1.Высказывания, предикаты. Правила построения отрицаний. Операции над высказываниями. Таблица истинности.

Определение высказывания. Высказыванием называется некоторое повествовательное утверждение, про которое можно однозначно сказать, истинно оно или ложно.

Определение предиката. Повествовательное утверждение, зависящее от некоторой переменной x и становящееся при конкретных значениях x высказыванием, называется неопределенным высказыванием или предикатом.

Правила построения отрицаний. Чтобы построить отрицание высказывания, содержащего кванторы, надо кванторы $\forall$ заменить на $\exists$, а $\exists$ на $\forall$, а утверждение, стоящее под знаком кванторов, заменить на противоположное.

2.Свойства операций алгебры логики.

1.a)$A \vee B = B \vee A$,

b)$A \wedge B = B \wedge A$,

2. a)$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$,

b)$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$,

3. a)$(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$,

b)$(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$,

4. a) $\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$,

b) $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$,

5.$\overline{\overline{A}} = A$, $A \vee A = A$, $A \wedge A = A$,

6.$A \vee \overline{A} = T$,

$A \wedge \overline{A} = F$,

7. $A \vee T = T$, $A \wedge T = A$, $A \vee F = A$, $A \wedge F = F$.

8.$A \oplus B = \neg(A \iff B)$ (сумма по модулю 2),

9.$A \mid B = \neg(A \wedge B)$(штрих Шеффера),

10.$A \downarrow B = \neg(A \vee B)$(стрелка Пирса),

11. $A \vee AB = A$, $A(A \vee B) = A$ (законы поглощения),

12. $0 = A\overline{A} = A \oplus A$,

13. $1 = A \vee \overline{A} = A \vee 1 = A \iff A = A \to A = A \oplus \overline{A}$,

14. $A = A \vee A = A \wedge A = A \vee 0 = A \oplus 0$,

15. $\overline{A} = A \oplus 1 = A \downarrow A = A \mid A$,

16. $A \vee \overline{A}B = A \vee B$,

17. $AB \vee A\overline{B} = A(B \vee \overline{B}) = A$ (склеивание),

18.$AC \vee B\overline{C} \vee AB = AC \vee B\overline{C}$ (обобщенное склеивание).

19.$A \vee B = A \oplus B \oplus A \wedge B$

3. Основные понятия и факты, связанные с булевым кубом.

Определение двоичного вектора. Набор $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$, где $\alpha_i \in \{0,1\}, 1 \leq i \leq n$, называется булевым или двоичным вектором. Элементы набора называют компонентами или координатами. Число n называют длиной набора. Кратко обозначают $\tilde{\alpha}^n = \tilde{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$. Весом набора $\tilde{\alpha}^n$ называют число его координат равных 1, т.е.

$$\|\tilde{\alpha}^n\| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.$$

Число

$$\nu(\tilde{\alpha}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 2^{n-i}$$

номер набора $\tilde{\alpha}^n$

Определение n- мерного куба.Множество всех булевых векторов $\tilde{\alpha}^n$ длины n называется n-мерным кубом ($E_2^n = E_2 \times ... \times E_2$). Сами векторы называются вершинами n-мерного куба.

Определение сравнимых векторов. Говорят, что набор $\tilde{\alpha}^n$ предшествует набору $\tilde{\beta}^n$ (обозначают $\tilde{\alpha}^n \preceq \tilde{\beta}^n$), если $\alpha_i \leq \beta_i \ \forall i = 1, ..., n$.

4.Булевы функции одной и двух переменных.

Определение булевой функции.Функция $f(\tilde{x}^n) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$,такая что $f : E_2^n \to E_2$, называется булевой функцией от n переменных.

5. Функции булевой алгебры. Способы задания булевой функции. Количество функций от n переменных. Фиктивные и существенные переменные.

