

Лабораторно-практическое занятие № 3 АНАЛИЗ ОДНОФАЗНЫХ НЕРАЗВЕТВЛЕННЫХ ЦЕПЕЙ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА С RL И RC ПРИЕМНИКАМИ

Типовые задачи

Задача 3.1. Заданы графики изменения $u(t)$ и $i(t)$ (с амплитудами $U_m=141$ В; $I_m=2,82$ А) для участка электрической цепи. Записать функции в тригонометрической и комплексной формах, если $f = 50$ Гц. Определить полное сопротивление и угол сдвига фаз, используя данные таблицы 3.1. Построить схему замещения цепи.

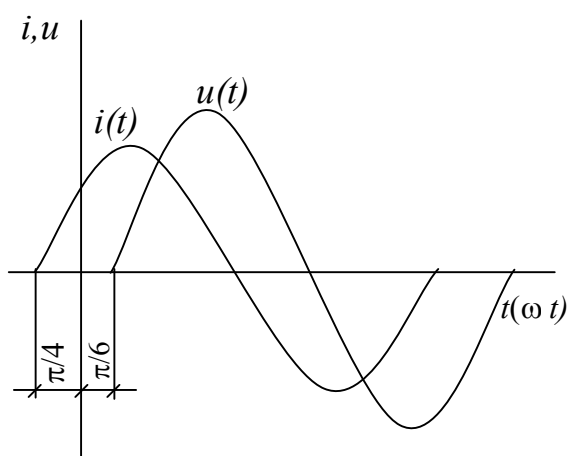


Рис. 3.1

Решение

Напряжение $u(t)$ и ток $i(t)$ изменяются по синусоидальному закону (см. рис. 3.1) с одной частотой, следовательно, мгновенные значения тока и напряжения в цепи записываются:

$$\begin{aligned} u &= U_m \sin(\omega t + \psi_u), \\ i &= I_m \sin(\omega t + \psi_i), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где U_m — амплитудное значение напряжения; I_m — амплитудное значение

тока; $\omega = 2\pi f$ — угловая частота; $f = 1/T$ — частота синусоидальных напряжения и тока; T — период; ψ_u — начальная фаза синусоидального напряжения; ψ_i — начальная фаза синусоидального тока

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 = 314 \text{ рад/с}; \quad \psi_u = -\pi/6 = -30^\circ; \quad \psi_i = \pi/4 = 45^\circ. \quad (3.2)$$

Начальная фаза напряжения ψ_u имеет знак (-), так как синусоида $u(t)$ сдвинута по оси абсцисс вправо от начала координат (величина самой функции при $t=0$ имеет отрицательное значение). Напомним, что началом любой синусоиды полагается точка перехода функции из отрицательного значения в положительное значение. Поэтому же начальная фаза тока имеет знак (+), так как синусоида $i(t)$ сдвинута по оси абсцисс влево от начала координат. Таким образом, в соответствии с (3.1) и (3.2) имеем:

$$u = 141 \cdot \sin(314t - 30^\circ) \text{ В}, \quad i = 2,82 \cdot \sin(314t + 45^\circ) \text{ А.}$$

Синусоидальные функции времени изображаются также *комплексными числами*, которые, по сути, аналитически описывают вращающиеся радиус-векторы на комплексной плоскости, рассматриваемые в момент времени $t=0$.

Комплексные изображения синусоидальных величин чаще всего записываются для действующих значений. Поэтому в первую очередь определим действующие значения тока и напряжения данной цепи:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{2,82}{\sqrt{2}} = 2 \text{ А}, \quad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{141}{\sqrt{2}} = 100 \text{ В.}$$

Представим $u(t)$ и $i(t)$ в комплексной форме (показательная форма записи комплексных чисел):

$$\underline{U} = U e^{j\psi_u} = 100 e^{-j30^\circ} \text{ В}, \quad \underline{I} = I e^{j\psi_i} = 2 e^{j45^\circ} \text{ А.}$$

Модуль комплексного напряжения равен действующему значению напряжения U участка цепи, а аргумент – начальной фазе (начальная фаза синусоидального напряжения ψ_u) и, соответственно, модуль комплексного тока равен действующему значению тока I участка цепи, а аргумент – начальной фазе (начальная фаза синусоидального напряжения ψ_i). Напомним, что такое представление возможно, поскольку ток и напряжения изменяются с одной и той же угловой частотой и, следовательно, изображающие их векторы на комплексной плоскости взаимно неподвижны.

