

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

Экзаменационные вопросы и задачи по дисциплине
Математический анализ
для студентов 1 курса специальности 230101,
весенний семестр

Блок № 1

1. Первообразная функции. Неопределённый интеграл. Свойства неопределённого интеграла.
2. Таблица интегралов. Замена переменной в неопределённом интеграле.
3. Формула интегрирования по частям. Таблица дифференциалов.
4. Простейшие рациональные дроби. Правильные и неправильные рациональные дроби. Представление неправильной рациональной дроби в виде суммы целой части и правильной дроби.
5. Разложение правильной рациональной дроби в сумму простейших дробей. Метод неопределённых коэффициентов.
6. Интегрирование выражений вида $x^m (a + bx^n)^p$.
7. Интегрирование рациональных тригонометрических функций с помощью универсальной тригонометрической подстановки. Частные случаи.
8. Свойства определённых интегралов.
9. Оценки интегралов. Среднее значение функции на отрезке.
10. Несобственные интегралы 1 рода, виды интегралов и их вычисление.
11. Несобственные интегралы 2 рода, виды интегралов и их вычисление.
12. Вычисление площадей фигур, заданных в декартовых координатах.
13. Вычисление площадей фигур, заданных в полярных координатах.
14. Вычисление площадей фигур, заданных в параметрическом виде.
15. Вычисление длин кривых, заданных в декартовых координатах.

16. Вычисление длин кривых, заданных в полярных координатах.
17. Вычисление длин кривых, заданных в параметрическом виде.
18. Вычисление объёмов тел вращения.

Задачи по блоку № 1 будут из методического пособия **№ 989** на темы:

- вычисление интегралов с помощью внесения под знак дифференциала,
- вычисление интегралов, содержащих иррациональности, с помощью выделения полного квадрата;
- интегрирование по частям;
- интегрирование рациональных дробей;
- интегрирование рациональных тригонометрических функций с помощью универсальной тригонометрической подстановки;
- оценки интегралов,
- интегрирование несобственных интегралов первого и второго родов;
- вычисление площадей фигур, заданных в декартовых координатах;
- вычисление площадей фигур, заданных в полярных координатах;
- вычисление длин кривых, заданных в декартовых координатах;
- вычисление длин кривых, заданных в полярных координатах;
- вычисление длин кривых, заданных в параметрическом виде.

Блок № 2

1. Частные производные функции двух переменных.
2. Градиент и производная по направлению.
3. Производная сложной функции. Производная функции, заданной неявно.
4. Экстремум функции двух переменных. Необходимые условия экстремума.
5. Экстремум функции двух переменных. Достаточные условия экстремума.
6. Двойной интеграл. Сведение двойного интеграла к повторному.
7. Понятие якобиана. Замена переменных в двойном интеграле.

Задачи по блоку № 2 будут из методического пособия № 1157 на темы:

- частные и полные производные сложных функций;
- частные производные неявно заданных функций;
- нахождение градиента, производной по направлению, угла между градиентами;
- экстремумы функции двух переменных в замкнутой ограниченной области;

и из методического пособия № 1159 на темы:

- изменение порядка интегрирования;
- вычисление двойных интегралов;
- нахождение площадей фигур, ограниченных заданными линиями;
- нахождение масс плоских фигур.

Блок № 3

1. Определения числового ряда, сходящегося и расходящегося числового ряда. Необходимый признак сходимости и его следствие.
2. Признаки сравнения для знакоположительных рядов.
3. Положительные ряды. Признак Коши.
4. Строго положительные ряды. Признак Даламбера.
5. Интегральный признак Коши.
6. Признак Лейбница для знакочередующихся рядов. Абсолютная и условная сходимость.
7. Понятие степенного ряда, радиуса и множества сходимости. Нахождение множества сходимости.
8. Ряд Тейлора. Табличные разложения основных элементарных функций в ряд Тейлора.
9. Ряд Тейлора. Остаточный член в форме Лагранжа. Действия со степенными рядами.
10. Ряд Фурье для функции $f(x)$ с периодом 2ℓ . Формулы для коэффициентов. Ряд Фурье для чётных и нечётных функций.
11. Разложение функции в ряд Фурье по косинусам и по синусам.
12. Понятие о дифференциальном уравнении. Уравнение с разделяющимися переменными, метод его решения.

