

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА
(РОСАВИАЦИЯ)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ» (МГТУ ГА)

Кафедра аэродинамики, конструкции и прочности
летательных аппаратов

С.Ф. Бородкин, М.А. Киселев

ПРИКЛАДНЫЕ МЕТОДЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО
МОДЕЛИРОВАНИЯ
ДВИЖЕНИЯ БЕСПИЛОТНЫХ
ВОЗДУШНЫХ СУДОВ

Учебное пособие

*Утверждено редакционно-
издательским советом МГТУ ГА
в качестве учебного пособия*

Москва
ИД Академии Жуковского
2023

УДК 519.87:533.6.013:623.746.-519

ББК 052-015

Б83

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Московского государственного технического университета ГА

Рецензенты:

Петров Ю.В. (МГТУ ГА) – д-р техн. наук, профессор;

Овчинников В.В. (МГТУ им. Н.Э. Баумана) – д-р техн. наук, профессор

Бородкин С.Ф.

Б83

Прикладные методы математического моделирования движения беспилотных воздушных судов [Текст] : учебное пособие / С.Ф. Бородкин, М.А. Киселев. – М. : ИД Академии Жуковского, 2023. – 124 с.

ISBN 978-5-907699-64-9

Учебное пособие издаётся в соответствии с рабочей программой дисциплины «Прикладные методы математического моделирования движения БВС» по учебному плану для обучающихся по направлению подготовки 25.03.03 «Аэронавигация», профиль «Эксплуатация беспилотных авиационных систем» всех форм обучения.

Рассмотрено и одобрено на заседаниях кафедры 07.07.2023 г. и методического совета 08.07.2023 г.

УДК 519.87:533.6.013:623.746.-519

ББК 052-015

Св. тем. план 2023 г.

поз. 9

БОРОДКИН Сергей Филиппович, КИСЕЛЕВ Михаил Анатольевич

ПРИКЛАДНЫЕ МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
ДВИЖЕНИЯ БЕСПИЛОТНЫХ ВОЗДУШНЫХ СУДОВ

Учебное пособие

В авторской редакции

Подписано в печать 12.10.2023 г.

Формат 60x84/16 Печ. л. 7,75 Усл. печ. л. 7,21

Заказ № 978/0621-УП08 Тираж 30 экз.

Московский государственный технический университет ГА
125993, Москва, Кронштадтский бульвар, д. 20

Издательский дом Академии имени Н. Е. Жуковского
125167, Москва, 8-го Марта 4-я ул., д. 6А

Тел.: (495) 973-45-68 E-mail: zakaz@itsbook.ru

ISBN 978-5-907699-64-9

© Московский государственный технический
университет гражданской авиации, 2023

ОГЛАВЛЕНИЕ

СПИСОК ПРИНЯТЫХ СОКРАЩЕНИЙ	5
ВВЕДЕНИЕ	6
1. МОДЕЛИ И МОДЕЛИРОВАНИЕ	8
1.1. Понятие моделирования	8
1.2. Классификация моделей	9
2. МЕТОДОЛОГИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ	13
2.1. Математические модели и их виды	13
2.2. Адекватность математических моделей	18
2.3. Понятие о прямых и обратных задачах, задачах идентификации	20
2.4. Алгоритм научных исследований с помощью математического моделирования	22
2.5. Общие принципы построения математических моделей	28
3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЗАДАЧ ДВИЖЕНИЯ БВС	32
3.1. Общая формулировка математической модели динамической системы	32
3.2. Краткая характеристика математических моделей динамики полета ..	34
3.3. Математические модели кинематики материальной точки	36
3.4. Математические модели динамики материальной точки	37
3.5. Математические модели динамики твердого тела	41
4. ПРИМЕНЕНИЕ СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫХ СИСТЕМ И СТАНДАРТНЫХ ПРОЦЕДУР ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЗАДАЧ ДВИЖЕНИЯ БВС	46
4.1. Моделирование задач движения БВС с помощью специализированных систем	46
4.2. Применение стандартных процедур и функций для решение дифференциальных уравнений	51
4.3. Применение стандартных процедур и функций для решения задач интерполяции и аппроксимации данных	57
5. МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРАЕКТОРНЫХ ЗАДАЧ ДВИЖЕНИЯ БВС	62
5.1. Моделирование движения БВС в вертикальной плоскости	62
5.2. Моделирование движения БВС в горизонтальной плоскости	62
5.3. Моделирование пространственного движения БВС	63
5.4. Моделирование взлета БВС	64
5.5. Моделирование посадки БВС	71
6. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ УСТОЙЧИВОСТИ И УПРАВЛЯЕМОСТИ БВС	75
6.1. Линеаризация уравнений движения БВС	75
6.2. Расчет характеристик устойчивости в продольном движении	77
6.3. Расчет переходных процессов БВС в малом продольном движении	82
6.4. Расчет балансировочных диаграмм БВС в полете со скольжением	84
6.5. Расчет собственных динамических свойств БВС в боковом движении ..	88
6.6. Расчет переходных процессов БВС в изолированном движении рысканья	91

6.7. Расчет переходных процессов БВС в изолированном движении крена	93
7. ОСОБЕННОСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ АВАРИЙНЫХ СИТУАЦИЙ ПРИ ДВИЖЕНИИ БВС САМОЛЕТНОГО ТИПА	95
7.1. Сваливание БВС самолетного типа.....	95
7.2. Штопор БВС самолетного типа.....	97
8. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ТРАЕКТОРНЫМ ДВИЖЕНИЕМ БВС	107
8.1. Формулировка задачи оптимального управления	107
8.2. Оптимальная траектория разгона БВС	112
8.3. Оптимальные траектории набора высоты и скорости	117
8.4. Применение прямых методов для решения задач оптимального управления	119
ЛИТЕРАТУРА	123

СПИСОК ПРИНЯТЫХ СОКРАЩЕНИЙ

АУ	– автомат устойчивости;
БВС	– беспилотное воздушное судно;
БВС СТ	– беспилотное воздушное судно самолетного типа;
ВПП	– взлетно-посадочная полоса;
ВС	– воздушное судно;
ВУВ	– воздушный участок взлета;
ДТ	– демпфер тангажа;
ДУ	– дифференциальные уравнения;
ЛА	– летательный аппарат;
ЛТХ	– летно-технические характеристики;
МГП	– местная горизонтальная плоскость;
ОУ	– оптимальное управление;
РУД	– рычаг управления двигателем БВС станции внешнего пилота;
РУС	– ручка управления БВС станции внешнего пилота;
САУ	– система автоматического управления;
ЭВМ	– электронно-вычислительная машина.
V_{FE}	– максимальная скорость полета с выпущенными закрылками;
V_{MO}	– максимальная эксплуатационная скорость;
V_{min}	– минимальная скорость горизонтального полета в текущей конфигурации.

ВВЕДЕНИЕ

Познание и изучение окружающего нас мира можно осуществлять различными способами и методами. Но при исследовании различных сложных объектов, явлений, процессов, при создании, организации и оптимизации сложных систем метод моделирования является одним из самых перспективных методов.

Моделирование – это не только удобный, но в некоторых условиях и необходимый научный прием. Среди таких особых условий можно выделить основные причины, вынуждающие применять моделирование, без которого изучение оригинала невозможно:

- сложность или дороговизна натурального исследования (например, в экономике, в экологии);
- невозможность натурального исследования по причинам аварийности или бесконечного времени ожидания результатов (например, аварийные ситуации при полетах, изменение климата на планете).

Математическое моделирование – это научный прием, способ исследования объектов и получения новой информации о них. Решение большинства научных и инженерно-технических задач (проектирование, оптимальное управление объектом, прогнозирование развития процессов во времени и др.) базируется на математическом моделировании.

Сущность моделирования заключается в замене реального объекта (процесса, явления, системы) моделью, которая находится с ней (с ними) в некотором соответствии и способна воспроизводить интересующие исследователя свойства или характеристики реальной системы.

Основой математического моделирования является математическая модель – совокупность математических объектов и отношений, которые отображают объекты и отношения, существующие в некоторой области реального мира (предметной области).

Фактически, любая наука представляет собой непрерывный процесс моделирования – творческий процесс познания реальности до такого уровня, который позволяет прогнозировать определенные свойства оригинала в определенных условиях.

Повышению интереса к методам моделирования (в частности к методам математического моделирования) как в науке и технике, так в других областях, способствовало развитие и широкое распространение средств вычислительной техники. С помощью моделей, реализованных на ЭВМ, можно изучать новые явления, решать практически все задачи анализа и проектирования сложных систем, осуществлять выбор наилучших вариантов решений, выполнять анализ и прогнозирование поведения социальных и экономических систем, решать множество других задач.

В учебном пособии основное внимание уделяется использованию различного математического аппарата для описания функционирования и движения воздушных судов (ВС), в том числе беспилотных воздушных судов самолетного типа (БВС СТ), которые могут быть отнесены к классу

динамических объектов и систем. Рассмотрены как общие вопросы моделирования, классификации моделей, методы и алгоритмы построения математических моделей, так и задачи прикладного характера, связанные с построением математических моделей динамики полета БВС разной степени детализации и решении с их помощью траекторных задач и задач устойчивости и управляемости. Отдельные главы учебного пособия посвящены моделированию критических режимов полета БВС (сваливанию и штопору), а также знакомству с задачами оптимального управления и методами решения указанных задач.

1. МОДЕЛИ И МОДЕЛИРОВАНИЕ

1.1. Понятие моделирования

Под моделированием в широком смысле принято понимать процесс построения, изучения и совершенствования моделей, их использование в научных исследованиях (теоретических и экспериментальных), применение моделей непосредственно в процессах планирования, управления, оптимизации, прогнозирования, контроля и т.д.

Моделирование как метод исследования является мощным инструментом познания на протяжении всей истории развития человечества. Одним из примеров созданной человеком системы моделей, адекватно отражающей широкий класс явлений и процессов реального мира, являются, например, модели классической механики.

Моделирование неразрывно связана с человеческой деятельностью. История развития науки и техники является по сути историей развития моделирования явлений природы и физических объектов, которые играли жизненно важную роль в деятельности человечества с тех пор, как оно стало стремиться к пониманию и изменению окружающей среды.

Естественно, что моделирование первоначально носило материальный и наглядный характер: наскальный рисунок, геометрические построения в земледелии, расчеты при проектировании сложных архитектурных сооружений и т.п. Древние философы считали, что отобразить явления природы можно только с помощью словесных моделей (вербальных, по современной терминологии).

Моделей без оригиналов не существует. Оригиналами моделей могут быть:

- объекты (самолет, птица, атмосфера, атом и т.д.);
- процессы (полет самолета, движение жидкости в гидросистеме, изменение состояния атмосферы, изменение энергетического уровня атома, экономические процессы в обществе и т.д.);
- явления природы (землетрясение, изменение солнечной активности, обледенение, разряды атмосферного электричества и т.д.).

В истории моделирования можно выделить три направления.

Первое связано с технологией изготовления объектов по соответствующим образцам-моделям (посуда, оружие, литье). Второе направление связано с материальными макетами объектов, которые использовались при решении архитектурно-строительных и технических задач. Третье образовано научными представлениями. Примером может служить трактаты Евклида «Начала» и И. Ньютона «Математические начала натуральной философии», которые являются моделями для изучения и объяснения наблюдаемых на практике явлений геометрии и механики.

Использование материальных моделей для решения технических и технологических задач началось еще в глубокой древности. Создаваемые материальные модели служили средством для разработки новой и

усовершенствования существующей техники. Моделирование становится средством и способом поиска рациональной конструкции устройств. Например, в 1804 г. сэр Д. Кейли изготовил для экспериментов модель планера с крылом малого удлинения площадью около 993,5 см². По словам самого Кейли, модель совершала полёты на расстояние 18-27 м, с помощью модели получены экспериментальные данные, способствующие становлению аэродинамики и динамики полета как науки.

Моделирование особо актуально в случаях, когда:

1. Необходимо изучить свойства еще несуществующего объекта. Например, серийному изготовлению самолетов предшествует проектирование, результатом которого является модель будущего объекта, по которому устанавливают соответствие предъявляемым требованиям и правильность выбранных технических решений.

2. Масштаб времени реальных процессов или геометрические размеры объекта несоизмеримы с возможностями нашего восприятия. Моделирование позволяет изучать и весьма быстрые и достаточно медленные процессы, микро- и макроскопические объекты.

3. Реальный объект или процесс недоступен для прямого изучения. Средства наблюдения (измерения) способны существенно исказить естественный ход событий, либо прямые измерения в принципе невозможны.

4. Эксперименты с реальным объектом дороги или слишком опасны. Подобная ситуация имеет место в экономических и социальных науках, где эксперименты с реальными системами могут привести к необратимым катастрофическим последствиям. Многие сложные технические системы существуют в единственном экземпляре.

Таким образом, модель служит для получения информации об объекте исследования, которую невозможно получить путем непосредственного исследования оригинала, во многих случаях моделирование – единственно возможный путь изучения объектов и процессов.

1.2. Классификация моделей

Модели строятся для изучения самых разнообразных объектов с чрезвычайно широким спектром признаков, поэтому общепринятой их классификации на сегодня не существует [29].

Каждая модель характеризуется следующими основными признаками:

1. Принадлежностью к определенному классу задач.
2. Принадлежностью к определенному классу объектов моделирования.
3. Способом построения модели.
4. Характеристикой основных свойств объекта, которые отражаются моделью.
5. Целью моделирования.

Единую классификацию моделей составить практически невозможно из-за многозначности понятия «модель» в современной жизни. Но можно, например, представить классификацию моделей по степени их абстрагирования от оригинала в следующем виде (рис. 1.1).



Рис.1.1. Классификация моделей по степени абстрагирования от оригинала

К материальным (или натурным) относятся модели, воспроизводящие основные геометрические, физические, динамические и функциональные характеристики изучаемого объекта или явления. Это модели реального мира, их можно услышать, увидеть, осязать. Они подчиняются физическим законам мира, в котором мы живем. Основными видами материальных моделей являются геометрические и физические и аналоговые модели.

Геометрическая модель отображает пространственные и геометрические свойства объекта-оригинала (например, макеты архитектурных сооружений, модели самолетов, модели солнечной системы).

Физическая модель воспроизводит физические свойства оригинала. Такая модель представляет собой увеличенную или уменьшенную копию оригинала. Физическая модель создается по строгим законам теории подобия. Например, для экспериментального определения аэродинамических характеристик самолета в аэродинамическую трубу помещается его геометрически подобная модель.

К достоинству материального моделирования следует отнести получение достаточно достоверных результатов, которые необходимы для принятия правильных решений при проектировании, планировании, контроле, управлении, прогнозировании и т.д. К недостаткам следует отнести относительно высокую стоимость по сравнению с математическими моделями, а также трудность быстрой (оперативной) доработки модели при переходе от одного варианта к другому. Изготовление физической модели занимает много времени, а соответствие измеренных искомым величин на модели оригиналу бывает достаточно грубым, что искажает в некоторой степени изучаемый процесс.

Аналоговая модель отличается от оригинала по своей физической природе, но динамика ее внутренних процессов может быть описана теми же математическими соотношениями, которыми описывают процессы в моделируемой системе-оригинале.

Аналоговое моделирование не предполагает тождественности физической природы модели и прототипа, но требует, чтобы модель при некоторых условиях вела себя аналогично поведению оригинала (косвенное подобие).

Аналогия основана на возможности моделирования явления (системы, процесса) одной природы явлениями (системами, процессами) совсем другой природы. Например, электромеханическая аналогия: колебания в механических системах можно моделировать колебаниями в электрических цепях. При этом модель (аналог) и оригинал (прототип) описываются одинаковыми математическими соотношениями, например, дифференциальными уравнениями. На этом сходстве основана теория аналогий и аналоговое моделирование. Аналоговые, а затем цифровые и гибридные вычислительные машины позволяют решать широкий класс линейных и нелинейных дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях.

На моделях-аналогах можно «проигрывать» различные ситуации, даже маловероятные, например, ситуации, до которых объект-оригинал нельзя допускать – критические, аварийные и чрезвычайные ситуации. Данный класс моделей используется также при исследовании сложных систем, над которыми нельзя ставить опасные эксперименты (ракетный комплекс, экономика, производство, экология, летательный аппарат и т.д.).

В качестве аналоговых моделей используются электрические, электронные, механические, гидравлические, пневматические, тепловые и другие системы.

К информационным (или идеальным, или абстрактным) относятся модели, имеющие абстрактную, то есть мыслимую аналогию с объектом-оригиналом. Такие модели не имеют материального воплощения, потому что строятся только на информации. К ним относятся вербальные и знаковые модели.

Модель называется вербальной (или интуитивной), если она представима в мыслимой или разговорной форме, оригинал такой модели либо не нуждается в формализации, либо не поддается ей. Такая модель получается в результате раздумий и умозаключений человека. В качестве моделей используются знаковые изображения какого-либо вида: схемы, графики, чертежи, иероглифы, наборы символов, включающие в себя и совокупность правил оперирования этими знаковыми образованиями и конструкциями. Примерами таких моделей являются:

- математические формулы как модели процессов и объектов;
- язык химических формул;
- нотная запись;
- любые алгоритмические языки и языки программирования;
- деньги как модель стоимости;
- рабочие чертежи как модели деталей будущей конструкции;
- любой язык человеческого общения (устного или письменного).

Такие модели выражают основные свойства и отношения реального объекта или процесса с помощью определенной системы знаков и символов,

или, другими словами, средствами любого формального языка (литературного, алгоритмического, математического, программирования).

Все знаковые модели являются символическими, это искусственные логические объекты, которые замещают реальные. Это могут быть списки, схемы, чертежи, графики, математические формулы и т.д. Например, плакат со схемой гидравлической системы ЛА – это знаковая модель гидросистемы, знаками которой являются символы агрегатов и линии, которые обозначают связи между ними, из которых составлена схема на плакате.

$$Y_a = c_{ya} \frac{\rho V^2}{2} S. \quad (1.1)$$

Уравнение (1.1) – это знаковая модель подъемной силы крыла, она составлена из знаков – латинских букв и математических символов.

Среди представителей абстрактных моделей можно выделить следующие.

Мнемоническая модель отображает свойства объекта (оригинала) посредством схемы, графа, графика, чертежа, диаграммы, химической формулы и т. д.

Математическая модель отображает свойства объекта (оригинала) на языке математических и логических соотношений.

Вычислительная модель – программа, реализующая алгоритм (вычислительную схему) решения математической модели.

Компьютерная модель представляет собой электронный эквивалент исследуемого объекта. Это комплекс специальных программных и аппаратных средств (абстрактная и физическая составляющие).

2. МЕТОДОЛОГИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

2.1. Математические модели и их виды

Математическое моделирование — это совокупность фундаментальных и прикладных научных направлений по изучению процессов и явлений с помощью математических методов, вычислительных алгоритмов и информационных технологий, реализуемых в программных комплексах, с помощью которых проводится вычислительный эксперимент и принимается решение по результатам исследований.

Элементы математического моделирования использовались с самого начала появления точных наук: слово «алгоритм» происходит от имени средневекового арабского ученого Аль-Хорезми (аль Хорезми Абу Абдала Мухамед бен Мусса аль Маджуси, 787 г. – ок. 850 г.).

Основой математического моделирования является математическая модель – совокупность математических объектов и отношений, которые отображают объекты и отношения, существующие в некоторой области реального мира (предметной области).

Таким образом, математическая модель, как правило, представляет собой совокупность некоторых математических соотношений (или элементов – геометрическая модель, например), с помощью которых задается описание реального объекта.

Математическая модель, как и всякая другая, не может описать всех свойств реального объекта, а устанавливает связи лишь между его основными для данного исследования факторами. Цель проводимого исследования определяет какие именно свойства являются определяющими и должны быть учтены при построении математической модели, какие являются второстепенными и могут на первых этапах исследования не учитываться.

Основными требованиями, предъявляемыми к математическим моделям, являются:

1. Адекватность – означает то, что модель отражает заданные свойства объекта с приемлемой точностью. При этом подразумевается, что речь идет о тех свойствах, которые характеризуют как состояние, так и поведение реального объекта. Совпадение количественных характеристик объекта или параметров рассматривается с установленной заранее точностью, что, в свою очередь, определяется требуемой точностью представления результатов моделирования или допустимой точностью измерений.

2. Полнота – означает то, что модель предоставляет исследователю всю необходимую информации об объекте.

3. Гибкость модели означает возможность воспроизведения различных ситуаций во всем диапазоне изменения условий и параметров.

4. Непротиворечивость модели заключается в том, что она не должна содержать зависимостей, которые бы противоречили друг другу. В некоторых случаях выявить противоречия модели достаточно сложно, и это могут осуществить лишь специалисты в области математического моделирования.

5. Универсальность модели состоит в том, что она служит математическим описанием для целого класса (близких или далеких по характеру) задач. Например, дифференциальные уравнения являются математическими моделями для колебаний математического маятника, описывают колебательные процессы в механической и электрической системах, описывают колебания арки моста, процессы, протекающие в струнах музыкальных инструментов, и т.д. Универсальность определяется также числом и составом учитываемых в модели входных и выходных параметров.

6. Экономичность модели характеризуется затратами вычислительных ресурсов для ее реализации, а именно, затратами машинного времени и памяти. Эти затраты зависят как от особенностей выбранной модели, так и от методов решения соответствующих математических задач.

Требования адекватности и универсальности, с одной стороны, и высокой экономичности, с другой, очевидно, являются противоречивыми. Поэтому для удовлетворения всем указанным требованиям разработчик модели должен идти на компромисс.

В настоящее время посредством математического моделирования проводится расчет прочности авиационных конструкций, коррозионной стойкости материалов, аэродинамических характеристик ЛА, определяются оптимальные управленческие решения и т.д.

Классификация математических моделей по форме их представления приведена на рис. 2.1.



Рис.2.1. Классификация моделей по форме представления

Математические модели в пространстве состояний представляют собой общий взгляд на любые системы. Их используют для исследования и синтеза сложных систем, как многомерных, так и многосвязных. С математической точки зрения описание систем в пространстве состояний означает использование методов матричного исчисления и векторного анализа.

Математическая модель в форме весовой функции представляет математическое выражение, используемое при решении задач, связанных с суммированием, интегрированием или усреднением с целью придания некоторым элементам большего веса в результирующем значении по сравнению с другими элементами. Задача часто возникает в статистике и математическом анализе, тесно связана с теорией меры. Весовые функции могут быть использованы как для дискретных, так и для непрерывных величин. Метод требует экспертных знаний в соответствующей области.

Математические модели в виде амплитудно-частотной и фазочастотной характеристики используются главным образом при исследовании электромеханических переходных процессов в современных электромеханических системах.

Амплитудная частотная характеристика представляет собой отношение амплитуды установившегося выходного гармонического сигнала к амплитуде установившегося входного гармонического сигнала при частоте входного сигнала.

Фазовая частотная характеристика показывает, насколько по фазе выходной гармонический сигнал при частоте сдвинут относительно входного сигнала.

По характеру моделируемого процесса модели подразделяются на (рис.2.2):

– детерминированные, которые соответствуют детерминированным процессам, имеющим строго однозначную связь между физическими величинами, характеризующими состояние системы в какой-либо момент времени. Детерминированная модель позволяет однозначно вычислить и предсказать значения выходных величин по значениям входных параметров и управляющих воздействий;

– неопределенные, которые исходят из того, что изменение определяющих величин происходит случайным образом и значения выходных величин находятся в вероятностном соответствии с входными величинами и не определяются однозначно.

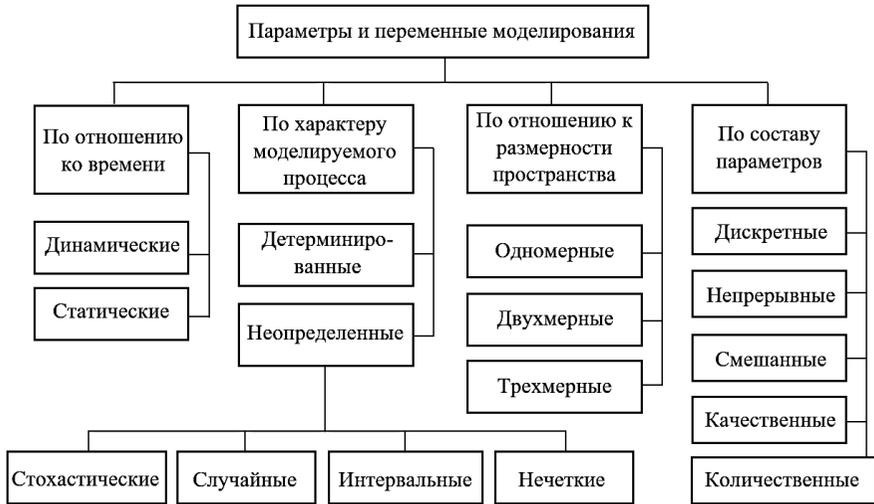


Рис.2.2. Классификация моделей по характеру моделируемого процесса

Модели с неопределенными параметрами можно подразделить на следующие группы [5,6]:

- стохастические – значения всех или отдельных параметров модели определяются случайными величинами, заданными плотностями вероятности;
- случайные – значения всех или отдельных параметров модели определяются случайными величинами, которые зависят от оценки плотностей вероятности, определяемой в результате обработки ограниченной экспериментальной выборки данных параметров;
- интервальные – значения всех или отдельных параметров модели описываются интервальными величинами, заданным интервалом, образованным минимальными и максимально возможными значениями параметра;
- нечеткие – значения всех или отдельных параметров модели описываются функциями принадлежности соответствующему нечеткому множеству.

Модели по отношению к размерности пространства классифицируются на одномерные, двумерные и трехмерные. Такое разделение применимо для моделей, имеющих в качестве параметров координаты пространства. Например, разгон БВС в горизонтальном прямолинейном полете можно рассматривать как одномерную задачу, выполнение маневра в горизонтальной плоскости – двумерную, а маневр набора высоты после взлета с одновременным разворотом на заданный курс – трехмерную.

По отношению ко времени модели делят на динамические и статические. Некоторые характеристики моделей являются неизменными, т. е. не меняют своих значений в течение времени, а некоторые изменяются по определенным законам. Если состояние системы меняется со временем, то модели называют

динамическими, в противном случае – статическими. Статическое моделирование служит для описания состояния объекта в фиксированный момент времени, а динамическое – для исследования объекта во времени.

Разделение моделей на качественные и количественные, дискретные и непрерывные, а также на смешанные происходит в зависимости от вида используемых множеств параметров модели.

В зависимости от способа получения информации математические модели делят на теоретические и эмпирические (формальные).

Теоретические модели получают на основе изучения свойств исследуемого объекта и процессов, происходящих в нем [7]. Теоретическая модель описывает физические закономерности, наблюдаемые в объекте-оригинале.

В основу таких моделей могут быть положены:

- фундаментальные законы природы – законы сохранения энергии, массы, импульса, момента импульса, электрического заряда и т. д. [8];
- феноменологические законы (описательные, выведенные на основе наблюдений, опытов, не разъясняющие физической сущности явлений, имеющие ограниченную область действия). К ним относятся законы Ома, Ампера, законы Ньютона (при скоростях движения тел V , много меньших скорости света c), закон Гука, выражающий связь между силой упругости и упругой деформацией тела (при малых деформациях), закон теплопроводности Фурье, связывающий градиент температуры в среде с плотностью теплового потока (для изотропных сред) и т. д.

Структура и параметры теоретических моделей имеют определенное физическое толкование [26,27].

Эмпирические модели применяют в следующих случаях:

- когда отсутствует информация о физических свойствах изучаемого объекта и о механизме протекающих в нем процессов;
- когда исследуемый технический объект настолько сложен, что не представляется возможным математически адекватно описать сущность его внутренних процессов.

Эмпирические модели получают экспериментальным путем. Моделируемый объект рассматривается как черный ящик. Для измерения доступны только его входные сигналы (управляющие воздействия) и выходные сигналы (отклики или реакции).

Абстрагируясь от внутреннего устройства и физической сущности объекта, изучают его реакции на различные внешние воздействия.

Различают активный эксперимент над объектом, когда на его вход подаются специально сформированные воздействия – тестовые сигналы, и пассивный эксперимент, который регистрирует входные и выходные сигналы объекта в режиме нормальной эксплуатации. Обработка результатов измерений входных и выходных сигналов объекта позволяет выявить связь (соответствие) между ними и определить математическую модель, адекватно описывающую эту связь. Однако построенная эмпирическая модель может считаться

адекватной только в ограниченной области – в пределах заданного диапазона значений управляющих воздействий.

Формирование математической модели объекта на основе наблюдений его входных и выходных сигналов называют идентификацией. Решить задачу идентификации (в общем случае) — значит определить структуру и параметры модели, обеспечивающие наилучшую с точки зрения заданного критерия близость выходных функций модели и объекта при совпадающих входных воздействиях [2].

Понятие математических моделей объединяет чрезвычайно широкий круг моделей разнообразного вида. Используемая в аэродинамике аппроксимация поляры летательного аппарата зависимостью

$$c_{xa} = c_{xa0} + \frac{c_{ya}^2}{\pi\lambda},$$

может рассматриваться как простейшая математическая модель. Но математическими моделями называются и сложные вычислительные комплексы с многочисленным программным обеспечением.

2.2. Адекватность математических моделей

Понятие адекватности математической модели относится к основным понятиям теории математического моделирования.

Адекватность математической модели – это соответствие результатов вычислительного эксперимента поведению реального объекта. Таким образом, адекватность модели означает, что требования точности отражения свойств реального объекта выполнены в той мере, которая достаточна для решения поставленной задачи.

Математическая модель может быть адекватна относительно одного класса ситуаций (состояние системы + состояние внешней среды) и не адекватна относительно другого. Применение неадекватной модели может привести либо к существенному искажению реального процесса или свойств (характеристик) изучаемого объекта, либо к изучению несуществующих явлений, свойств и характеристик.

Причиной неадекватности математической модели могут быть неполный учет факторов, влияющих на поведение реального объекта, связанных с незнанием его реальных свойств.

Другой причиной неадекватности математической модели могут стать неполнота и неточность используемых при построении моделей данных наблюдений и экспериментов.

При построении математической модели используются упрощения и принимаются допущения, которые ограничивают область применения модели. Использование математической модели в условиях, когда эти допущения нарушаются, также является причиной неадекватности модели.

При стремлении к построению простой модели должен соблюдаться основной принцип упрощения модели: упрощать модель можно до тех пор, пока сохраняются основные свойства, характеристики и закономерности, присущие объекту моделирования.

Сложность (простота) модели и ее адекватность взаимосвязаны и находятся в определенном противоречии. Слишком простые модели не обеспечивают отражения свойств реального объекта в необходимой полноте. Но слишком сложные модели часто не обеспечивают необходимую точность расчетов. Применение таких моделей требует достаточно сложных методов анализа, что неизбежно вносит определенную погрешность, требует больших затрат времени и средств. Кроме того, в любой модели используются эмпирические и полуэмпирические законы, низкая степень точности которых существенным образом влияет на качество результатов моделирования.

С практической точки зрения нецелесообразно строить сложные математические модели и использовать слишком точные вычислительные методы, если при разработке модели приняты весьма грубые исходные допущения. При неточности исходных данных любая математическая модель не гарантирует высокой степени адекватности. Для разрешения данной проблемы обычно создают ряд моделей, начиная с самых простых.

Любой результат моделирования должен восприниматься критически. Проверка адекватности модели является одним из важнейших этапов ее разработки.

Оценка адекватности проводится с учетом целей исследования. Поэтому возможны различные подходы к оценке адекватности различных моделей.

Для оценки адекватности математических моделей механических систем и процессов, характеризующихся измеримыми величинами – параметрами – необходимо провести сравнение параметров модели и оригинала в одних и тех же условиях. Очевидно, что сравнивать следует лишь соответствующие друг другу параметры между собой и только в той области функционирования объекта, в которой предполагается его исследовать.

Математические модели механических систем и процессов строятся в основном как подобные детерминированные модели, обладающие общим с оригиналом математическим описанием. Поэтому для адекватности математической модели поведению оригинала – механической системы – достаточно убедиться в выполнении двух свойств: точности и непротиворечивости. Однако так звучат лишь общие, образные требования к адекватности, для практического применения необходимо сформулировать математические формы этих требований.

Точность в задачах механики означает, что обобщенная характеристика рассогласования соответствующего параметра модели и оригинала ($\Delta u = u_{\text{модели}} - u_{\text{оригинала}}$) должна быть не больше, чем заранее заданное значение приемлемой погрешности $\Delta u_{\text{доп}}$. В качестве такой обобщенной характеристики может выступать наибольшее по модулю значение рассогласования, среднее значение рассогласования или статистическая оценка.

Поскольку сравниваемые параметры в области функционирования объекта могут принимать множество различных значений, постольку какие-либо выводы о соответствии их поведения можно сделать только на основании статистической обработки таких множеств. Поэтому адекватность проверяется

с помощью статистических критериев, которые могут с определенной вероятностью свидетельствовать о соответствии результатов вычислительного эксперимента поведению реального объекта в соответствующих условиях.

Таким образом для проверки адекватности необходимо иметь:

- исчерпывающую информацию о реальном случае (например, запись параметров полета средствами объективного контроля);
- результаты контрольного вычислительного эксперимента, воспроизводящего известный реальный случай (полет);
- критерий оценки точности математической модели;
- критерий проверки непротиворечивости математической модели.

2.3. Понятие о прямых и обратных задачах, задачах идентификации

Прямая задача математического моделирования формулируется следующим образом: все параметры исследуемой задачи известны и изучается поведение модели в различных условиях. Требуется определить реакцию объекта или его поведение в ответ на известное внешнее воздействие. Решение данной задачи выполняется с помощью проведения численных экспериментов.

Рассмотрим формулировку прямой задачи, применительно к движению БВС.

Если при исследовании движения БВС известны условия полета и возмущающие действия, то при задании управляющих функций при заданных начальных условиях уравнения его движения решаются однозначно и полностью определяют изменение по времени всех переменных, характеризующих движение БВС [1,18]. Решение уравнений движения в этом случае называют прямой задачей динамики полета (задача анализа).

Решение прямой задачи динамики полета проводят при расчете траектории полета и других основных характеристик движения ЛА с известными конструктивными параметрами с целью выбора наивыгоднейшего сочетания этих параметров.

Исходными данными являются внешние силы и моменты, действующие на летательный аппарат, параметры конструкции ЛА и его системы управления.

Расчет траекторий включает в себя разработку системы дифференциальных и линейных уравнений, описывающих движение ЛА (число уравнений в системе может быть больше 100). Аналитические способы решения подобных систем уравнений пока не разработаны, решения проводятся численными методами, в результате которых определяются параметры траектории движения ЛА.

Обратная задача моделирования применительно к динамическим системам формулируется следующим образом.

Реакция объекта известна или задана. Требуется определить, какое управление или внешнее воздействие способно вызвать подобную реакцию.

Обратная задача в терминах динамики полета формулируется следующим образом: определить требуемое управление, обеспечивающее заданный или желаемый характер траекторного движения (задача управления).

Обратная задача может формулироваться также как задача оптимизации: например, исследование зависимости летных характеристик ЛА от конструктивных параметров с целью выбора наиболее выгоднейшего сочетания этих параметров по заданным тактико-техническим данным.