Теорема о мощности булевых функций. Мощность булевых функций от n переменных

$$|P_2(n)| = 2^{2^n}.$$

Определение фиктивных и существенных переменных. Переменная x_i для произвольного i, $1 \leq i \leq n$, называется существенной ,если $\exists$ набор $(\beta_1, ..., \beta_{i-1}, \beta_{i+1}, ..., \beta_n)$, такой что

$$f(\beta_1, ..., \beta_{i-1}, 0, \beta_{i+1}, ..., \beta_n) \neq f(\beta_1, ..., \beta_{i-1}, 1, \beta_{i+1}, ..., \beta_n).$$

В противном случае она называется фиктивной.

6.**определение двойственной функции**. Функция $f^*(x_1, x_2, ..., x_n) = \overline{f}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)$ называется двойственной к $f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

определение суперпозиции.Функция $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется суперпозицией функций $f(x_1, x_2, ..., x_k)$, $f_1(x_1, x_2, ..., x_n)$,$f_2(x_1, x_2, ..., x_n)$,...,$f_k(x_1, x_2, ..., x_n)$, если

$F(x_1, x_2, ..., x_n) = f(f_1(x_1, x_2, ..., x_n), f_2(x_1, x_2, ..., x_n), ..., f_k(x_1, x_2, ..., x_n))$.

Теорема о двойственной функции. Двойственная к суперпозиции есть суперпозиция двойственных.

7. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (с.д.н.ф.). Правила построения. Методы упрощения.

$x_1^{\sigma_1}...x_n^{\sigma_n}$- элементарная конъюнкция.

Число букв в элементарной конъюнкции называется рангом элементарной конъюнкции.

Теорема о с.д.н.ф.. Каждая булевая функция, отличная от 0 представима единственным образом в виде совершенной дизъюнктивной нормальной формы (с.д.н.ф.)

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \vee x_1^{\sigma_1}...x_n^{\sigma_n}$$

по всем $\sigma_1...\sigma_n$, таким, что $f(\sigma_1...\sigma_n) = 1$

0 не имеет с.д.н.ф.

8. Совершенная конъюнктивная нормальная форма (с.к.н.ф.). Правила построения. Методы упрощения.

Теорема о с.к.н.ф.. Каждая булевая функция, отличная от 1 представима единственным образом в виде совершенной конъюнктивной нормальной формы (с.к.н.ф.)

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \wedge(x_1^{\overline{\sigma}_1} \vee ... \vee x_n^{\overline{\sigma}_n})$$

по всем $\sigma_1...\sigma_n$, таким, что $f(\sigma_1...\sigma_n) = 0$

1 не имеет с.к.н.ф.

9. Полином Жегалкина, существование и единственность представления булевой функции в виде полинома Жегалкина.

Определение полинома Жегалкина. Полиномом Жегалкина от переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ называется выражение вида

$$\bigoplus_{0 \le i_1 < ... < i_s \le n} a_{i_1 ... i_s} x_{i_1} ... x_{i_s} = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus ... \oplus a_n x_n \oplus a_{12} x_1 x_2 \oplus ... \oplus a_{n-1\ n} x_{n-1} x_n \oplus ... \oplus a_{1...n} x_1 ... x_n,$$

$a_{i_1 ... i_s} \in \{0, 1\}$.

Наибольший из рангов элементарных конъюнкций, входящих в полином, называется степенью этого полинома

Теорема существования и единственности полинома Жегалкина. Каждая функция из P_2 , представляется в виде полинома Жегалкина и это представление единственно.

10. Классы функций алгебры логики. Полные, замкнутые классы. Замыкание класса. Свойства замыкания.

Определение полного класса. Класс булевых функций $\Psi = \{f_1, ..., f_k\}$ называется полным, если любая функция из P_2 может быть представлена в виде формулы над Ψ, т.е. любая функция получается из функций класса Ψ применением конечного числа операций суперпозиции.

