^2$ на $[0;\pi]$.

267) $f(x)=\begin{cases} x^2, & 0<x<\pi,\\ -x^2, & -\pi<x<0\end{cases}$ на $[-\pi;\pi]$.

268) $f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi<x<0,\\ x^2, & 0<x<\pi\end{cases}$ на $[-\pi;\pi]$.

269) $f(x)=\begin{cases} 1, & |x|<2,\\ 0, & 2\leqslant x\leqslant\pi\end{cases}$ на $[-\pi;\pi]$.

270) $f(x)=\begin{cases} 1, & 0<x<2,\\ 0, & 2\leqslant x\leqslant 2\pi\end{cases}$ на $[0;2\pi]$.

271) $f(x)=\operatorname{sign}(\sin x)$ на $[-\pi;\pi]$.

272) $f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi\leqslant x\leqslant 0,\\ \sin x, & 0<x\leqslant\pi\end{cases}$ на $[-\pi;\pi]$.

273) $f(x)=\begin{cases} 0, & \dfrac{\pi}{2}\leqslant|x|\leqslant\pi,\\ \cos x, & |x|<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ на $[-\pi;\pi]$.

274) $f(x)=\sin^5 x$ на $[-\pi;\pi]$.

275) $f(x)=\cos^4 x$ на $[-\pi;\pi]$.

276) $f(x)=\arcsin(\cos x)$ на $[-10\pi;10\pi]$.

277) $f(x)=\arcsin(\sin x)$ на $[6\pi;20\pi]$.

278) $f(x)=\operatorname{ch} x$ на $[-\pi;\pi]$.

279) $f(x)=\operatorname{sh} x$ на $[-\pi;\pi]$.

280) $f(x)=\sin x$ на $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

281) $f(x)=\cos x$ на $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

282) $f(x)=\cos x$ на $[0;\pi]$.

283) $f(x)=\begin{cases} -1, & -c<x\leqslant 0,\\ 1, & 0<x<c\end{cases}$ на $[-c;c]$.

284) $f(x)=\begin{cases} 0, & -c<x\leqslant 0,\\ 1, & 0<x<c\end{cases}$ на $[-c;c]$.

285) $f(x)=x$ на $[-c;c]$.

286) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leqslant c, \\ 0, & -c < x \leqslant 0 \end{cases}$ на $[-c; c]$.

287) $f(x) = |x|$ на $[-c; c]$.

288) $f(x) = x^2$ на $[-1; 1]$.

289) $f(x) = x^2$ на $[0; 2]$.

290) $f(x) = c^2 - x^2$ на $[-c; c]$.

291) $f(x) = e^{ax}$, $a \neq 0$, на $[0; 2]$.

Разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье на заданном отрезке по косинусам:

292) $f(x) = \sin x$ на $[0; \pi]$.

293) $f(x) = x \cos x$ на $[0; \pi]$.

294) $f(x) = e^{2x}$ на $[0; \pi]$.

295) $f(x) = \sin 2x$ на $[0; \pi]$.

Разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье на заданном отрезке по синусам:

296) $f(x) = \cos x$ на $[0; \pi]$.

297) $f(x) = x \sin x$ на $[0; \pi]$.

298) $f(x) = e^{ax}$ на $[0; \pi]$.

299) $f(x) = \sin ax$, a – не целое, на $[0; \pi]$.

300) $f(x) = \operatorname{sh} ax$ на $[0; \pi]$.