В этом случае проводится большое количество траекторных расчетов, на основании которых определяются наиболее рациональные варианты компоновочной схемы и основные проектные параметры летательного аппарата.

Второй тип обратных задач (задачи оптимизации) подробно рассматриваются в главе 8.

В процессе построения математической модели при недостаточной степени ее адекватности или в условиях недостаточной информации об оригинале возникает необходимость уточнения, «доводки» модели. Эта процедура носит название идентификации – задачи определения недостающих или неточно известных параметров или функциональных соотношений модели с помощью результатов вычислительного эксперимента и данных о реальном поведении объекта.

Приведем формулировку задачи идентификации. Известно внешнее воздействие на объект, известна реакция объекта, требуется определить параметры модели объекта или построить собственно модель. В этом случае методами математической статистики и регрессионного анализа можно построить чисто формальную модель объекта типа «черный ящик» [15].

Это, конечно, простейший пример задачи идентификации одного параметра по-другому одному известному параметру. В общем случае решение задачи идентификации, например, поляры самолета по данным летных испытаний, представляет собой сложную проблему.

Для решения задачи идентификации приходится проводить множество расчетов, составляющих специальный контрольный вычислительный эксперимент по поэтапному подбору и коррекции математической модели. (Только в том случае, когда модель строго линейная, можно решить задачу идентификации за один расчет – найти x из уравнения $ax + b = y$ при известном y). Таким образом, задача идентификации решается с помощью метода последовательных приближений в широком смысле. При обработке результатов такого вычислительного эксперимента используются статистические методы: метод наименьших квадратов, метод моментов, метод наибольшего правдоподобия.

Поскольку задачу идентификации нельзя решить «прямо», т.е. нельзя прямым вычислением определить недостающие параметры, то такая задача относится к особому классу – обратных задач. Следует заметить, что математически строго (т.е. безусловно верно) решить обратную задачу нельзя в принципе (кроме случая простейшей линейной математической модели). Даже квадратичная модель допускает два решения, а сложные нелинейные зависимости вообще необратимы. По выражению академика А.Н. Тихонова любое решение обратной задачи следует рассматривать не более чем «интерпретацию данных наблюдений». Таким образом, идентификация

математических моделей сводится по сути к «интерпретации» исходного приближенного числового материала и моделей тех отдельных элементов, которые не описываются законами природы.

Для решения задач идентификации чаще всего используются: метод проб и ошибок, метод перебора – выборочного или последовательного, метод проверки гипотез. Последним методом, в частности, решаются задачи расследования летных происшествий.

2.4. Алгоритм научных исследований с помощью математического моделирования

Особенностью математических моделей является то, что получение с их помощью каких-либо результатов связано с вычислениями. Так возникает необходимость понятия вычислительного эксперимента. Вычислительный эксперимент – это получение результатов с помощью математической модели для какого-либо конкретного случая исследований. Это может быть, как единичный расчет одного параметра, так и комплекс расчетов целого спектра параметров модели во множестве определенным образом связанных условий. Во втором случае большое значение приобретает процедура планирования вычислительного эксперимента, целью которого является получение максимума достоверной информации при минимуме затрат. Под достоверностью результата вычислительного эксперимента понимается одновременное выполнение двух условий: во-первых, результат должен быть достаточно точен, а во-вторых, не может быть опровергнут с помощью каких-либо дополнительных расчетов. При планировании вычислительного эксперимента используются многие методы математического моделирования – от простого здравого смысла до теории катастроф и методов математической статистики [8,18].

Выделяют основные стадии математического моделирования:

- 1) изучение оригинала: выявление основных факторов, особенностей, диапазонов исследуемых параметров, условий и задач исследования, постановка (формулировка) задачи исследования, оценка требуемой точности (содержательная постановка);
- 2) феноменологическое описание оригинала («физическое» описание): поиск аналогий и функциональных зависимостей на основе предыдущего этапа и достижений в различных областях науки (концептуальная постановка);
- 3) математическое описание оригинала (математическая постановка);
- 4) разработка алгоритмического и программного обеспечения для реализации математического описания с помощью ЭВМ;
- 5) проведение контрольного вычислительного эксперимента (воспроизводящего реальный известный случай поведения оригинала в конкретных условиях);
- 6) оценка адекватности результатов контрольного вычислительного эксперимента реальному случаю; при необходимости – повторение алгоритма с пункта 3, 2 или 1;
- 7) планирование вычислительного эксперимента в целях исследования;

- 8) проведение вычислительного эксперимента в целях исследования, обработка его результатов;
- 9) анализ результатов вычислительного эксперимента, сравнение с результатами изучения оригинала (при необходимости – повторение алгоритма с пункта 7 или 1);
- 10) формулировка выводов исследования.

Охарактеризуем основные стадии этого процесса.

Постановка задачи исходит из знаний, полученных в результате наблюдения, изучения объекта, а также из той практической проблемы, которую требуется решить. При этом из всего множества влияющих на объект факторов надо суметь отобрать существенные и определить диапазоны их изменения и особенности влияния на конечный результат. Это – уже искусство, здесь не существует общих приемов и рекомендаций. Кроме того, к этой стадии относится оценка требуемой точности результатов, диктуемая целью исследования.

Под выбором модели понимается не просто подбор из известного заранее множества, а именно синтез, составление общей модели из элементарных «кирпичиков» тех наук, с помощью которых будет исследоваться явление. Здесь действительно серьезным подспорьем является знание определений, логических цепочек и методов соответствующих разделов науки. Однако определяющим для правильности решения конкретной задачи оказывается строгость в использовании этих определений, логических цепочек и методов именно в той области и в тех условиях, где они пригодны. Нарушение такой строгости грозит внутренней несогласованностью отдельных частей модели и, как следствие, ошибочными результатами и выводами.

Проверка адекватности модели – это проверка соответствия результатов, получаемых с помощью модели, реальному поведению исследуемого объекта. На этой стадии проводится исследование и уточнение самой модели в соответствии с поставленной задачей, а также может корректироваться и постановка задачи, и общий подход к восприятию реальной ситуации.

Сутью решения практических прикладных задач является прогноз поведения объекта в различных ситуациях. К построению алгоритма прогнозирования реальной ситуации в других случаях, отличающихся от исследованных во время процесса разработки модели, можно приступать только после завершения всех стадий, описанных выше.

Каждая стадия этого процесса существенна. Пренебрежение любой из них может приводить к неверным выводам по существу решаемой практической задачи в результате таких ошибок, как:

- вычисление с недопустимой, неконтролируемой погрешностью;
- несоответствие полученных результатов поставленной задаче (полученные результаты могут оказаться решением совсем другой задачи);
- неоднозначность решения при невозможности селекции;
- неполучение решения (алгоритм расходится или не может завершиться).

Следует подчеркнуть особую значимость при моделировании четкого представления об исследуемых определенных свойствах объекта в

определенных условиях, а не всех свойствах и во всех условиях. Все свойства во всех условиях может реализовать только сам оригинал. Чем уже круг моделируемых свойств, условий и уже диапазон значений параметров, тем проще модель и легче добиться ее согласованности и адекватности, тем достовернее результаты и выводы исследования. Поэтому научные методы исследования основываются на замене оригинала моделью в четко оговоренной области свойств и условий, определяемой задачей исследования.

Построение математической модели (синтез математической модели) требует решения достаточно сложных проблем, среди которых:

- множественность критериев оценки качества функционирования моделируемой системы (многокритериальность);
- большая размерность описания сложных систем («проклятие размерности»);
- адекватность.

Под многокритериальностью понимается наличие подчас противоречивых требований к различным элементам сложной системы или к системе в целом (например, минимум времени набора заданной высоты и точность выхода на эшелон). Для решения этой проблемы применяют различные приемы ранжирования, в том числе, основанные на результатах применения методов экспертных оценок.

С «проклятием размерности» борются тоже ранжированием, а также агрегированием, что позволяет решать задачу поблочно (поагрегатно). Наиболее сложной при этом остается задача выявления факторов, способных описать изучаемое явление, а также взаимосвязи различных факторов, входных и выходных данных системы. Для этого помимо глубокого изучения физических особенностей системы подчас бывает необходимо проводить многомерный статистический анализ результатов экспериментов (вычислительных или натуральных).

При решении проблемы адекватности математической модели приходится очень придирчиво рассматривать условия моделирования, выделять из множества факторов главные, подлежащие изучению. Кроме того, в зависимости от конкретных свойств математической модели следует из множества статистических методов выбирать наиболее приемлемые и эффективные критерии.

Дадим краткую характеристику упоминавшимся ранее методам, которые применяются для разработки математических моделей – методам математического моделирования [13,17].

Ранжирование – неформализуемый анализ, в результате которого можно произвести распределение параметров по важности (рангу): наиболее важные необходимо учитывать, наименее важными иногда можно пренебречь, промежуточные по важности можно учесть в виде поправок, каждому из них можно приписать весовые коэффициенты.

Агрегирование (декомпозиция) – разбиение большого числа факторов (параметров) задачи на небольшое число групп, блоков (агрегатов) по определенному принципу. Агрегирование предполагает, с одной стороны, вполне конкретные связи между блоками, которые нетрудно формализовать и

учесть, а с другой стороны, возможность решения необходимых вопросов внутри агрегата.

Теория катастроф – часть математической логики, которая позволяет в области изменения основных параметров (факторов), связанных аналитически, выявить точки, линии, плоскости и другие границы (бифуркации), на которых происходят резкие изменения качественного поведения рассматриваемой системы – «катастрофы» той или иной интерпретации поведения системы. Так, например, в динамике полета линия разграничения I и II режимов полета самолета – граница бифуркации, где I режим характерен естественной зависимостью: чем большей скорости установившегося полета требуется достичь, тем большую тягу двигателей следует развить, а II режим характерен обратной связью, на первый взгляд неожиданной.

Метод последовательных приближений – общее название группы математических методов, в которых на каждом очередном цикле однообразных вычислений определяются новые значения параметров, более точные, которые в свою очередь используются на следующем цикле.

Метод проб и ошибок – по результатам одного или нескольких (отличающихся подбираемыми значениями параметров) расчетов делается вывод о направлении дальнейшего подбора искомых значений для минимизации ошибки.

Метод перебора – процесс отыскания решения, в котором проверяются возможные варианты, или простым перебором всего их множества, или случайным перебором. Этот прием для непрерывно распределенных факторов механических систем и процессов, принимающих бесконечное множество значений на любом отрезке своего изменения, не может считаться методом, поскольку не гарантирует получение решения.

Метод проверки гипотез – процесс выдвижения, анализа и проверки разнообразных предположений о причинах появления определенного результата. Этот метод имеет смысл применять там, где требуется найти скорее качественное, чем количественное объяснение сложного и неординарного явления.

Многомерный статистический анализ относится к методам математической статистики [26,27].

Метод стрельбы (пристрелки) основан на сведении решения краевой задачи к решению задачи Коши. Недостающие начальные условия отыскиваются как решение одного или системы нелинейных алгебраических уравнений, в которых роль функций играют разности между заданными значениями конечных условий и соответствующими значениями найденных решений задач Коши.

Вычислительный эксперимент представляет собой циклический процесс, состоящий из следующих этапов:

1. Построение математических моделей.

На первом этапе производится выбор физической модели, для которой определяются обязательные для рассмотрения факторы и второстепенные факторы, которыми можно пренебречь. При этом определяются допущения или

ограничения модели, в рамках которых результаты моделирования можно считать корректными. Данная модель формулируется с помощью дифференциальных или интегро-дифференциальных уравнений, т. е. на основе математических терминов.

2. Разработка метода расчета.

В вычислительном эксперименте всегда используется алгоритмический метод решения, представляющий последовательность алгебраических формул и логических операторов. При этом для одной математической задачи могут существовать различные вычислительные алгоритмы. Подобные задачи решаются как приближенными, так и численными методами. Вследствие применения указанных методов возникают погрешности, которые подразделяются на три типа:

- неустраняемая погрешность, связанная с неточным заданием исходных данных;
- погрешность метода, связанная с переходом к дискретному аналогу исходной задачи;
- ошибка округления, связанная с конечной разрядностью чисел на компьютере.

Как численный, так и приближенный метод решения предполагают запись в виде вычислительного алгоритма. Требования, предъявляемые к алгоритмам, в том числе и к вычислительным алгоритмам [3,11]:

- реализуемость, т. е. обеспечение решения задачи за допустимое машинное время;
- точность – получение решения исходной задачи с определенной погрешностью и за конечное число операций;
- экономичность (эффективность), т.е. выполнение меньшего числа действий для достижения одинаковой точности;
- устойчивость, т.е. в процессе вычислений не должна возрастать погрешность.

Для создания наиболее точных вычислительных алгоритмов необходимо формировать многочисленные модификации с учетом специфических особенностей конкретной математической задачи. Можно выделить следующие группы численных методов в зависимости от объектов, к которым они применяются [15]:

- интерполяция и численное дифференцирование;
- численное интегрирование;
- определение корней линейных и нелинейных уравнений;
- решение систем линейных уравнений;
- решение систем нелинейных уравнений;
- решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений;
- решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений;
- решение уравнений в частных производных;
- решение интегральных уравнений и т.д.

Выбор метода для решения конкретной задачи представляется достаточно сложным в силу существования большого количества численных методов. Для реализации модели возможно применение различных альтернативных алгоритмических методов. В этой связи выбор метода решения осуществляется в зависимости от обеспечения наилучшей эффективности, устойчивости и точности результатов.

3. Разработка программы на основе алгоритма для реализации на компьютере.

Этап создания надежной и функциональной программы, реализующей разработанную математическую модель, является более сложным в сравнении с предыдущими этапами. Реализация на данном этапе зависит от знания современных алгоритмических языков, технологий и языков кодирования и ресурса вычислительных систем. Современное программирование является самостоятельной наукой со своими фундаментальными принципами, подходами и методами. В этой связи программный комплекс является сложной системой, содержащей языки программирования, трансляторы, компиляторы и библиотеки стандартных модулей.

Процесс разработки программ можно разделить на следующие этапы [13]:

- создание технического задания;
- разработка структуры программы;
- математическое описание;
- алгоритмизация;
- кодирование на программном языке;
- тестирование и отладка;
- сопровождение и эксплуатация.

Время от разработки математических моделей до создания работающей программы по ее реализации зависит от сложности решаемой задачи и может занять несколько месяцев. Для создания коммерческого программного комплекса необходимо продумать стратегию развития программного обеспечения, обеспечить его модульность, а также согласованность входных и выходных параметров. Среди современных технологий программирования выделяют следующие:

- структурное программирование;
- абстрактное программирование;
- объектно-ориентированное программирование;
- визуальное программирование.

4. Проведение расчетов на компьютере.

Здесь наиболее отчетливо проявляется сходство с натурным экспериментом. Различие в том, что в лаборатории исследователь с помощью специальной установки проводит натурный эксперимент, в то время как при проведении вычислительного эксперимента получают ответы от математической модели. Решение в обоих случаях получается в виде некоторой цифровой кода, который переводится в вид, удобный для восприятия и дальнейшего использования, например, табличном, графическом.

Достоверность модели обеспечивается необходимой точностью информации при эксперименте. Для этого проводят тестовые испытания. Они необходимы для того, чтобы «отладить» программу и проверить адекватность математической модели.

5. Обработка результатов расчетов.

На этом этапе выполняется всесторонний анализ результатов расчета и выводы, после которых или становится ясна необходимость уточнения модели, или результаты, пройдя проверку на разумность и надежность, используются по назначению.

2.5. Общие принципы построения математических моделей

Математические модели основываются на математическом описании объекта. В математическое описание, прежде всего, входят, и это естественно, взаимосвязи параметров объекта, что характеризует его особенности функционирования. Такие связи могут представляться в виде:

- вектор-функций $y = f(x, t)$;
- неявных функций $F(y, x, t) = 0$;
- обыкновенных дифференциальных уравнений (ДУ) $F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(m)}, t) = 0$;
- ДУ с частными производными $F\left(y, x, t, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial t}, \dots\right) = 0$;
- вычислительного алгоритма;
- вероятностного (стохастического) описания.

Первые четыре из указанных видов носят обобщающее название аналитических зависимостей.

Математическое описание включает в себя не только взаимосвязь элементов и параметров объекта (законы и закономерности), но и полный набор числовых и функциональных данных объекта (характеристики; начальные, граничные, конечные условия; ограничения), а также методы вычисления выходных параметров модели. Т.е. под математическим описанием понимается полная совокупность данных, функций и методов вычисления, позволяющая получать результат.

При построении математических моделей объектов, систем, процессов целесообразно придерживаться следующих рекомендаций, которые имеют характер постоянного контроля за процессом моделирования [11].

1. Моделирование следует начинать с построения самых грубых моделей на основе выделения самых существенных факторов. При этом необходимо четко представлять как цель моделирования, так и цель познания с помощью данных моделей.

2. Желательно не привлекать к работе труднопроверяемые гипотезы.

3. Необходимо контролировать размерность переменных, придерживаясь правила: складываться и приравниваться могут только величины одинаковой размерности. Этим правилом необходимо пользоваться на всех этапах вывода тех или иных соотношений.

4. Необходимо контролировать порядок складываемых друг с другом величин с тем, чтобы выделить основные слагаемые (переменные, факторы) и

отбросить малозначительные. При этом должно сохраняться свойство «грубости» модели: отбрасывание малых величин приводит к малому изменению количественных выводов и к сохранению качественных результатов.

5. Необходимо контролировать характер функциональных зависимостей, придерживаясь правила: проверять сохранность зависимости изменения направления и скорости одних переменных от изменения других. Это правило позволяет глубже понять физический смысл и правильность выведенных соотношений.

6. Необходимо контролировать поведение переменных или некоторых соотношений при приближении параметров модели или их комбинаций к крайне допустимым (особым, экстремальным) точкам. Обычно в экстремальной точке модель упрощается или вырождается, а соотношения приобретают более наглядный смысл и могут быть проще проверены, а окончательные выводы могут быть продублированы каким-либо другим методом.

7. Необходимо контролировать поведение модели в известных условиях: удовлетворение модели поставленным граничным условиям; поведение системы как модели при действии на нее типовых входных сигналов.

8. Необходимо контролировать получение побочных эффектов и результатов, анализ которых может дать новые направления в исследованиях или потребовать перестройки самой модели.

Постоянный контроль за правильностью функционирования моделей в процессе исследования позволяет избежать грубых ошибок в конечном результате. При этом выявленные недостатки модели исправляются в ходе моделирования.

Рассмотрим общую схему построения модели без учета особенностей конкретных видов моделей [21]. Содержание этапов этой схемы представляется следующим:

1. На основе существующей проблемы формулируется задача. Выбирается объект, действия с которым приведут к решению поставленной задачи.

2. Выполняется анализ объекта моделирования. Устанавливается, из каких элементов состоит объект, как они взаимодействуют между собой. Устанавливаются свойства объекта, актуальные для решения поставленной задачи. Выявляются факторы, определяющие эти свойства.

3. Выполняется создание собственно модели, при этом производится выбор вида и способа построения модели. Естественно, что выбор существенно зависит от решаемой задачи и возможностей исследователя.

4. Решается вопрос об интерпретации результатов моделирования, т.е. каким образом результаты эксперимента с моделью будут перенесены на реальный объект. При этом следует учесть, что модель – это самостоятельный объект, обладающий рядом собственных свойств, которые не имеют отношения к объекту моделирования.

5. Проводятся эксперименты с моделью, осуществляется проверка ее адекватности, т.е. степени соответствия между моделью и объектом по моделируемым свойствам.

6. Выполняется корректировка или переработка модели в случае ее недостаточной адекватности.

Разработка математических моделей – трудоемкий процесс, сопряженный с подбором частных согласованных моделей, адекватных в своих областях, с идентификацией по результатам эксперимента. Поэтому такой дорогостоящий продукт нуждается в постоянном контроле на всех стадиях разработки. К основным приемам контроля математических моделей можно отнести следующие.

1. Контроль размерностей позволяет избежать несогласованностей в формулах основных законов природы и закономерностей объекта и подготовить их к применению в алгоритмах для вычислительной техники. Для контроля размерностей следует соблюдать три правила:

- знаки $+$, $-$, $<$, $>$, \leq , \geq , $=$ могут связывать величины только одной размерности;
- аргументами трансцендентных функций должны быть безразмерные величины;
- во всех расчетных формулах следует применять одну систему единиц измерения.

Так, например, в выражении $e^{-\beta t}$ показатель степени должен быть безразмерным: т.е. β и t безразмерны или имеют взаимно обратные размерности. В эмпирических формулах коэффициенты должны иметь размерность. Внесистемные единицы измерения следует перевести в применяемую систему.

Общий контроль размерностей математического описания обеспечивается при его разработке, когда задача «решается в общем виде» и только в конечные формулы подставляются числовые значения величин. Однако, если таких этапов («подмоделей») много, то контроль необходимо осуществлять на каждом из них.

2. Контроль основных законов природы, прежде всего законов сохранения, необходим в моделях, не претендующих на всеобъемлющее описание оригинала, или в моделях, использующих численные методы вычисления. Так, например, если в модели используется только дифференциальное уравнение движения (2-й закон Ньютона), то разностная схема для его интегрирования должна строиться так, чтобы это уравнение, продифференцированное численным образом по времени, давало бы закон сохранения энергии с учетом особенностей явления.

3. Контроль качественного поведения зависимостей необходимо проводить во всех тех случаях, когда о промежуточных результатах можно что-либо сказать. Такой контроль особенно важен при использовании в качестве частных элементов моделей зависимостей, полученных статистической обработкой результатов измерений.

Использование такого контроля дает верные рецепты: или возможность применения только в области исходных данных без отражения физической сути, или невозможность применения для отражения физической сути явления.

4. Общий порядок разработки математического описания модели, рассмотренный выше, обеспечивает контроль математической замкнутости задачи, т.е. соответствие количества уравнений количеству неизвестных. Действительно, без этого просто невозможно «решить задачу в общем виде», что необходимо для разработки математического описания модели. Однако, если разрабатываемую модель предполагается использовать только как промежуточное звено в более общей модели, то такой контроль необходимо проводить явным образом.

5. Проверку на контрольных примерах проводят, как правило, для всей модели или для ее законченных частей, имеющих самостоятельное значение и смысл. В любом случае о поведении оригинала должна иметься достоверная информация. Используются три вида контрольных примеров: простейшие случаи, случаи особого поведения (например, резонанс) и наиболее общие случаи, исследованные в специальных экспериментах. В отличие от задачи идентификации проверка на контрольных примерах дает лишь общий вывод о качественной правильности модели.

3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЗАДАЧ ДВИЖЕНИЯ БВС

3.1. Общая формулировка математической модели динамической системы

Динамической системой (ДС) принято называть систему, изменяющую под действием сил свое состояние, характеризуемое значениями выходных переменных.

Совокупность всевозможных состояний системы образует пространство состояний (фазовое пространство). При количественном анализе динамической системы требуется выбрать математическую модель, адекватную системе, определяющую с требуемой точностью изменения переменных величин с течением времени. Строго говоря, практически все динамические системы представляют собой нелинейные системы. Точное описание таких систем представляет собой большие трудности, но чаще всего это и не связано с практической необходимостью. Успех анализа динамической системы в значительной мере зависит от того, насколько правильно выбрана степень идеализации при ее математическом описании или, другими словами, при выборе ее математической модели [1].

Нелинейность реальных динамических систем обусловлена обилием факторов, которые влияют на них. Среди указанных факторов как правило найдутся те, при влиянии которых не будет выполняться принцип суперпозиции. В определенных условиях (учет небольшого числа выбранных факторов, рассмотрение процессов в некоторой малой окрестности выбранных точек и ряд других) реальные системы могут рассматриваться как линейные системы. В этих случаях линейная модель будет описывать все наиболее существенные качественные и количественные характеристики рассматриваемой системы, и модель будет существенно более простой и удобной для исследований.

Математическая модель динамической системы – это совокупность математических уравнений, формул, соотношений, описывающая процессы, происходящие в исследуемой динамической системе.

Основной научной дисциплиной, использующей результаты моделирования динамических систем, является динамика полета ЛА.

Динамикой полета ЛА в атмосфере называется раздел механики, в котором изучается движение ЛА в атмосфере [28].

При изучении динамики полета ЛА используются методы теоретической механики, аэродинамики, теории авиационных двигателей, теории управления для формального (математического) описания различных видов движений БВС и изучения летно-технических характеристик.

В этих и других работах движение ЛА в каждый момент времени представляется как поступательное движение его центра масс и вращательное движение БВС как твердого тела вокруг центра масс.

Под математической моделью движения БВС будем понимать комплекс математических выражений для описания его движения на различных этапах.

Одним из главных требований к таким моделям, кроме их адекватности и достаточной для практического применения точности, будем считать простоту и удобство использования моделей специалистами по эксплуатации БВС.

При помощи математических моделей рассчитываются параметры движения из условия получения желаемой траектории при отсутствии возмущений. Движение, рассчитанное для таких идеальных условий и соответствующие ему управление, называют опорным.

Кроме этого имеется движение БВС вокруг его ЦМ, которое вызывается взаимодействием его органов управления, а также внутренними и внешними возмущениями. Для парирования значительных отклонений от опорного движения используются системы стабилизации полета (автопилот) системы автоматического управления полетом (САУ) БВС при полете в автоматическом режиме.

При управлении БВС, формирование опорной траектории и стабилизация полета может осуществляться внешним пилотом.

На рис. 3.1 представлены траектории движения ЦМ (опорное движение) БВС в вертикальной плоскости некоторой системы координат и движения БВС вокруг этого центра (возмущенное движение). Там же приведена схема работы автопилота САУ БС [20,23].

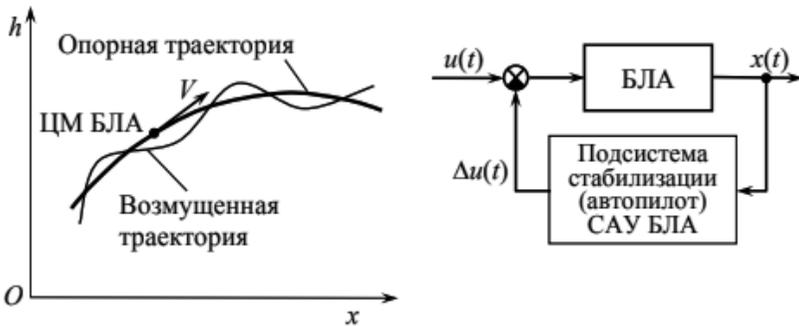


Рис.3.1. Траектории движения БВС

При решении задач управления БВС будем использовать общепринятую модель управляемого движения ЛА, которая в векторной форме записывается как [20]:

$$\dot{x} = f(x, u, t); \quad t \in [t_0, t_k]; \quad x(t_0) = x_0. \quad (3.1)$$

Здесь $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – вектор состояния БВС, называемый вектором фазовых координат; $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ – управляющий вектор, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ – вектор-функция своих аргументов; $[t_0, t_k]$ – интервал времени t , на котором выполняется полет БС.

На управления БВС накладываются ограничения вида

$$u_{min} \leq u(t) \leq u_{max}, \quad t \in [t_0, t_k]. \quad (3.2)$$

Система уравнений (3.1, 3.2) может быть использована для расчета различных по целевым задачам траекторий движения БВС. Для этого

необходимо задать необходимый закон изменения для каждой из m управляющих функций.

Каждому набору управляющих функций будет соответствовать единственная траектория полета.

С физической точки зрения управляющими функциями являются параметры, на которые может оказывать действие внешний пилот или САУ полетом.

Для БВС самолетной схемы вектор косвенного управления, который не зависит от их конструктивных схем, в общем случае имеет следующий вид [9]:

$$u(t) = (P(t), \alpha(t), \beta(t), \gamma(t)), t \in [t_0, t_k], \quad (3.3)$$

где $P(t)$ – сила тяги двигателей; $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)$ – углы атаки, скольжения и крена в момент времени $t \in [t_0, t_k]$. Методы формирования векторов вида (3.3) для требуемых характеристик плоских и пространственных траекторий движения БВС самолетных схем при $\beta(t) = 0$ предложены в разд. 5.1. Вектор прямого управления БВС классической самолетной схемы представляется как:

$$u(t) = (\delta_{руд}, \delta_v, \delta_z, \delta_n), \quad t \in [t_0, t_k]. \quad (3.4)$$

Здесь $\delta_{руд}(t)$ – закон изменения положения управляющего органа силовой установки БВС; $\delta_v(t), \delta_z(t), \delta_n(t)$ – законы отклонения рулей высоты, элеронов и руля направления БВС СТ в момент времени $t \in [t_0, t_k]$.

Наличие возможности в задании управляющих функций позволяет задавать или определять их так, чтобы траектории движения удовлетворяли каким-либо дополнительным условиям, например, выход в заданную точку пространства (краевые задачи) или условиям оптимальности по какому-либо критерию (например, движение с минимальным расходом топлива или полет на наибольшую дальность с отказавшим двигателем и т.д.).

3.2. Краткая характеристика математических моделей динамики полета

Математические модели динамики полета принято записывать в виде дифференциальных уравнений, как правило, в нормальной форме Коши, т.е. в виде уравнений, разрешенных относительно производных.

Левая часть уравнений – производные параметров полета по времени, правая часть уравнений – функции от параметров полета и управляющих параметров. Для того чтобы рассчитать параметры полета, необходимо знать значения управляющих параметров, например, отклонения РУС и положение РУД, в каждый момент времени.

Для наглядного представления параметров полета используют различные системы координат. Вектор скорости БВС, например, удобнее задавать в траекторной системе координат, а ориентацию БВС – в связанной системе координат.

В зависимости от требуемой степени адекватности реальным процессам математические модели динамики полета БВС можно условно разбить на три группы (рис. 3.2):

- математические модели кинематики материальной точки;

- математические модели динамики материальной точки;
- математические модели динамики твердого тела.

Математические модели кинематики материальной точки позволяют при известной скорости полета БВС рассчитать его координаты. Такие модели для своей реализации требуют минимальных вычислительных затрат и могут использоваться при моделировании прямолинейного или криволинейного полета, когда более подробной информации о траектории полета БВС не требуется.

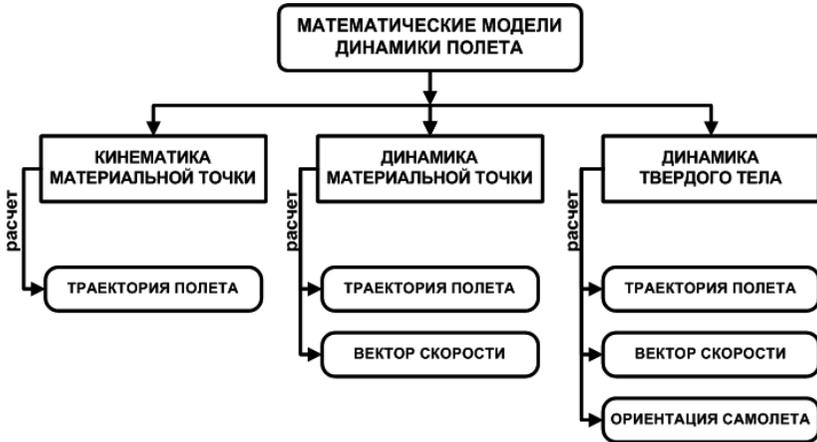


Рис.3.2. Виды математических моделей динамики полета

Математические модели динамики материальной точки позволяют рассчитать координаты, а также величину и ориентацию вектора скорости БВС. В качестве управляющих параметров в таких моделях обычно используются законы изменения нормальной и тангенциальной перегрузок, а также скоростного угла крена БВС. Если при моделировании полета БВС использовать известные, заранее рассчитанные значения управляющих параметров, то вычислительные затраты, потребные для реализации таких моделей незначительны. Расчет же располагаемых на данном режиме полета значений управляющих параметров требует знания ограничений на их величины, а также вычислений сил, действующих на БВС.

Математические модели динамики твердого тела позволяют рассчитать координаты БВС, величину и ориентацию вектора скорости БВС, а также ориентацию самого БВС. В качестве управляющих параметров в таких математических моделях, как правило, используются отклонения органов управления самолетом – РУС и РУД на станции внешнего пилота. Это самые подробные математические модели. Они используются, например, на комплексных тренажерах самолетов. Такие модели необходимы для отработки вопросов, связанных с устойчивостью и управляемостью ЛА, адекватного моделирования дозаправки ЛА в воздухе, решения задач точной ориентации в пространстве и т.д. Если при моделировании полета БВС использовать

известные, заранее полученные, например, из решения обратной задачи динамики полета, значения управляющих функций, то вычислительные затраты, потребные для реализации таких моделей незначительны. Расчет же располагаемых на данном режиме полета значений управляющих параметров требует знания ограничений на их величины, а также вычислений сил и моментов, действующих на ЛА.

3.3. Математические модели кинематики материальной точки

Математические модели кинематики материальной точки позволяют при известной скорости БВС рассчитать траекторию его полета. Для определения траектории полета относительно Земли используют, например, нормальную земную систему координат: $O_0X_gY_gZ_g$, (рис.3.3).

Начало системы координат O_0 совмещают с произвольной, удобной для исследователя, точкой земной поверхности. Например, с началом ВПП, положением станции внешнего пилота и т.п. Ось O_0Y_g направляют вверх по местной вертикали (вдоль линии действия силы тяжести). Направление оси O_0X_g горизонтально и выбирается в соответствии с решаемой задачей, например, вдоль оси ВПП.

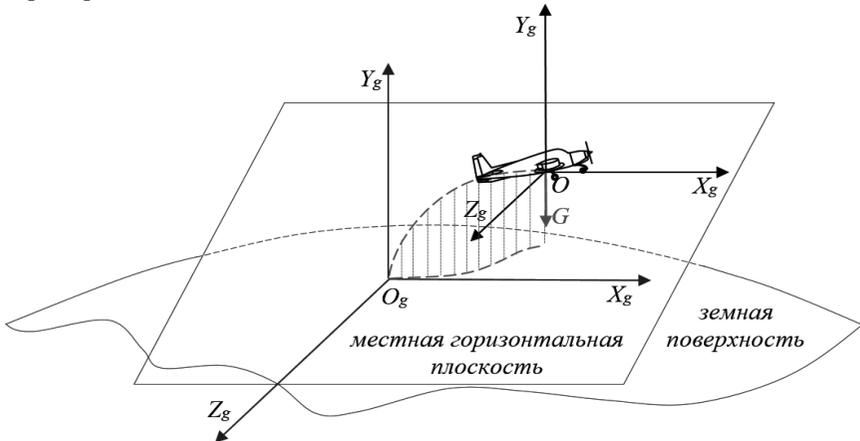


Рис.3.3. Нормальная земная система координат

Параметры полета в моделях кинематики – это координаты БВС относительно нормальной земной системы координат x_g, y_g, z_g , а управляющая функция – скорость БВС относительно Земли $\vec{V}(V_{xg}, V_{yg}, V_{zg})$. Уравнения имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{dx_g}{dt} = V_{xg}, \\ \frac{dy_g}{dt} = V_{yg}, \\ \frac{dz_g}{dt} = V_{zg}. \end{cases}$$

В качестве примера приведем законы изменения скорости для реализации некоторых режимов полета.