Определение замыкания. Замыканием K называется множество всех булевых функций, получаемых в виде формул над K или, другими словами, применением конечного числа суперпозиций к функциям из K. Обозначение $[K]$.

Свойства замыкания.

1.$K_1 \subseteq K_2 \rightarrow [K_1] \subseteq [K_2]$.

2.$K \subseteq [K]$.

3.$[[K]] = [K]$.

K-замкнутый, если $K = [K]$.

K-полный, если $[K] = P_2$.

11.Классы Поста T_0, T_1, S, M, L.

$T_0 = \{f : f(0, ..., 0) = 0\}$.

$T_1 = \{f : f(1, ..., 1) = 1\}$.

Класс самодвойственных функций

$S = \{f : f = f^*\}$.

Класс монотонных функций

$M = \{f : \forall$ сравнимых векторов $\tilde{\alpha}^n$ предшествует набору $\tilde{\beta}^n$ $(\tilde{\alpha}^n \preceq \tilde{\beta}^n)$ $f(\tilde{\alpha}^n) \le f(\tilde{\beta}^n)$.

Класс линейных функций

$L = \{f := f(x_1, x_2, ..., x_n) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus ... \oplus a_n x_n\}$.

Классы Поста замкнуты и попарно различны.

12.**Лемма (о несамодвойственной функции)**. Если $f(x_1, x_2, ..., x_n) \notin S$, то из нее путем подстановки функций x и $\overline{x}$ вместо x_i можно получить несамодвойственную функцию одной переменной, т.е. константу.

13.**Лемма (о немонотонной функции)**. Если $f(x_1, x_2, ..., x_n) \notin M$, то из нее путем подстановки констант 0, 1 и функции x из нее можно получить $\overline{x}$.

14.**Лемма (о нелинейной функции)**. Если $f(x_1, x_2, ..., x_n) \notin L$, то из нее путем подстановки констант 0, 1 и функций x и $\overline{x}$, а также, быть может, инвертированием f можно получить $x_1 \wedge x_2$.

15.**Теорема Поста о полноте**. Для того чтобы система функций Φ была полной необходимо и достаточно, чтобы она целиком не содержалась ни в одном из пяти замкнутых классов T_0, T_1, S, M, L.

16.Геометрический граф, абстрактный граф, смежные вершины и ребра, полный граф.

Определение геометрического графа. Геометрический граф G состоит из множества точек $V = \{v_i\}$ пространства R^n и множества $E = \{e_i\}$ непрерывных самонепересекающихся кривых, таких, что

1) Каждая замкнутая кривая в E содержит только одну точку v множества V.

2) Каждая незамкнутая кривая в E содержит ровно две точки множества V.

3) Кривые в E не имеют общих тчек, за исключением точек из множества V.

Определение абстрактного графа.Пусть V- произвольное множество, V^2- множество всех его неупорядоченных пар (a, b), $a \in V$, $b \in V$. Тройка (V, E, Φ) (E возможно пустое множество, Φ -отображение E в V^2) называется абстрактным графом. Элементы V называются вершинами графа. Элементы E называются ребрами графа. Φ-отображение инциденции графа.

Определение смежных вершин и ребер. Вершины и ребра называются смежными, если в первом случае инцидентны одному ребру,а во втором -одной вершине.

Определение полного графа. Граф называется полным, если любые две его вершины смежные.

17. Покрытие и разбиение, двудольный граф, изоморфные графы.

Определение покрытия и разбиения. Набор подмножеств множества V называется покрытием множества V, если объединение этих подмножеств совпадает с V. Покрытие называется разбиением, если никакие два из входящих в него не пересекаются.

Определение двудольного графа. Граф называется двудольным, если существует разбиение множества его вершин на две части (доли), что концы каждого ребра принадлежат разным частям. Если при этом любые две вершины, входящие в разные доли, смежны, то граф называется полным двудольным.