Определим полное комплексное сопротивление цепи

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= Z e^{j\varphi} = \underline{U} / \underline{I} = U e^{j\psi_u} / I e^{j\psi_i} = (100 e^{-j30^\circ}) / (2 e^{j45^\circ}) = \\ &= (100/2) e^{j(-30^\circ - 45^\circ)} = 50 e^{-j75^\circ} \text{ Ом}, \end{aligned}$$

где Z – полное сопротивление цепи, Ом; φ – разность фаз между током и напряжением (угол сдвига фаз), $\varphi < 0$.

В алгебраической форме записи комплексное сопротивление цепи \underline{Z} имеет вид (переход осуществляется с помощью формулы Эйлера):

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= Z e^{j\varphi} = Z \cos\varphi + jZ \sin\varphi = R + jX = \\ &= 50 \cos(-75^\circ) + j50 \sin(-75^\circ) = 12,94 - j48,3 \text{ Ом.} \end{aligned}$$

Здесь R – действительная часть (активное сопротивление), а X – мнимая часть (реактивное сопротивление) комплексного сопротивления цепи \underline{Z} .

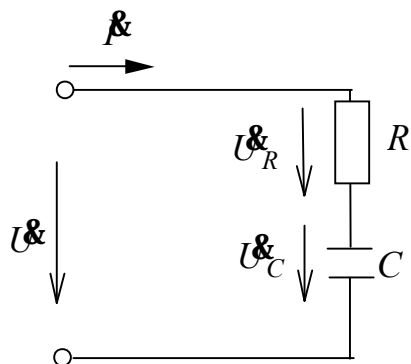


Рис. 3.2

Схема замещения цепи (рис. 3.2) представляется последовательным соединением резистивного элемента R и емкости C , так как мнимая часть X комплексного сопротивления цепи имеет отрицательный знак. Цепь носит “емкостной” характер. Об этом также свидетельствует отрицательный знак угла сдвига фаз. Ток опережает напряжение по фазе.

Задача 3.2. Записать в алгебраической и показательной формах выражение для полного комплексного сопротивления индуктивной катушки с параметрами $R_K = 3$ Ом; $L_K = 0,0127$ Гн, $f = 50$ Гц, используя данные таблицы 3.2.

Построить на комплексной плоскости треугольник сопротивлений.

Решение

Схема замещения реальной индуктивной катушки (рис. 3.3) содержит соединенные последовательно элементы R_K и L_K .

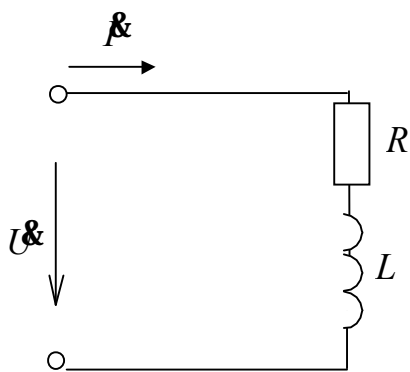


Рис. 3.3

Полное комплексное сопротивление цепи индуктивной катушки в алгебраической форме записи

$$\underline{Z}_K = R_K + j X_K = 3 + j4 \text{ Ом} , \quad (3.3)$$

где $X_K = X_L = \omega L = 2\pi fL$ - индуктивное сопротивление, Ом;

$$X_K = \omega L_K = 2\pi f L_K = 2\pi \cdot 50 \cdot 0,0127 = 3,99 \approx 4 \text{ Ом}.$$

На рис. 3.4 представлен треугольник сопротивлений, построенный в соответствии с формулой (3.3).

В показательной форме комплексное сопротивление цепи индуктивной катушки запишется $\underline{Z}_K = Z_K e^{j\varphi}$ Ом.

Из простых геометрических соображений очевидно:

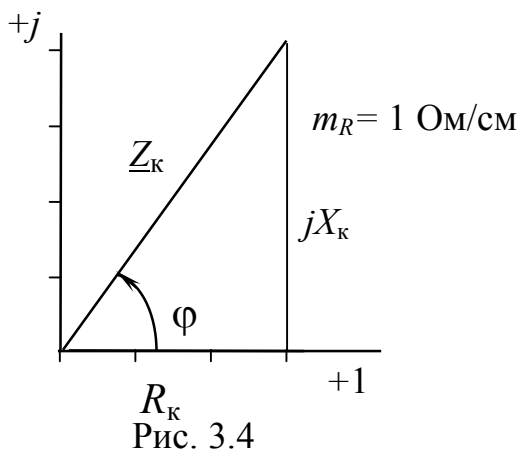


Рис. 3.4

$$Z_K = \sqrt{R_K^2 + X_K^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ Ом};$$

$$\varphi = \arctg \frac{X_K}{R_K} = \arctg \frac{4}{3} = 53,13^\circ \approx 53^\circ,$$

где Z_K – полное сопротивление цепи; φ – разность фаз между током и напряжением, следовательно $Z_K = 5e^{j53^\circ}$ Ом.