Прямолинейный горизонтальный установившийся полет

$$V_{xg} = const; V_{yg} = 0; V_{zg} = const.$$

Установившийся набор высоты или снижение

$$V_{xg} = const; V_{yg} = const; V_{zg} = const.$$

Змейка

$$V_{xg} > 0; V_{yg} = 0; V_{zg} = A \sin \omega t.$$

Установившийся вираж

$$V_{xg} = A \cos \frac{2\pi}{T_{\text{вир}}} t; V_{yg} = 0; V_{zg} = A \sin \omega t,$$

где $T_{\text{вир}}$ – время выполнения виража.

Спираль

$$V_{xg} = A \cos \frac{2\pi}{T_{\text{витка}}} t; V_{yg} > 0; V_{zg} = A \sin \frac{2\pi}{T_{\text{витка}}} t,$$

где $T_{\text{витка}}$ – время выполнения одного витка.

Бочка

$$V_{xg} > 0; V_{yg} = A \cos \frac{2\pi}{T_{\text{витка}}} t; V_{zg} = A \sin \frac{2\pi}{T_{\text{витка}}} t,$$

где $T_{\text{витка}}$ – время выполнения одного витка.

При задании скорости необходимо помнить об ограничениях на ее минимальную и максимальную величину, которые устанавливаются по условиям устойчивости и управляемости, по прочности обшивки и т.д. Все установленные для БВС ограничения указывают в «Руководстве по летной эксплуатации» (РЛЭ).

3.4. Математические модели динамики материальной точки

Математические модели динамики материальной точки позволяют, как и модели кинематики, рассчитать траекторию полета БВС, и кроме того, величину и ориентацию вектора скорости БВС относительно Земли. Для определения ориентации вектора скорости БВС используют траекторную систему координат, начало координат которой O совмещают с центром масс самолета. Ось OX_k направляют по вектору земной (абсолютной) скорости. Ось OY_k располагают в вертикальной плоскости, проходящей через ось OX_k и направляют вверх от Земли. Ось OZ_k , всегда направлена по горизонтали вправо, (рис. 3.4).

Направление осей траекторной системы координат относительно земной, а значит и направление вектора скорости, определяется углом наклона траектории θ и углом пути ψ . Угол наклона траектории θ заключен между абсолютной скоростью самолета и горизонтальной плоскостью: он положителен, если абсолютная скорость отклонена вверх от горизонтальной плоскости и изменяется в пределах от -90° до $+90^\circ$. Угол пути ψ заключен между проекцией оси Ox_k на местную горизонтальную плоскость (МГП) $Ox_g z_g$ и осью Ox_g : он положителен при отклонении проекции оси Ox_k на МГП от Ox_g против часовой стрелки.

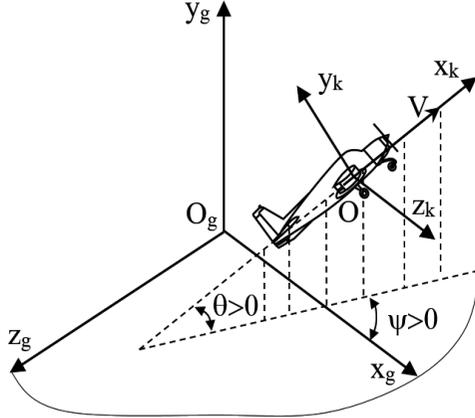


Рис.3.4. Траекторная система координат

Параметры полета в моделях динамики материальной точки – это координаты самолета относительно нормальной земной системы координат (x_g, y_g, z_g) , а также величина и ориентация вектора абсолютной скорости (V, θ, ψ) . В качестве управляющих параметров могут использоваться нормальная скоростная и тангенциальная перегрузки, скоростной угол крена. Уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \frac{dV}{dt} &= g(n_{xa} - \sin \theta), \\
 \frac{d\theta}{dt} &= \frac{g}{V}(n_{ya} \cdot \cos \gamma_a - \cos \theta), \\
 \frac{d\psi}{dt} &= -\frac{g}{V}n_{ya} \cdot \sin \gamma_a, \\
 \frac{dx_g}{dt} &= V_{xg}, \\
 \frac{dy_g}{dt} &= V_{yg}, \\
 \frac{dz_g}{dt} &= V_{zg},
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\frac{dm}{dt} = -c_s.$$

В качестве примера приведем законы изменения управляющих параметров для реализации некоторых режимов полета.

Прямолинейный горизонтальный установившийся полет

$$n_{xa}=0; n_{ya} = 1; \gamma_a = 0.$$

Установившийся набор высоты или снижение

$$n_{xa} = \sin\theta; n_{ya} = \cos\theta; \gamma_a = 0.$$

Установившийся вираж

$$n_{xa} = 0; n_{ya} = \frac{1}{\cos \gamma_a}; \gamma_a = \text{const.}$$

Спираль

$$n_{xa} = \sin\theta; n_{ya} = \frac{\cos\theta}{\cos \gamma_a}; \gamma_a = \text{const.}$$

Располагаемые значения тангенциальной и нормальной скоростной перегрузок определяются несущими способностями БВС и возможностями его силовой установки и зависят от действующих на БВС сил:

$$n_{xa} = \frac{P \cdot \cos(\alpha + \varphi_{дв}) - X_a - F_{тр}}{mg},$$

$$n_{ya} = \frac{Y_a + P \cdot \sin(\alpha + \varphi_{дв}) + N}{mg},$$

где

- P – сила тяги силовой установки;
- α – угол атаки;
- X_a – сила лобового сопротивления;
- Y_a – подъемная сила;
- $F_{тр}$ – сила трения на разбеге;
- N – нормальная реакция земли на разбеге;
- m – масса самолета;
- g – ускорение свободного падения.

Силу лобового сопротивления и подъемную силу рассчитывают так:

$$X_a = c_{xa} \cdot q \cdot S,$$

$$Y_a = c_{ya} \cdot q \cdot S,$$

где

- c_{xa} – коэффициент лобового сопротивления;
- c_{ya} – коэффициент подъемной силы;
- q – скоростной напор;
- S – площадь крыла самолета.

Коэффициент лобового сопротивления c_{xa} зависит от числа M полета, значения коэффициента подъемной силы c_{ya} , наличия подвесок, близости земли, положения механизации крыла и шасси, высоты полета H и др.:

$$c_{xa} = c_{xa}(c_{ya}, \delta_{мех}, H) + c_{xa \text{ подв}} + c_{xa \text{ ш}} + c_{xa \text{ Re}},$$

где

- $c_{xa}(c_{ya}, \delta_{\text{мех}}, H)$ – полъра самолета, с учетом и без учета влияния земли, для убранный и выпущенной механизации;
- $c_{xa \text{ подв}}$ – прирост лобового сопротивления за счет подвесок или установленного спецоборудования;
- $c_{xa \text{ ш}}$ – прирост лобового сопротивления за счет выпуска шасси;
- $c_{xa \text{ Re}}$ – поправки за счет отличия чисел Рейнольдса продувки и реального полета.

Коэффициент подъемной силы зависит от числа M полета, угла атаки, близости земли и положения механизации и др.: $c_{ya}(c_{ya}, \delta_{\text{мех}}, H)$.

Величины аэродинамических коэффициентов получают в результате продувок в аэродинамических трубах.

При разбеге силу трения $F_{\text{тр}}$ и нормальную реакцию земли N определяют так:

$$F_{\text{тр}} = f \cdot N, \\ N = mg - Y_a - P \sin(\alpha + \varphi_{\text{дв}}). \quad (3.6)$$

где f – коэффициент трения. Для сухой бетонированной ВПП $f = 0,03$. В момент отрыва БВС от ВПП и далее при полете в воздухе $N = 0, F_{\text{тр}} = 0$.

Располагаемая тяга силовой установки, как правило, задается в виде высотного-скоростных и дроссельных характеристик и зависит от режима полета (H, M), режима работы двигателей, потерь в воздухозаборнике, сопле и т.п.:

$$P = P(H, M, \delta_{\text{руд}}, \dots),$$

где $\delta_{\text{руд}}$ - положение РУД.

При построении математических моделей движения БВС необходимо учитывать ограничения:

- по допустимому углу атаки $\alpha_{\text{доп}}$;
- по нормальной перегрузке n_y (нормальной скоростной n_{ya});
- по углу крена γ_a ;
- по скорости полета $V_{\text{мин, доп}}, V_{\text{макс, доп}}$;
- по числу M полета.

Допустимые в полете углы атаки $\alpha_{\text{доп}}$ определяются условиями достаточной в эксплуатации поперечной управляемости и устойчивости по углу атаки и могут зависеть от конфигурации БВС, варианта подвесок, и др.

Эксплуатационные ограничения предельных величин нормальной перегрузки (рис. 3.5) БВС определяются следующими физическими причинами:

- несущей способностью планера $n_{ya \text{ доп}}$, т.е. ограничениями по допустимому углу атаки $\alpha_{\text{доп}}$;
- прочностью конструкции планера БВС, т.е. максимальной эксплуатационной перегрузкой по прочности БВС $n_{y \text{ макс}}^3$;
- работоспособностью топливной системы при нулевых и отрицательных перегрузках n_y т.с.

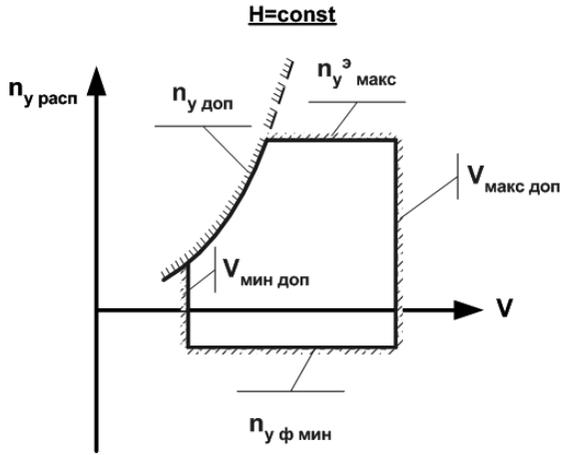


Рис.3.5. Виды ограничения нормальной перегрузки

Ограничения минимальной скорости полета устанавливают из условия безопасного маневрирования с заданной перегрузкой. Ограничения максимальной скорости полета устанавливают, как правило, по условиям прочности. Минимальная разрешенная скорость полета называется эволютивной $V_{эв}$, максимальная – максимально допустимой скоростью полета $V_{макс.доп}$.

Ограничения по максимальному числу M полёта, а также продолжительности полета с ним устанавливают, как правило, из условия обеспечения минимального запаса путевой устойчивости, а также сохранения прочности конструкции под действием кинетического нагрева. Максимальное разрешенное в полете число M полета называют максимально допустимым $M_{макс.доп}$.

Все установленные для самолета ограничения указывают в «Руководстве по летной эксплуатации БВС».

3.5. Математические модели динамики твердого тела

Математические модели динамики твердого тела позволяют, как и модели динамики материальной точки, рассчитать траекторию полета БВС, величину и ориентацию вектора скорости, и, кроме того, ориентацию БВС относительно Земли. Для определения ориентации БВС используют связанную систему координат $OXYZ$, начало координат O которой обычно располагают на строительной оси БВС в плоскости его симметрии. Ось OX направляют вперед вдоль строительной оси фюзеляжа, а ось OY – вверх в плоскости симметрии БВС по перпендикуляр к оси OX . Ось OZ – вдоль правой консоли по нормали к плоскости симметрии БВС.

Направление осей связанной системы координат относительно Земли, а значит и ориентация БВС, определяется углом тангажа Θ , углом рысканья ψ ,

углом крена γ . Угол тангажа измеряется между осью OX и МПП (рис. 3.6). Угол ϑ положителен при направлении OX вверх от МПП и изменяется от -90° до $+90^\circ$.

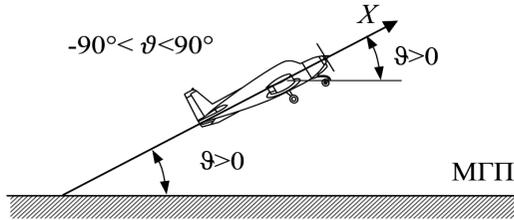


Рис.3.6. Угол тангажа

Угол рысканья измеряется между проекцией оси OX на МПП и направлением оси OX_g земной системы координат. Угол ψ положителен, если проекция оси OX на МПП при виде сверху (с конца оси OY_g) повернута против часовой стрелки от оси OX_g . Угол ψ изменяется от -180° до $+180^\circ$ (рис. 3.7).

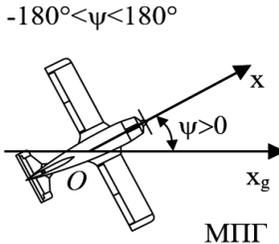


Рис.3.7. Угол рысканья

Угол крена γ измеряется между нормальной осью и вертикальной плоскостью, проходящей через ось OX . Угол γ положителен при опущенной правой консоли крыла и изменяется от -180° до $+180^\circ$ (рис.3.8).

Параметры полета в моделях динамики твердого тела:

- координаты самолета относительно нормальной земной системы координат x_g, y_g, z_g ;
- проекции вектора скорости на оси связанной системы координат V_x, V_y, V_z ;
- проекции вектора угловой скорости на оси связанной системы координат $\omega_x, \omega_y, \omega_z$;
- углы, определяющие ориентацию самолета относительно Земли ϑ, ψ, γ .

В качестве управляющих параметров могут использоваться отклонение РУС и положение РУД. В этом случае математическая модель динамики полета должна быть дополнена математической моделью системы управления БВС [22,24].

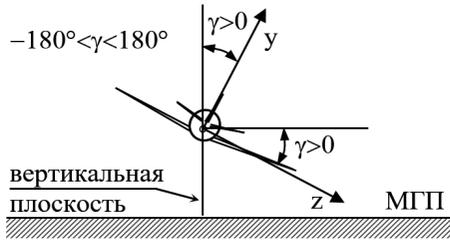


Рис.3.8. Угол крена

Уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \frac{dV_x}{dt} &= \frac{F_x}{m} + \omega_z V_y - \omega_y V_z, \\
 \frac{dV_y}{dt} &= \frac{F_y}{m} + \omega_x V_z - \omega_z V_x, \\
 \frac{dV_z}{dt} &= \frac{F_z}{m} + \omega_y V_x - \omega_x V_y, \\
 \frac{d\omega_x}{dt} &= \frac{M_x}{I_x} + \frac{I_x - I_z}{I_x} \omega_y \omega_z, \\
 \frac{d\omega_y}{dt} &= \frac{M_y}{I_y} + \frac{I_x - I_y}{I_y} \omega_x \omega_z, \\
 \frac{d\omega_z}{dt} &= \frac{M_z}{I_z} + \frac{I_x - I_y}{I_z} \omega_x \omega_y, \\
 \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_y \sin \gamma + \omega_z \cos \gamma, \\
 \frac{d\gamma}{dt} &= \omega_x - (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma) \operatorname{tg} \vartheta, \\
 \frac{d\psi}{dt} &= \frac{\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma}{\cos \vartheta}, \\
 \frac{dx_g}{dt} &= V_x \cos \vartheta \cos \psi + V_y (\sin \gamma \sin \psi - \cos \gamma \cos \psi \sin \vartheta) \\
 &\quad + V_z (\cos \gamma \sin \psi - \sin \gamma \cos \psi \sin \vartheta), \\
 \frac{dy_g}{dt} &= V_x \sin \vartheta + V_y (\cos \gamma \cos \vartheta) - V_z (\sin \gamma \cos \vartheta), \\
 \frac{dz_g}{dt} &= -V_x \cos \vartheta \sin \psi + V_y (\sin \gamma \cos \psi + \cos \gamma \sin \psi \sin \vartheta) \\
 &\quad + V_z (\cos \gamma \cos \psi - \sin \gamma \sin \psi \sin \vartheta),
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

где

- $F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z$ – проекции суммы всех сил и моментов, действующих на БВС на оси связанной системы координат;
- I_x, I_y, I_z – главные центральные моменты инерции относительно соответствующих осей. Оси связанной системы координат ориентированы, как правило, по главным осям инерции, поэтому центробежные моменты инерции в уравнениях отсутствуют;

– m – масса БВС.

Следует отметить, что управляющие параметры в явном виде не входят в представленные выше уравнения. Но они определяют величины сил и моментов, действующих на самолет.

В общем случае на БВС СТ действуют аэродинамические силы и моменты, силы и моменты от тяги силовой установки, сила веса G , силы и моменты от реакции опор на разбеге:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \vec{F}_{\text{аэр}} + \vec{F}_{\text{дв}} + \vec{G} + \vec{F}_{\text{опор}}, \\ \vec{M} &= \vec{M}_{\text{аэр}} + \vec{M}_{\text{дв}} + \vec{M}_{\text{опор}}.\end{aligned}$$

Как рассчитывают подъемную силу, силу лобового сопротивления, нормальную реакцию земли и силы трения на разбеге, а также силу тяги было показано при описании модели динамики материальной точки. Проекция подъемной силы и силы лобового сопротивления в связанной системе координат $OXYZ$ при отсутствии скольжения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}F_{\text{аэр}x} &= -X_a \cos \alpha + Y_a \sin \alpha, \\ F_{\text{аэр}y} &= X_a \sin \alpha + Y_a \cos \alpha.\end{aligned}$$

Проекция аэродинамических моментов на оси связанной системы координат равны:

$$\begin{aligned}M_{x \text{ аэр}} &= m_x q S l, \\ M_{y \text{ аэр}} &= m_y q S l, \\ M_{z \text{ аэр}} &= m_z q S b_a,\end{aligned}$$

где l – размах крыла; b_a – средняя аэродинамическая хорда.

Коэффициенты аэродинамических моментов зависят от числа M полета, угловой скорости, отклонения органов управления и др:

$$\begin{aligned}m_x &= m_x^{\delta_\alpha} \delta_\alpha + m_x^{\omega_x} \omega_x + m_x^{\omega_y} \omega_y + m_x^\beta \beta, \\ m_y &= m_y^{\delta_\alpha} \delta_\alpha + m_y^{\omega_x} \omega_x + m_y^{\omega_y} \omega_y + m_y^\beta \beta, \\ m_z &= m_{z0} + m_z^\alpha \alpha + m_z^\varphi \varphi_{\text{го}} + m_z^{\dot{\alpha}} \dot{\alpha} + m_z^{\omega_z} \omega_z,\end{aligned}$$

где δ_α , δ_α , $\varphi_{\text{го}}$ – отклонение органов управления БВС СТ (элеронов, руля направления, руля высоты).

Проекция силы тяжести на оси связанной системы координат равны:

$$\begin{aligned}G_x &= -mg \sin \vartheta, \\ G_y &= -mg \cos \vartheta \cos \gamma, \\ G_z &= mg \cos \vartheta \sin \gamma.\end{aligned}$$

При полете масса БВС изменяется за счет выгорания топлива, сброса грузов и т.п. При необходимости это учитывается в математических моделях динамики полета дополнительным уравнением. Например, учет выгорания топлива можно осуществлять по следующему уравнению: $dm/dt = -c_s$, где c_s – секундный расход топлива.

Для снижения трудоемкости решения задач выбора вектора $u(t)$ при формировании программного движения БВС предлагается использовать

модели движения центра масс (ЦМ), которые в общем случае представляются в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= f_1(V, \Theta, \Psi, H, m), \\
 \dot{\Theta} &= f_2(V, \Theta, \Psi, H, m), \\
 \dot{\Psi} &= f_3(V, \Theta, \Psi, H, m), \\
 \dot{L} &= f_4(V, \Theta, \Psi, m), \\
 \dot{H} &= f_5(V, \Theta, \Psi, m), \\
 \dot{Z} &= f_6(V, \Theta, \Psi, L, H, Z, m), \\
 \dot{m} &= f_7(V, \Theta, H, m),
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Здесь $V = V(t)$ – скорость БВС в момент времени $t \in [t_0, t_k]$; $\Theta = \Theta(t)$ и $\Psi = \Psi(t)$ – углы наклона и поворота траектории БВС в этот момент времени; $L = L(t)$, $H = H(t)$, $Z = Z(t)$ – дальность, высота, боковое уклонение – координаты БВС в нормальной земной системе координат.

Таким образом, состояние БВС в каждый момент времени характеризуется фазовыми координатами $V, \Theta, \Psi, L, H, Z, m$.

Начальные условия для системы ДУ (3.8), имеют вид:

$$V(t_0) = V_0; \Theta(t_0) = \Theta_0; \Psi(t_0) = \Psi_0,$$

$$L(t_0) = L_0; H(t_0) = H_0; Z(t_0) = Z_0; m(t_0) = m_0. \tag{3.9}$$

Заметим, что правые части динамических уравнений (3.8) движения БВС конкретизируются применительно к различным этапам (режимам) их движения.

При практическом решении задач управления в полетах всех видов БВС на интервале времени $t \in [t_0, t_k]$ принято выделять следующие типовые этапы:

- 1) Взлет и набор заданной высоты полета в течение времени $t \in [t_0, t_1]$.
- 2) Горизонтальный полет на интервале времени $t \in [t_1, t_2]$ в зону выполнения полетного задания (ПЗ).
- 3) Выполнение ПЗ в течение запланированного времени $t \in [t_2, t_3]$.
- 4) Полет в зону посадки на интервале времени $t \in [t_3, t_4]$.
- 5) Снижение и посадка БВС в интервале времени $t \in [t_4, t_k]$.

Основной задачей реализации программного управления БВС является формирование законов изменения состояния органов его управления, обеспечивающих выполнение полетов БВС на заданном интервале времени $t \in [t_0, t_k]$.

При программировании каждого этапа полета БВС с помощью соответствующих численных и аналитических методов [9] решаются следующие задачи:

- 1) выбор или формирование вида требуемой траектории полета БВС;
- 2) формирование косвенного и прямого управления, обеспечивающего движение БВС по такой траектории.

4. ПРИМЕНЕНИЕ СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫХ СИСТЕМ И СТАНДАРТНЫХ ПРОЦЕДУР ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЗАДАЧ ДВИЖЕНИЯ БВС

4.1. Моделирование задач движения БВС с помощью специализированных систем

Применение инструментальных средств пакета MatLab для решения прикладных задач

MatLab – это высокоуровневый язык технических расчетов, интерактивная среда разработки алгоритмов и современный инструмент анализа данных.

Ядро MatLab позволяет максимально просто работать с матрицами реальных, комплексных и аналитических типов данных и со структурами данных и таблицами поиска [16].

Язык MatLab является высокоуровневым языком программирования, включающим основанные на матрицах структуры данных, широкий спектр функций, интегрированную среду разработки, объектно-ориентированные возможности и интерфейсы к программам, написанным на других языках программирования.

С помощью пакета MatLab легко решаются такие задачи как аппроксимация и интерполяция функций, решение нелинейных уравнений, поиск оптимальных решений, решение задач Коши, численное интегрирование и другие задачи, традиционно включаемые в курс численных методов. Алгоритм этих задач хорошо известен и разработчики системы MatLab учли опыт численного решения и программирования задач вычислительной математики за все время существования вычислительной техники. Поэтому в системе MatLab для решения каждой задач имеется несколько программ (иногда их более 10), предназначенных для ее решения в зависимости от особенностей данной задачи.

Язык программирования Matlab является интерпретатором. Это значит, что каждая инструкция программы распознается и тут же исполняется. Этап компиляции полной программы отсутствует. Интерпретация означает, что Matlab не создает исполняемых конечных программ. Они существуют лишь в виде m-файлов (файлов с расширением m). Для выполнения программ необходимо находиться в среде Matlab. Однако для программ на языке Matlab созданы компиляторы, транслирующие программы на языке Matlab в коды языков программирования C и C++. Это решает проблему создания исполняемых программ, изначально написанных в среде Matlab [12].

Основными преимуществами «языка технических вычислений» MatLAB, которые выгодно отличают его среди других существующих ныне математических систем и пакетов, состоят в следующем:

- система MatLAB специально создана для проведения инженерных расчетов: математический аппарат, который используется в ней, предельно приближен к современному математическому аппарату инженера и ученого и опирается на вычисления с матрицами, векторами и комплексными числами.

Графическое представление функциональных зависимостей здесь организовано в форме, которую требует именно инженерная документация;

- язык программирования системы MatLAB весьма прост, близок к языку FORTRAN, BASIC, он содержит всего несколько десятков операторов. Незначительное количество операторов здесь компенсируется большим числом процедур и функций, содержание которых легко понятно пользователю с соответствующей математической и инженерной подготовкой;
- в отличие от большинства математических систем, MatLAB является открытой системой. Это означает, что практически все процедуры и функции MatLAB доступны не только для использования, но и для корректировки и модифицирования. MatLAB – система, которая может расширяться пользователем по его желанию созданными им программами и процедурами (подпрограммами). MatLAB легко приспособить к решению нужных классов задач;
- очень удобной является возможность использовать практически все вычислительные возможности системы в режиме чрезвычайно мощного научного калькулятора. В то же время можно составлять собственные отдельные программы с целью многоразового их использования для исследований. Это делает MatLAB незаменимым средством проведения научных расчетных исследований;
- последние версии MatLAB позволяют легко интегрировать ее с текстовым редактором Word, что делает возможным использование при создании текстовых документов вычислительных и графических возможностей MatLAB. Например, оформлять инженерные и научные отчеты и статьи с включением в них сложных расчетов и выводом графиков в текст.

По скорости выполнения задач она опережает многие другие подобные системы. Все эти особенности делают систему MatLAB привлекательной для использования в учебном процессе высших учебных заведений.

Легкость модификации системы и возможность ее адаптации к решению специфических задач науки и техники привели к созданию десятков пакетов прикладных программ (Toolboxes), намного расширивших сферы применения системы. Пакеты расширений представляют собой обширные библиотеки функций MatLab (m-файлов), которые созданы для использования MatLab в решении специальных задач. Пакеты расширения (их число более 50) включают такие области, как обработка сигналов, системы управления, нейронные сети, нечеткая логика, биоинформатика, моделирование динамических систем и много других. Список основных функций MatLab (не включая специализированных функций пакетов расширений) содержит более 1000 наименований.

Программы, написанные на MatLab, бывают двух типов – функции и скрипты.

Функции имеют входные и выходные аргументы, а также собственное рабочее пространство для хранения промежуточных результатов вычислений и переменных.

Скрипты же используют общее рабочее пространство. Как скрипты, так и функции не интерпретируются в машинный код и сохраняются в виде текстовых файлов.

Основной особенностью языка MatLab является его широкие возможности по работе с матрицами, которые создатели языка выразили в лозунге «думай векторно» (англ. Think vectorized).

MatLab предоставляет пользователю большое количество (несколько сотен) функций для анализа данных, покрывающие практически все области математики, в частности: матрицы и линейная алгебра, многочлены и интерполяция, математическая статистика и анализ данных, обработка данных, ДУ, разреженные матрицы, целочисленная арифметика.

MatLab предоставляет удобные средства для разработки алгоритмов, включая высокоуровневые с использованием концепций объектно-ориентированного программирования. В нём имеются все необходимые средства интегрированной среды разработки, включая отладчик и профайлер. Функции для работы с целыми типами данных облегчают создание алгоритмов для микроконтроллеров и других приложений, где это необходимо.

В составе пакета MatLab имеется большое количество функций для построения графиков, в том числе трёхмерных, визуального анализа данных и создания анимированных роликов. Встроенная среда разработки позволяет создавать графические интерфейсы пользователя с различными элементами управления, такими как кнопки, поля ввода и другими. С помощью компонента MatLab Compiler эти графические интерфейсы могут быть преобразованы в самостоятельные приложения.

Применение программного комплекса моделирования Simulink для моделирования задач движения.

Simulink – это подсистема имитационного математического моделирования динамических процессов.

Simulink является составной частью пакета Matlab и полностью интегрирован с ним. Модели в Simulink состоят из набора графических блоков, представляющих компоненты объекта или какие-то функциональные элементы (источники сигналов различного вида, виртуальные регистрирующие приборы, средства анимации), и направленных связей между ними (линии распространения сигналов). Блоки различного назначения сгруппированы в библиотеки блоков (Blocksets) (аналогично пакетам прикладных программ). Каждый блок имеет набор настраиваемых параметров [12]. Доступ к ним осуществляется с помощью средства обозреватель разделов библиотеки (рис.4.1).

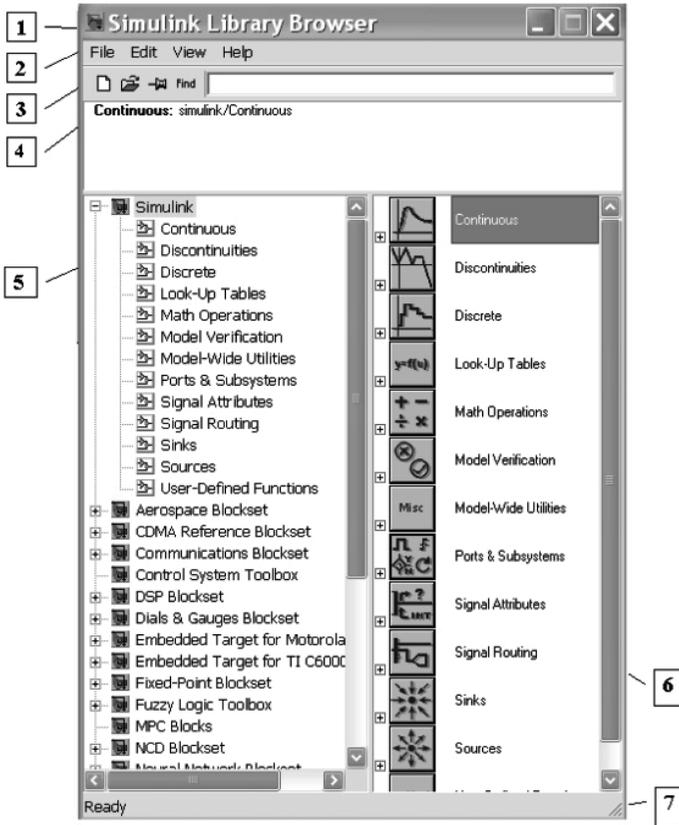


Рис.4.1. Окно обозревателя разделов библиотеки Simulink

Окно обозревателя библиотеки блоков содержит следующие элементы:

- 1) Заголовок окна – Simulink Library Browse.
- 2) Меню для выбора команд File, Edit, View, Help.
- 3) Панель инструментов, с иконами наиболее часто используемых команд.
- 4) Окно комментария для вывода информации о выбранном блоке.
- 5) Список разделов библиотеки, структурированный в виде дерева.
- 6) Окно содержимого раздела библиотеки (список вложенных разделов библиотеки или блоков).
- 7) Строка состояния с подсказкой по выполняемому действию.

К основным разделам библиотеки относятся:

- 1) Continuous – линейные непрерывные компоненты.
- 2) Discontinuous – нелинейные компоненты.
- 3) Discrete – дискретных компоненты.
- 4) Math Operation – математические компоненты.

- 5) Ports & Subsystems – компоненты для создания подсистем.
- 6) Signal Routing – компоненты для разделения сигналов.
- 7) Sinks – регистрирующие компоненты.
- 8) Sources – источники сигналов и воздействий.
- 9) User-Defined Function – компоненты для создания функций пользователя.

Если два раза щелкнуть левой кнопкой мыши на каком-нибудь блоке в окне библиотек, то открывается окно параметров блока, где отображаются установки параметров по умолчанию. Как правило, они нормализованы – например, задана единичная частота, единичная амплитуда, нулевая фаза и так далее. Возможность изменения параметров в этом случае отсутствует. Она появляется после переноса графических элементов в окно подготовки и редактирования функциональных схем (для его открытия необходимо выбрать соответствующую иконку на панели инструментов или File→New→Model).

Для добавления блока в модель достаточно просто перетащить его мышкой в окно модели. Для блоков каждого вида существует определенный набор параметров, для настройки которых используется диалоговое окно

Собственно, моделирование сводится к построению функциональной блок-схемы объекта путем копирования блоков из библиотеки, установления (рисования) связей между ними и заданию параметров элементов системы.

В качестве примера приведем расчет параметров стандартной атмосферы, необходимой для расчета летно-технических характеристик (ЛТХ) ЛА, характеристик устойчивости и управляемости.

Расчет числа M следует выполнять, используя выражение $M = V/a_H$, где скорость звука a_H определяется как функция высоты полета H . Зависимость $a_H = f(H)$ можно задавать таблично с обеспечением интерполяции между узловыми точками с использованием блока Lookup Table.

За пределами диапазона узловых точек значения скорости звука рассчитываются путем линейной экстраполяции.

Расчет скоростного напора q_V выполняется по формуле $q_V = 0,5\rho_H V^2$ или $q_V = 0,7\rho_H M^2$. Эти выражения эквивалентны и составлены исходя из знания зависимостей плотности ρ_H или давления p_H от высоты полета. Приведенные зависимости также можно задать с помощью блока Lookup.

Возможный вариант оформления подсистемы стандартной атмосферы St_atm для расчета скоростного напора и числа M представлен на рис. 4.2. Входами этой подсистемы служат значения скорости [м/с] и высоты полета [м]. Выходами – значения скоростного напора [н/м²] и числа M .

После создания модели запускается моделирование (simulating), воспроизводящее процессы во времени, происходящие в объекте. Этот этап в дальнейшем будет называться симуляцией. При работе с Simulink пользователь имеет возможность модернизировать библиотечные блоки, создавать свои собственные, а также составлять новые библиотеки блоков. При моделировании пользователь может выбирать метод решения дифференциальных уравнений, а также способ изменения модельного времени (с фиксированным или переменным шагом). В ходе моделирования имеется

возможность следить за процессами, происходящими в системе. Для этого используются специальные устройства наблюдения, входящие в состав библиотеки Simulink. Результаты моделирования могут быть представлены в виде графиков или таблиц. На рис. 4.3 представлены результаты расчетов параметров изолированного движения крена.

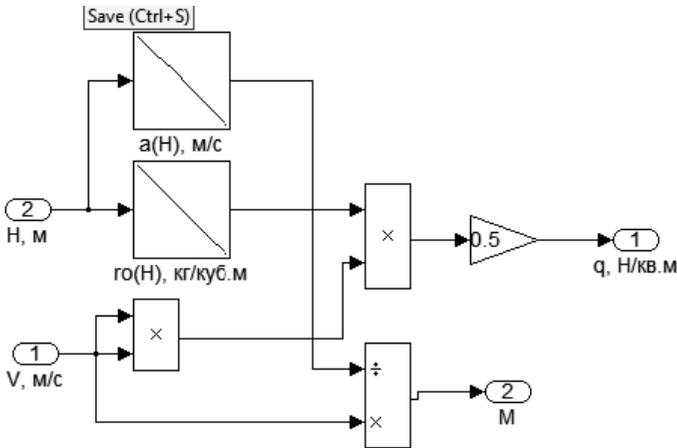


Рис. 4.2. Блок- схема программы вычисления скоростного напора

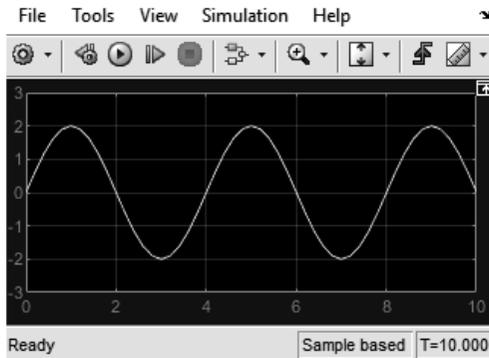


Рис.4.3. Пример расчета движения крена в среде Simulink

4.2. Применение стандартных процедур и функций для решение дифференциальных уравнений

Численные методы интегрирования обыкновенных ДУ и их систем вида $y' = f(x, y)$ можно построить только для случая известных начальных значений всех интегрируемых переменных (для задачи Коши). Общее решение

ДУ содержит произвольные постоянные, которые недопустимы в математических моделях, поэтому в качестве искомой функции используется определенное начальными условиями частное решение.