Ответы

1) $a_n = n^3$. **2)** $a_n = \frac{1}{n(n+3)}$. **3)** $a_n = \frac{2^{n-1}}{2n-1}$. **4)** $a_n = \frac{2n}{2n+1}$. **5)** $a_1 = \frac{1}{2},\ a_2 = \frac{4}{5},\ a_3 = \frac{7}{10},\ a_4 = \frac{10}{17}$. **6)** $a_1 = \frac{1}{2},\ a_2 = \frac{1}{4^2},\ a_3 = \frac{1}{2^3},\ a_4 = \frac{1}{4^4}$. **7)** $a_1 = -3,\ a_2 = 1,\ a_3 = -\frac{1}{6},\ a_4 = \frac{1}{12}$. **8)** $a_1 = -\frac{1}{2},\ a_2 = \frac{1}{4},\ a_3 = -\frac{1}{6},\ a_4 = \frac{1}{8}$. **9)** $a_1 = 1,\ a_2 = \frac{3}{4},\ a_3 = \frac{1}{9},\ a_4 = \frac{3}{16}$. **10)** $\frac{3}{2}$. **11)** $\frac{3}{4}$. **12)** $2+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$. **13)** 1. **14)** $\frac{11}{18}$. **15)** $\frac{1}{4}$. **16)** $\frac{7}{36}$. **17)** $\frac{9}{64}$. **18)** $\frac{1}{(1-a)^2}$. **19)** $1-\sqrt{2}$. **29)** Сходится. **30)** Расходится. **31)** Сходится. **32)** Сходится. **33)** Сходится. **34)** Сходится. **35)** Сходится. **36)** Расходится. **37)** Сходится. Указание: $\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} = \frac{1}{n^{\ln\ln n}} < \frac{1}{n^2}$. **38)** Расходится. **39)** Расходится. **40)** Сходится. **41)** Сходится. **42)** Сходится. **43)** Сходится. **44)** Сходится. **45)** Расходится. **46)** Сходится. **47)** Расходится. **48)** Сходится. **49)** Сходится. **50)** Сходится. **51)** Расходится. **52)** Сходится. **53)** Расходится. **54)** Сходится. **55)** Сходится. **56)** Сходится. **57)** Сходится. **58)** Расходится. **59)** Сходится. **60)** Сходится. **61)** Расходится. **62)** Сходится. **63)** Сходится. **64)** Расходится. **65)** Сходится. **66)** Сходится. **67)** Расходится. **68)** Расходится. **69)** Сходится. **70)** Сходится. **71)** Сходится. **72)** Сходится. **73)** Сходится. **74)** Расходится. **75)** Сходится. **76)** Расходится. **77)** Сходится. **78)** Сходится. **79)** Сходится. **80)** Сходится. **81)** Сходится. **82)** Сходится. **83)** Сходится при $\alpha > 0$, расходится при $\alpha \leqslant 0$. **84)** Сходится. **85)** Сходится. **86)** Расходится. **87)** Расходится. **88)** Расходится. **89)** Сходится. **90)** Сходится. **91)** Расходится. **92)** Расходится. **93)** Сходится. **94)** Расходится. **95)** Сходится. **96)** Сходится. **97)** Сходится. **98)** Сходится. **99)** Расходится. **100)** Сходится. **101)** Расходится. **102)** Сходится. **103)** Сходится. **104)** Сходится. **105)** Сходится при $\alpha > \frac{1}{2}$, расходится при $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$. **106)** Сходится. **107)** Сходится при $\alpha > 1$, расходится при $\alpha \leqslant 1$. **108)** Сходится при $\alpha > 1$, расходится при $\alpha \leqslant 1$. **109)** Сходится. **110)** Расходится. **111)** Сходится. **112)** Расходится. **113)** Сходится. **119)** Сходится абсолютно при $\alpha > 1$, сходится условно при $0 < \alpha \leqslant 1$. **120)** Сходится условно. **121)** Сходится условно. **122)** Сходится условно. **123)** Сходится абсолютно. **124)** Сходится абсолютно. **125)** Расходится. **126)** Сходится абсолютно. **127)** Расходится. **128)** Сходится условно. **129)** Сходится условно. **130)** Сходится абсолютно. **131)** Сходится условно.