13. Однородная функция. Однородное уравнение. Сведение однородного уравнения к уравнению с разделяющимися переменными.
14. Линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Метод вариации произвольной постоянной решения линейных уравнений.
15. Линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Метод Бернулли решения линейных уравнений.
16. Уравнение Бернулли. Сведение уравнения Бернулли к линейному уравнению.
17. Существование и единственность решения задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка. Понижение порядка у уравнения, в которое не входит y в явном виде.
18. Уравнения высших порядков. Понижение порядка у уравнения, в которое не входит x в явном виде.

Задачи по блоку № 3 будут из методического пособия **№ 806** на темы:

- сходимость рядов с положительными членами;
- абсолютная и условная сходимость рядов;
- множество сходимости степенного ряда;
- разложение функций в ряд Тейлора с использованием основных табличных разложений;
- разложение функций в ряд Фурье;
- разложение функций в ряд Фурье по косинусам или по синусам;

и из методического пособия **№ 941** на темы:

- уравнения с разделяющимися переменными;
- однородные уравнения;
- метод вариации произвольной постоянной решения линейных уравнений;
- метод Бернулли решения линейных уравнений;
- уравнения Бернулли;
- уравнения, не содержащие y в явном виде;
- уравнения, не содержащие x в явном виде.

О Б Р А З Е Ц 1

Экзаменационного билета по математическому анализу
для студентов 1 курса специальности 230101
весенний семестр

1а. Несобственные интегралы 1 рода, виды интегралов и их вычисление.

Найти неопределённый интеграл

$$\int \frac{1 + \ln(x-1)}{x-1} dx.$$

1б. Найти неопределённый интеграл

$$\int \frac{x dx}{\cos^2 x}.$$

1в. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций

$$y = 4 - x^2, \quad y = x^2 - 2x.$$

2а. Экстремум функции двух переменных. Необходимые условия экстремума.
Вычислить двойной интеграл по области D :

$$\iint_D (24xy - 48x^3y^3) dx dy; \quad D: x = 1, y = x^2, y = -\sqrt{x}.$$

2б. Найти наименьшее и наибольшее значения z , если

$$z = x^2 + 2y^2 + 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + y \leq 3.$$

2в. Найти $\text{grad } z$ в точке A и производную в точке A по направлению вектора \vec{a} , если

$$z = x^2 + xy + y^2, \quad A(1; 1), \quad \vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}.$$

3а. Положительные ряды. Признак Коши.

Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+2)}{n!}.$$

3б. Разложить функцию $f(x) = \ln(1 - x - 6x^2)$ в ряд Тейлора по степеням x .

3в. Решить уравнение

$$xy''' + y'' = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

О Б Р А З Е Ц 2

Экзаменационного билета по математическому анализу
для студентов 1 курса специальности 230101
весенний семестр

1а. Первообразная функции. Неопределённый интеграл. Свойства неопределённого интеграла.

Оценить интеграл

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{10 + 3 \cos x}.$$

1б. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 10}.$$

1в. Вычислить длину кривой, заданной условиями

$$x = 3(t - \sin t), \quad y = 3(1 - \cos t), \quad \pi \leq t \leq 2\pi.$$

2а. Градиент и производная по направлению.

Изменить порядок интегрирования

$$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt[3]{y}} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x, y) dx.$$

2б. Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

$$y^2 - 4y + x^2 = 0, \quad y^2 - 8y + x^2 = 0, \quad y = x, \quad x = 0.$$

2в. Используя формулы производных от функции нескольких переменных, найти $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, если

$$z = x^2 \ln y, \quad x = \frac{u}{v}, \quad y = 3u - 2v.$$

3а. Линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Метод Бернулли решения линейных уравнений.

Решить уравнение

$$x\sqrt{5 + y^2} dx + y\sqrt{4 + x^2} dy = 0.$$

3б. Разложить функцию $f(x) = x^2$ в ряд Фурье по косинусам на интервале $(0; \pi)$.

3в. Решить уравнение $2(y' + y) = xy^2$, $y(0) = 2$.