Эти вычислительные методы основаны на замене дифференциальных уравнений алгебраическими. Операцию взятия производной невозможно представить в цифровых ЭВМ, поэтому производная заменяется разностным выражением того или иного вида. В зависимости от этого вида различаются разностные схемы численного представления дифференциального уравнения и соответствующие им методы [3].

Методы Эйлера.

Простейший метод Эйлера основан на аппроксимации производной простейшей разностной схемой вида:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}. \quad (4.1)$$

Отсюда в силу решаемого дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ выводится разностное уравнение метода:

$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k) \cdot \Delta x. \quad (4.2)$$

Рис. 4.4 дает геометрическое представление об этом методе: в силу вида исходного дифференциального уравнения функция $f(x_k, y_k)$ представляет собой значение производной в левом конце интервала Δx , называемого шагом интегрирования. Тогда разностное уравнение метода Эйлера просто описывает выходящую из левого конца шага интегрирования касательную к неизвестной искомой интегральной кривой (изображенной пунктиром).

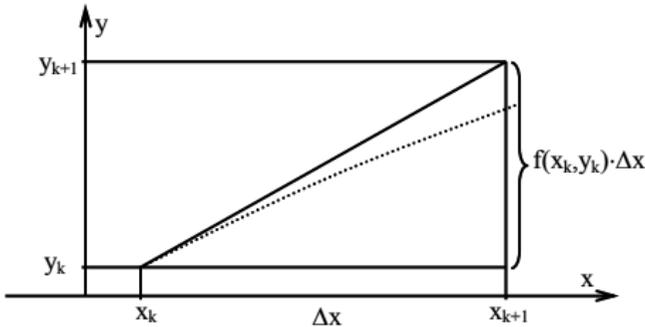


Рис.4.4. Геометрическое представление метода Эйлера

Очевидно, что небольшую неизбежную погрешность при такой аппроксимации можно обеспечить только малым шагом интегрирования Δx . Поэтому численное решение задачи Коши на достаточно большом промежутке изменения аргумента – очень кропотливая процедура, немислимая без вычислительной техники.

Простейший метод Эйлера относится к методам I порядка, поскольку использует в разностной формуле значение функции в одной точке. Заметим

попутно, что приведенная выше разностная схема аппроксимации производной не единственно возможная. Например, схема I порядка

$$y' \approx \frac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}$$

и схема II порядка

$$y' \approx \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{x_{k+1} - x_{k-1}},$$

имеют такое же право на аппроксимацию производной, однако интегрирование с их помощью обладает рядом особенностей.

Простейший метод Эйлера на практике почти не используется. Наибольшее распространение получили модифицированные методы Эйлера II порядка. Идея первой модификации заключается в выполнении шага интегрирования за два полушага и дает уравнение:

$$y_{k+1} = y_k + f \left[x_k + \frac{1}{2} \Delta x, y_k + f(x_k, y_k) \cdot \frac{1}{2} \Delta x \right] \cdot \Delta x. \quad (4.3)$$

Идея второй модификации заключается в выполнении предварительного шага интегрирования и поправки на касательную в конце шага:

$$y_{k+1} = y_k + \left[f(x_k, y_k) + f(x_k + \Delta x, y_k + f(x_k, y_k) \cdot \Delta x) \right] \cdot \frac{1}{2} \Delta x. \quad (4.4)$$

Общими недостатками методов Эйлера I порядка являются невысокая точность и слабая устойчивость (погрешность одного шага интегрирования не только не компенсируется на последующих шагах, а растет). Например, для интегрирования уравнений динамики полета маломаневренных БВС в условиях, близких к установившимся, с практической точки зрения допустимо пользоваться простейшим методом Эйлера. Но при исследовании неустановившихся режимов полета этого недостаточно – следует применять модифицированные методы Эйлера. А для моделирования движения высокоманевренных БВС использование методов Эйлера практически недопустимо.

Для всех разностных методов справедливо утверждение: чем меньше Δx , тем меньше погрешность на шаге и тем выше точность интегрирования дифференциальных уравнений. Однако нельзя заранее сказать, какова должна быть величина Δx для обеспечения заданной точности. Поэтому расчеты с неприемлемой погрешностью просто идут «в корзину». В отношении этого выгодно отличаются разностные методы, которые позволяют не только контролировать погрешность, но и изменять шаг в процессе интегрирования. Этим последним удобством обладают все разностные методы I порядка, но из них только метод «прогноз-коррекция» дает возможность проконтролировать погрешность и подсказать, когда возникает необходимость изменения шага. Из методов более высокого порядка предоставляют возможность изменения шага интегрирования, например, методы Рунге-Кутты.

Методы Рунге-Кутты m -го порядка используют m внутренних точек шага интегрирования Δx : $x_k^{(1)} = x_k$; ...; $x_k^{(m)} \leq x_{k+1}$, которые задаются

характерным для определенной модификации этого метода способом и в которых последовательно вычисляются m значений функции:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_k^{(1)}, y_k), \\ k_2 &= f(x_k^{(2)}, y_k + k_1 \cdot (x_k^{(2)} - x_k^{(1)})), \\ &\vdots \\ k_m &= f(x_k^{(m)}, y_k + k_{m-1} \cdot (x_k^{(m)} - x_k^{(1)})), \end{aligned} \quad (4.5)$$

а затем производится непосредственно сам шаг интегрирования:

$$y_{k+1} = y_k + \left[\sum_{i=1}^m \alpha_i, k_i \right] \cdot \Delta x. \quad (4.6)$$

Простейший метод Рунге-Кутты I порядка ($m = 1$) – это метод Эйлера. Наиболее распространенный в программном обеспечении алгоритмических языков – "стандартный" метод Рунге-Кутты IV порядка использует 4 значения функции, вычисленные для двух промежуточных точек на шаге (в середине) и обеих крайних, и соответствующий набор коэффициентов α_i :

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_k, y_k), \\ k_2 &= f\left(x_k + \frac{1}{2}\Delta x, y_k + k_1 \cdot \frac{1}{2}\Delta x\right), \\ k_3 &= f\left(x_k + \frac{1}{2}\Delta x, y_k + k_2 \cdot \frac{1}{2}\Delta x\right), \\ k_4 &= f(x_k + \Delta x, y_k + k_3 \cdot \Delta x), \\ y_{k+1} &= y_k + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \cdot \frac{1}{6}\Delta x. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Наиболее экономичным из методов Рунге-Кутты является метод II порядка следующего вида:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_k, y_k), \\ k_2 &= f(x_k + \Delta x, y_k + k_1 \Delta x), \\ y_{k+1} &= y_k + (k_1 + k_2) \cdot \frac{1}{2}\Delta x, \end{aligned} \quad (4.8)$$

который по форме совпадает со вторым из приведенных выше модифицированных методов Эйлера. (Этот метод разработан как улучшение метода "прогноз-коррекция" I порядка, когда в качестве окончательного значения функции на шаге принимается среднее арифметическое между прогнозом и коррекцией.

Все методы Рунге-Кутты отличаются устойчивостью и возможностью контроля погрешности и изменения шага интегрирования. Однако по сравнению с методами Адамса того же порядка данные методы менее экономны, поскольку вычисленные для одного шага интегрирования значения

функции нигде больше не используются. Поэтому применение методов Рунге-Кутты высоких порядков оправдано только тогда, когда необходима высокая точность или, когда значения функции вычисляются сравнительно просто.

Краевые задачи – это задачи решения дифференциальных уравнений, у которых не все начальные условия известны, а известны значения некоторых параметров в начальной точке и некоторых из них в конечной или других точках интервала интегрирования. Рассмотрим две группы методов решения краевых задач:

1) Первая группа методов, называемых методами сеток, основывается на идее замены ДУ разностными, и отыскания решения в виде сеточной функции. Сеточная функция представляет собой таблицу значений функции y_k , заданных в узлах, совпадающих с сеткой шагов интегрирования: $x_0, x_1, x_2 \dots x_n$. Все эти значения y_k для рассматриваемой задачи неизвестны, но для каждой узловой точки можно составить алгебраическое уравнение, если заменить производные их разностными соотношениями. Полученную в итоге систему $n + 1$ алгебраических уравнений можно решить в некоторых специальных случаях.

Рассмотрен один из методов сеток – метод прогонки. Для построения метода прогонки в общем случае вводятся новые неизвестные с помощью линейной замены вида $u_k = \alpha_k y_k + \beta_k y_{k-1} \dots$, через которые записывается система уравнений. Вид замены переменных подбирается в соответствии с видом системы уравнений таким образом, чтобы все коэффициенты (α_k, β_k) можно было бы определить последовательно: от (α_1, β_1) до (α_n, β_n) . Этот шаг называется прямой прогонкой. После этого по уравнениям линейной замены переменных последовательно определяются $u_{n-1}, u_{n-2}, \dots, u_1$, так как u_n известно из заданного граничного (конечного) условия. Этот шаг называется обратной прогонкой.

2) Метод стрельбы (пристрелки) основан на сведении решения краевой задачи к решению задачи Коши. Недостающие начальные условия отыскиваются как решение одного или системы нелинейных алгебраических уравнений, в которых роль функций играют разности между заданными значениями конечных условий и соответствующими значениями найденных решений задач Коши.

На рис. 4.5 показан простейший случай одного дифференциального уравнения. По методу стрельбы в результате решения задачи Коши с исходным приближением начального условия $y_0^{(1)}$ определяется конечное значение искомой функции $y(\bar{x})$, которое сравнивается с заданным значением \bar{y} . Исходя из этого сравнения, выбирается следующее приближение начального условия $y_0^{(2)}$ для процедуры отделения корней, а затем по одному из методов решения нелинейного алгебраического уравнения – очередное: $y_0^{(3)}$, которое должно приводить к значению $y(\bar{x})$, достаточно близкому к \bar{y} . И так далее.

Для решения оговоренной системы алгебраических уравнений применяются итерационные методы. Нетрудно видеть, что этот метод требует многократного интегрирования ДУ от начальной точки к конечной (многократного решения задачи Коши). Несмотря на кажущуюся простоту,

метод стрельбы может оказаться вычислительно неустойчивым, что требует проведения дополнительных исследований искомой функции.

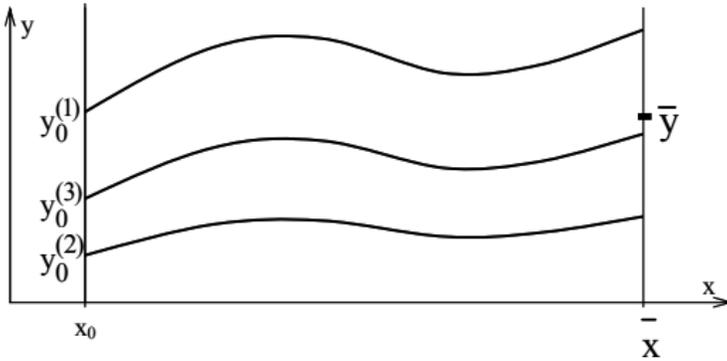


Рис.4.5. Метод стрельбы

Методы интегрирования дифференциальных уравнений с частными производными основываются на разностных схемах, позволяющих отыскивать сеточные функции (таблицы искомых функций, заданных в узлах области интегрирования). Сеточные функции и разностные схемы для аппроксимации частных производных используют такие же подходы, как и в одномерном случае. Однако особенности получаемых сеточных решений могут сильно зависеть от вида таких аппроксимаций разностями и даже быть очень далекими от искомого решения. Во избежание этого разностные схемы подбираются с учетом сохранения основных особенностей физической сути отдельных членов уравнений.

Корректное задание граничных и начальных условий в этих задачах накладывает дополнительные, сложно формулируемые условия, которым должны удовлетворять используемые разностные схемы. Эти условия рассматриваются в специальной математической литературе.

Рассмотрим решение задачи Коши для ОДУ средствами, предоставляемыми MatLab.

Для численного решения предназначены специальные функции, называемые решателями (solver).

В MatLab в настоящее время используются семь функций в зависимости от типа и метода решения задачи:

- $ode45(f, tt, X, [options])$,
- $ode23(f, tt, X0, [options])$,
- $ode113(f, tt, X0, [options])$,
- $ode15s(f, tt, X0, [options])$,
- $ode23s(f, tt, X0, [options])$,
- $ode23t(f, tt, X0, [options])$,
- $ode23tb(f, tt, X0, [options])$.

Входными параметрами этих функций являются:

- f – вектор-функция для вычисления правой части уравнения системы уравнений;
- tt – массив из двух чисел, определяющий интервал интегрирования дифференциального уравнения или системы;
- $X0$ – вектор начальных условий системы дифференциальных уравнений;
- $options$ – параметры управления ходом решения дифференциального уравнения или системы.

Все функции возвращают:

- массив T – координаты узлов сетки, в которых ищется решение;
- матрицу X , i - столбец которой является значением вектор-функции

решения в узле T_i .

В функции *ode45* реализован метод Рунге-Кутты 4-5 порядка точности, в функции *ode23* также реализован метод Рунге-Кутты, но 2-3 порядка, а функция *ode113* реализует метод Адамса.

Для решения жёстких систем предназначены функция *ode15s*, в которой реализован метод Гира, и функция *ode23s*, реализующая метод Розенброка. Для получения более точного решения жёсткой системы лучше использовать функцию *ode15s*. Для решения системы с небольшим числом жёсткости можно использовать функцию *ode23t*, а для грубой оценки подобных систем служит функция *ode23tb* [12, 16].

4.3. Применение стандартных процедур и функций для решения задач интерполяции и аппроксимации данных

Методы интерполяции таблично заданных функций применяются для вычисления значений функции в точках между соседними узлами x_k и x_{k+1} , в которых значения функции $f(x_k)$ и $f(x_{k+1})$ заданы. Таким образом, интерполяция служит для доопределения функции в промежутках между заданными ее значениями в узлах.

Необходимость в такой процедуре возникает при использовании в математических моделях таких характеристик объекта, которые получены экспериментальным или сложным расчетным способом. При этом в зависимости от поставленной задачи могут предъявляться различные специфические требования к свойствам такой интерполяции. Различают следующие методы интерполяции.

1) Кусочно-постоянная интерполяция. Графическое представление такой интерполяции приведено на рис. 4.6. Кусочно-постоянная интерполяция самая простая, но и обладает самыми примитивными качествами с точки зрения применения в моделировании. Действительно: в каждом узле полученная интерполяционная функция терпит разрыв, а разрывная функция применима далеко не во всех задачах.

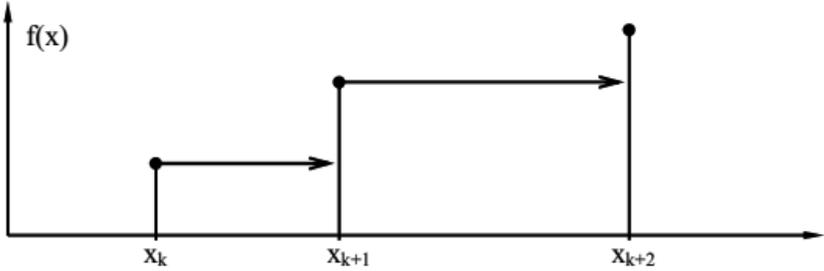


Рис.4.6. Кусочно-постоянная интерполяция

2) Линейная интерполяция (самая распространенная в расчетах) – для нахождения значения функции в точке x , расположенной между соседними узлами (см. рис. 4.7), предполагает линейный характер изменения функции:

$$f(x) = f(x_k) + \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k} \cdot (x - x_k) \quad (4.9)$$

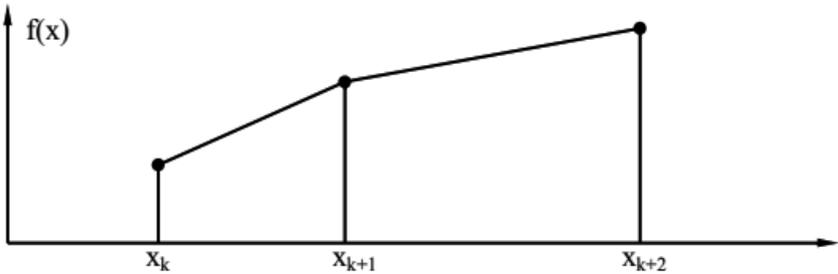


Рис.4.7. Линейная интерполяция

Линейная интерполяционная функция непрерывна, однако имеет разрывы производной в узлах (представляет собой ломанную, связывающую отрезками прямых все заданные узлы). Поэтому, например, в задачах оптимизации, она неприемлема. Однако для простых расчетных процедур она самая употребительная.

3) Квадратичная интерполяция развивает идею линейной для поиска «удобной» функции. Если одна единственная точка задает лишь одно свое значение (постоянная), а две точки – отрезок прямой (линейная функция), то квадратичная функция, как известно, проходит через три заданные точки. Поэтому для построения квадратичной интерполяционной функции используются три соседних узла таблично заданной функции (рис. 4.8).

Квадратичная интерполяционная формула получается именно из системы уравнений, описывающих прохождение многочлена второй степени через три точки, заданные соседними узлами:

$$\begin{aligned}
 f(x) = & f(x_k) + \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k} (x - x_k) + \dots \\
 & + \frac{\frac{f(x_{k+2}) - f(x_{k+1})}{x_{k+2} - x_{k+1}} - \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}}{x_{k+2} - x_k} x (x - x_k) (x - x_{k+1}).
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

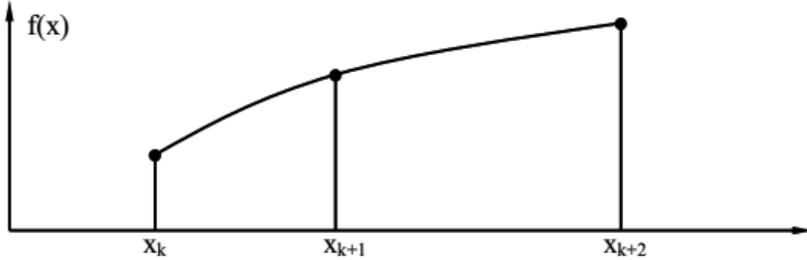


Рис.4.8. Квадратичная интерполяция

При малых изменениях x между x_k и x_{k+2} , производная такой интерполяционной функции остается непрерывной даже в среднем узле x_{k+1} . Однако при смене «троек» узлов разрыва производной избежать не удастся.

4) Полиномиальная интерполяция развивает идею использования многочленов (полиномов) до необходимого числа узлов. В общем случае через $n + 1$ точку проходит единственный многочлен степени n , так как для определения всех его коэффициентов (от свободного члена a_0 до старшего a_n) необходимо $n + 1$ уравнение. Однако обычно вместо процедуры вычисления коэффициентов интерполяционного многочлена используются готовые интерполяционные формулы, подобные приведенным выше, с помощью которых непосредственно вычисляется значение интерполяционной функции в любой точке между крайними узлами x_0 и x_n . Наиболее известными из них являются интерполяционная формула Лагранжа:

$$\begin{aligned}
 f(x) = & \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n)} f(x_1) + \\
 & + \dots + \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_1)(x_n - x_2) \dots (x_n - x_{n-1})} f(x_n) = \sum_{i=0}^n \frac{\prod_{k=0, k \neq i}^n (x - x_k)}{\prod_{k=0, k \neq i}^n (x_i - x_k)},
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

и интерполяционная формула Ньютона:

$$\begin{aligned}
 f(x) = & f(x_0) + (x - x_0) \cdot \Delta_1(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1) \cdot \Delta_2(x_0, x_1, x_2) \\
 & + \dots + \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_k) \cdot \Delta_n(x_0, x_1, \dots, x_n). \\
 \Delta_1(x_0, x_0) = & \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

где

$$\Delta_r(x_0, x_1, \dots, x_r) = \frac{\Delta_{r-1}(x_1, x_2, \dots, x_r) - \Delta_{r-1}(x_0, x_1, \dots, x_{r-1})}{x_r - x_0}.$$

Нетрудно видеть, что полиномиальная интерполяция, хотя и достаточно громоздка, но обеспечивает сколь угодно гладкую функцию – непрерывную вместе со всеми производными.

5) Сплайновая интерполяция – интерполяция с помощью таких многочленов (сплайнов) на каждом участке интерполяции между соседними узлами, которые не только совпадают в определенном числе узлов со значениями заданной функции, но и дают необходимое число непрерывных производных при переходе от одного участка интерполяции к соседнему. Для этого при определении очередного сплайна используют не только значения заданной в узлах функции, но и значения производных предыдущего (например, левого) сплайна в точках сопряжения. Сплайновая интерполяция позволяет достаточно экономным образом получить интерполяционную функцию с заданными свойствами гладкости, что бывает необходимо, например, в задачах оптимизации.

Рассмотрим сплайновую интерполяцию с непрерывной первой производной. Начнем построение интерполяции с крайнего левого участка: $[x_0, x_1]$. Поскольку на концах его известны лишь два значения самой функции $f(x_0)$ и $f(x_1)$, постольку однозначно определить можно лишь два коэффициента линейной интерполяционной функции (сплайна), т.е. два коэффициента $a_0^{(0)}$ и $a_1^{(0)}$ а линейного сплайна вида:

$$f^{(0)}(x) = a_0^{(0)} + a_1^{(0)} \cdot (x - x_0).$$

На любом последующем k -ом участке известны не только значения функции на его концах $f(x_k)$ и $f(x_{k+1})$, но и одно значение производной, с которым предыдущий (левый) сплайн "пришел" в правый конец своего участка. Таким образом, имеется три соотношения, которые могут определить квадратичный сплайн (второго порядка) вида:

$$f^{(k)}(x) = a_0^{(k)} + a_1^{(k)} \cdot (x - x_k) + a_2^{(k)} \cdot (x - x_k)^2. \quad (4.13)$$

В результате несложных преобразований получаем систему рекуррентных соотношений, позволяющих определить коэффициенты всех сплайнов, обеспечивающих интерполяцию с непрерывной первой производной:

$$\begin{aligned} a_0^{(0)} &= f(x_0), \\ a_1^{(0)} &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \\ a_0^{(k)} &= f(x_k), & k = 1, 2, \dots, n-1 \quad (4.14) \\ a_1^{(k)} &= a_1^{(k-1)} + 2a_2^{(k-1)} \cdot (x_k - x_{k-1}), \\ a_2^{(k)} &= \frac{\frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k} - a_1^{(k)}}{x_{k+1} - x_k}. \end{aligned}$$

Методы аппроксимации функций – методы приближенной замены заданной сложной функциональной зависимости более простой функцией (алгебраическим полиномом, тригонометрическим полиномом и другими функциями), которую можно построить с помощью метода наименьших квадратов.

Следует четко различать задачи интерполяции и аппроксимации. Если интерполяционная функция обязательно совпадает в узлах с заданной, то аппроксимирующая – не обязательно. Последняя чаще всего не проходит вообще ни через одну заданную узловую точку. Аппроксимация нужна для простого вычисления сложных функций или для сглаживания (построения гладкой заменяющей функции) таблично заданных функций, чаще всего экспериментальных.

Простейшей аппроксимационной формулой является известная формула Тейлора, приближенно отражающая поведение известной функции в окрестности единственной точки с учетом необходимого числа производных.

Если зависимость имеет явно выраженный характер ограниченной на отрезке или периодической функции, то может быть использована аппроксимация тригонометрическими функциями (конечной частью ряда Фурье).

Вообще говоря, искусство аппроксимации основывается на подборе такого класса (вида) функций, которые наиболее удачно отображают физические свойства аппроксимируемой зависимости. Геометрический вид этой зависимости, или формальные статистические признаки могут приниматься во внимание лишь во вторую очередь, что объяснимо, если иметь ввиду принцип приоритета физичности при построения математических моделей.

В MatLab для решения задач аппроксимации наиболее часто используется функция аппроксимации данных полиномом *polyfit*.

Функция *polyfit(x, y, n)* находит коэффициента полинома степени n , который аппроксимирует функцию $y(x)$ методом наименьших квадратов. Результатом является строка p длины $n + 1$, содержащая коэффициенты аппроксимирующего полинома в порядке уменьшения степеней.

Здесь x, y - соответственно векторы значений аргументов и функции, n – порядок аппроксимирующего полинома.

Приведем примеры реализации процедур интерполяции средствами пакета MatLab.

В Matlab такой способ реализован с помощью команды *interp1(x, y, xi, 'linear')* или просто *interp1(x, y, xi)*, где x и y массивы из табличных данных (координаты точек), x_i массив промежуточных точек, координаты которых требуется найти.

Вычисление сплайн интерполяции в Matlab осуществляется с помощью команды *spline(x, y, xx)*, где x и y - массивы табличных данных, а xx - промежуточные значения по оси абсцисс (X) [12,16].

5. МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРАЕКТОРНЫХ ЗАДАЧ ДВИЖЕНИЯ БВС

5.1. Моделирование движения БВС в вертикальной плоскости

При движении БВС в вертикальной плоскости угол крена $\gamma_a(t) = 0$, угол пути $\Psi(t) = const$. В частном случае, выбором направления оси OX_g нормальной земной системы координат можно обеспечить полет с $\Psi(t) = 0$. Полет в вертикальной плоскости с углом крена $\gamma_a(t) = 180^\circ$ не рассматриваем.

Подставляя эти значения в уравнения движения (3.5), получаем модель движения БВС как материальной точки в вертикальной плоскости:

$$\begin{aligned} m \frac{dV}{dt} &= P - X_a - mg \sin \theta, \\ mV \frac{d\theta}{dt} &= Y_a - mg \cos \theta, \\ \frac{dx_g}{dt} &= V \cos \theta, \\ \frac{dy_g}{dt} &= V \sin \theta, \\ \frac{dm}{dt} &= -c_s, \end{aligned} \quad (5.1)$$

или в перегрузках

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= g(n_{xa} - \sin \theta), \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{g}{V}(n_{ya} - \cos \theta), \\ \frac{dx_g}{dt} &= V \cos \theta, \\ \frac{dy_g}{dt} &= V \sin \theta, \\ \frac{dm}{dt} &= -c_s, \end{aligned} \quad (5.2)$$

с начальными условиями $V(t_0) = V_0$; $\theta(t_0) = \theta_0$; $x(t_0) = x_0$; $y(t_0) = y_0$.

Управляющими функциями в уравнениях движения (5.1) являются тяга силовой установки $P(t)$ и угол атаки $\alpha(t)$, изменение которого приводит к изменению подъемной силы

$$Y_a = c_{y_a}^\alpha (\alpha - \alpha_0) q S.$$

Управляющими функциями в уравнениях движения (5.2) являются тангенциальная перегрузка $n_{xa}(t)$ и нормальная скоростная перегрузка $n_{ya}(t)$,

5.2. Моделирование движения БВС в горизонтальной плоскости

При движении БВС в горизонтальной плоскости угол крена $\gamma_a(t)$ однозначно связан с перегрузкой n_{ya} , угол пути $\Psi(t) = const$, полет выполняется на постоянной высоте $H(t) = const$.

Подставляя эти значения в уравнения движения (3.5), получаем модель движения БВС как материальной точки в горизонтальной плоскости:

$$\begin{aligned}
 m \frac{dV}{dt} &= P - X_a, \\
 Y_a \cos \gamma_a &= G, \\
 -mV \frac{d\Psi}{dt} &= Y_a \sin \gamma_a, \\
 \frac{dx_g}{dt} &= V \cos \Psi,
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dz_g}{dt} &= V \sin \Psi, \\
 \frac{dm}{dt} &= -c_s
 \end{aligned}$$

или в перегрузках

$$\begin{aligned}
 \frac{dV}{dt} &= g n_{xa}, \\
 n_{ya} &= \frac{1}{\cos \gamma_a}, \\
 \frac{dx_g}{dt} &= V \cos \Psi,
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dz_g}{dt} &= V \sin \Psi, \\
 \frac{dm}{dt} &= -c_s,
 \end{aligned}$$

с начальными условиями $V(t_0) = V_0$; $\Psi(t_0) = \Psi_0$; $x(t_0) = x_0$; $z(t_0) = z_0$.

Управляющими функциями в уравнениях движения (5.3, 5.4) являются тяга силовой установки $P(t)$, угол крена $\gamma_a(t)$ и угол атаки $\alpha(t)$, изменение которого приводит к изменению подъемной силы

$$Y_a = c_{ya}^\alpha (\alpha - \alpha_0) q S,$$

а также величина тангенциальной перегрузки $n_{xa}(t)$ и нормальной скоростной перегрузки $n_{ya}(t)$, или угла крена $\gamma_a(t)$.

5.3. Моделирование пространственного движения БВС

Уравнения движения БВС в случае пространственного движения в перегрузках имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \frac{dV}{dt} &= g(n_{xa} - \sin \Theta), \\
 \frac{d\Theta}{dt} &= \frac{g}{V} (n_{ya} \cos \gamma_a - \cos \Theta), \\
 \frac{d\Psi}{dt} &= -\frac{g}{V} n_{ya} \sin \gamma_a, \\
 \frac{dx_g}{dt} &= V_{xg}, \\
 \frac{dy_g}{dt} &= V_{yg},
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

$$\frac{dz_g}{dt} = -V_{zg},$$

$$\frac{dm}{dt} = -c_s.$$

Фазовыми координатами являются значения модуля скорости $V(t)$, угла наклона траектории $\Theta(t)$, угла пути $\Psi(t)$, координат ЦМ БВС в нормальной земной системе координат x_g, y_g, z_g и массы m БВС.

Управляющими функциями в уравнениях движения (5.5) являются тангенциальная перегрузка $n_{xa}(t)$, угол крена $\gamma_a(t)$ и нормальная скоростная перегрузка $n_{ya}(t)$.

5.4. Моделирование взлета БВС

В соответствии с требованиями [10]:

1. При включении автоматической системы взлета все управления БВС, такие как: управление тормозами, управление рулевыми поверхностями на ВПП, выдерживание заданной скорости, конфигурации БВС, а также параметры, определяющие траекторию, должны формироваться и выдерживаться автоматически.
2. В случае возникшего отказа двигателя (для БВС, имеющего более одного двигателя), а также отказа систем, влияющих на безопасность полета, а также выхода за установленные пределы параметров взлета или управления, должна быть задействована автоматическая система управления.

Движение БВС на режимах взлета и посадки имеет ряд особенностей от свободного полета.

При моделировании взлета и посадки в математических моделях необходимо учитывать следующие обстоятельства:

1. При разбеге на взлете и пробеге при посадке шасси БВС взаимодействуют с поверхностью ВПП – появляются силы в виде реакции опор и сил трения.
2. Необходимо учитывать «экранный эффект», который проявляется до высот полета, приблизительно равного размаху крыла.
3. При задании аэродинамических характеристик БВС необходимо учитывать их нестационарность и нелинейность.

В общем случае математическая модель движения БВС на взлете и посадке описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений.

Расчет скорости отрыва и длины разбега.

Под взлетом принято понимать ускоренное движение БВС от момента страгивания в начале разбега до высоты, на которой достигается безопасная скорость полета. На этой высоте безопасная скорость БВС $ST V_2$ должна на 20% превышать скорость сваливания во взлетной конфигурации. По условиям безопасности до высоты, определенной разработчиком БВС, не допускается изменение конфигурации крыла (уборка механизации).

Начиная с этой и разгона до скорости, на 20 % превышающей скорость сваливания в крейсерской конфигурации, происходит поэтапное изменение

положения механизации от взлетной к крейсерской с одновременным набором высоты.

Взлет считается законченным по достижении заданной высоты и крейсерской конфигурации БВС СТ. Режим работы двигателей переводят с взлетного режима на номинальный, соответствующий этапу набора крейсерской высоты полета.

Как правило, взлет выполняется против ветра. Боковая составляющая ветра затрудняет выполнение взлета. Предельная величина боковой составляющей ветра зависит от коэффициента сцепления колес с ВПП, ее значение приведено в таблице 5.1

Таблица 5.1

Коэффициент сцепления	0,5 и больше	0,4	0,3
Скорость ветра, м/с	15	10	5

Встречная составляющая ветра и максимально допустимая попутная составляющая скорости ветра при взлете и посадке определяются разработчиком и приводятся в РЛЭ.

Скорость отрыва находится из соотношения $V_{отр} \geq (1,05 \dots 1,1)V_{св}$ где $V_{св}$ - скорость сваливания БВС СТ во взлетной конфигурации.

Эта скорость находится из условия

$$Y_a = G_{взл} = m_{взл}g,$$

$$c_{ya \text{ макс}} \frac{\rho V_{св}^2}{2} S = m_{взл}g.$$

Отсюда

$$V_{отр} = 1,1 \sqrt{\frac{2 m_{взл}g}{c_{ya \text{ макс}} \rho S}}, \quad V_2 = 1,2 V_{св}.$$

где $c_{ya \text{ макс}}$ – максимальный коэффициент подъемной силы БВС СТ во взлетной конфигурации.

Для расчета длины разбега используем уравнения движения БВС по ВПП:

$$\frac{dL}{dt} = V, \quad Y_a + N = G_{взл}, \quad m_{взл} \frac{dV}{dt} = P - X_a - F_{тр}, \quad (5.6)$$

где N – сила реакции опоры; P – суммарная тяга двигателей с учетом потерь во входном устройстве; $F_{тр} = f_{тр} N = f_{тр} \left[m_{взл}g - c_{ya \text{ разб}} \frac{\rho V^2}{2} S \right]$ – сила трения разбега при движении по ВПП.

Коэффициент силы трения при разбеге $f_{тр}$ определяется качеством и состоянием ВПП, характеристиками колес шасси (давлением в колесах, состоянием протектора, состоянием ВПП, погодными условиями и др.).

Значение коэффициента трения в зависимости от условий эксплуатации приведены в таблице 5.2.