Определение изоморфных графов. Пусть G и H графы, $\phi : V(G) \to V(H)$ - взаимно однозначное отображение (биекция). Если для любых вершин u и v графа G их образы $\phi(u)$ и $\phi(v)$ смежны $H \iff u$ и v смежны в G, то биекция называется изоморфизмом.

18. **Определение произведения графов**.Произведением графов $G_1 \times G_2$ называется граф G , если $V(G) = V(G_1) \times V(G_2)$, причем вершины (u_1, u_2) (v_1, v_2) смежны в $G \iff u_1 = v_1$, а u_2 и v_2 смежны G_2 или $u_2 = v_2$, а u_1 и v_1 смежны в G_1, т.е.

$$|E(G)| = |V(G_1)||E(G_2)| + |V(G_2)||E(G_1)|.$$

Определение дополнительного графа. Дополнительным графом к графу G называется граф $\overline{G}$, если

1)$V(\overline{G}) = V(G)$.

2)две несовпадающие вершины смежны в $\overline{G} \iff$ они не смежны в G.

Определение степени вершины. Число ребер, инцидентных некоторой вершине v, называется степенью вершины $degv$ (degree).

Лемма о рукопожатии.

$$2|E(G)| = \sum_{v \in V(G)} degv.$$

19. **Теорема о числе вершин**. В конечном графе число вершин нечетной степени четно.

20. **Определение связного графа**. Граф называется связным, если любые две его несовпадающие вершины в нем соединены маршрутом.

Предложение о связном графе. Если $|E(G)| > C_{n-1}^2$в графе порядка $n > 2$, то граф связен.

21. Цепь, цикл, диаметр, радиус, эксцентриситет, периферийная и центральная вершины.

Определение маршрута. Чередующаяся последовательность $v_1, e_1, v_2, e_2, ..., v_l, e_l, v_{l+1}$ вершин и ребер называется маршрутом.

Определение цепи. Маршрут называется цепью, если все его ребра различны.

Определение цикла. Замкнутый маршрут называется циклом, т.е., если $v_1 = v_{l+1}$.

Метрические характеристики графа

Определение расстояния. Пусть G-граф, u и v - несовпадающие вершины. Длина кратчайшего (u, v)-маршрута называется расстоянием между вершинами u и v (обозначается $d(u, v)$).

Определение эксцентриситета. Для фиксированной вершины u величина

$$e(u) = \max_{v \in V(G)} d(u, v)$$

называется эксцентриситетом.

Определение диаметра. Максимальный из всех эксцентриситетов вершин графа G называется диаметром графа Gи обозначается $d(G)$

$$d(G) = \max_{v \in V(G)} e(v).$$

Определение радиуса. Минимальный из всех эксцентриситетов вершин графа G называется радиусом графа Gи обозначается $r(G)$

$$r(G) = \min_{v \in V(G)} e(v).$$

Определение периферийной вершины. Вершина v называется периферийной вершиной, если $e(v) = d(G)$

Определение центральной вершины. Вершина v называется центральной вершиной, если $e(v) = r(G)$.

22.**Теорема о геометрической реализации графа в** R^3. В R^3 можно изобразить любой конечный граф так, чтобы пересечения ребер были только в вершинах графа.

23.**Определение матрицы смежности**.Матрицей смежности вершин ориентированных и неориентированных графов n- го порядка называется матрица размерности $n \times n$, элементы которой a_{ij}(i - номер строки, j- номер столбца) равны числу ребер, инцидентных одновременно i-й и j-й вершинам (или направленных от вершины i к вершине j в случае ориентированного графа). Оозначение $A(G)$.

Определение ранга графа Рангом графа называется ранг его матрицы смежности.

Определение матрицы инцидентности. Матрицей инцидентности I графа $G(V, E)$,где $|V(G)| = n$, $|E(G)| = m$, называется в общем случае прямоугольная матрица размерности $n \times m$, каждый элемент a_{ij} которой в случае неориентированного графа равен 1 или 0 в зависимости от того, инцидентны или нет соответствующие ему вершины и ребро и в случае ориентированного графа 1, если вершина i является началом дуги e_j; -1, если вершина i является концом дуги e_j; 0, если вершина i и ребро e_j не инцидентны.