132) Расходится. **133)** Сходится условно. **134)** Сходится абсолютно. **135)** Сходится абсолютно при $|x| > 1$. **136)** Сходится абсолютно при $|x| > 1$. **137)** Сходится абсолютно при $x > 0$. **138)** Сходится абсолютно при $|x| < 1$. **139)** Сходится абсолютно при $|x| \neq 1$. **140)** Сходится абсолютно при $-\infty < x < -\frac{2}{5}$, $0 < x < +\infty$; сходится условно при $x = -\frac{2}{5}$. **141)** Сходится абсолютно при $-\frac{5}{3} \leqslant x \leqslant 3$. **142)** Сходится абсолютно при $-\infty < x < \frac{1}{4}$, $\frac{1}{2} < x < +\infty$; сходится условно при $x = \frac{1}{2}$. **143)** Сходится абсолютно при $-\frac{5}{4} < x < \frac{1}{2}$; при $x = -\frac{5}{4}$ и $x = \frac{1}{2}$ сходится абсолютно, если $p > 1$; при $x = \frac{1}{2}$ сходится условно, если $0 < p \leqslant 1$. **144)** Сходится абсолютно при $-\infty < x < -2$, $-\frac{4}{3} < x < +\infty$; сходится условно при $x = -2$. **145)** Сходится абсолютно при $0 < x < +\infty$. **146)** Сходится абсолютно при $|x| < 1$. **147)** Сходится при $0 < x < \frac{1}{e}$. **148)** Сходится абсолютно при $|x| < +\infty$. **149)** Сходится абсолютно при $|x| < +\infty$. **150)** Сходится абсолютно при $|x| < a$. **151)** Сходится абсолютно при $x > 0$. **152)** Сходится абсолютно при $-\infty < x < -4$; сходится условно при $x = -4$. **153)** Сходится абсолютно при $-\frac{11}{4} < x < +\infty$. **154)** Сходится абсолютно при $|x| < 1$. **155)** Сходится абсолютно при $|x| < \frac{1}{5}$. **156)** Сходится абсолютно при $|x| < \frac{1}{|a|}$. **157)** Сходится абсолютно при $|x| < 1$. **158)** Сходится абсолютно при $|x| < 1$; сходится условно при $x = -1$. **159)** Сходится абсолютно при $|x| < 1$; сходится условно при $x = -1$. **160)** Сходится абсолютно при $0 < x < 2$; сходится условно при $x = 0$. **161)** Сходится абсолютно при $|x| < 1$. **162)** Сходится абсолютно при $|x| < +\infty$. **163)** Сходится абсолютно при $|x| < 1$. **164)** Сходится абсолютно при $|x| < +\infty$. **165)** Сходится абсолютно при $|x| < \frac{1}{2}$. **166)** Сходится абсолютно при $|x| < +\infty$. **167)** Сходится абсолютно при $4 < x < 6$; сходится условно при $x = 4$. **168)** Сходится абсолютно при $|x| < 10$; сходится условно при $x = -10$. **169)** Сходится абсолютно при $|x| < e$. **170)** $-\ln(1-x)$, $-1 \leqslant x < 1$. **171)** $\ln(1+x)$, $-1 < x \leqslant 1$. **172)** $\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$, $|x| < 1$. **173)** $-\frac{1}{2}\ln(1-x^2)$, $|x| < 1$. **174)** $\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$, $|x| \leqslant 1$. **175)** $\operatorname{arctg} x$, $|x| \leqslant 1$. **176)** $\frac{1}{(1-x)^2}$, $|x| < 1$. **177)** $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, $|x| < 1$. **178)** $\frac{1}{(1+x)^2}$, $|x| < 1$. **179)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $|x| < +\infty$. **180)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $|x| < +\infty$. **181)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\ln^n a}{n!}x^n$, $|x| < +\infty$. **182)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n x^{n+2}}{n!}$, $|x| < +\infty$. **183)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2(2n+1)}}{(2n+1)!}$, $|x| < +\infty$. **184)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$, $|x| < +\infty$. **185)** $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$, $|x| < +\infty$. **186)** $\frac{3}{4}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^{2n}-1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$, $|x| < +\infty$.

187) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{2n}$, $|x|<1$. **188)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{4n}$, $|x|<1$. **189)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n x^n$, $|x|<\frac{1}{2}$. **190)** $3\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{4^{n+1}}$, $|x|<4$. **191)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n x^n}{3^{n+1}}$, $|x|<\frac{3}{2}$. **192)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n x^{2n}}{2^{n+1}}$, $|x|<\sqrt{\frac{2}{3}}$. **193)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{9}{2^{n+1}}-\frac{14}{3^{n+1}}\right)x^n$, $|x|<2$. **194)** $\frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(5-3^{1-n})x^n$, $|x|<1$. **195)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left((-1)^{n+1}\frac{2}{3^{n+1}}-\frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n$, $|x|<2$. **196)** $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n}$, $|x|<1$. **197)** $\frac{2}{5}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $|x|<1$. **198)** $2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3^{2n+1}}{2n+1}x^{2n+1}$, $|x|<\frac{1}{3}$. **199)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{5^n x^n}{n}$, $-\frac{1}{5}<x\leqslant\frac{1}{5}$. **200)** $\ln 5+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{2}{5}\right)^n\frac{x^n}{n}$, $-\frac{5}{2}<x\leqslant\frac{5}{2}$. **201)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n x^{2n}}{n}$, $|x|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}$. **202)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n-2^n}{n}x^n$, $-\frac{1}{3}<x\leqslant\frac{1}{3}$. **203)** $\ln 4-\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+4^{-n})\frac{x^n}{n}$, $-1\leqslant x<1$. **204)** $\ln 9-\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+9^{-n})\frac{x^n}{n}$, $-1\leqslant x<1$. **205)** $\ln 6+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)\frac{x^n}{n}$, $-2<x\leqslant 2$. **206)** $-x+\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}x^3+\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}-\frac{2}{6}x^6-\ldots+\frac{(-1)^n x^{3n-2}}{3n-2}+\frac{(-1)^{n+1}x^{3n-1}}{3n-1}+\frac{(-1)^{n+1}2x^{3n}}{3n}+\ldots$, $-1<x\leqslant 1$. **207)** $x+\frac{x^2}{2}-\frac{2}{3}x^3+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{2}{6}x^6+\ldots+\frac{x^{3n-2}}{3n-2}+\frac{x^{3n-1}}{3n-1}-\frac{x^{3n}}{3n}+\ldots$, $-1<x\leqslant 1$. **208)** $1+\frac{x^2}{2}+\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{(2n)!!}x^{2n}$, $|x|\leqslant 1$. **209)** $1+\frac{x}{5}+\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4\cdot9\cdot14\cdot\ldots\cdot(5n-6)}{5^n n!}x^n$, $|x|\leqslant 1$. **210)** $3+\frac{x}{27}+\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-4)}{3^{4n-1}n!}x^n$, $|x|\leqslant 27$. **211)** $\frac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^{2n+1}(2n)!!}x^{2n}$, $|x|<2$. **212)** $\frac{1}{3}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{3^{2n+1}(2n)!!}x^{2n}$, $|x|\leqslant 3$. **213)** $x^2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}x^{2(n+1)}$, $|x|\leqslant 1$. **214)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+3}}{2n+1}$, $|x|\leqslant 1$. **215)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2^{2n+1}(2n+1)}$, $|x|\leqslant 2$. **216)** $3x+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{2n+1}(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}x^{2n+1}$, $|x|\leqslant\frac{1}{3}$. **217)** $3x+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3^{2n+1}(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}x^{2n+1}$, $|x|\leqslant\frac{1}{3}$. **218)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$, $|x|<+\infty$. **219)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$, $|x|\leqslant 1$. **220)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot n!}$, $|x|<+\infty$. **221)** $2(x+1)-3(x+1)^2+(x+1)^3$, $|x|<+\infty$. **222)** $e^{-2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n!}$, $|x|<+\infty$. **223)** $-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{3^{n+1}}$, $-6<x<0$. **224)** $2+\frac{x-4}{4}+\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2^{3n-1}n!}(x-4)^n$, $0\leqslant$