Таблица 5.2

Сухое бетонное покрытие с заделкой швов или асфальтовое покрытие в хорошем состоянии	0,02
Сухое бетонное покрытие с незаделанными швами и местными неровностями	0,03 – 0,04
Мокрое бетонное покрытие, ровное грунтовое поле с утоптаным травяным покровом, хорошо укатанный снег	0,04 – 0,05
Грунтовое поле с небольшой травой, талый снег толщиной 10 мм – 12 мм на твердом основании	0,05 – 0,06
Грунтовое поле с высокой травой, плохо укатанный снег	0,06 – 0,07
Грунтовое поле с сухими кочками и невысокой травой	0,07 – 0,09
Мягкий грунт (удельная прочность 60 Н/м ² – 100 Н/м ²)	0,07 – 0,10
Хорошо уплотненный снег плотностью 0,45 г/см ³ – 0,60 г/см ³	0,08 – 0,10
То же, плотностью 0,25 г/см ³ – 0,35 г/см ³	0,15 – 0,20
Вязкий грунт (раскисший чернозем или суглинок)	0,15 – 0,20
Ровный мерзлый грунт (без дернового покрова)	0,05 – 0,15
То же с оттаявшим верхним слоем	0,15 – 0,30 и более
Твердое покрытие со слоем рыхлого, сухого снега	0,20
Твердое покрытие со слоем рыхлого, влажного и мокрого снега	0,30

Из (5.6) получаем

$$\frac{dV}{dt} = \frac{P - X_a - F_{\text{тр}}}{m_{\text{взл}}} = g \left[\frac{P}{m_{\text{взл}}g} - \frac{c_{\text{ха разб}} \frac{\rho V^2}{2} S}{m_{\text{взл}}g} - \frac{f_{\text{тр}}(m_{\text{взл}}g - c_{\text{ya разб}}) \frac{\rho V^2}{2} S}{m_{\text{взл}}g} \right].$$

В правой части уравнения группируем слагаемые, содержащие V^2

$$\frac{dV}{dt} = g \left[\left(\frac{P}{m_{\text{взл}}g} - f_{\text{тр}} \right) - (c_{\text{ха разб}} - f_{\text{тр}}c_{\text{ya разб}}) \frac{\rho V^2}{2} \frac{S}{m_{\text{взл}}g} \right].$$

Для упрощения полагаем, что в процессе разбега неизменна тяга двигателей P и угол атаки α (т.е. $c_{\text{ха разб}} = \text{const}$; $c_{\text{ya разб}} = \text{const}$).

С учетом принятых допущений, уравнение (5.6) запишем в виде

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dL} \cdot \frac{dL}{dt} = \frac{VdV}{dL}.$$

Отсюда

$$dL = \frac{VdV}{\frac{dV}{dt}}, \quad \text{или} \quad L_{\text{разб}} = \int_0^{V_{\text{отр}}} \frac{VdV}{\frac{dV}{dt}}. \quad (5.7)$$

Подставив выражение для dV/dt , получим

$$L_{\text{разб}} = \int_0^{V_{\text{отр}}} \frac{VdV}{g \left[\left(\frac{P}{m_{\text{взл}}g} - f_{\text{тр}} \right) - (c_{\text{ха разб}} - f_{\text{тр}}c_{\text{уа разб}}) \frac{\rho V^2}{2} \frac{S}{m_{\text{взл}}g} \right]}. \quad (5.8)$$

Введем обозначения

$$a_{\text{разб}} = \frac{P}{m_{\text{взл}}g} - f_{\text{тр}} \quad \text{и} \quad b_{\text{разб}} = (c_{\text{ха разб}} - f_{\text{тр}}c_{\text{уа разб}}) \frac{\rho}{2} \frac{S}{m_{\text{взл}}g}. \quad (5.9)$$

Тогда выражение (5.8) запишем в виде

$$L_{\text{разб}} = \frac{1}{g} \int_0^{V_{\text{отр}}} \frac{VdV}{a_{\text{разб}} - b_{\text{разб}}V^2}.$$

Этот интеграл является табличным. Взяв его, выражение для длины разбега получим в виде

$$L_{\text{разб}} = \frac{1}{2gb_{\text{разб}}} \ln \left| \frac{a_{\text{разб}}}{a_{\text{разб}} - b_{\text{разб}}V_{\text{отр}}^2} \right|. \quad (5.10)$$

Расчет взлетных характеристик при наличии ветра.

При наличии ветра длина разбега подсчитывается по формуле

$$L_{\text{разб}} = L_{\text{разб}}(W=0) \left[1 \pm \frac{W}{V_{\text{отр}}} \right]^2, \quad (5.11)$$

где W – составляющая скорости ветра вдоль ВПП, если ветер попутный, используем знак «+», если встречный – используем знак «-».

Расчет воздушного участка взлета (ВУВ).

Взлетной дистанцией называется расстояние, проходимое БВС СТ по горизонтали с момента страгивания до набора высоты H_2 и безопасной скорости V_2 .

Безопасной скоростью V_2 называется скорость, на которой самолет во взлетной конфигурации обладает достаточной устойчивостью и управляемостью и может безопасно перейти к следующему этапу полета – начальному набору высоты

$$L_{\text{взл}} = L_{\text{разб}} + L_{\text{вув}},$$

где $L_{\text{вув}}$ – длина воздушного участка взлета (ВУВ).

Траектория ВУВ в общем случае является криволинейной. В зависимости от типа самолета и программы полета вид траектории может быть различным. Однако из-за малой протяженности этого участка его длину можно определить приближенно, используя закон сохранения энергии

$$H_2 + \frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_{\text{отр}}^2}{2g} = \int_0^{L_{\text{вув}}} n_{\text{ха}} dl.$$

Если принять тангенциальное ускорение на разбега постоянным ($n_{\text{ха}} = \text{const}$), получим

$$L_{\text{вув}} = \frac{1}{n_{\text{ха}}} \left[\frac{V_2^2 - V_{\text{отр}}^2}{2g} + H_2 \right] = \frac{m_{\text{взл}}g}{(P_p - P_n)_{\text{ср}}} \left[\frac{V_2^2 - V_{\text{отр}}^2}{2g} + H_2 \right]. \quad (5.12)$$

Дальнейший требуемый градиент набора высоты должен составлять не менее 5%, т.е.

$$\frac{P_p - P_n}{m_{\text{взл}}g} \geq 0.05.$$

Расчет прерванного и продолженного взлета.

При расчете взлетных характеристик БВС СТ, кроме нормального взлета необходимо рассматривать еще два варианта взлета: продолженный взлет и прерванный взлет в случае отказа одного (критического) двигателя.

Согласно нормативным документам расчет взлета производится для случая отказа одного двигателя. Рассматриваются две траектории: траектория продолженного взлета и траектория прерванного взлета.

Под продолженным взлете рассматривается взлет с одним отказавшим двигателем.

Траектория продолженного взлета начинается с точки страгивания и заканчивается после наступления позднейшего из событий: достижение высоты 450 м, переход самолета в крейсерскую конфигурацию, достижение скорости V_{FTO} .

Дистанцию продолженного взлета рассчитывают по формуле

$$L_{\text{взл прод}} = L_{\text{разб 1}}(P, V_{\text{отк}}) + L_{\text{разб 2}} \left[\frac{n_{\text{дв}} - 1}{n_{\text{дв}}} P, V_{\text{отк}}, V_{\text{отр}} \right] + L_{\text{вув 1}},$$

где $L_{\text{разб 1}}$ - длина разбега при всех работающих двигателях от точки старта ($V = 0$) до скорости $V_{\text{отк}}$, при которой происходит отказ критического двигателя. Длина этого участка определяется по формуле, аналогичной (5.10), где вместо $V_{\text{отр}}$ стоит $V_{\text{отк}}$, т.е.

$$L_{\text{разб 1}} = \frac{1}{2gb_{\text{разб}}} \ln \left| \frac{a_{\text{разб}}}{a_{\text{разб}} - b_{\text{разб}} V_{\text{отк}}^2} \right|. \quad (5.13)$$

Длина участка $L_{\text{разб 2}}$ также рассчитывается по формуле, аналогичной (5.10), но в ней уже учитывается отказ критического двигателя и уменьшение тяги, связанное с отказом критического двигателя. Скорость увеличивается от $V_{\text{отк}}$ до $V_{\text{отр}}$

$$L_{\text{разб 2}} = \frac{1}{2gb_{\text{разб}}} \ln \left| \frac{a_{\text{разб 1}} - b_{\text{разб}} V_{\text{отк}}^2}{a_{\text{разб 1}} - b_{\text{разб}} V_{\text{отр}}^2} \right|, \quad (5.14)$$

где

$$a_{\text{разб 1}} = \frac{n_{\text{дв}} - 1}{m_{\text{взл}}g} P - f_{\text{тр}},$$

$n_{\text{дв}}$ - количество двигателей, создающих тягу при взлете БВС.

Длину воздушного участка взлета $L_{\text{вув 1}}$ рассчитываем по формуле, с учетом отказа критического двигателя

$$L_{\text{вув 1}} = \frac{m_{\text{взл}}g}{\left(\frac{n_{\text{дв}} - 1}{n_{\text{дв}}} (P_p - P_n) \right)_{\text{ср}}} \left[\frac{V_2^2 - V_{\text{отр}}^2}{2g} + H_2 \right]. \quad (5.15)$$

Дальнейший требуемый градиент набора высоты

$$\frac{\left(\frac{n_{\text{дв}} - 1}{n_{\text{дв}}}\right) (P_p - P_n)_{\text{ср}}}{m_{\text{взл}} g}$$

должен составлять не менее 1,2%, если $n_{\text{дв}} = 2$; 1,5%, если $n_{\text{дв}} = 3$; 1,7%, если $n_{\text{дв}} = 4$.

Траектория прерванного взлета начинается с точки страгивания и заканчивается после полной остановки БВС на ВПП после прекращения взлета и включает в себя следующие участки:

- участок разгона БВС со всеми работающими двигателями от точки страгивания до достижения скорости отказа критического двигателя V_{EF} ;
- участок разгона БВС с одним работающим двигателем до момента распознавания отказа двигателя и перевода РУД в положение малого газа для начала торможения;
- участок движения на скорости V_1 в течение 2 секунд;
- участок торможения до полной остановки БВС. Так же, как и расчет взлетных характеристик, расчет потребной посадочной дистанции выполняется в соответствии с требованиями нормативными документами.

При прерванном взлете после отказа критического двигателя применяется аварийное торможение до полной остановки БВС. Дистанция прерванного взлета может быть рассчитана по формуле

$$L_{\text{взл прерв}} = L_{\text{разб } 1}(P, V_{\text{отк}}) + L_{\text{разб } 3} \left[\frac{n_{\text{дв}} - 1}{n_{\text{дв}}} P, V_{\text{отк}}, V_1 \right] + L_{\text{пр } 1}, \quad (5.16)$$

где $L_{\text{разб } 3}$ – длина разбега с одним отказавшим двигателем от момента отказа на скорости $V_{\text{отк}}$ до момента принятия внешним пилотом решения о прекращении взлета на скорости $V_1 = V_{\text{отк}} + t_{\text{л}} n_{\text{ха}}$

где $t_{\text{л}} = 3$ с – среднее нормативное время реакции внешнего пилота;

$$n_{\text{ха}} = \frac{\frac{n_{\text{дв}} - 1}{n_{\text{дв}}} P}{m_{\text{взл}} g} - \frac{c_{\text{ха разб}} \frac{\rho V^2}{2} S}{m_{\text{взл}} g} - \frac{f_{\text{тр}} \left(m_{\text{взл}} g - c_{\text{уа разб}} \frac{\rho V_{\text{отк}}^2}{2} S \right)}{m_{\text{взл}} g},$$

– тангенциальная (продольная) перегрузка.

$$L_{\text{разб } 3} = \frac{1}{2gb_{\text{разб}}} \ln \left| \frac{a_{\text{разб } 1} - b_{\text{разб}} V_{\text{отк}}^2}{a_{\text{разб } 1} - b_{\text{разб}} V_1^2} \right|. \quad (5.17)$$

Длина участка торможения $L_{\text{пр } 1}$ рассчитывается по формуле

$$L_{\text{пр } 1} = \frac{1}{2gb_{\text{пр}}} \ln \left| \frac{a_{\text{пр } 1}}{a_{\text{пр } 1} - b_{\text{пр } 1} V_1^2} \right|, \quad (5.18)$$

где

$$a_{\text{пр } 1} = \frac{n_{\text{дв}} - 1}{n_{\text{дв}}} P_{\text{рев}} + f_{\text{тр}}; \quad b_{\text{пр } 1} = (c_{\text{ха разб}} - f_{\text{тр}} c_{\text{уа разб}}) \frac{\rho}{2} \frac{S}{m_{\text{взл}} g}.$$

Существует такая скорость $V_{отк}$, при которой $L_{взл прод} = L_{взл прерв}$. Такая скорость называется сбалансированной V_{EF} . Эту скорость можно определить, задаваясь различными значениями $V_{отк}$ и рассчитывая $L_{взл прод}$ и $L_{взл прерв}$.

Величине V_{EF} соответствует скорость принятия решения V_1 и сбалансированная длина взлетной дистанции $L_{сб}$. Потребная длина ВПП должна быть не менее $L_{сб}$.

Основные факторы, влияющие на взлетные характеристики БВС.

1) Взлетная масса БВС влияет на величину скорости отрыва и силу трения колес. При увеличении массы возрастает лобовое сопротивление X_a и сила трения $F_{тр}$, уменьшается ускорение на разбеге. Это приводит к увеличению скорости отрыва $V_{отр}$ и длины разбега $L_{разб}$.

2) Механизация крыла (предкрылки, отклоняемые носки, закрылки...) предназначена для увеличения коэффициента подъемной силы $c_{ya макс}$, за счет чего уменьшается скорость отрыва и весьма существенно – длина разбега. Углы отклонения механизации на взлете меньше, чем при посадке.

3) Увеличение располагаемой тяги двигателей приводит при прочих равных условиях к увеличению располагаемого ускорения на разбеге и уменьшению длины разбега. Кроме того, тяга двигателей оказывает влияние на скорость отрыва через составляющую тяги $P \sin \alpha_p$:

$$\frac{V_{отр P}}{V_{отр}} = \sqrt{1 - \mu \sin \alpha_p},$$

где $\mu = P/mg$.

4) Состояние атмосферы существенно влияет на взлетные характеристики из-за изменения аэродинамических сил (через изменение скоростного напора), так и изменения тяги двигателей. Параметры атмосферы: температура воздуха $T^{\circ}K = t^{\circ}C + 273$, давление p_H и плотность ρ_H связаны соотношением

$$\rho_H = \frac{p_H}{RT}.$$

Используя это соотношение, запишем формулу для скорости отрыва $V_{отр}$:

$$V_{отр} = \sqrt{\frac{2mg RT}{c_{ya отр} \rho_H S}}.$$

Тогда отличие скорости отрыва при текущих значениях p_H, T от скорости отрыва при стандартных может быть определено по формуле

$$V_{отр} = V_{отр ст} \sqrt{\frac{p_{ст} T}{p T_{ст}}}.$$

Увеличение температуры и уменьшение атмосферного давления приводит к росту скорости отрыва БВС.

Модель стандартной атмосферы.

Температура и плотность воздуха оказывают большое влияние на аэродинамические характеристики ЛА и характеристики силовой установки.

При расчете ЛТХ, траекторий движения используются стандартные эталонные характеристики атмосферы, которые не зависят от географических

координат места проведения полетов, времени года и времени суток, а также фактического состояния погоды. Это необходимо для сравнения между собой характеристик различных ЛА.

Принятая в РФ модель атмосферы соответствует международному стандарту МС ИСО 2533, отражающему характерный для средних широт северного полушария закон изменения по высоте основных физических параметров воздуха.

ГОСТ предназначен для использования при расчете ЛТХ ЛА, при обработке результатов испытаний, моделирования движения БВС.

В качестве нулевой высоты отсчета принимается средний уровень моря со следующими значениями параметров атмосферы:

- давление $p_H=101325,0$ Па;
- температура $T_H=288,15$ К;
- плотность $\rho_H=1,225$ кг/м³.

Таблицы параметров стандартной атмосферы рассчитаны в предположении, что воздух представляет собой идеальный газ, и базируются на общепринятых для среднего уровня моря исходных значениях температуры, давления и плотности воздуха.

Используемые при расчетах уравнения статики атмосферы и состояния идеального газа имеют вид:

$$\frac{dp}{dH} = -\rho g; \quad p = \rho T \frac{R^*}{M_*},$$

где H – геометрическая высота; g – ускорение свободного падения; R^* – универсальная газовая постоянная; M_* – молярная масса воздуха.

5.5. Моделирование посадки БВС

Посадка – этап полета с высоты 15 м над уровнем торца ВПП до приземления, пробега по ВПП и полной остановки ВС.

Посадка БВС СТ состоит из следующих этапов (рис.5.1): снижение, выравнивание, выдерживание и пробег.

На снижении ($H_0 = 15$ м, $H_k = 6 \dots 10$ м) внешний пилот корректирует направление полета по оси ВПП и определяет возможность посадки. Скорость и угол наклона траектории примерно постоянны.

Для обеспечения постоянства скорости необходимо, чтобы

$$m \frac{dV}{dt} = P \cos \alpha_p - X_a - G \sin \Theta, \quad \text{или} \quad \mu \approx \frac{1}{K} + \sin \Theta_{\text{сн}},$$

где $K = Y_a / X_a$ – аэродинамическое качество.

На выравнивании (рис.5.2) внешний пилот уменьшает вертикальную скорость снижения V_y практически до нуля посредством искривления траектории за счет создания перегрузки $n_{ya} = 1,1 - 1,2$.

Уменьшение высоты на этапе выравнивания можно оценить по формуле

$$H_{\text{выр}} = r_y - r_y \cos \theta_{\text{сн}} = \frac{V^2(1 - \cos \theta)}{g(n_{ya} - \cos \theta_{\text{ср}})} \approx \frac{V^2 \theta^2}{2g(n_{ya} - \cos \theta_{\text{ср}})} \approx \frac{V_y^2}{2g(n_{ya} - \cos \theta_{\text{ср}})}. \quad (5.19)$$

Здесь:

$$r_y = \frac{V^2}{g(n_{ya} - \cos \theta_{\text{ср}})} \quad \text{— радиус кривизны траектории в вертикальной плоскости}$$

$$\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2},$$

$$\theta_{\text{ср}} = \theta_{\text{сн}}/2 \quad \text{— среднее значение угла наклона траектории на выравнивании.}$$

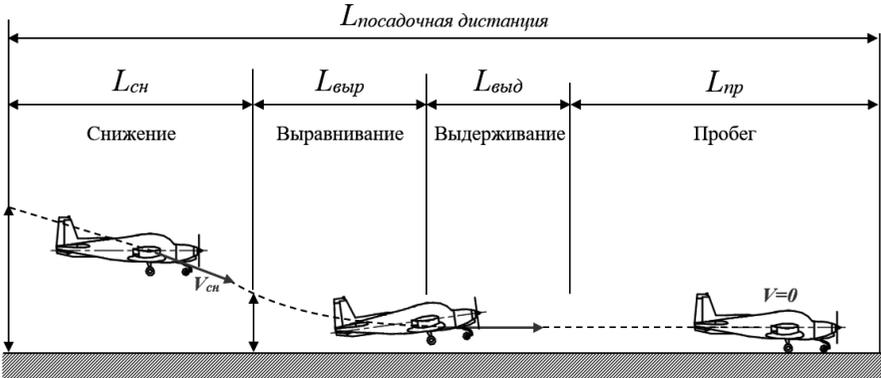


Рис. 5.1. Схема посадки БВС СТ с пробегом

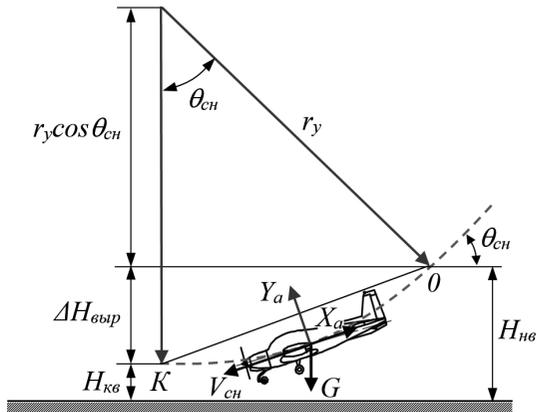


Рис. 5.2. Этап выравнивания БВС СТ на посадке

На этапе выдерживания тяга двигателя уменьшается до малого газа, под действием лобового сопротивления скорость уменьшается до посадочной, полет практически горизонтальный. Выдерживание может выполняться слитно с выравниванием. Длина участка выравнивания может быть определена

$$L_{\text{выд}} \cong K_{\text{ср}} \frac{V_{\text{нач выд}}^2 - V_{\text{пос}}^2}{2g}$$

На пробеге (начинается от момента касания колес земли) происходит торможение от посадочной скорости до скорости руления или до полной остановки БВС.

Схема сил, уравнения движения БВС на пробеге (рис.5.3).

$$\frac{dL}{dt} = V, \quad Y_a + N = G_{\text{пос}},$$

$$m_{\text{пос}} \frac{dV}{dt} = -X_a - F_{\text{тр}} - \Delta P_{\text{рев}} = -X_a - f_{\text{тр}}(N_{\text{пер}} + N_{\text{осн}}) - \Delta P_{\text{рев}}. \quad (5.20)$$

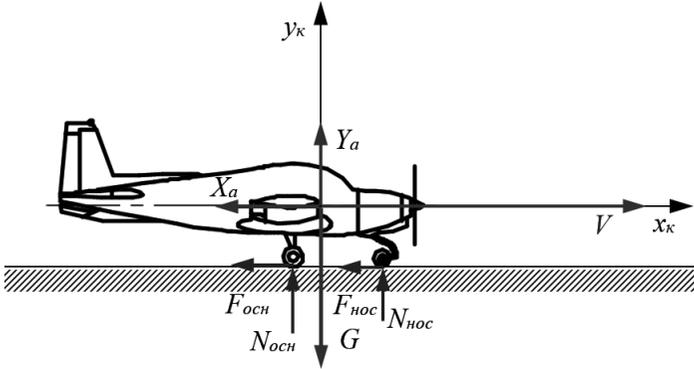


Рис. 5.3. Схема сил, действующих на БВС СТ на пробеге

где $N_{\text{пер}}$, $N_{\text{осн}}$ – реакция земли на опоры шасси; $\Delta P_{\text{рев}}$ – суммарная реверсная тяга двигателей; $F_{\text{тр}}$ – сила трения пробегания при движении по ВПП,

$$N = N_{\text{пер}} + N_{\text{осн}},$$

$$Y_a - G + N = 0,$$

$$\frac{dL}{dt} = V.$$

Откуда

$$m_{\text{пос}} \frac{dV}{dt} = m_{j_x} = -X_a - f_{\text{тр}}(Y - G_a) - \Delta P_{\text{рев}}. \quad (5.21)$$

Посадочные характеристики БВС, основные способы их улучшения.

Посадочная скорость рассчитывается по формуле

$$V_{\text{пос}} = \sqrt{\frac{2G}{c_{yа\text{ пос}} \rho_H S}}.$$

Длина пробегания:

$$L_{\text{пр}} = -\frac{V_{\text{пос}}^2}{2j_x}.$$

Для уменьшения посадочной скорости увеличивают $c_{ya \text{ пос}}$ за счет отклонения механизации, использования малой стреловидности крыла, сдува пограничного слоя.

Для уменьшения длины пробега:

1. Увеличивают лобовое сопротивление за счет выпуска тормозных щитков, интерцепторов, тормозного парашюта (тем эффективнее, чем больше скорость)
2. Включают реверс тяги, отрицательную тягу винтов
3. Используют торможение колес (тем эффективнее, чем больше сила N).

6. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ УСТОЙЧИВОСТИ И УПРАВЛЯЕМОСТИ БВС

6.1. Линеаризация уравнений движения БВС

Нормативной документацией устанавливается, что БВС должен обладать продольной, путевой и поперечной устойчивостью при любых условиях эксплуатации на всех эксплуатационных высотах, при любых комбинациях значений веса и положений центра тяжести.

Переходные характеристики в продольном, поперечном и путевом каналах во время осуществления переходов между различными состояниями и режимами полета должны оставаться плавными, затухающими и проявлять свойства демпфирования с минимальными забросами для целевой траектории полета [10].

Исследование динамических свойств БВС может быть осуществлено с использованием математической модели (3.7), записанной в форме системы дифференциальных уравнений.

Эта система является системой нелинейных дифференциальных уравнений. Правые части системы сложным образом зависят от параметров полета: высоты и скорости полета, углового положения БВС, положения рычагов управления, угловых скоростей вращения, взаимовлияния движений и т.д.

Поэтому получить в аналитическом виде общее решение уравнений пространственного решения БВС невозможно.

Для получения отдельных характеристик такого движения прибегают к численному решению системы дифференциальных уравнений.

Для получения обобщающих выводов о влиянии исследуемых факторов на параметры движения необходимо проводить весьма обширный численный эксперимент.

Часто прибегают к упрощению системы уравнений до уровня, который позволит либо получить аналитические решения, либо проводить расчеты с использованием ЭВМ в широком диапазоне изменения параметров движения. При этом отдельные результаты могут быть уточнены с помощью точной математической модели.

Наиболее распространенным способом является приведение исходной системы нелинейных дифференциальных уравнений к системе линейных дифференциальных уравнений.

Достоверность анализа движения БВС по такой системе основано на теореме А.М. Ляпунова, который показал, что по линеаризованной системе уравнений можно судить об устойчивости движения описываемого нелинейными дифференциальными уравнениями только при достаточно малых возмущениях.

На основе метода малых возмущений можно записать уравнения возмущенного движения БВС в области небольших отклонений от заданного опорного (невозмущенного) движения.

В качестве исходного невозмущенного движения рассмотрим установившийся горизонтальный полет без крена и скольжения.

Применяя процедуру линеаризации к исходной системе уравнений (3.7), получим две системы линейных ДУ с постоянными коэффициентами, описывающих продольное и боковое движение [22,25,28].

Для продольного движения:

$$(D + a_{1V})\Delta V + a_{1\alpha}\Delta\alpha + a_{1\vartheta}\Delta\vartheta = a_{1\delta_{\text{пуд}}}\Delta\delta_{\text{пуд}} + a_{1\delta_{\text{в}}}\Delta\delta_{\text{в}},$$

$$a_{2V}\Delta V + (a_{2\alpha} - D)\Delta\alpha + (D + a_{2\vartheta})\Delta\vartheta = a_{2\delta_{\text{в}}}\Delta\delta_{\text{в}}, \quad (6.1)$$

$$a_{3V}\Delta V + (a_{3\dot{\alpha}}D + a_{3\alpha})\Delta\alpha + (D^2 + a_{3\omega_z}D)\Delta\vartheta = a_{3\delta_{\text{пуд}}}\Delta\delta_{\text{пуд}} + a_{3\delta_{\text{в}}}\Delta\delta_{\text{в}}.$$

В таблице 6.1 приведены значения коэффициентов системы линейных дифференциальных уравнений, описывающих продольное движение ЛА.

Таблица 6.1

Параметр	1	2	3
ΔV	$a_{1V} = \frac{X^V - P^V}{m}$	$a_{1\alpha} = \frac{Y^V}{mV_0}$	$a_{1\vartheta} = \frac{M_z^V}{I_z}$
$\Delta\alpha$	$a_{2V} = \frac{X^\alpha}{m} - g\cos\Theta_0$	$a_{2\alpha} = -\frac{Y^\alpha}{mV_0} + \frac{g\sin\Theta_0}{V_0}$	$a_{2\vartheta} = -\frac{M_z^\alpha}{I_z}$
$\Delta\vartheta$	$a_{3V} = g\cos\Theta_0$	$a_{3\alpha} = -\frac{g}{V_0} + \sin\Theta_0$	0
ω_z	0	0	$a_{3\omega_z} = -\frac{M_z^{\omega_z}}{I_z}$
$\Delta\dot{\alpha}$	0	0	$a_{3\dot{\alpha}} = \frac{M_z^{\dot{\alpha}}}{I_z}$
$\Delta\delta_{\text{п}}$	$a_{1\delta_{\text{пуд}}} = \frac{P^{\delta_{\text{пуд}}}}{m}$	0	$a_{3\dot{\alpha}} = \frac{M_z^{\delta_{\text{пуд}}}}{I_z}$
$\Delta\delta_{\text{в}}$	$a_{1V} = -\frac{X^{\delta_{\text{в}}}}{m}$	$\frac{Y^{\delta_{\text{в}}}}{mV_0}$	$a_{3\dot{\alpha}} = \frac{M_z^{\delta_{\text{в}}}}{I_z}$

Для бокового движения:

$$D\beta - D\psi + a_{1\beta}\beta + a_{1\gamma}\gamma = a_{1\delta_{\text{н}}}\delta_{\text{н}},$$

$$D\omega_x + a_{2\beta}\beta + a_{2\omega_x}\omega_x + a_{2\omega_y}\omega_y = a_{2\delta_{\text{н}}}\delta_{\text{н}} + a_{2\delta_{\text{э}}}\delta_{\text{э}}, \quad (6.2)$$

$$D\omega_y + a_{3\beta}\beta + a_{3\omega_x}\omega_x + a_{3\omega_y}\omega_y = a_{3\delta_{\text{н}}}\delta_{\text{н}} + a_{3\delta_{\text{э}}}\delta_{\text{э}}.$$

В таблице 6.2 приведены значения коэффициентов системы линейных дифференциальных уравнений, описывающих боковое движение ЛА.

Таблица 6.2

Параметр	1	2	3
β	$a_{1\beta} = -\frac{Z^\beta}{mV_0}$	$a_{2\beta} = -\frac{M_x^\beta}{I_x}$	$a_{3\beta} = -\frac{M_y^\beta}{I_y}$
γ	$a_{1\gamma} = -\frac{gn_y}{V_0} = -\frac{g}{V_0}$	0	0
ω_x	0	$a_{2\omega_x} = -\frac{M_x^{\omega_x}}{I_x}$	$a_{3\omega_x} = -\frac{M_y^{\omega_x}}{I_y}$
ω_y	0	$a_{2\omega_y} = -\frac{M_x^{\omega_y}}{I_x}$	$a_{3\omega_y} = -\frac{M_y^{\omega_y}}{I_y}$
$\Delta\delta_H$	$a_{1\delta_H} = \frac{Z^{\delta_H}}{mV_0}$	$a_{2\delta_H} = \frac{M_x^{\delta_H}}{I_x}$	$a_{3\delta_H} = \frac{M_y^{\delta_H}}{I_y}$
$\Delta\delta_\alpha$	0	$a_{2\delta_\alpha} = \frac{M_x^{\delta_\alpha}}{I_x}$	$a_{3\delta_\alpha} = \frac{M_y^{\delta_\alpha}}{I_y}$

6.2. Расчет характеристик устойчивости в продольном движении

Определение собственных динамических свойств БВС в «малом» (короткопериодическом) движении.

В малом короткопериодическом движении

$$V = const, \quad \Delta V = 0, \quad \Theta_0 = 0, \quad \sin \Theta_0 = 0, \quad \cos \Theta_0 = 1.$$

Уравнения малого продольного движения для этого случая имеют вид:

$$(a_{2\alpha} - D)\Delta\alpha + D\Delta\vartheta = 0, \quad (6.3)$$

$$(a_{3\alpha}D + a_{3\alpha})\Delta\alpha + (D^2 + a_{3\omega_z}D)\Delta\vartheta = 0.$$

Подставив соответствующие значения коэффициентов из таблицы 6.1, получим:

$$\Omega_\alpha^2 = -\left(\frac{M_z^\alpha}{I_z} + \frac{M_z^{\omega_z}}{I_z} + \frac{Y^\alpha}{mV_0}\right) = -\frac{c_y^\alpha qSb_a}{I_z} \left(m_z^{c_y} + \frac{m_z^{\bar{\omega}_z} \rho S b_a}{2m}\right), \quad (6.4)$$

$$n_\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{Y^\alpha}{mV} - \frac{M_z^{\omega_z}}{I_z} - \frac{M_z^\alpha}{I_z}\right) = \frac{qS}{2V} \left(\frac{c_y^\alpha}{m} - \frac{(m_z^{\bar{\omega}_z} + m_z^\alpha) b_a^2}{I_z}\right). \quad (6.5)$$

Здесь n_α - коэффициент демпфирования (затухания) колебаний;

Ω_α - опорная частота (частота «недемпфированных» колебаний;

b_a — величина средней аэродинамической хорды, м;

I_z — момент инерции самолета относительно оси Oz связанной системы координат, кг·м²;

$m_z^{\bar{\omega}_z}$ — безразмерный коэффициент демпфирующего момента тангажа;

V — истинная скорость полета самолета, м/с;

m_z^α — безразмерный коэффициент продольного момента от запаздывания скаса потока.

Определив относительную степень затухания колебаний по углу атаки

$$\xi_{\alpha} = \frac{n_{\alpha}}{\Omega_{\alpha}}, \quad (6.6)$$

можно получить ответ о характере переходного процесса свободного малого продольного движения. Если $\xi_{\alpha} < 1$ – движение носит колебательный характер, если $\xi_{\alpha} > 1$ – аperiодический.

Для обеспечения устойчивости движения необходимо, чтобы $\Omega_{\alpha}^2 > 0$ и $n_{\alpha} > 0$. Если в результате расчета выяснится, что БВС неустойчив по углу атаки, дальнейший расчет характеристик свободного движения не имеет смысла, так как все используемые характеристики описывают движение устойчивого БВС.

Если БВС является устойчивым по углу атаки (нормальной перегрузке) и обладает колебательными свойствами, то его свободное движение описывается следующими параметрами:

- действительной частотой колебаний (собственной частотой демпфированных колебаний) ω_{α} ;
- периодом колебаний T_{α} ;
- относительной степенью затухания ξ_{α} ;
- коэффициентом затухания колебаний $m_{\text{зат } \alpha}$;
- временем затухания колебаний $t_{\text{зат } \alpha}$;
- числом колебаний до практически полного затухания $n_{\text{зат } \alpha}$.

Действительная частота колебаний ω_{α} характеризует частоту колебаний БВС по углу атаки (нормальной перегрузке) с учетом демпфирующих свойств БВС. Она определяется по формуле

$$\omega_{\alpha} = \sqrt{\Omega_{\alpha}^2 - n_{\alpha}^2}. \quad (6.7)$$

Действительная частота колебаний ω_{α} по физическому содержанию является угловой частотой гармонических колебаний. Ее единицей является $[\omega_{\alpha}] = 1$ рад/с.

Период колебаний T_{α} соответствует наименьшему интервалу времени, через который повторяется кинематическое состояние БВС, характеризуемое углом атаки (нормальной перегрузкой) и производной угла атаки (нормальной перегрузки) по времени. Единица периода колебаний $[T_{\alpha}] = 1$ с.

Период колебаний T_{α} определяется в соответствии с формулой

$$T_{\alpha} = \frac{2\pi}{\omega_{\alpha}}. \quad (6.8)$$

Коэффициент затухания колебаний $m_{\text{зат } \alpha}$ является безразмерной величиной и характеризует уменьшение амплитуды колебаний за один период. Он показывает, во сколько раз амплитуда колебаний уменьшается за один период. Коэффициент затухания колебаний $m_{\text{зат } \alpha}$ рассчитывается по известной из динамики полета формуле

$$m_{\text{зат } \alpha} = e^{n_{\alpha} T_{\alpha}}. \quad (6.9)$$

На практике принято считать переходный процесс закончившимся, если амплитуда колебаний не превосходит 5% первоначальной величины. Другими

словами, к моменту времени затухания колебаний $t = t_{\text{зат } \alpha}$ амплитуда должна уменьшиться в 20 раз. Тогда время затухания колебаний можно определить с помощью выражения

$$t_{\text{зат } \alpha} = \frac{\ln 20}{n_{\alpha}}. \quad (6.10)$$

Число колебаний до практически полного затухания $n_{\text{зат } \alpha}$ является безразмерной величиной и определяется с помощью очевидного соотношения

$$n_{\text{зат } \alpha} = \frac{t_{\text{зат } \alpha}}{T_{\alpha}}. \quad (6.11)$$

Полное представление о характере движения БВС по углу атаки в свободном движении при входном ступенчатом сигнале по углу атаки дает графическое изображение переходного процесса $\Delta\alpha = f(t)$ (рис. 6.1).