Так как $\varphi > 0$ ($+53^\circ$), то, как и все положительные углы, он откладывается от оси вещественных чисел против часовой стрелки. (рис. 3.4)

Задача 3.3. По показаниям приборов (рис. 3.5) определить параметры: R , L , φ , Q , S катушки, если $I = 0,2$ А, $U = 3$ В, $P = 0,36$ Вт, $f = 300$ Гц. Построить векторную диаграмму тока и напряжений, используя данные таблицы 3.3.

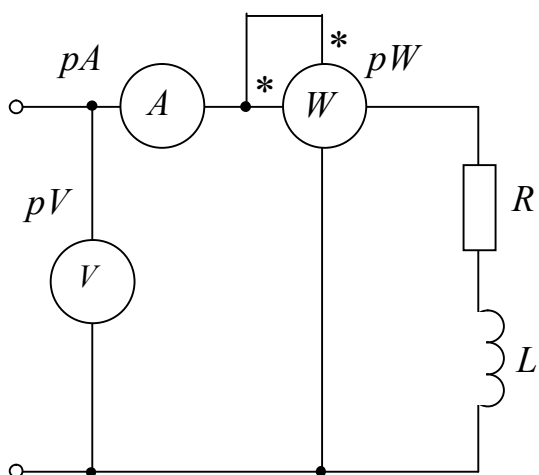


Рис. 3.5

Решение

Электроизмерительные приборы показывают действующие значения тока и напряжения, так как в большинстве случаев в них используется принцип электромеханических преобразований.

В рассматриваемой цепи именно в *резистивном элементе* R происходит безвозвратное (активное) потребление мощности – энергия выделяется в виде тепла и рассеивается в окружающую среду. Ваттметр измеряет именно эту мощность, которая пропорциональна квадрату действующего значения тока и величине активного сопротивления цепи R

$$P_w = P_R = U_R I = RI^2 = UI \cos \varphi .$$

$$\text{Следовательно, } R = P_R / I^2 = 0,36 / (0,2)^2 = 9 \text{ Ом}$$

Полное сопротивление цепи Z можно определить как частное от деления действующего значения напряжения (показание вольтметра)

на действующее значение тока (показание амперметра) на входе цепи:

$$Z = U/I = 3/0,2 = 15 \text{ Ом.}$$

В то же время

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{X_L}{R} = \arccos \frac{R}{Z},$$

где $X_L = \omega L = 2\pi fL$ – индуктивное сопротивление L элемента, Ом.

Тогда X_L и φ можно определить как

$$X_L = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12 \text{ Ом,}$$

$$\varphi = \arctg \frac{X_L}{R} = \arccos \frac{R}{Z} = \arccos \frac{9}{15} = 53,13^\circ \approx 53^\circ.$$

Индуктивность L

$$L = X_L/\omega = X_L/(2\pi f) = 12/(2\pi \cdot 300) = 0,00637 \text{ Гн} = 6,37 \text{ мГн.}$$

Реактивная (индуктивная мощность) – характеризует скорость поступления энергии в магнитное поле катушки и возврат ее обратно источнику (обратимый процесс)

$$Q_L = U_L I = U I \sin\varphi = X_L I^2 = 12 \cdot (0,2)^2 = 0,48 \text{ вар.}$$

Полная мощность

$$S = UI = \sqrt{P^2 + Q_L^2} = 3 \cdot 0,2 = 6 \text{ ВА.}$$

Для построения векторной диаграммы тока и напряжений цепи изобразим схему замещения (рис. 3.6).

В соответствии со вторым законом Кирхгофа в комплексной форме:

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L. \quad (3.4)$$

Примем начальную фазу синусоидального тока ψ_i равной нулю. Тогда комплексный ток цепи

$$\underline{I} = I e^{j\psi_i} = 0,2 e^{j0^\circ} = 0,2 \text{ А.} \quad (3.5)$$

Комплексные напряжения на элементах цепи в соответствии с законом Ома в комплексной форме

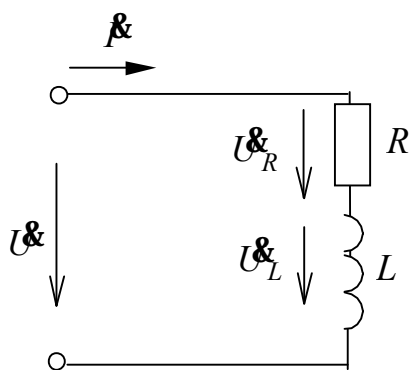


Рис. 3.6

$$\underline{U}_R = R \underline{I} = 9 \cdot 0,2 = 1,8 \text{ В;}$$

$$\underline{U}_L = j \omega L \underline{I} = j X_L \underline{I} = j 12 \cdot (0,2) = j 2,4 = 2,4 e^{j90^\circ} \text{ В.} \quad (3.6)$$