24.**Определение компоненты связности**. Каждый максимальный связный подграф графа назвается его компонентой связности.

Теорема о компонентах связности. Каждый неориентированный граф представим в виде конечного объединения связных непересекающихся подграфов, т.е. компонент связности.

25.**Теорема о дополнении**. Для любого графа либо он сам, либо его дополнение является связным.

26.**Утверждение о связном графе без одного ребра**. Пусть G - связный граф, $e_1 \in E(G)$. Тогда

1) если ребро e_1 принадлежит какому-либо циклу графа G, то граф $G \backslash e_1$ связен.

2) если ребро e_1 не входит ни в какой цикл, то граф $G \backslash e_1$ имеет ровно две компоненты связности.

27.**Определение цикломатического числа**. Пусть $|K(G)|$ - число компонент связности. Тогда цикломатическим числом $\nu(G)$ называется число

$$\nu(G) = |E(G)| - |V(G)| + |K(G)|.$$

Теорема о неотрицательности цикломатического числа. Для каждого графа $\nu(G) \geq 0$.

28.**Определение дерева**. Связный граф без циклов называется деревом.

Теорема (критерий для дерева). Связный граф G дерево $\iff$ $\nu(G) = 0$.

29.**Первый способ кодирования дерева**. Пусть T - дерево, $n = |E(T)| = |V(T)| - 1$. Поставим в соответствие дереву T с n ребрами слово, состоящее из 0 и 1 длиной $2n$ следующим образом. Выберем произвольно вершину и начнем обход дерева по произвольному ребру так, чтобы ребра все время оставались справа, поворачивая в висячих вершинах. В процессе обхода нумеруем ребра. Если ребро встретилось в первый раз, то записываем 0, во второй раз пишем 1.

Второй способ кодирования дерева. Перенумеруем вершины дерева произвольным образом. Найдем висячую вершину с наименьшим номером. Запишем номер единственной смежной с ней вершины и удалим висячую вершину вместе с ребром. Для получившегося дерева снова найдем висячую вершину с наименьшим номером и т.д. пока не останется одно ребро. Длина кода при этом равна $|E| - 1 = |V| - 2$.

Теорема (критерий кода). Последовательность из n единиц и n нулей является кодом дерева из n ребер $\iff$ в любом начальном отрезке последовательности число нулей не меньше числа единиц.

30. **Определение эйлерова пути и эйлерова цикла**. Путь из a в b в графе G называется эйлеровым путем, если он содержит все ребра графа, причем каждое по одному разу. Путь из a в a, который является эйлеровым путем, называется эйлеровым циклом.

Теорема о существовании эйлерова пути и эйлерова цикла. Пусть дан связный граф. Эйлеров путь существует $\iff$ две вершины графа имеют нечетную степень, а все остальные четную степень. Эйлеров цикл существует $\iff$ все вершины графа имеют четную степень.

31. **Теорема о цикломатическом числе графа**.Если граф G состоит из нескольких компонент связности G_1, G_2,...,G_k, то $\nu(G) = \nu(G_1) + ... + \nu(G_k)$.

32. Линейное пространство циклов графа над полем $Z_2 = (0, 1)$.

Определение двоичного кода для цикла графа G с m ребрами. Кодом для цикла Z с ребрами $e_1, e_2, ..., e_m$ называется упорядоченный набор длины m из 0 и 1, $(\epsilon_1, \epsilon_2, ..., \epsilon_m)$, где $\epsilon_i = 1$, если $e_i \in Z$ и 0, если $e_i \notin Z$.