Для построения графика переходного процесса в случае колебательного движения необходимо использовать уравнение малого продольного движения

$$\Delta\alpha = Ae^{-n_{\alpha}t} \sin(\omega_{\alpha}t + \varphi_{\alpha}), \quad (6.12)$$

если задаться начальной амплитудой колебаний A .

Это уравнение позволяет определить изменение угла атаки (приращение угла атаки) $\Delta\alpha$ по отношению к исходному балансировочному углу атаки в горизонтальном полете от времени t . Здесь φ_{α} – начальный сдвиг колебаний на фазе.

Из динамики полета известно, что

$$\sin \varphi_{\alpha} = \frac{\omega_{\alpha}}{\Omega_{\alpha}}. \quad (6.13)$$

Для расчета изменения возмущения угла атаки $\Delta\alpha$ в короткопериодическом продольном движении и построения графика удобно задаться большим числом значений времени t , для каждого определить значение приращения угла атаки $\Delta\alpha$ по формуле (6.12). Для более точного построения графика требуется большое число моментов времени t с малым шагом, что возможно только при расчете на ЭВМ.

Для лучшего понимания сущности характеристик малого продольного движения и более точного построения графика наряду с предыдущим можно воспользоваться следующим алгоритмом [14]:

1. В момент времени $t=0$ величина $\Delta\alpha = A \sin \varphi_{\alpha}$, что следует из формулы (6.12) (точка 1, рис. 6.1).
2. Построить кривые $Ae^{-n_{\alpha}t}$ и $-Ae^{-n_{\alpha}t}$, показывающие изменение амплитуды колебаний по времени (рис. 6.1).
3. Определить момент времени первоначального достижения амплитуды колебания $t_{\text{сдв}}$ за счет сдвига фазы колебаний φ_{α} :

$$t_{\text{сдв}} = \frac{\frac{\pi}{2} - \varphi_{\alpha}}{\omega_{\alpha}}. \quad (6.14)$$

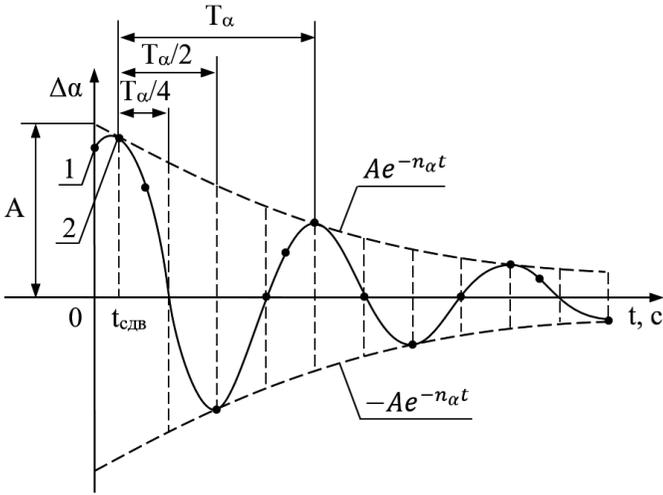


Рис.6.1. Изменение возмущения угла атаки по времени в малом продольном движении

В этот момент времени приращение угла атаки $\Delta\alpha$ достигнет значения

$$\Delta\alpha = Ae^{-n\alpha t}, \quad (6.15)$$

т. е. впервые выйдет на кривую $Ae^{-n\alpha t}$.

Это возможно при первом за движение БВС по времени выполнении условия

$$\sin(\omega_\alpha t_{сдв} + \varphi_\alpha) = 1, \quad (6.16)$$

что возможно, если

$$(\omega_\alpha t_{сдв} + \varphi_\alpha) = \frac{\pi}{2}. \quad (6.17)$$

Это условие и позволяет получить формулу (6.14).

Момент времени $t_{сдв}$ позволяет построить точку 2 (рис. 6.1).

4. Отметить вправо от момента времени $t_{сдв}$ необходимое количество периодов T_α , полупериодов колебаний $T_\alpha/2$, четвертей периода $T_\alpha/4$.

5. Построить график переходного процесса (рис. 6.1).

Если БВС обладает аperiodическими свойствами, то его свободное движение достаточно полно характеризуется относительной степенью затухания колебаний ξ_α и временем окончания переходного процесса $t_{зат\alpha}$. Временем окончания переходного процесса также называется время уменьшения амплитуды движения до 5% от первоначальной. Время окончания переходного процесса

$$t_{зат\alpha} = 3T_{2\alpha}. \quad (6.18)$$

Здесь $T_{2\alpha}$ – постоянная времени наиболее инерционной экспоненты переходного процесса,

$$T_{2\alpha} = -\frac{1}{\lambda_2}, \quad \lambda_2 = -n_\alpha + \sqrt{n_\alpha^2 - \Omega_\alpha^2}. \quad (6.19)$$

В случае аperiодического движения для построения графика переходного процесса необходимо задаться приращением угла атаки $\Delta\alpha_0$ в момент времени $t = 0$, рядом значений времени t и непосредственно воспользоваться уравнением

$$\Delta\alpha(t) = B_1 e^{\lambda_1 t} + B_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (6.20)$$

Корень характеристического уравнения λ_1 определяется формулой

$$\lambda_1 = -n_\alpha - \sqrt{n_\alpha^2 - \Omega_\alpha^2}. \quad (6.21)$$

Постоянные интегрирования определяются начальными условиями:

$$B_1 = \frac{\lambda_2 \Delta\alpha_0}{\lambda_2 - \lambda_1}; \quad B_2 = \frac{\lambda_1 \Delta\alpha_0}{\lambda_2 - \lambda_1}. \quad (6.22)$$

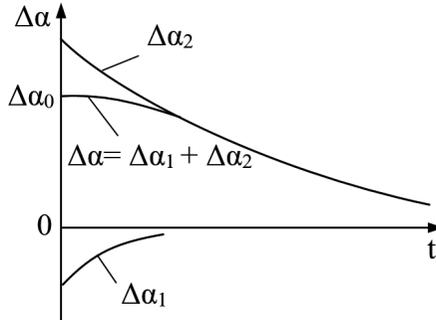


Рис.6.2. Изменение угла атаки в случае аperiодического движения

Собственные свойства БВС в продольном движении с автоматическими устройствами.

Собственные свойства БВС в малом продольном движении далеко не всегда удовлетворяют требованиям к этим характеристикам. Для улучшения характеристик используются автоматические устройства, из которых наиболее распространенными являются автомат демпфирования продольных колебаний (демпфер тангажа (ДТ)) и автомат устойчивости (АУ) по углу атаки (нормальной перегрузке).

Подбор коэффициентов усиления простейших демпфера тангажа k_{ω_z} и автомата устойчивости по углу атаки (нормальной перегрузке) k_α является сложной научной задачей.

Для предварительных расчетов, а также в рамках курсового и дипломного проектирования допустимо воспользоваться следующим упрощенным подходом.

Закон отклонения руля высоты (стабилизатора) от демпфера тангажа и автомата устойчивости в общем виде записывается:

$$\Delta\delta_B = k_\alpha \Delta\alpha + k_{\omega_z} \omega_z. \quad (6.23)$$

Первое слагаемое определяет отклонение руля высоты автоматом устойчивости при отклонении угла атаки от исходного значения. Создается момент $\Delta M_{z_{AY}}$, направленный на изменение угла атаки. Момент направлен в сторону момента от статической устойчивости по углу атаки и повышает устойчивость по этому параметру.

Второе слагаемое определяет необходимое отклонение руля высоты демпфером тангажа. При возникновении угловой скорости вращения ω_z относительно поперечной оси, демпфер отклоняет руль высоты для создания момента ΔM_{zD} , направленный в сторону, противоположную вращению, усиливая действие демпфирующего момента $M_z^{\omega_z} \omega_z$.

Для анализа влияния АУ и ДТ на характеристики устойчивости и управляемости БС в систему уравнений (6.3) необходимо подставить закон управления рулем высоты (6.23).

Система уравнений примет вид:

$$\begin{aligned} (a_{2\alpha} - D)\Delta\alpha + D\Delta\vartheta &= 0, \\ (a_{3\alpha}D + a_{3\alpha})\Delta\alpha + (D^2 + a_{3\omega_z}D)\Delta\vartheta &= k_\alpha\Delta\alpha + k_{\omega_z}\omega_z. \end{aligned} \quad (6.24)$$

После преобразования получим систему линейных дифференциальных уравнений, описывающее собственные динамические свойства БВС с ДТ и АУ:

$$D^2\Delta\alpha + (2n_\alpha)_{AYD}D\Delta\alpha + (\Omega_\alpha^2)_{AYD} = 0. \quad (6.25)$$

В уравнении:

$$(2n_\alpha)_{AYD} = -\frac{M_z^{\omega_z}}{I_z} - \frac{M_z^\alpha}{I_z} + \frac{Y^\alpha}{mV_0} - k_{\omega_z}\omega_z \frac{M_z^{\delta_B}}{I_z}, \quad (6.26)$$

$$(\Omega_\alpha^2)_{AYD} = -\frac{Y^\alpha b_a}{I_z} \left(m_z^{c_y} + \frac{m_z^{\omega_z}}{\mu} + \frac{V_0}{\mu b_a} m_z^{\delta_B} k_{\omega_z} + \frac{m_z^{\delta_B} k_\alpha}{c_y^\alpha} \right). \quad (6.27)$$

Введем понятие степени устойчивости по перегрузке:

$$(\sigma_n)_{AYD} = m_z^{c_y} + \frac{m_z^{\omega_z}}{\mu} + \frac{V_0}{\mu b_a} m_z^{\delta_B} k_{\omega_z} + \frac{m_z^{\delta_B} k_\alpha}{c_y^\alpha}. \quad (6.28)$$

Здесь

$$\mu = \frac{2m}{\rho S b_a} \quad \text{– относительная плотность БВС.}$$

6.3. Расчет переходных процессов БВС в малом продольном движении

При изучении динамической управляемости БВС СТ по углу атаки прежде всего необходимо задаться величиной отклонения руля высоты $\Delta\delta_B$ от балансировочного положения. В случае колебательных свойств БВС переходная функция на ступенчатое отклонение руля высоты характеризуется следующими параметрами:

- величиной установившегося приращения угла атаки $\Delta\alpha_{уст}$;
- временем затухания $t_{зат\ \alpha}$ амплитуды колебаний до отклонения менее 5% от установившегося значения $\Delta\alpha_{уст}$;
- относительной величиной заброса приращения угла атаки $\Delta\bar{\alpha}_{заб}$;

– временем срабатывания $t_{\text{сраб } \alpha}$, т. е. временем первого достижения приращением угла атаки величины $\Delta\alpha = 0,7\Delta\alpha_{\text{уст}}$;

– временем первого выхода на установившееся приращение угла атаки $t_{\text{уст } \alpha}$.

Величина установившегося угла атаки определяется по формуле

$$\Delta\alpha_{\text{уст}} = -\frac{m_z^{\delta_B}}{c_y^\alpha \cdot \sigma_n} \Delta\delta_B, \quad (6.29)$$

где $\Delta\delta_B$ – приращение угла отклонения руля высоты, рад; σ_n – степень устойчивости по перегрузке.

Степень устойчивости по перегрузке определяется выражением

$$\sigma_n = m_z^{c_y} + \frac{m_z^{\bar{\omega}_z}}{\mu},$$

без автомата устойчивости и демпфера тангажа. При их использовании

$$(\sigma_n)_{\text{АУД}} = m_z^{c_y} + \frac{m_z^{\bar{\omega}_z}}{\mu} + \frac{V_0}{\mu b_a} m_z^{\delta_B} k_{\omega_z} + \frac{m_z^{\delta_B} k_{\alpha}}{c_y^\alpha}.$$

Время затухания $t_{\text{зат } \alpha}$ соответствует по величине времени затухания собственного (свободного) движения.

Относительная величина заброса угла атаки определяется выражением

$$\Delta\bar{\alpha}_{\text{заб}} = \frac{\Delta\alpha_{\text{заб}}}{\Delta\alpha_{\text{уст}}} = \frac{\Delta\alpha_{\text{макс}} - \Delta\alpha_{\text{уст}}}{\Delta\alpha_{\text{уст}}} = \frac{1}{\sqrt{m_{\text{зат } \alpha}}}, \quad (6.30)$$

где $m_{\text{зат } \alpha}$ – коэффициент затухания колебаний свободного движения.

Время срабатывания $t_{\text{сраб } \alpha}$ приближенно определяется с помощью графика переходной функции.

Время первого выхода на установившееся приращение угла атаки рассчитывается в соответствии с формулой

$$t_{\text{уст } \alpha} = -\frac{\arctg \frac{\omega_\alpha}{n_\alpha}}{\omega_\alpha}, \quad (6.31)$$

где ω_α , n_α – действительная частота и степень затухания колебаний свободного движения.

Физический смысл характеристик поясняется с помощью рисунка 6.3.

Изменение угла атаки в «малом» продольном движении при ступенчатом отклонении руля высоты $\Delta\alpha = f(t)$ может быть вычислено по следующим формулам.

Для комплексных корней

$$\Delta\alpha = \Delta\alpha_{\text{уст}} \left[1 - \frac{e^{-n_\alpha t}}{\sin \varphi_\alpha} \sin(\omega_\alpha t + \varphi_\alpha) \right]. \quad (6.32)$$

Далее необходимо [14]:

1. Рассчитать величину $\Delta\alpha_{\text{уст}}$ (6.29) и отложить ее на графике.
2. Определить $t_{\text{уст } \alpha}$, $t_{\text{сраб } \alpha}$ и отложить их на графике.

3. Вправо от момента времени $t_{уст\alpha}$ отложить точки через каждые $T_{\alpha}/4$.

4. В моменты времени $t_{уст\alpha} + j\frac{T_{\alpha}}{2}, j = 0, 1, \dots$, значение функции $\Delta\alpha(t)$ известно и равно $\Delta\alpha_{уст}$. Нанести эти точки на график.

Здесь значения начальной фазы колебаний определяются формулой

$$\varphi_{\alpha} = \arctg \frac{\omega_{\alpha}}{n_{\alpha}}. \quad (6.33)$$

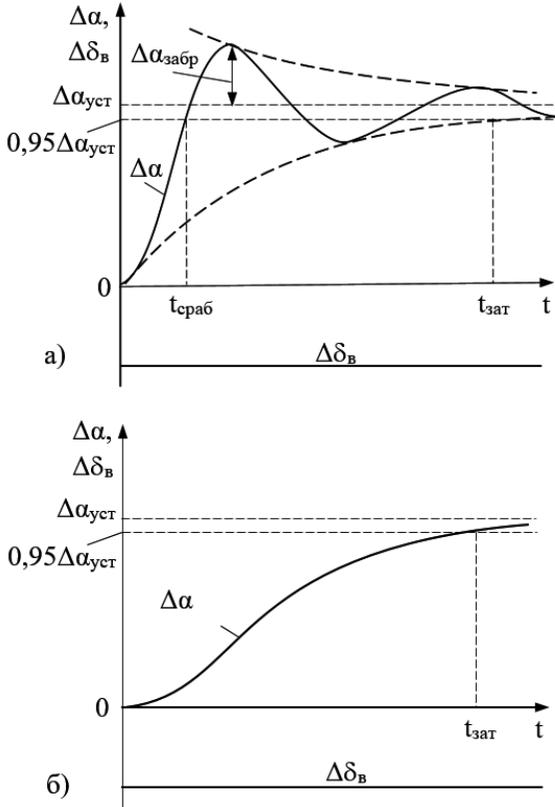


Рис.6.3. Переходные процессы БВС при ступенчатом отклонении руля высоты

6.4. Расчет балансировочных диаграмм БВС в полете со скольжением

Система управления полетом должна осуществлять балансировку БВС на всех этапах полета, на всех эксплуатационных высотах, при всех возможных сочетаниях веса, различных конфигурациях механизации, положениях центра тяжести и таким образом, чтобы сохранить максимальную управляемость при нормальных динамических характеристиках в пределах области режимов полета [10].

Балансировку БВС рассмотрим на примере расчета балансировочных диаграмм в боковом полете со скольжением.

Чтобы БВС после возникновения скольжения продолжал горизонтальный полет, необходимо отклонить руль направления δ_n и элероны δ_ε таким образом, чтобы суммы моментов и суммы сил относительно осей Ox, Oy были равны 0.

Балансировочные диаграммы прямолинейного полета самолета со скольжением демонстрируют потребные углы отклонения рулей направления δ_n , элеронов δ_ε и углы крена γ самолета при постоянном числе M .

Формулы для определения потребных углов имеют вид:

$$\begin{aligned}\delta_n &= -\frac{m_y^\beta}{m_y^{\delta_n}}\beta, \\ \delta_\varepsilon &= -\frac{1}{m_x^{\delta_\varepsilon}}\left(m_x^\beta - \frac{m_y^\beta}{m_y^{\delta_n}}m_x^{\delta_n}\right)\beta, \\ \sin \gamma &= -\frac{1}{c_{y \text{ а гп}}}\left(c_z^\beta - \frac{m_y^\beta}{m_y^{\delta_n}}c_z^{\delta_n}\right)\beta.\end{aligned}\quad (6.34)$$

Здесь:

m_y^β – коэффициент момента путевой статической устойчивости, 1/рад;

$m_y^{\delta_n}$ – производная коэффициента момента рыскания по углу отклонения рулей направления, 1/рад;

β – угол скольжения, рад;

$m_x^{\delta_\varepsilon}$ – производная коэффициента момента крена по углу отклонения органов поперечного управления, 1/рад;

m_x^β – коэффициент момента поперечной статической устойчивости самолета, 1/рад;

$m_x^{\delta_n}$ – производная коэффициента момента крена по углу отклонения рулей направления, 1/рад;

c_z^β – производная коэффициента поперечной силы по углу скольжения, 1/рад;

$c_z^{\delta_n}$ – производная коэффициента поперечной силы по углу отклонения рулей направления, 1/рад.

Из этих формул следует, что балансировочные диаграммы представляют собой прямые линии. Для их построения необходимо задаться углом скольжения β . Далее рассчитываются потребные углы $\delta_n, \delta_\varepsilon, \gamma$.

Второй точкой для каждой прямой является центр координат, так как для полета с углом скольжения $\beta = 0$ потребные углы $= 0, \delta_\varepsilon = 0, \gamma = 0$.

По результатам расчета строится балансировочная диаграмма (рис. 6.4).

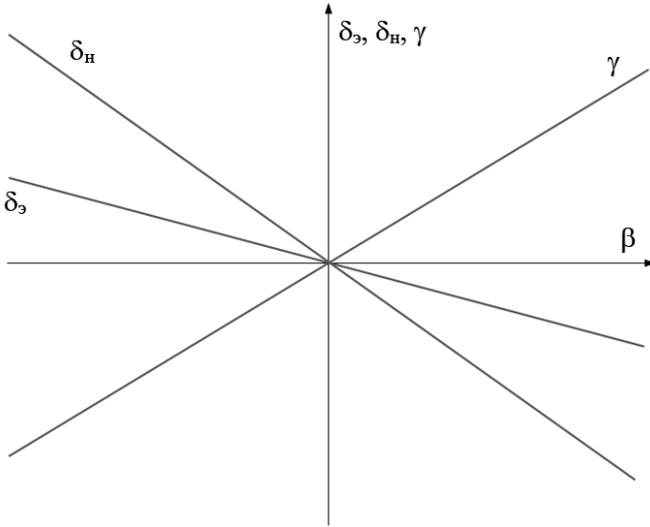


Рис.6.4. Балансировочная диаграмма в ПГП с постоянным углом скольжения

Анализ формул (6.34) показывает, что высота и скорость полета напрямую не оказывают влияния на балансировочные диаграммы, поскольку в них отсутствует зависимость от скоростного напора.

Но от высоты и скорости полета зависит угол атаки, с которым выполняется исходный горизонтальный полет и который влияет на величину коэффициентов

$$c_{y a \text{ гп}}, c_z^\beta, c_z^{\delta_n}, m_y^\beta, m_x^\beta, m_y^{\delta_n}, m_x^{\delta_n}, m_x^{\delta_\varepsilon}.$$

Поскольку величины углов отклонения органов путевого и поперечного управления ограничены

$$|\delta_n| \leq \delta_{n \text{ макс}} \text{ и } \delta_{\varepsilon \text{ мин}} \leq \delta_\varepsilon \leq \delta_{\varepsilon \text{ макс}},$$

то существует максимальное значение угла скольжения $\beta_{\text{макс}}$, при котором еще возможна балансировка БВС.

Угол скольжения связан с боковой скоростью ветра W_z соотношением

$$\sin \beta = \frac{W_z}{V},$$

где V – величина воздушной скорости БВС.

Чем меньше скорость полета, тем с большим углом скольжения осуществляется полет при фиксированном боковом ветре.

Минимально возможная скорость полета достигается на взлете и посадке, при известных аэродинамических характеристиках БВС, максимальных углов отклонения органов путевого и поперечного управления, рассчитывается предельное значение бокового ветра, с которым возможен безопасный взлет (посадка)

$$W_{z \text{ макс}} = \sin(-0,9 \frac{m_y^{\delta_H}}{m_y^\beta} \delta_{H \text{ макс}}).$$

Для расчета и построения балансировочных диаграмм с несимметричной тягой силовой установки допустимо воспользоваться следующим приближенным подходом.

Условия прямолинейного сбалансированного полета БВС с несимметричной тягой в боковом движении самолета описываются системой уравнений

$$\begin{cases} c_z^\beta \beta + c_z^{\delta_H} \delta_H + c_{y a \text{ гп}} \sin \gamma = 0, \\ m_x^\beta \beta + m_x^{\delta_\varepsilon} \delta_\varepsilon + m_x^{\delta_H} \delta_H + m_{xP} = 0, \\ m_y^\beta \beta + m_y^{\delta_H} \delta_H + m_{yP} = 0. \end{cases} \quad (6.35)$$

Здесь m_{xP} – коэффициент момента крена, создаваемого несимметричностью в режимах работы двигателей относительно плоскости симметрии БВС; m_{yP} – коэффициент путевого момента, создаваемого несимметричностью силы тяги силовой установки.

Соответственно

$$m_{xP} = \frac{M_{xP}}{qSl}, \quad m_{yP} = \frac{M_{yP}}{qSl}, \quad (6.36)$$

где l – размах крыла, м.

В большинстве случаев без серьезного ущерба для точности расчетов можно принять $m_{xP} = 0$.

Тогда

$$\begin{aligned} \delta_H &= -\frac{1}{m_y^{\delta_H}} (m_{yP} + m_y^\beta \beta), \\ \delta_\varepsilon &= -\frac{1}{m_x^{\delta_\varepsilon}} \left[\left(m_x^\beta - \frac{m_y^\beta}{m_y^{\delta_H}} m_x^{\delta_H} \right) \beta - \frac{m_x^{\delta_H}}{m_y^{\delta_H}} m_{yP} \right], \\ \sin \gamma &= -\frac{1}{c_{y a \text{ гп}}} \left[\left(c_z^\beta - \frac{m_y^\beta}{m_y^{\delta_H}} c_z^{\delta_H} \right) \beta - \frac{m_{yP}}{m_y^{\delta_H}} c_z^{\delta_H} \right]. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Возможны различные способы балансировки при полете с отказавшим двигателем. Наиболее распространенными являются следующие.

1. Балансировка БВС без скольжения ($\beta = 0$).
2. Балансировка самолета без крена ($\gamma = 0$).
3. Балансировка без отклонения руля направления ($\delta_H = 0$).

Выполнив расчеты по (6.37), необходимо построить балансировочную диаграмму (рис. 6.5).

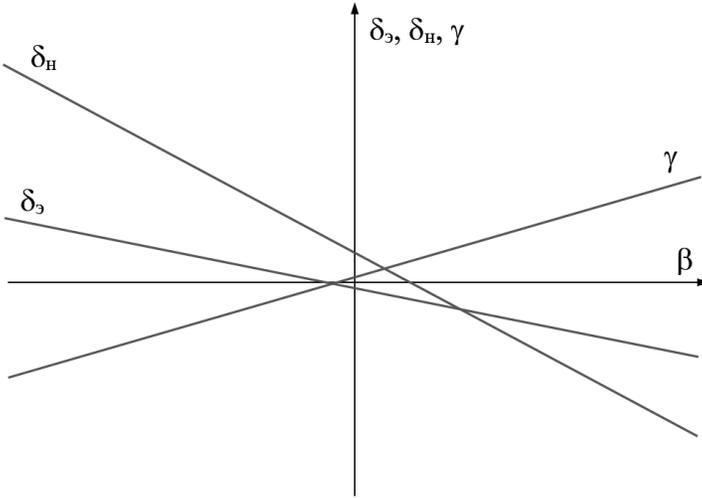


Рис.6.5. Балансировочная диаграмма в горизонтальном полете с отказавшим двигателем

По балансировочным диаграммам отклонений рулей и угла крена судят о боковой статической управляемости БВС по углу скольжения. Основными характеристиками боковой управляемости являются требуемые отклонения рулей $\Delta\delta_n$ и $\Delta\delta_x$ для изменения угла скольжения β на единицу:

$$\delta_n^\beta = \frac{m_y^\beta}{m_{y\delta_n}},$$

$$\delta_x^\beta = -\frac{1}{m_x^{\delta_x}} \left(m_x^\beta \beta - \frac{m_y^\beta}{m_{y\delta_n}} m_x^{\delta_n} \right), \quad (6.38)$$

Если необходимо построить зависимость характеристик боковой статической управляемости по углу скольжения, то необходимо задаться рядом чисел M полета, определить значения коэффициентов (6.37) для каждого числа M и по этим формулам выполнить расчет.

По результатам расчета строятся графики.

6.5. Расчет собственных динамических свойств БВС в боковом движении

Для расчета собственных динамических свойств БВС в боковом движении используют систему линейных дифференциальных уравнений (6.2), значения коэффициентов приведен в таблице 6.2 [28].

Анализ собственных свойств БВС в боковом движении

При рассмотрении собственных динамических свойств БВС в боковом движении полагают, что никакое управление после окончания возмущения не производится, $\delta_n = 0$, $\delta_x = 0$.

Исходный режим горизонтальный полет с постоянной скоростью, с относительно небольшими углами атаки.

Быстро протекающее вращательное движение БВС (малое боковое движение) происходит без искривления траектории $\Psi = const$.

Тогда в 1 уравнении системы (6.2)

$$D\beta - D\psi = 0.$$

Уравнение становится конечным и может быть исключено из рассмотрения. Кроме того, пренебрегаем спиральными моментами $a_{3\omega_y}$ и $a_{3\omega_x}$.

С учетом принятых допущений получим систему линейных однородных ДУ, описывающих малое боковое движение

$$\begin{aligned} D\omega_x + a_{2\beta}\beta + a_{2\omega_x}\omega_x &= 0, \\ D\omega_y + a_{3\beta}\beta + a_{3\omega_y}\omega_y &= 0. \end{aligned} \quad (6.39)$$

Учитывая то, что

$$D\omega_x = D^2\gamma, \quad D\omega_y = D^2\beta, \quad \omega_x = D\gamma, \quad \omega_y = D\beta,$$

запишем уравнения в виде

$$D^2\gamma + a_{2\omega_x}D\gamma + a_{3\beta}\beta = 0, \quad (6.40)$$

или

$$\begin{aligned} (D\gamma + a_{2\omega_x})D\gamma + a_{3\beta}\beta &= 0, \\ D^2\beta + a_{3\omega_y}D\beta + a_{3\beta}\beta &= 0, \end{aligned} \quad (6.41)$$

или

$$(D^2 + a_{3\omega_y}D + a_{3\beta})\beta = 0.$$

Уравнение (6.41) описывает изолированное движение рыскания, т.е. движение модели БВС в аэродинамической трубе и вращающегося на вертикальной (нормальной) оси. Поскольку траекторная составляющая бокового движения исключена из рассмотрения и не рассматриваем влияние спиральных моментов, решение уравнения (6.41) получаем в виде

$$\Delta\beta(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (6.42)$$

где λ_1 и λ_2 – корни характеристического уравнения.

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 + 2n_{0\beta} + \Omega_{0\beta}^2 = 0, \quad (6.43)$$

где

$$\begin{aligned} n_{0\beta} &= \frac{1}{2} a_{3\omega_y} = -\frac{M_y^{\omega_y}}{2I_y} && \text{-коэффициент демпфирования} \\ \Omega_{0\beta}^2 &= a_{3\beta} = -\frac{M_y^{\beta}}{I_y} && \text{-опорная частота малого продольного} \\ &&& \text{движения} \end{aligned}$$

Корни характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = -n_{0\beta} \pm \sqrt{n_{0\beta}^2 - \Omega_{0\beta}^2}$.

Чтобы БВС был устойчивым по углу скольжения, необходимо:

$$n_{0\beta} = \frac{1}{2} a_{3\omega_y} = -\frac{M_y^{\omega_y}}{2I_y} > 0, \quad \Omega_{0\beta}^2 = a_{3\beta} = -\frac{M_y^\beta}{I_y} > 0.$$

Во всем эксплуатационном диапазоне высот, скоростей и углов атаки БВС статически устойчив $M_y^\beta < 0$ и обладает демпфирующими свойствами

$M_y^{\omega_y} < 0$, а потому переходный процесс в «малом» боковом движении по углу скольжения устойчив.

В зависимости от запаса путевой статической устойчивости переходный процесс может быть:

1) колебательным $n_{0\beta}^2 < \Omega_{0\beta}^2$. Тогда

$$\Delta\beta(t) = B e^{-n_{0\beta}t} \sin(\omega_\beta t + \varphi_\beta), \quad (6.44)$$

где
$$\omega_\beta = \sqrt{\Omega_{0\beta}^2 - n_{0\beta}^2} = \sqrt{-\frac{M_y^\beta}{I_y} - \frac{1}{4} \left(\frac{M_y^{\omega_y}}{I_y}\right)^2}$$
 круговая частота собственных колебаний.

2) аperiodическим $\Omega_{0\beta}^2 > n_{0\beta}^2$. Тогда

$$\Delta\beta(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (6.45)$$

где
$$\lambda_{1,2} = -n_{0\beta} \pm \sqrt{n_{0\beta}^2 - \Omega_{0\beta}^2},$$

$$t_{\text{зат } \beta} = \frac{3}{n_{0\beta}} = \frac{6 I_y}{M_y^{\omega_y}} = \frac{12 I_y}{m_y^{\omega_y} \rho V^2 S l}. \quad (6.46)$$

При анализе движения крена необходимо учитывать его связь с движением рыскания. Для определения решения запишем и приравняем нулю характеристический определитель системы (6.39-6.41).

$$\begin{vmatrix} (\lambda + a_{2\omega_x})\lambda; & a_{2\beta} \\ 0; & \lambda^2 + 2n_{0\beta} + \Omega_{0\beta}^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда получим характеристическое уравнение движения крена

$$(\lambda^2 + a_{3\omega_y}\lambda + a_{3\beta})(\lambda + a_{2\omega_x})\lambda = 0. \quad (6.47)$$

Решение характеристического уравнения получим, приравняв каждый из сомножителей 0.

$$(\lambda^2 + a_{3\omega_y}\lambda + a_{3\beta}) = (\lambda^2 + 2n_{0\beta} + \Omega_{0\beta}^2) = 0, \quad (\text{корни 1 и 2})$$

$$(\lambda + a_{2\omega_x}) = 0, \quad (\text{корень 3})$$

$$\lambda = 0. \quad (\text{корень 4})$$

Общее решение для угла крена имеет вид

$$\Delta\gamma_{1,2}(t) = C_1 e^{\frac{M_y^{\omega_y}}{2I_y}} \sin(\omega_\beta t + \varphi_\beta) + C_3 e^{-\frac{M_x^{\omega_x}}{I_x}} + C_4. \quad (6.48)$$

Из полученного решения видно, что изменение угла крена в возмущенном малом боковом движении имеет три составляющих:

- колебательную составляющую, которая инициируется движением рыскания;
- быстро затухающую аperiodическую;
- постоянную составляющую, наличие которой приводит к развитию спирального движения.

6.6. Расчет переходных процессов БВС в изолированном движении рыскания

Характеристики изолированного движения рыскания определяются следующими параметрами:

- собственной частотой колебаний БВС по углу скольжения $\Omega_{0\beta}$;
- степенью затухания колебаний по углу скольжения n_β .

Для заданного режима полета эти параметры определяются уравнениями:

$$\Omega_{0\beta}^2 = a_{3\beta} = -\frac{M_y^\beta}{I_y} = \frac{m_y^\beta qSl}{I_y},$$

$$n_{0\beta} = \frac{1}{2} a_{3\omega_y} = -\frac{M_y^{\omega_y}}{2I_y} = \frac{m_y^{\omega_y} qSl}{2I_y}$$

Здесь

$m_y^{\omega_y}$ – коэффициент демпфирующего момента рыскания.

Как правило, в изолированном движении рыскания БВС обладает колебательными свойствами. В этом случае свойства самолета определяются следующими характеристиками:

- 1) действительной частотой колебаний

$$\omega_\beta = \sqrt{\Omega_{0\beta}^2 - n_{0\beta}^2} \Omega_{0\beta}. \quad (6.49)$$

- 2) периодом колебаний

$$T_\beta = \frac{2\pi}{\omega_\beta}, \quad (6.50)$$

- 3) относительной степенью затухания колебаний

$$\xi_\beta = \frac{n_{0\beta}}{\Omega_{0\beta}}, \quad (6.51)$$

- 4) временем затухания колебаний-время уменьшения колебаний в 20 раз

$$t_{\text{зат } \beta} = \frac{\ln 20}{n_{0\beta}} = \frac{3}{n_{0\beta}} = \frac{6I_y}{m_y^{\omega_y} qSl}, \quad (6.52)$$

- 5) числом колебаний до практически полного затухания

$$n_{\text{зат } \beta} = \frac{t_{\text{зат } \beta}}{T_\beta} = \frac{\Omega_{0\beta} \sqrt{1 - \xi_\beta^2}}{2\pi n_{0\beta}} \cong 0,48 \frac{\sqrt{1 - \xi_\beta^2}}{\xi_\beta}, \quad (6.53)$$

- 6) коэффициентом затухания колебаний

$$m_{\text{зат } \beta} = e^{n_{0\beta} T_\beta}. \quad (6.54)$$

Если самолет обладает аperiodическими свойствами, то основной характеристикой является

$$t_{\text{зат } \beta} = 3T_{2\beta}, \quad (6.55)$$

где
$$T_{2\beta} = -\frac{1}{\lambda_2}, \quad \lambda_2 = -n_{0\beta} + \sqrt{n_{0\beta}^2 - \Omega_{0\beta}^2}.$$

Отклонение руля направления в изолированном движении рыскания считаем однократными, ступенчатыми, что соответствует наиболее энергичному пилотированию.