Построение векторной диаграммы (совокупность расположенных на комплексной плоскости векторов, изображающих синусоидальные функции времени – напряжения и токи) начинаем с изображения в выбранном масштабе вектора (комплекса) тока \dot{I} согласно уравнению (3.5). Располагаем его вдоль оси вещественных чисел (+1), так как $\psi_i = 0$ (рис. 3.7.)

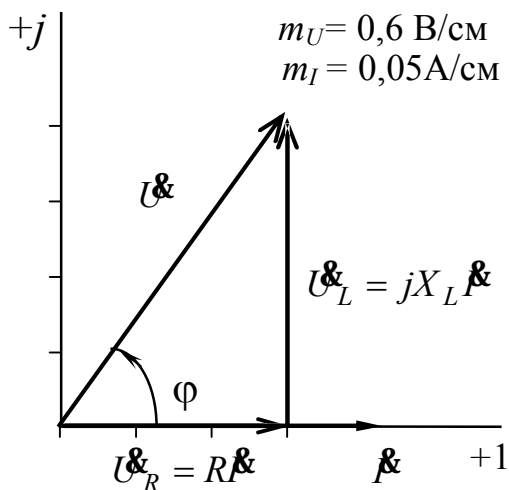


Рис. 3.7

Вектор комплексного напряжения на резистивном элементе \dot{U}_R (изображается в своем масштабе) располагается также вдоль оси вещественных чисел, так как ток и напряжение резистивного элемента совпадают по фазе. Вектор комплексного напряжения на индуктивном элементе \dot{U}_L располагается вдоль оси мнимых чисел (+j), так как $\psi_{UL} = 90^\circ$ согласно уравнению (3.6), то есть напряжение на индуктивном элементе по фазе опережает ток на 90° .

Построение ведем в соответствии с уравнением (3.4). К концу вектора \dot{U}_R прибавляем вектор \dot{U}_L и, соединив его конец с началом координат, получаем вектор напряжения \dot{U} на входе цепи

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L = Ue^{j\psi_U};$$

$$U = \sqrt{U_R^2 + U_L^2} = \sqrt{1,8^2 + 2,4^2} = 3\text{В};$$

$$\psi_U = \psi_I + \varphi = 0 + 53^\circ = 53^\circ.$$

Варианты заданий к самостоятельной работе

Таблица 3.1

Параметры	Вариант							
	1	2	3	4	5	6	7	8
U_m , В	141	14,1	282	28,2	42,3	56,4	84,6	98,7
I_m , А	5,64	0,846	42,3	1,41	0,564	0,987	5,64	4,23
T , с	0,01	0,02	0,04	0,0025	0,025	0,02	0,01	0,0025

Окончание табл.3.1

ψ_u , рад	$-\pi/4$	$\pi/6$	$\pi/2$	$\pi/10$	$\pi/9$	$-\pi/8$	$-\pi/4$	$-\pi/8$
ψ_i , рад	$\pi/8$	$-\pi/4$	$\pi/8$	$-\pi/8$	$-\pi/5$	$\pi/7$	$-\pi/6$	$\pi/10$

Таблица 3.2

Параметры	Вариант							
	1	2	3	4	5	6	7	8
R_k , Ом	4	6	3	8	12	16	24	18
L_k , Гн	0,00478	0,0255	0,00318	0,00239	0,051	0,0191	0,0143	0,00955
f , Гц	100	50	200	400	50	100	200	400

Таблица 3.3

Параметры	Вариант							
	1	2	3	4	5	6	7	8
I , А	0,4	2	3	0,8	1,2	1,6	2,4	1,8
U , В	20	48	60	12	36	90	120	360
P , Вт	6	60	45	10	12	72	180	450
f , Гц	100	50	200	400	50	100	200	400

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 = 314 \text{ рад/с}; \quad \psi_u = -\pi/6 = -30^\circ; \quad \psi_i = \pi/4 = 45^\circ$$

U_m – амплитудное значение напряжения; I_m – амплитудное значение тока;

$\omega = 2\pi f$ – угловая частота; $f = 1/T$ – частота синусоидальных напряжения и тока; T – период; ψ_u – начальная фаза синусоидального напряжения; ψ_i – начальная фаза синусоидального тока.