$x \leqslant 8.$ **225)** $-1+\frac{x+1}{3}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{3^{n+1}(n+1)!}(x+1)^{n+1},\ -2\leqslant x\leqslant 0.$ **226)** $\frac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4^{n+1}}-1\right)\cdot(x+3)^n,\ -4<x<-2.$ **227)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)\cdot(x+4)^n,\ -6<x<-2.$ **228)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n},\ 0<x\leqslant 2.$ **229)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\left(x+\frac{\pi}{3}\right)^{2n+1},\ |x|<+\infty.$ **230)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\pi^{2n}}{4^{2n}(2n)!}\cdot(x-2)^{2n},\ |x|<+\infty.$ **231)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\pi}{3}\right)^n\cdot\frac{(x-1)^n}{n!}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}+n\frac{\pi}{2}\right),\ |x|<+\infty.$ **232)** $2,154.$ **233)** $1,649.$ **234)** $3,107.$ **235)** $0,309.$ **236)** $0,340.$ **237)** $0,493.$ **238)** $0,747.$ **239)** $1,572.$ **240)** $0,385.$ **241)** $0,026.$ **242)** $1,0486.$ **243)** $1,7918.$ **244)** $1,41421$ **247)** $|R_n|\leqslant\frac{n-1}{2n^2}\cdot\frac{b^2}{a^{2n-1}}.$ **248)** $y=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x^3+\frac{7}{12}x^4+\ldots$ **249)** $y=1-x+x^2-\frac{2}{3}x^3+\frac{5}{6}x^4-\ldots$ **250)** $y=1+x+x^2+x^3+\frac{5}{4}x^4+\ldots$ **251)** $y=1+x+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}x^4.$ **252)** $y=x+x^2-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{4}x^4.$ **253)** $y=2+\frac{5}{2}x+\frac{13}{4}x^2+\frac{89}{24}x^3+\ldots$ **254)** $y=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2^2\cdot4^2\cdot\ldots\cdot(2n)^2}.$ **255)** $y=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2^2\cdot4^2\cdot\ldots\cdot(2n)^2}.$ **256)** $y=x+x^2+\frac{x^3}{2!}+\frac{x^4}{3!}+\ldots+\frac{x^{n+1}}{n!}+\ldots=xe^x.$ **257)** $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}.$ **258)** $1-\frac{1}{2}\cos x-2\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-1}\cos nx.$ **259)** $-\frac{1}{2}\sin x+2\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{n^2-1}\sin nx.$ **260)** $\frac{\pi}{4}(a-b)-\frac{2}{\pi}(a-b)\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}+(a+b)\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin nx}{n}.$ **261)** $\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(4n+2)x}{(2n+1)^2}.$ **262)** $\frac{4-\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin nx}{n}.$ **263)** $\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+3(-1)^{n+1}}{n}\sin\pi nx.$ **264)** $\frac{\pi^2}{3}-4\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n^2}.$ **265)** $\frac{4\pi^2}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{n^2}-\frac{\pi\sin nx}{n}\right).$ **266)** $\frac{\pi^2}{3}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos 2nx}{n^2}-\frac{\pi\sin 2nx}{n}\right).$ **267)** $2\pi\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin nx}{n}-\frac{8}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3}.$ **268)** $\frac{\pi^2}{6}-2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cos nx}{n^2}+\pi\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin nx}{n}-\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3}.$ **269)** $\frac{2}{\pi}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n}\sin 2n\cos nx.$ **270)** $\frac{1}{\pi}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi n}\left[(1-\cos 2n)\sin nx+\sin 2n\cos nx\right].$ **271)** $\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$ **272)** $\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin x-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi(4n^2-1)}\cos 2nx.$ **273)** $\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\cos x-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi(4n^2-1)}\cos 2nx.$ **274)** $\frac{5}{8}\sin x-\frac{5}{16}\sin 3x+\frac{1}{16}\sin 5x.$ **275)** $\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x.$ **276)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4}{\pi(2n+1)^2}\cos(2n+$

$1)x.$ **277)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{\pi(2n+1)^2}\sin(2n+1)x.$ **278)** $\frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}+\frac{2\operatorname{sh}\pi}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}\cos nx.$ **279)** $\frac{2\operatorname{sh}\pi}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{1+n^2}\sin nx.$ **280)** $\frac{8}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{4n^2-1}\sin 2nx.$ **281)** $\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos 2nx}{4n^2-1}.$ **282)** $\frac{8}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin 2nx}{4n^2-1}.$ **283)** $\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{c}.$ **284)** $\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{c}.$ **285)** $\frac{2c}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{c}.$ **286)** $\frac{c}{4}-\frac{2c}{\pi^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2n+1)\pi x}{c}}{(2n+1)^2}+\frac{c}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi nx}{c}}{n}.$ **287)** $\frac{c}{2}-\frac{4c}{\pi^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{c}.$ **288)** $\frac{1}{3}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{(\pi n)^2}\cos\pi nx.$ **289)** $\frac{4}{3}+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\cos\pi nx}{\pi^2n^2}-\left(\frac{2}{\pi n}-\frac{1}{\pi^3n^3}\right)\sin\pi nx\right].$ **290)** $\frac{2}{3}c^2+\frac{4c^2}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cos\frac{\pi nx}{c}.$ **291)** $\frac{2}{\pi}\operatorname{sh}a\pi\left(\frac{1}{2a}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2+n^2}[a\cos nx+n\sin nx]\right).$ **292)** $\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}.$ **293)** $-\frac{1}{\pi}+\frac{\pi}{2}\cos x-\frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2+1}{(4n^2-1)^2}\cos 2nx.$ **294)** $\frac{e^{2\pi}-1}{2\pi}+\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^ne^{2\pi}-1}{4+n^2}\cos nx.$ **295)** $\frac{8}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{4-(2n-1)^2}.$ **296)** $\frac{8}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^2-1}\sin 2nx.$ **297)** $-\frac{\pi}{2}\sin x-\frac{8}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(4n^2-1)^2}\sin 2nx.$ **298)** $\frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[1-(-1)^ne^{\pi a}\right]\frac{n}{a^2+n^2}\sin nx.$ **299)** $\frac{2\sin a\pi}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n\sin nx}{a^2-n^2}.$ **300)** $\frac{2\operatorname{sh}a\pi}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{a^2+n^2}\sin nx.$