Если пренебречь боковыми перемещениями БВС и спиральными моментами, то изменение угла рыскания (скольжения) становятся независимыми от угла крена.

$$D^2\beta + a_{3\omega_y}D\beta + a_{3\beta} = a_{3\delta_H}\delta_H.$$

Частное решение этого уравнения находится при условии $D^2\beta = D\beta = 0$ и имеет вид:

$$\beta_{\text{уст}} = \frac{a_{3\delta_H}}{a_{3\beta}}\delta_H = -\frac{m_y^{\delta_H}}{m_y^{\beta}}\delta_H.$$

Динамические свойства БВС в этом случае определяются следующими динамическими характеристиками:

1) установившимся углом скольжения $\Delta\beta_{\text{уст}} = -\frac{m_y^{\delta_H}}{m_y^{\beta}}\delta_H,$

2) относительным забросом угла скольжения (боковой перегрузки)

$$\Delta\bar{\beta}_{\text{забр}} = \frac{\Delta\beta_{\text{забр}}}{\Delta\beta_{\text{уст}}} = \frac{\Delta\beta_{\text{макс}} - \Delta\beta_{\text{уст}}}{\Delta\beta_{\text{уст}}} = \frac{1}{\sqrt{m_{\text{зат } \beta}}}, \quad (6.56)$$

3) временем срабатывания $t_{\text{ср}}$, т.е. временем первого достижения углом скольжения величины $0,7\Delta\beta_{\text{уст}}$;

4) периодом колебаний

$$T_{\beta} = \frac{2\pi}{\omega_{\beta}},$$

5) временем затухания колебаний $t_{\text{зат } \beta}$ (рис. 6.6).

В случае аperiodического движения основной характеристикой является:

1) величина установившегося угла скольжения $\Delta\beta_{\text{уст}}$;

2) время срабатывания $t_{\text{ср}}$ – время первого достижения углом скольжения величины $0,7\Delta\beta_{\text{уст}}$;

3) время окончания переходного процесса $t_{\text{зат}}$, определяемое собственными свойствами БВС.

Время срабатывания $t_{\text{ср } \beta}$ в обоих случаях определяется графически.

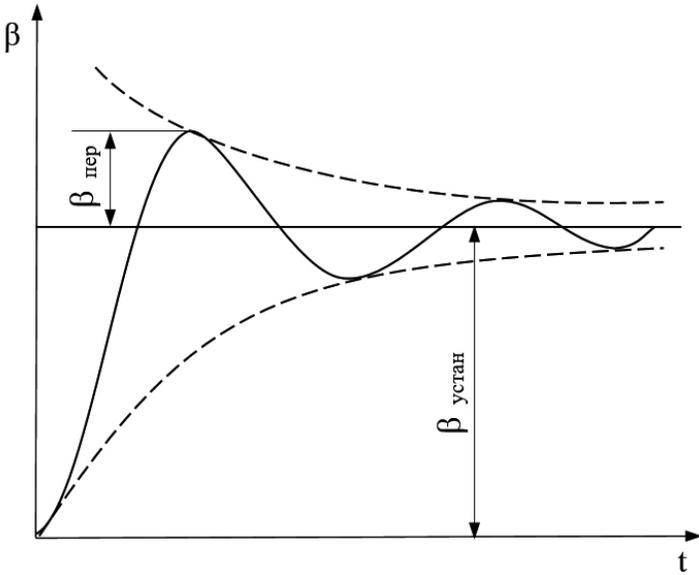


Рис.6.6. Переходный процесс в изолированном движении рыскания

6.7. Расчет переходных процессов БВС в изолированном движении крена

Переходная функция угловой скорости крена $\Delta\omega_x(t)$ при ступенчатом отклонении рулей крена характеризуется следующими параметрами:

- 1) величиной установившейся угловой скорости крена

$$\Delta\omega_{x \text{ уст}} = -\frac{M_x^{\delta_\varepsilon}}{M_x^{\omega_x}} \Delta\delta_\varepsilon, \quad (6.57)$$

- 2) законом изменения угловой скорости крена по времени

$$\Delta\omega_x(t) = -\frac{M_x^{\delta_\varepsilon}}{M_x^{\omega_x}} \left(1 - e^{-\frac{t}{T_{\omega_x}}}\right) \Delta\delta_\varepsilon, \quad (6.58)$$

где

$$T_{\omega_x} = \frac{1}{\lambda} = -\frac{J_x}{M_x^{\omega_x}} \quad \text{— постоянная времени движения крена}$$

- 3) временем переходного процесса (временем достижения величины $0,95\Delta\omega_{x \text{ уст}}$

$$t_{\text{зат } \omega_x} = 3T_{\omega_x}. \quad (6.59)$$

Для построения графика переходной функции необходимо задаться рядом значений времени от нуля до $t_{\text{зат } \omega_x}$ и определить значения $\Delta\omega_x(t)$ по формуле (6.58)

После выполнения расчетов строится график переходного процесса (рис.6.7). Для более точного построения графика на рисунок целесообразно нанести значение $\Delta\omega_{x \text{ уст}}$.

При отклонении элеронов на максимальный угол $\delta_{\text{э макс}}$, установившаяся угловая скорость вращения примет максимальное значение:

$$\Delta\omega_{x \text{ макс}} = -\frac{m_x^{\delta_{\text{э}}}}{m_x^{\omega_x}} \delta_{\text{э макс}}. \quad (6.60)$$

Расчет зависимости $\Delta\omega_{x \text{ макс}} = f(M)$ выполняется с использованием зависимостей $m_x^{\delta_{\text{э}}} = f(M)$ и $m_x^{\omega_x} = f(M)$.

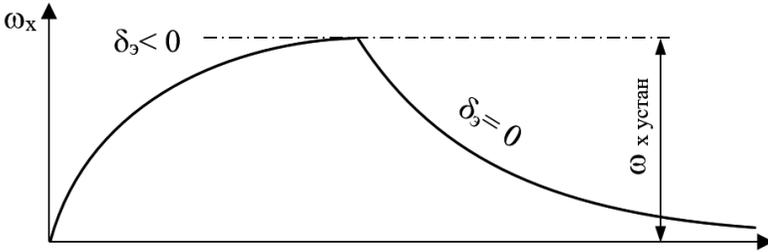


Рис.6.7. Характер переходного процесса в изолированном движении рыскания

7. ОСОБЕННОСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ АВАРИЙНЫХ СИТУАЦИЙ ПРИ ДВИЖЕНИИ БВС САМОЛЕТНОГО ТИПА

7.1. Сваливание БВС самолетного типа

На режимах посадки, полете с небольшими скоростями, при действии порывов ветра возможен полет с углами атаки, приводящих к развитию срывного обтекания. Потеря устойчивости движения с такими параметрами может привести к срыву потока с крыла, сваливанию и попаданию в штопор. Движение на таких режимах носит существенно неустановившийся характер, с реализацией больших амплитуд изменения параметров (угловых скоростей $\omega_x, \omega_y, \omega_z$, углов атаки, тангажа, крена, скольжения $\alpha, \vartheta, \gamma, \beta$).

Для адекватного описания движения ЛА на таких режимах необходимо детальное представление об особенностях обтекания ЛА и возникающих при этом силах и моментах.

Сваливание – это заметное самопроизвольное аperiodическое или колебательное движение БВС относительно любой из трех осей Ox, Oy, Oz возникающее в результате развития срыва потока с крыла и не парируемое без уменьшения угла атаки из-за существенного ухудшения управляемости БВС[28].

Основные характеристики сваливания:

- угол атаки сваливания $\alpha_{св}$;
- максимальные угловые скорости и ускорения (в первую очередь крена $\omega_x, \dot{\omega}_x$ и рысканья $\omega_y, \dot{\omega}_y$);
- характер движения ВС в начале сваливания. Различают сваливание на нос, на крыло и по спирали.

Сваливание на нос (движение тангажа) происходит при симметричном зарождении и развитии областей срыва на правой и левой консолях крыла на углах атаки близких к критическому ($\alpha_{св} \approx \alpha_{кр}$) из-за одинакового уменьшения подъемных сил на консолях крыла без заметного изменения углов крена и рысканья, поскольку $M_x \approx M_y \approx 0$.

Сваливание на крыло (движение крена) происходит при существенно несимметричном развитии областей срыва на правой и левой консолях крыла на углах атаки, как правило, заметно меньших критического ($\alpha_{св} < \alpha_{кр}$). Такой ассиметричный срыв приводит к появлению момента крена M_x без заметного изменения момента тангажа и рысканья $\Delta M_z \approx 0, \Delta M_y \approx 0$. Заметим, что из-за крена ВС возникает скольжение на опускающееся крыло $\beta \neq 0$. Далее под действием момента путевой статической устойчивости $M_y^\beta \beta$ БВС начинает опускать носовую часть фюзеляжа. Таким образом, при таком срыве сначала происходит собственно сваливание БВС на крыло, а затем из-за нарушения равновесия сил по оси OY_k траекторной системы координат $Y_a \cos \gamma_a < mg$ и появления скольжения, происходит опускание носовой части БВС.

Сваливание по спирали происходит на углах атаки меньших или равных критическому и может быть вызвано:

1) быстрым развитием областей срыва на одной из консолей крыла на углах атаки близких к критическому при отсутствии срыва на другой консоли. В этом случае на консоли где произошел срыв, упадет подъемная сила, и существенно возрастет лобовое сопротивление. Что и вызовет одновременное и значительное изменение моментов крена и рысканья ($\Delta M_z \neq 0, \Delta M_y \neq 0$). В результате этого возникнет движение по спиралевидной траектории;

2) потерей путевой устойчивости на углах атаки меньших или равных критическому.

В зависимости от начальных условий полета различают сваливание:

1) в горизонтальном координированном ($\beta = 0$) полете на минимальной или близкой к ней скорости полета ($n_{ya} = 1, V \approx V_{\text{мин гп}}$);

2) сваливание с координированного вертикального маневра на больших приборных скоростях ($n_{ya} > 1, V \gg V_{\text{мин гп}}$);

3) сваливание в криволинейном полете и динамическое сваливание ($\beta_0 \neq 0, \vec{\omega}_0 \neq 0$).

Сваливание при маневрировании (№2 и №3) развивается резче, чем сваливание с ГП (№1) поскольку аэродинамические силы и моменты, действующие на ЛА, увеличиваются с ростом приборной скорости и перегрузки.

Скольжение уменьшает угол атаки сваливания $\alpha_{\text{св}}$ и делает его более резким.

Обледенение БВС уменьшает критический угол атаки, что способствует сваливанию.

После сваливания БВС может перейти в пикирование, в спираль или штопор.

Важно понимать, что сваливание связано не с уменьшением скорости, а с выходом на большие углы атаки. Поэтому при сваливании БВС необходимо, прежде всего, принять меры к уменьшению угла атаки (как правило, это отдача РУС от себя при постановке рулей крена и рысканья в нейтральном положении). Конкретные особенности поведения каждого БВС СТ при сваливании и правила пилотирования приводятся в РЛЭ.

При сваливании должна быть обеспечена возможность восстановления управляемого прямолинейного полета без чрезмерной потери высоты, без кабрирования, превышения угла крена 60° , развившегося от первоначально установленного угла крена 30° , а также превышения максимальной допустимой скорости и максимальной допустимой перегрузки.

В прямолинейном и криволинейном полетах с любым нормальным положением закрылков и шасси необходимо иметь отчетливое предупреждение о приближении сваливания. Предупреждение о приближении сваливания может обеспечиваться с помощью устройств, которое будет давать ясно различимое указание в предполагаемых условиях полета.

Предупреждение о приближении сваливания должно начинаться на скорости, превышающей скорость сваливания не менее чем на 9 км/ч , но не более 18.5 км/ч [10], Указанное предупреждение должно быть

трансформировано в сигнал управления режимом полета для предотвращения сваливания.

7.2. Штопор БВС самолетного типа

Штопором называется неуправляемое движение по спиралевидной траектории малого радиуса на закритических углах атаки на режиме авторотации.

Таким образом, в штопоре [28]:

- ЛА движется на закритических углах атаки на режиме авторотации (рис.7.1);
- большие значения углов атаки поддерживаются за счет действия инерционного момента;
- вращение ЛА происходит вокруг некоторой оси, близкой к вектору скорости.

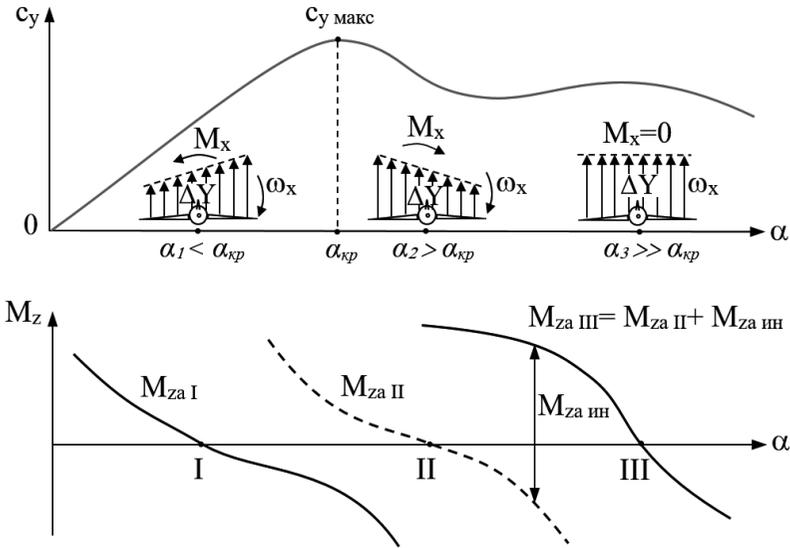


Рис.7.1. К возникновению штопора

В штопоре вместе с ЛА вращается и полная аэродинамическая сила \vec{R}_a , которая направлена в штопоре практически перпендикулярно ЛА. Поэтому ее действие на искривление траектории в среднем равно нулю. Этот эффект называется самонейтрализацией аэродинамической силы. Поэтому после сваливания и перехода в штопор центр масс БВС движется вдоль вытянутой спирали, осью которой является парабола – траектория свободно брошенного тела.

В зависимости от начальной скорости срыва парабола может:

- круто искривляться вниз;
- быть полой, постепенно приближаясь к вертикали;

- при сваливании на маневре с $n_{ya} > 1$ вначале даже искривляться вверх.

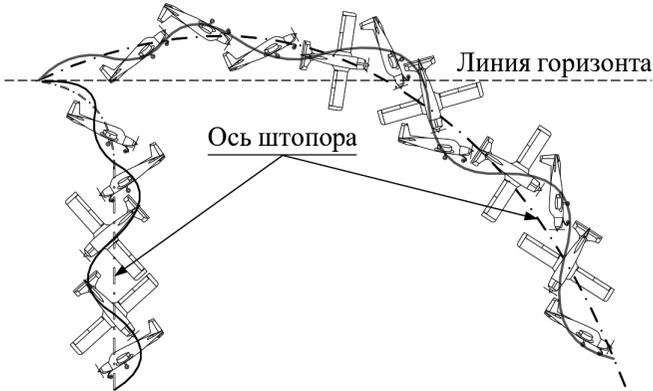


Рис.7.2. Траектории БВС при штопоре

Таким образом, движение БВС в штопоре складывается из двух составляющих:

- вращения БВС относительно центра масс по всем трем осям;
- движение центра масс по траектории свободно брошенного тела (параболе).

Знак и величина угла атаки α центральных сечений крыла определяет тип штопора.

Штопор называется нормальным если $\alpha > 0$. В таком штопоре БВС обычно находится верхней частью вверх.

Штопор называется перевернутым если $\alpha < 0$. В таком штопоре БВС обычно находится верхней частью вниз (БВС «на спине»).

В зависимости от угла наклона продольной оси БВС к горизонту ϑ различают:

- крутой штопор $|\vartheta| > 50^\circ, |\alpha| = 30 \dots 40^\circ$;
- пологий штопор $30^\circ < |\vartheta| < 50^\circ, |\alpha| = 40^\circ \dots 60^\circ$;
- плоский штопор $|\vartheta| < 30^\circ, |\alpha| > 60^\circ$.

По направлению вращения штопор бывает левый и правый. Наблюдатель, смотрящий на БВС сверху, увидит движение центра масс против часовой стрелки в левом нормальном и правом перевернутом штопоре.

По характеру движения БВС относительно центра масс штопор может быть:

- устойчивым – БВС не изменяет направление вращения, отсутствуют заметные остановки вращения;
- неустойчивым – вращение БВС периодически самопроизвольно приостанавливается или меняется по направлению, нос БВС то поднимается выше горизонта, то опускается до вертикали.

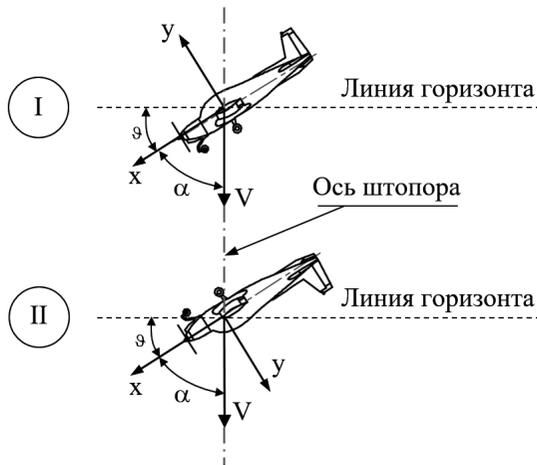


Рис.7.3. Положение БВС при штопоре

Моделирование характеристик сваливания и штопора представляет чрезвычайно сложную задачу. Для моделирования может применяться, например, система уравнений (3.7).

При использовании этих уравнений, особую трудность представляет расчет правых частей дифференциальных уравнений из-за существенной нелинейности и нестационарности сил, действующих на БВС при таком виде движения. Само движение имеет неустановившийся характер с реализацией больших амплитуд изменения параметров [30].

Для адекватного описания аэродинамических характеристик на таких режимах необходимо знание о качественных и динамических особенностях обтекания возникающих аэродинамических нагрузках.

Нестационарность аэродинамических характеристик на больших углах атаки обусловлена прежде всего особенностями возникновения отрывного и вихревого обтекания.

Одной из характерных нелинейных особенностей на больших углах атаки является гистерезис аэродинамических характеристик, который может проявляться как статический гистерезис, так и динамический гистерезис.

Статический гистерезис приводит к неоднозначной зависимости аэродинамических характеристик от кинематических параметров (углов атаки, скольжения, угловых скоростей вращения). Зона статического гистерезиса может существенным образом зависеть от числа Рейнольдса.

Динамический гистерезис проявляется при колебаниях с большими амплитудами и высокой частотой в области отрывного обтекания даже при отсутствии статического гистерезиса. Динамический гистерезис обусловлен запаздыванием развития отрыва потока на крыле или разрушения вихревых структур над крылом при неустановившемся движении БВС.

Для изучения особенностей аэродинамики БВС на больших углах атаки широко используется метод установившегося вращения самолета в

аэродинамической трубе. Установки для реализации указанного метода разработаны в ЦАГИ и используются при испытаниях в вертикальной аэродинамической трубе (АДТ) Т-105 [30]. На такой установке реализуется установившееся вращение модели самолета относительно набегающего потока. Управление моделью (установка в потоке под заданными углами атаки и скольжения) осуществляется по командам с компьютера. Таким же образом задается необходимая угловая скорость вращения самолета. Безразмерная угловая скорость $\bar{\omega} = \omega l / 2V$ изменяется в диапазоне $\bar{\omega} = -0,5 \dots +0,5$, что является достаточным для обеспечения подобия с натурным полетом при выходе на большие углы атаки.

Аэродинамические характеристики при неустановившемся движении в общем случае могут быть выражены в виде функционалов от изменения кинематических параметров движения, таких как углы атаки α , скольжения β , угловых скоростях вращения $\omega_x, \omega_y, \omega_z$, отклонений органов управления и т.д.

При моделировании движения БВС на больших углах атаки наиболее широко используется упрощение, связанное с представлением аэродинамических характеристик их конечной зависимостью от кинематических параметров и ряда их производных по времени, например, изменение нормальной силы представляется в виде $Y(t) = Y[\alpha, \beta(\tau), \dots \omega_z(\tau)]$.

При дальнейшем упрощении задача представления аэродинамических сил и моментов может быть сведена к их аппроксимации членами ряда Тейлора по кинематическим параметрам и их первым производным, приближенно определяющим нестационарные аэродинамические нагрузки, например

$$\Delta Y(t) = Y^\alpha \Delta \alpha + Y^{\dot{\alpha}} \Delta \dot{\alpha} + Y^{\ddot{\alpha}} \Delta \ddot{\alpha} + \dots$$

Такое представление аэродинамических характеристик оказывается достаточно точным в широком диапазоне режимов полета.

Описание и математическое представление вихревых и срывных зон потока с поверхности ЛА представляет сложную и практически не решаемую задачу.

Математическая модель аэродинамических характеристик самолета.

Обычный подход к созданию математической модели аэродинамики заключается в суммировании различных статических эффектов (влияние угла атаки, скольжения, углов отклонения органов управления) с динамическими эффектами, обусловленными, например, наличием угловых скоростей вращения.

На углах атаки, меньших угла атаки начала отрыва потока, эти динамические эффекты для самолетов обусловлены наличием демпфирования и находятся по экспериментам с вынужденными колебаниями модели в аэродинамической трубе с малыми амплитудами по тангажу, крену и рысканию.

В этом случае аэродинамические характеристики могут быть представлены в виде:

$$c_y = c_y(\alpha) + \Delta c_y(\alpha, \varphi_{\Gamma 0}),$$

$$m_z = m_z(\alpha) + \left(m_z^{\bar{\omega}_z} + m_z^{\ddot{\alpha}} \right) \bar{\omega}_z + \Delta m_z(\alpha, \varphi_{\Gamma 0}),$$

$$\begin{aligned}
c_z &= c_z^\beta \beta + c_z^{\bar{\omega}_x} \bar{\omega}_x + c_z^{\bar{\omega}_y} \bar{\omega}_y + c_z^{\bar{\beta}} \bar{\beta} + \Delta c_z(\alpha, \delta_3) + \Delta c_z(\alpha, \delta_H), \\
m_x &= m_x^\beta \beta + m_x^{\bar{\omega}_x} \bar{\omega}_x + m_x^{\bar{\omega}_y} \bar{\omega}_y + m_x^{\bar{\beta}} \bar{\beta} + \Delta m_x(\alpha, \delta_3) + \Delta m_x(\alpha, \delta_H), \\
m_y &= m_y^\beta \beta + m_y^{\bar{\omega}_x} \bar{\omega}_x + m_y^{\bar{\omega}_y} \bar{\omega}_y + m_y^{\bar{\beta}} \bar{\beta} + \Delta m_y(\alpha, \delta_3) + \Delta m_y(\alpha, \delta_H),
\end{aligned} \tag{7.1}$$

где $\bar{\omega}_x, \bar{\omega}_y, \bar{\omega}_z$ – безразмерные составляющие угловой скорости движения самолета в связанной системе координат.

Модели вида (7.1) применимы к движению самолета на углах атаки, меньших критического и хорошо зарекомендовали себя на практике. Однако анализ случаев выхода самолета на закритические углы атаки показал, что для этих режимов значительное влияние на динамику самолета оказывают эффекты интенсивного вращения. В связи с этим возникает необходимость в дальнейшем уточнение модели (7.1).

Для этого используется следующий подход. Предполагается, что экспериментальные данные, полученные в двух различных типах эксперимента (вынужденные колебания и коническое вращение самолета относительно вектора скорости), могут быть векторно объединены для описания произвольного движения самолета на больших углах атаки.

В этом случае вектор установившейся угловой скорости вращения относительно скорости полета можно выразить через составляющие угловых скоростей в связанной системе координат следующим образом:

$$\Omega_a = \omega_x \cos \alpha \cos \beta - \omega_y \sin \alpha \cos \beta + \omega_z \sin \beta. \tag{7.2}$$

Колебательные же составляющие угловой скорости вращения тогда выражаются через составляющие угловых скоростей в связанной системе координат как:

$$\begin{aligned}
\omega_{xBK} &= \omega_x - \Omega_a \cos \alpha \cos \beta, \\
\omega_{yBK} &= \omega_y + \Omega_a \sin \alpha \cos \beta, \\
\omega_{zBK} &= \omega_z - \Omega_a \sin \beta.
\end{aligned}$$

Таким образом, математическая модель (7.11) для больших углов атаки с учетом соотношений (2) и (3) может быть записана в виде:

$$\begin{aligned}
c_x &= c_x(\alpha, \beta, \Omega_a) + \Delta c_x(\alpha, \varphi_{Г0}) + \Delta c_x(\alpha, \delta_3) + \Delta c_x(\alpha, \delta_H), \\
c_y &= c_y(\alpha, \beta, \Omega_a) + \Delta c_y(\alpha, \varphi_{Г0}), \\
m_z &= m_z(\alpha, \beta, \Omega_a) + \tilde{m}_z^{\bar{\omega}_z}(\alpha) \bar{\omega}_{zBK} + \Delta m_z(\alpha, \varphi_{Г0}), \\
c_z &= c_z(\alpha, \beta, \Omega_a) + c_z(\alpha, \delta_3) + \Delta c_z(\alpha, \delta_H), \\
m_x &= m_x(\alpha, \beta, \Omega_a) + \tilde{m}_x^{\bar{\omega}_x}(\alpha) \bar{\omega}_{xBK} + \tilde{m}_x^{\bar{\omega}_y}(\alpha) \bar{\omega}_{yBK} + m_x^{\bar{\beta}} \bar{\beta} + \Delta m_x(\alpha, \delta_3) \\
&\quad + \Delta m_x(\alpha, \delta_H), \\
m_y &= m_y(\alpha, \beta, \Omega_a) + \tilde{m}_y^{\bar{\omega}_x}(\alpha) \bar{\omega}_{xBK} + \tilde{m}_y^{\bar{\omega}_y}(\alpha) \bar{\omega}_{yBK} + \Delta m_y(\alpha, \delta_3) \\
&\quad + \Delta m_y(\alpha, \delta_H),
\end{aligned} \tag{7.3}$$

где

$$\begin{aligned}
\tilde{m}_z^{\bar{\omega}_z}(\alpha) &= m_z^{\bar{\omega}_z} + m_z^{\bar{\alpha}}, \\
\tilde{m}_x^{\bar{\omega}_x}(\alpha) &= m_x^{\bar{\omega}_x} + m_x^{\bar{\beta}} \sin \alpha,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{m}_x^{\bar{\omega}_y}(\alpha) &= m_x^{\bar{\omega}_y} + m_y^{\bar{\beta}} \cos \alpha, \\ m_y^{\bar{\omega}_x}(\alpha) &= m_y^{\bar{\omega}_x} + m_y^{\bar{\beta}} \sin \alpha, \\ \tilde{m}_y^{\bar{\omega}_y}(\alpha) &= m_y^{\bar{\omega}_y} + m_y^{\bar{\beta}} \cos \alpha.\end{aligned}$$

Нелинейные зависимости от $(\alpha, \beta, \Omega_a)$ в выражениях (7.3) и эффективности органов управления берутся из результатов испытаний [30].

Данные для углов атаки $\alpha < 40^\circ$ дополняются по результатам более подробных испытаний модели в аэродинамических трубах.

Численные оценки характеристик штопора и сравнение их с материалами испытаний в аэродинамической трубе

В процессе выполнения испытаний динамически подобных моделей БВС в аэродинамических трубах исследуются аэродинамические характеристики БВС с различными вариантами подвесок, с отклоненной и не отклоненной механизацией, при различных положениях рулей, центровок и т.п.

На свободно штопорящей модели для тех же конфигураций исследуются режимы правого и левого штопоров и следующие методы вывода БВС из режима установившегося штопора [30]:

1-й – все органы управления в нейтральное положение. Этот метод далеко не всегда обеспечивает надежный выход БВС из полученных режимов;

2-й – элероны и стабилизатор в нейтральное положение, руль направления против штопора;

3-й – отклонение руля направления полностью против штопора, элероны – в нейтральное положение и через 0,5...1,0 витков стабилизатор – на пикирование;

4-й – руль направления – полностью против штопора, элероны – полностью по штопору, через 0,5...1,0 витков стабилизатор – на пикирование;

5-й – нестандартный метод: руль направления – против штопора, элероны – по штопору, стабилизатор – полностью на кабрирование и после остановки вращения – в нейтральное положение. Этот метод применяется, как правило, при сильном вращении.

Пример математического моделирования штопора по данным расчета [28], приведен на рис. 7.4.

Для исследования характеристик штопора широко используются данные, полученные при испытаниях на сваливание и штопор.

Летные испытания БВС на критических режимах полета (полет на больших углах атаки, сваливание, штопор) проводятся в целях определения особенностей поведения БВС и работы силовой установки на этих режимах, выбора методов управления, исключая сваливание и попадание БВС в штопор, и методов вывода его из штопора.

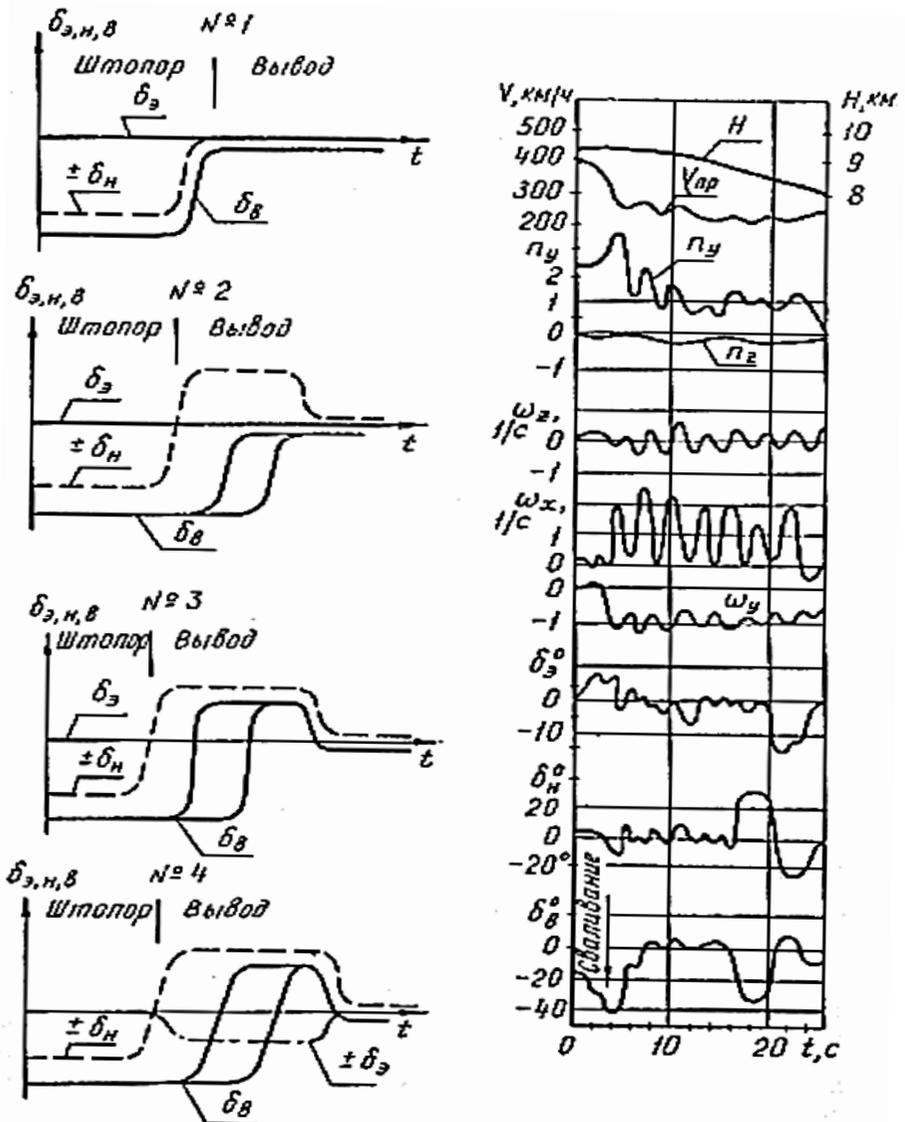


Рис.7.4. Пример расчета характеристик штопора и способов вывода

При выполнении испытаний на критических режимах полета определяются:

- максимальное значение коэффициента подъемной силы;
- характеристики поведения БВС на больших углах атаки и характерные признаки приближения к ним (тряски, кренения, раскачки и др.);

- срывные, послесрывные характеристики и характеристики входа БВС в штопор;
- характер движения БВС при сваливании и штопоре;
- положение органов управления вызывающего вход БВС в штопор;
- потери высоты за время вывода БВС из штопора;
- влияние послесрывных вращений и штопора на работу силовой установки и оборудование БВС.

После выполнения испытаний на критических режимах полета даются рекомендации по предотвращению выхода БВС на критические режимы полета и описываются методики выхода (вывода БВС) из них. Летные испытания БВС на больших углах атаки, сваливание и штопор проводятся после определения прочностных характеристик.

Характеристики сваливания считаются удовлетворительными, если БВС по мере приближения к границе сваливания имеет характерные предупреждающие признаки (например, аэродинамическую тряску), при сваливании опускает нос без крена или с незначительным креном, в процессе сваливания имеется достаточный запас управляемости и устойчивости, БВС надежно выводится из режима сваливания и за время вывода теряет сравнительно небольшую высоту.

После выполнения данного вида испытаний для БВС устанавливается предельно допустимое в эксплуатации значение коэффициента подъемной силы. Обычно в качестве предельно допустимого в эксплуатации значения коэффициента подъемной силы принимается значение равное 0,85 величины, соответствующей началу сваливания, либо границе неустойчивости по перегрузке.

Основные характеристики штопора и вывода БВС из этого режима определяются непосредственно по материалам первичной обработки записей контрольно-записывающей аппаратуры.

К таким характеристикам обычно относят:

1. Мгновенные значения углов крена и тангажа, углов атаки и скольжения, угловых скоростей крена, рыскания, тангажа, дающие представление о наибольших и наименьших их величинах в режиме штопора.

2. Средние на рассматриваемом конечном интервале времени $t_2 - t_1$ значения углов тангажа и крена, угловых скоростей крена, рыскания, тангажа, угловой скорости вращения БВС, а также углов атаки и скольжения в режиме штопора.

$$\vartheta_{\text{cp}} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \vartheta(t) dt}{t_2 - t_1}, \quad \gamma_{\text{cp}} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \gamma(t) dt}{t_2 - t_1},$$

$$\omega_{x \text{ cp}} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \omega_x(t) dt}{t_2 - t_1}, \quad \omega_{y \text{ cp}} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \omega_y(t) dt}{t_2 - t_1},$$

$$\omega_{z \text{ cp}} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \omega_z(t) dt}{t_2 - t_1}, \quad \beta_{\text{cp}} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \beta(t) dt}{t_2 - t_1},$$

$$\alpha_{\text{cp}} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \alpha(t) dt}{t_2 - t_1}, \quad \omega_x = \sqrt{\omega_x^2 \text{ cp} + \omega_y^2 \text{ cp} + \omega_z^2 \text{ cp}}.$$

3. Максимальные отклонения угловых скоростей крена, рыскания, тангажа от их средних значений

$$\Delta\omega_x = \omega_x(t) - \omega_x \text{ cp} = f(t),$$

$$\Delta\omega_y = \omega_y(t) - \omega_y \text{ cp} = f(t),$$

$$\Delta\omega_z = \omega_z(t) - \omega_z \text{ cp} = f(t).$$

4. Число витков в рассматриваемом режиме штопора

$$N_{\text{ш}} = \frac{1}{2\pi} \int_{t_1}^{t_2} \omega_{\text{cp}}(t) dt.$$

5. Время выполнения БВС одного витка штопора

$$t_{\text{ш}} = \frac{2\pi}{\omega_{\text{cp}}}.$$

Параметры установившегося штопора могут быть определены по приближенным формулам.