Определение суммы циклов. Пусть цикл Z_1 имеет код $(\epsilon_1^1, \epsilon_2^1, ..., \epsilon_m^1)$, цикл Z_2 имеет код $(\epsilon_1^2, \epsilon_2^2, ..., \epsilon_m^2)$, тогда $Z_1 + Z_2$ имеет код $(\epsilon_1^1 + \epsilon_1^2, \epsilon_2^1 + \epsilon_2^2, ..., \epsilon_m^1 + \epsilon_m^2)$.

Таким образом, определено пространство циклов.

Теорема о размерности пространства циклов. Пусть дан произвольный граф G (без петель, без параллельных ребер, с конечным числом вершин) и $\nu(G) = k$. Тогда

1) из графа G можно удалить k ребер так, что оставшийся граф будет без циклов и будет иметь столько компонент связности, что и G.

2) размерность пространства циклов графа G равна k.

33.**Определение раскраски графа**. Пусть задано несколько красок $k_1, k_2, ..., k_s$. Раскраской графа G без петель называется правило, по которому каждой вершине графа присваивается номер $1 \le i \le s$ соответствующий краске, причем смежные вершины имеют разные номера.

Определение хроматического числа. Хроматическим числом графа $\chi(G)$ называется наименьшее число красок, требуемое для раскраски данного графа.

Определение бихроматического графа. Граф называется бихроматичным, если для его раскраски требуется две краски.

Теорема (критерий бихроматичности). Следующие условия эквивалентны:

1)Граф бихроматичен.

2) Граф двудольный.

3) В графе нет циклов нечетной длины.

34. **Определение планарного графа**. Граф G называется планарным, если его можно изобразить на плоскости без пересечения ребер.

Определение грани. Пусть G -планарный связный граф. Тогда область в R^2, граница которой простой цикл, называется гранью.

Теорема Эйлера о числе граней. В любом планарном связном графе $|V(G)| + \Gamma = |E(G)| + 2$, где Γ -число граней.

35.**Определение замкнутого графа**. Граф без висячих вершин называется замкнутым.

Определение сопряженного графа. Граф G^* называется сопряженным к замкнутому графу G, если

1) Число вершин графа G^* равно числу граней G.

2) Вершины G^* смежны $\iff$ соответствующие им грани в Gграничат по ребру, причем две вершины G^* соединяют столько ребер, сколько общих граничных ребер у соответствующих им граней.

3) Изображается G^* так, чтобы

вершины G^* находились внутри соответствующих им граней.

4) Если грани граничат по ребрам e_1,e_2,...,e_s, то вершины, соответствующим граням, соединяются ребрами e_1^*,e_2^*,...,e_s^*, пересекающими e_1,e_2,...,e_s.

Лемма о существовании граней с малым числом углов. Пусть G - замкнутый граф, планарный, без петель и пусть степень каждой вершины равна трем. Тогда существуют грани с числом углов не превосходящих 5.

36.**Теорема Эйлера о пяти красках**. Хроматическое число планарного графа не превосходит 5.

37.**Теорема о непланарности** K_5 . Полный граф K_5 не планарный.

38.**Теорема о непланарности** $K_{3,3}$. Полный двудольный граф $K_{3,3}$ не планарный.

39.**Определение операции разделения ребер**. Пусть задан граф G, $e = (a, b)$ - проивольное ребро. Операцией разделения ребра будем называть добавление к множеству $V(G)$ одной вершины c и замену одного ребра e на два $e_1 = (a, c)$ и $e_2 = (c, b)$.

Определение гомеоморфных графов. Графы G_1 и G_2 называются гомеоморфными, если существуют изоморфные графы $\tilde{G}_1$ и $\tilde{G}_2$, полученные из графов G_1 и G_2 применением одной или несколько раз операции разбиения ребер.

Критерий планарности А.С. Понтрягина и К. Куратовского. Граф G планарный $\iff$ у него нет подграфов, гомеоморфных K_5 или $K_{3,3}$.