Рассмотрим характеристики установившегося штопора ($V = \text{const}$), у которого ось близка к вертикали, средние параметры движения постоянны, тяга двигателя равна нулю (рис.7.5).

В этом случае вес ЛА G уравновесится составляющей аэродинамической силы $R_a \sin \alpha$, а центростремительная сила – составляющей $R_a \cos \alpha$:

$$\begin{cases} G = R_a \sin \alpha = c_R \frac{\rho V_{\text{ш}}^2}{2} S \sin \alpha, \\ m \frac{V_{\text{ш}}^2}{r_{\text{ш}}} = m \omega_{\text{ш}}^2 r_{\text{ш}} = R_a \cos \alpha. \end{cases}$$

Откуда

$$V_{\text{ш}} = \sqrt{\frac{2G}{c_R \rho S \sin \alpha}}, \quad r_{\text{ш}} = \frac{R_a \cos \alpha}{m \omega_{\text{ш}}^2} \approx \frac{g n_y \cos \alpha}{\omega_{\text{ш}}^2}.$$

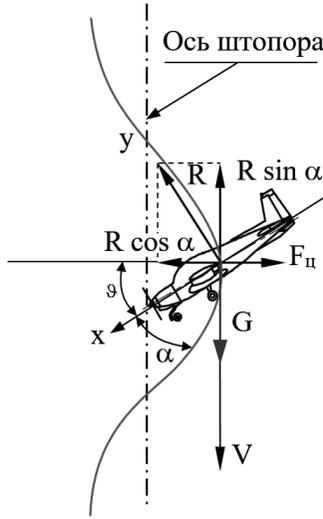


Рис.7.5. Схема сил, действующих на БВС при штопоре

В штопоре при $\alpha > \alpha_{кр}$ величина $c_R = const$ и равна:

- для БВС с прямым крылом большого удлинения $c_R = c_{у макс}$;
- для БВС с треугольным, стреловидным и крылом малого удлинения $c_R = k_R \cdot c_{у макс}$, где $k_R = 1.21 \dots 1.3$.

Тогда

$$V_{ш} = \sqrt{\frac{2G}{c_R \rho S \sin \alpha}} = \sqrt{\frac{2G}{k_R c_{у макс} \rho S \sin \alpha}} = \sqrt{\frac{1}{k_R \sin \alpha}} \cdot \sqrt{\frac{2G}{c_{у макс} \rho S}} = \frac{V_{мин}}{\sqrt{k_R \sin \alpha}}$$

Приняв в среднем $k_R = 1,25$ получим, что

- в крутом штопоре $\alpha_{ср} \approx 25^\circ$ $V_{ш} \approx 1,4V_{ш}$,
- в пологом штопоре $\alpha_{ср} \approx 55^\circ$ $V_{ш} \approx V_{ш}$,
- в плоском штопоре $\alpha_{ср} \approx 65^\circ$ $V_{ш} \approx 0,95V_{ш}$.

Например, для БВС СТ с удельной нагрузкой на крыло 4000 Н/м^2 скорость устойчивого штопора на малых высотах на углах атаки $\alpha = 30 \dots 90^\circ$ составит $V_{ш} = 325 \dots 430 \text{ км/ч}$.

- перегрузка в штопоре

$$n = \frac{R_a}{mg} = \frac{1}{\sin \alpha},$$

- время выполнения одного витка

$$t_{ш} = \frac{2\pi}{\omega_{ш}}$$

- потеря высоты за один виток $\Delta H_{ш} = V_{ш} t_{ш} = 300 \dots 700 \text{ м}$.

8. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ТРАЕКТОРНЫМ ДВИЖЕНИЕМ БВС

8.1. Формулировка задачи оптимального управления

Потребности, в оптимизации большого числа параметров при проектировании ЛА, в определении оптимальных режимов полета ЛА при его эксплуатации привели к разработке особенно за последние десятилетия большого количества методов решения подобного класса задач.

Все существующие методы оптимизации разделить на два класса: методы оптимизации функций и методы оптимизации функционалов.

Методы оптимизации функций подразделяются на прямые и непрямые. Непрямыми являются такие методы, которые для отыскания экстремума (минимума или максимума) функции или функционала используют необходимые условия экстремума. Прямыми называются такие методы, которые для поиска экстремума сравнивают значение функции (функционала) в двух или трех точках.

Непрямые методы используются, как правило, для получения аналитического решения, прямые методы – для численного решения.

В свою очередь, прямые методы разделяются на методы отыскания безусловного экстремума и на прямые методы отыскания условного экстремума.

Численные методы отыскания безусловного экстремума делят на классы в зависимости от максимального порядка вычисляемой целевой функции. Методы, использующие только значения целевой функции, называют методами нулевого порядка. Если используются значения первых производных – методами первого порядка и т.д.

Среди методов поиска наиболее широкое распространение получили методы равномерного поиска, метод деления интервала пополам (метод дихотомии), метод золотого сечения.

Среди градиентных методов наибольшее распространение получили метод с дроблением шага, метод с постоянным шагом, метод наискорейшего спуска и метод сопряженных градиентов.

Среди методов второго порядка наибольшее распространение получил метод Ньютона.

К методам отыскания условного экстремума относятся симплекс-метод, метод штрафных функций, метод условного градиента, метод допустимых направлений, метод проекции градиента.

Методы оптимизации функционалов (методы оптимального управления).

При рассмотрении задач оптимального управления используются следующие термины:

1) $x(t)$ – вектор фазовых координат рассматриваемого объекта, т.е. вектор его линейных, угловых координат, а также переменных, которые удобно рассматривать в качестве координат, например, скоростей, сил, ускорений, энергии и т.п.

2) $u(t)$ – вектор управления (управляющие функции), т.е. вектор таких параметров объекта (в общем случае функциональных зависимостей), которые не зависят от фазовых координат и могут быть выбраны, вообще говоря, произвольно.

3) a – вектор параметров объекта, характеризующих его свойства.

4) t – время.

5) $f(x, \dot{x}, u, a, t) = 0$ – уравнения связей (уравнения движения) объекта, описывающие его функционирование и функциональные возможности (f – вектор в общем случае дифференциальных функций).

6) $g(x, u, a, t) \leq 0$ – ограничения, задающие область допустимых управлений (g – вектор алгебраических функций).

7) $\mathcal{H} = \mathcal{H}(x, u, t, t_0, t_1)$ – критерий оптимальности, который может определяться не только фазовыми координатами и управлением в каждый момент времени, но и интегралом по времени в пределах от t_0 до t_1 . В последнем случае такое выражение, зависящее не столько от отдельных значений величин $x(t), u(t)$, сколько от их вида как функций на интервале времени, называется функционалом.

В общем виде задача оптимального управления формулируется так: при заданных уравнениях связей (уравнениях движения) требуется найти такое оптимальное управление $\hat{u}(t)$ и соответствующее ему оптимальное решение (оптимальную траекторию) $\hat{x}(\hat{u}, a, t)$, которые в области допустимых управлений доставляют минимум критерию оптимальности:

$$\mathcal{H}(x, u, t, t_0, t_1) \rightarrow \min \mathcal{H} = \mathcal{H}(\hat{x}, \hat{u}, t, t_0, t_1).$$

Таким образом, отличительным признаком задач оптимального управления является наличие в их формулировке критерия оптимальности.

Методы математической теории оптимальных процессов также подразделяются на два больших класса: прямые и непрямые методы.

Непрямые методы включают в себя вариационное исчисление, принцип максимума Понтрягина, динамическое программирование Беллмана. К непрямым относятся методы, которые при отыскании экстремума функционала используют необходимые условия оптимальности.

К прямым методам относятся математическое программирование и методы типа Ритца-Галеркина. Математическое программирование можно разделить на два класса: методы, в которых решение получается вариацией траектории в фазовом пространстве и методы, в которых решение определяется вариацией управления в пространстве управлений.

Методы математической теории оптимальных процессов сводят задачу оптимизации функционала к решению известных математических проблем.

В вариационном исчислении задача сводится к решению краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка или для канонической системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, или к решению одного дифференциального уравнения в частных производных с одним граничным условием.

Принцип максимума Понтрягина сводит задачу оптимизации функционала к решению краевой задачи для канонической системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и оптимизации функций нескольких переменных.

Принцип максимума представляет собой обобщение уравнений необходимых условий экстремальности Эйлера-Лагранжа и условий трансверсальности вариационных задач с помощью особой функции Гамильтона, построенной из исходных уравнений связей. Особое преимущество использование принципа максимума дает при решении задач с ограничениями на фазовые координаты и управления, зависящими от времени. С помощью принципа максимума решено много прикладных задач оптимального управления, в том числе классическая задача оптимального набора высоты самолетом в условиях внешних ограничений, включая ограничения системы управления воздушным движением.

Динамическое программирование Беллмана сводит задачу оптимизации к решению системы дифференциальных уравнений в частных производных с одним граничным условием и оптимизации функции нескольких переменных.

Метод динамического программирования разработан Р. Беллманом для решения так называемых «многошаговых» задач оптимального управления, в которых на каждом шаге предполагается отыскание оптимального управления (оптимальной стратегии) для перехода на следующий шаг.

Метод Беллмана, хотя и является математически достаточным, однако требует больших объемов памяти ЭВМ. При решении с его помощью непрерывных задач управления не всегда можно построить сходящийся алгоритм решения дифференциального уравнения с частными производными, в которые он преобразует исходную задачу. Поэтому метод Беллмана для решения таких задач обычно не применяется.

Прямые методы Ритца-Галеркина оптимизируют функционал, оптимизируя функцию нескольких переменных.

В прямом методе уравнение экстремали является алгебраическим и представляет собой линейную комбинацию опорных функций

$$x(t) = \sum_i a_i \varphi_i(t), \quad i = \overline{0, n}. \quad (8.1)$$

При таком виде уравнения экстремали функционал

$$J[x(t)] = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, x, \dot{x}) dt = J(a_0, a_1, \dots, a_n), \quad (8.2)$$

становится функцией произвольных постоянных $a_i, i = \overline{0, n}$.

Величина этих произвольных постоянных определяется на условиях минимума функционала (8.2).

Особенности задач оптимального управления траекторным движением.

По современным воззрениям отыскание оптимальных траекторий движения БВС требует решения двух проблем.

Первая проблема состоит в определении собственно оптимальных траекторий движения БВС, то есть оптимального программного движения БВС.

Вторая проблема заключается в отыскании управления, обеспечивающего реализацию полученной траектории с максимальной точностью.

При определении оптимальных траекторий БВС в качестве уравнений движения обычно принимают известные уравнения движения ЦМ БВС как материальной точки переменной массы, получаемые при допущении, что земля плоская и не вращается, угол скольжения $\beta = 0$. Запишем уравнения в виде:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= g(n_{xa} - \sin \Theta), \\ \frac{d\Theta}{dt} &= \frac{g}{V}(n_{ya} \cdot \cos \gamma_a - \cos \Theta), \\ \frac{d\Psi}{dt} &= -\frac{g}{V}n_{ya} \cdot \sin \gamma_a, \\ \frac{dx_g}{dt} &= V_{xg}, \\ \frac{dy_g}{dt} &= V_{yg}, \\ \frac{dz_g}{dt} &= V_{zg}, \\ \frac{dm}{dt} &= -c_s. \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} n_{xa} &= \frac{P \cdot \cos(\alpha + \varphi_{дв}) - X_a - F_{тр}}{mg}, \\ n_{ya} &= \frac{Y_a + P \cdot \sin(\alpha + \varphi_{дв}) + N}{mg}, \end{aligned}$$

– тангенциальная и нормальная скоростная перегрузка соответственно.

Наиболее употребительными ограничениями на фазовые координаты являются ограничения на высоту полета и скорость БВС

$$y_g(t) - y_{g\min}(t) \geq 0, \quad V_{\min} \leq V(t) \leq V_{\max}.$$

Минимальное и максимальное значение скорости в свою очередь зависит от фазовых координат, в частности от высоты полета.

$$V_{\min} = V_{эв}(H), \quad V_{\max} = \min \left\{ \begin{array}{l} V_{\max \text{ доп}}(H) \\ M_{\max \text{ доп}} a(H) \end{array} \right\}.$$

Минимальная скорость полета ограничивается эволютивной скоростью, максимальная – либо максимальной величиной скоростного напора, либо максимально допустимым числом M полета.

Наиболее употребительными ограничениями на управление являются ограничения на тягу двигателя, нормальную скоростную перегрузку n_{ya} и величину скоростного угла крена γ_a .

Запишем выражение для тяги двигателя в виде

$$P = u_p \cdot P_{\max},$$

где P_{\max} – тяга двигателя на максимальном режиме работы двигателя,

u_p – параметр управления тягой, показывает какая доля тяги от максимальной используется в текущий момент.

В общем случае параметр изменяется в пределах

$$u_{p\min} \leq u_p(t) \leq u_{p\max}.$$

Максимальное значение $u_p=1$, минимальное значение параметра управления зависит от задачи оптимального управления.

Нормальная скоростная перегрузка в каждый момент времени должна удовлетворять неравенству

$$n_{ya\min} \leq n_{ya}(t) \leq n_{ya\max}.$$

Максимальное значение перегрузки выбирается в соответствии с

$$n_{ya\max} = \min \begin{cases} n_{y\max}^3(m), \\ n_{ya\text{ доп}}(H, M, P), \\ n_{y\phi\max}. \end{cases}$$

Ограничения на управление зависят от фазовых координат и управлений. Кроме того, ограничения зависят от массы БВС, наличия специального оборудования, центровок.

К техническим характеристикам БВС, которые оказывают существенное влияние на решение задачи оптимального управления, относятся его аэродинамические характеристики, высотно-скоростные и дроссельные характеристики силовой установки, массовые и геометрические характеристики.

Если все перечисленные характеристики известны, то для решения задачи оптимального управления необходимо задать начальные значения координат x_{g0}, y_{g0}, z_{g0} , величину и направление вектора скорости V_0, Θ_0, Ψ_0 , массы m_0 , а также конечные значения координат x_{gk}, y_{gk}, z_{gk} , значение конечной скорости V_k , а также значения углов наклона траектории Θ_k и пути Ψ_k , которые необходимо обеспечить в конечной точке.

Если в конечной точке необходимо обеспечить дополнительные условия (например, чтобы в конце выведения вектор скорости не вращался, то траектория в конечной точке должна удовлетворять не только значениям фазовых координат, но и производным некоторых из них, например, $d\Theta/dt = 0, d\Psi/dt = 0$).

Для выполнения этого условия размерность исходной системы уравнений должна быть увеличена, управления переведены в разряд фазовых координат, а в качестве управлений следует принять первые производные первоначальных управлений

$$\varepsilon_p = \dot{u}_p,$$

$$\varepsilon_{ny} = \dot{n}_{ya},$$

$$\varepsilon_\gamma = \dot{\gamma}_a.$$

Физически новые управления представляют собой темп изменения первоначальных управлений: темп изменения тяги двигателей, скорость изменения перегрузки (угла атаки) и крена.

Оптимальные траектории движения БВС, как правило требуют использования предельных возможностей БВС. Поэтому учет ограничений на управление и фазовые координаты при поиске оптимальных траекторий, удовлетворяющих заданным граничным условиям, является наиболее сложной проблемой.

Наиболее приспособлен к решению таких задач принцип максимума Понтрягина, поскольку он специально создан для решения задач ОУ с ограничениями на управление. Однако в связи с большими вычислительными трудностями решения канонической системы уравнений и гамильтониана, получили распространение и другие методы теории оптимальных процессов: методы, относящиеся к классу динамического программирования и прямые методы, не использующие непосредственно необходимые условия оптимальности траекторий [4].

Прямые методы также могут быть разделены на две основные группы – математическое программирование и прямые методы типа Ритца-Галеркина. В свою очередь математическое программирование, основанное на конечно-разностной аппроксимации исходной системы уравнений движения БВС и последующего определения экстремума функций многих переменных, в свою очередь может быть разделена на две подгруппы методов.

К первой относятся методы, в которых решение получается вариацией траектории в фазовом пространстве. Наиболее полный алгоритм таких методов разработан Н.Н. Моисеевым.

Ко второй группе обычно относят те методы, в которых для определения оптимальной траектории используют вариацию управления в пространстве управлений.

Несмотря на известные достижения в решении задач ОУ указанными методами, решение краевых задач с большим количеством заданных граничных условий остается серьезной научной проблемой.

8.2. Оптимальная траектория разгона БВС

Впервые задача определения оптимальной траектории разгона ЛА была решена аналитическими методами в начале 40-х годов Л.В. Клименко. Было установлено, что для быстрейшего разгона до максимальной скорости на самолете с поршневым двигателем необходимо выполнить маневр по «волне вверх»: на постоянной скорости набрать высоту, а затем использовать снижение до исходной высоты полета для быстрейшего увеличения скорости. Такой режим разгона позволил увеличить среднее ускорение разгона. Для получения минимального времени полета на заданном отрезке пути им рекомендована «волна вниз»: снижение ЛА с целью увеличения скорости полета до скорости, превышающей скорость прямолинейного горизонтального полета, а затем набор исходной высоты с неизбежной для самолетов с поршневой силовой установкой потерей скорости.

Для современных ЛА с большой тяговооруженностью основным маневром, позволяющим уменьшить время разгона ЛА от заданной начальной скорости до заданной конечной скорости, является маневр по «волне вниз».

Сформулируем задачу оптимального управления при разгоне до заданной скорости [19].

Среди допустимых траекторий, удовлетворяющих уравнениям движения ЛА в вертикальной плоскости, заданным начальным условиям $V_0, \Theta_0, \Psi_0, x_{g0}, y_{g0}, z_{g0}$, массы m_0 и конечным условиям $y_{gk}, V_k, \Theta_k = 0$, ограничениям на фазовые координаты и управления, техническим характеристикам ЛА и силовой установки, определить оптимальную траекторию движения ЛА, на которой время разгона ЛА в заданном диапазоне скоростей минимально.

При решении задачи оптимального управления полагаем, что режим работы силовой установки соответствует максимально возможному. Решением задачи является определение закона изменения фазовых координат $x_g(t), y_g(t), V(t), \Theta(t)$ и $m(t)$, управления $n_{ya}(t)$, а также интегральные характеристики разгона–время разгона, проходимый при этом путь и расход топлива при разгоне. Любая из этих функций в соответствии с решаемой задачей может быть целевой.

Начальная масса m_0 задается, а конечная m_k определяется по результатам решения задачи оптимального управления. Конечное значение x_{gk} (можно использовать как варьируемый параметр), определяется по результатам задачи оптимального управления.

Пример решения задачи при значениях параметров, представленных в таблице 8.1, представлен на рис. 8.1–8.4.

Таблица 8.1

Параметр	Начальные условия	Конечные условия		
		$M_k = 1.4$	$M_k = 1.6$	$M_k = 1.85$
$x_{g0}, \text{км}$	2	-	-	-
$y_{g0}, \text{км}$	11	11	11	11
$V, \text{м/с}$	265,5	413	472	546
$\Theta, \text{град}$	0	0	0	0

Результаты проведенных расчетов представлены на рис. 8.1

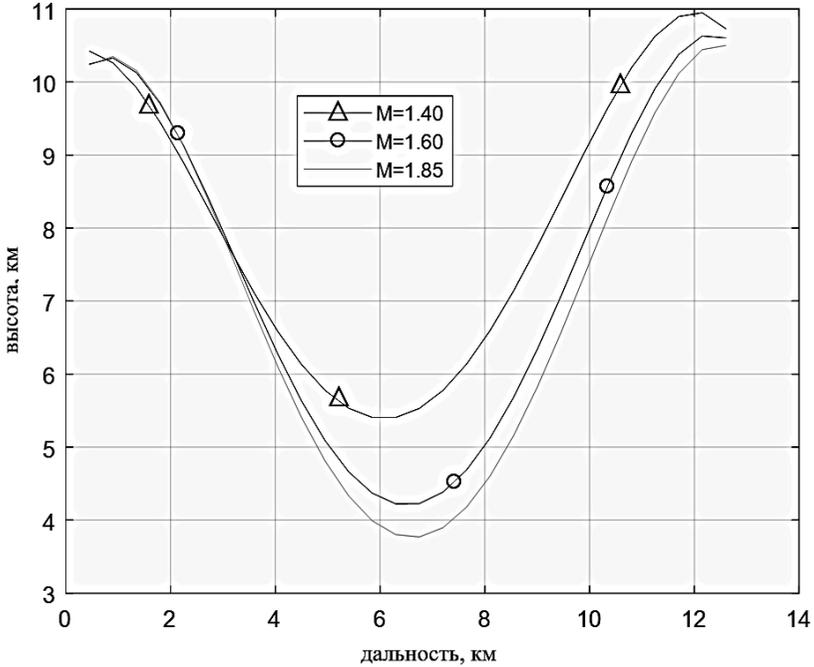


Рис.8.1. Траектории оптимального разгона («волна вниз»)

Как следует из рис.8.1, рис.8.2, оптимальными траекториями разгона ЛА для всех вариантов является маневр по волне вниз. Начальные участки ввода ЛА в снижение мало зависят от величины конечной скорости: практически для всех оптимальных траекторий зависимости $\Delta \bar{x}_g(y_g)$ совпадают на большом интервале времени. Дальнейший ход изменения параметров на них полностью зависит от конечных условий.

Минимальные значения угла наклона траектории Θ_{\min} на снижении практически не зависят от конечной скорости во всем исследуемом диапазоне. Максимальное значение угла наклона траектории Θ_{\max} в наборе высоты определяется величиной конечной скорости. Наибольшее значение соответствует конечному числу $M_k = 1.6$, (рис. 8.3).

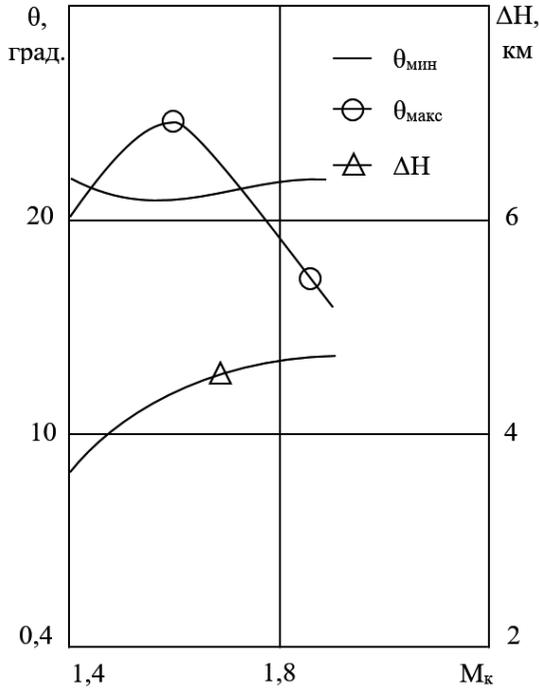


Рис.8.2. Изменение угла наклона траектории при разгоне

Вследствие такой закономерности изменения угла наклона траектории θ_{\min} на снижении от величины конечной скорости оказывается, что и максимальная потеря высоты при выполнении маневра разгона по волне вниз определяется величиной конечной скорости. Наибольшая потеря высоты соответствует конечному числу $M_k = 1.85$.

Максимальное значение нормальной скоростной перегрузки также зависит от конечной скорости: с увеличением конечной скорости максимальная величина перегрузки уменьшается от $n_{у\max} = 4.8$ при конечном числе $M_k = 1.6$ до $n_{у\max} = 2.4$ при $M_k = 1.85$ (рис. 8.3).

Наибольший интерес представляют интегральные характеристики: время разгона, расстояние, пройденное при разгоне вдоль оси Ox_g , расход топлива, расходуемый на разгон, а также их сравнение с аналогичными характеристиками разгона в прямолинейном горизонтальном полете (рис. 8.4)

Графики представлены в относительных координатах, равных отношению соответствующей характеристики оптимальной траектории к характеристике прямолинейного горизонтального разгона. Как видно, наибольший выигрыш во времени разгона по волне вниз по сравнению с прямолинейным разгоном получается при числе $M = 1.75$ и составляет примерно 44,5%. Практически во всем исследованном диапазоне конечных скоростей экономия времени при разгоне по «волне вниз» превышает 30%.

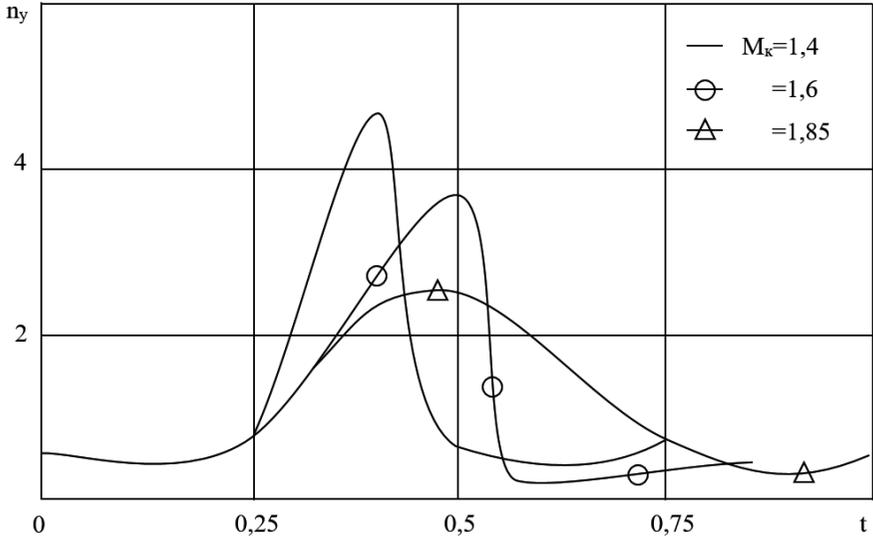


Рис.8.3. Изменение перегрузки при разгоне

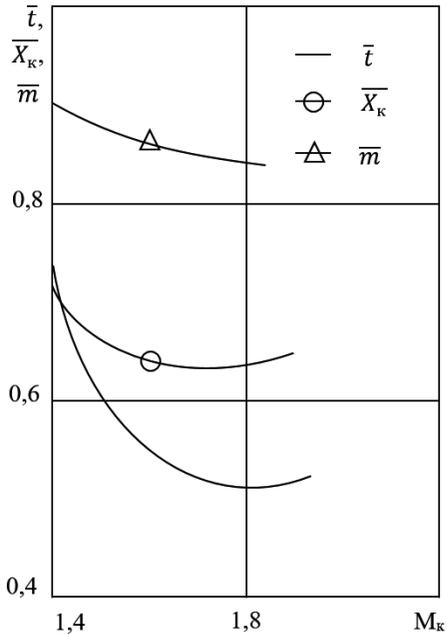


Рис.8.4. Интегральные характеристики при разгоне

Таким образом, маневр разгона по «волне вниз» полностью сохраняет свою эффективность в том числе при полетах с большой скоростью. Помимо времени при выполнении разгона по волне вниз значительно уменьшаются по сравнению с разгоном в прямолинейном горизонтальном полете и проходимость при разгоне расстояние \bar{x}_{gk} на 30-37% и расход топлива на разгон до 10-15% (рис. 8.4).

8.3. Оптимальные траектории набора высоты и скорости

Задача об определении оптимальной траектории набора высоты и скорости стала классической задачей динамики полета ЛА.

Основным и наиболее распространенным методом задачи набора высоты и скорости является метод Остославского-Лебедева и его многочисленные вариации.

Недостатком метода является допущение, согласно которому в процессе набора высоты и скорости нормальная скоростная перегрузка $n_{ya} = 1$, а угол наклона траектории $\theta \approx 0$ и его производная $d\theta/dt \approx 0$.

Сформулируем задачу оптимального управления с учетом принятых допущений.

Среди траекторий, удовлетворяющих уравнениям движения ЛА, начальным $V_0, \theta_0, \psi_0, x_{g0}, y_{g0}, z_{g0}$, массы m_0 и конечным y_{gk}, V_k, θ_k условиям, ограничениям на фазовые координаты и управления, техническим характеристикам ЛА и его силовой установки, определить оптимальную траекторию набора заданной высоты и скорости.

В качестве критерия оптимальности в задачах динамики полета наиболее часто используются время набора заданной высоты и скорости или расход топлива на этапе набора.

Можно рассматривать задачу набора высоты и скорости с обеспечением минимального шума на местности. Подобные задачи ОУ можно рассматривать для движения в вертикальной плоскости или в пространстве, поскольку существующие методы поиска оптимальных решений позволяют решать задачи ОУ в такой постановке.

Если в качестве критерия оптимальности принять время набора, то тогда режим работы будет соответствовать максимально возможному, и в процессе решения задачи ОУ остается определение двух оставшихся управляющих функций: нормальной скоростной перегрузки $n_{ya}(t)$ и скоростного угла крена $\gamma_a(t)$.

Если в качестве целевой функции принять расход топлива в наборе, то относительно режима работы силовой установки можно предположить следующее.

Можно принять режим работы силовой установки максимальным и определить оптимальную траекторию набора высоты и скорости на этом режиме, далее сравнить с оптимальной траекторией набора высоты и скорости за минимальное время.

Можно принять смешанный режим работы двигателя, сначала на номинальном режиме работы, затем на максимальном. Точка переключения в этом случае определяется в результате решения задачи ОУ.

Для БВС с большими скоростями полета оптимальные траектории набора высоты и скорости за минимальное время и с минимальным расходом топлива при максимально возможном режиме работы силовой установки отличаются значительно (рис. 8.5)

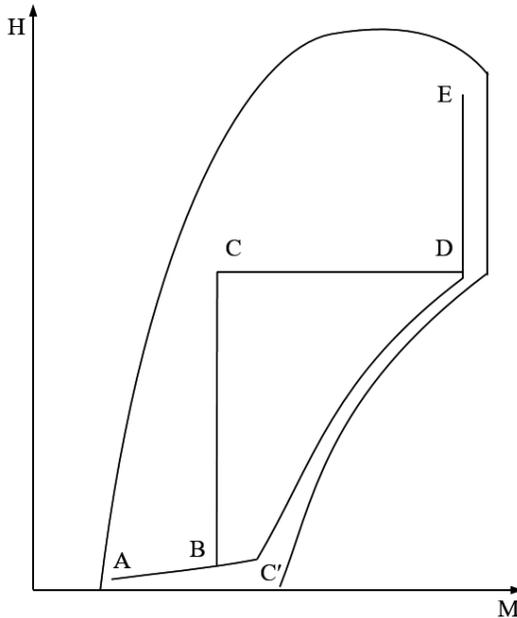


Рис.8.5. Оптимальные траектории набора высоты и скорости

Программа набора высоты и скорости за минимальное время $ABC'DE$ отличается тем, что уже на небольшой высоте BVC переходит на большую скорость и далее осуществляется разгон с одновременным набором высоты вдоль ограничений по скоростному напору и максимально возможному числу M полета.

Программа набора высоты и скорости с минимальным расходом топлива $ABCDE$ отличается тем, что переход на большую скорость осуществляется на больших высотах.

Увеличение тяговооруженности БВС может привести к тому, что нормальная скоростная перегрузка в процессе набора высоты и скорости будет отличаться от единицы. Иначе говоря, с увеличением тяговооруженности траектория набора высоты и скорости становится криволинейной, а ее реализация предполагает интенсивное маневрирование. Так, например, полет самолета П-42 на установление рекорда набора высоты 3000 м за 25,37 с, 6000 м — за 37,05 с, потребовал создания нормальной скоростной перегрузки на

отдельных участках траектории свыше 5 единиц. Кроме того, для уменьшения угла наклона траектории при выходе на большую скорость полета в процессе набора высоты может использоваться маневр в виде двух полубочек.

8.4. Применение прямых методов для решения задач оптимального управления

В отличие от классического вариационного исчисления, в котором уравнение экстремали $x(t)$ является дифференциальным, в прямом методе уравнение экстремали является алгебраическим и представляет собой линейную комбинацию опорных функций:

$$x(t) = \sum_i a_{ij} \varphi_{ij}(t), \quad i = \overline{0, n}. \quad (8.3)$$

При таком виде уравнения экстремали функционал

$$J[x(t)] = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, x, \dot{x}) dt = J(a_0, a_1, \dots, a_n). \quad (8.4)$$

становится функцией произвольных постоянных a_i , $i = \overline{0, n}$. Величина этих произвольных постоянных определяется из условия минимума функционала (8.4). Опорные функции являются комбинациями элементарных функций и должны удовлетворять вполне определенным требованиям.

Кроме того, каждая опорная функция должна удовлетворять заданным начальным и конечным условиям оптимальной траектории.

Таким образом, при использовании прямого метода краевая задача решается достаточно просто. Определение экстремали сводится к определению минимума функции нескольких переменных. Естественно, что вся теория простых методов, излагаемых в курсах вариационного исчисления и приближенных методов решения вариационных задач, разработана для случая полного отсутствия каких-либо ограничений на фазовые координаты и управления.

Учет ограничений на управление и фазовые координаты составляет основную проблему применения прямых методов для решения задач оптимального управления.

Применительно к задачам движения БВС, форма записи уравнения экстремали означает, что закон изменения каждой координаты центра масс ЛА может быть представлен в виде

$$X_i(t) = \sum_i a_{ij} \varphi_{ij}(t), \quad i = 1, 2, 3; \quad j = \overline{0, n}. \quad (8.5)$$

Как правило, в динамике полета запись зависимости $x_i(t)$ упрощают, ограничиваясь только одной опорной функцией для каждой координаты центра масс БВС

$$X_i(t) = \varphi_i(t), \quad i = 1, 2, 3. \quad (8.6)$$

В случае, если опорная функция полином, то закон изменения координаты центра масс имеет вид

$$X_i(t) = \sum_j a_{ij} t^j, \quad i = 1, 2, 3; j = \overline{0, n}. \quad (8.7)$$

Степень полинома в значительной степени определяется формой задания начальных и конечных условий: чем выше порядок производной координат центра масс в начальной и конечной точках траектории, тем выше степень полинома. Максимальная степень полинома

$$n = m_1 + m_2 + 1$$

на единицу больше суммы максимальных порядков производных координат центра масс ЛА в граничных точках траектории.

Коэффициенты полинома выбираются так, чтобы он удовлетворял заданным начальным и конечным условиям. Для этого полином дифференцируют необходимое количество раз и, приравнивая последовательно время начальному и конечному значениям, определяют коэффициенты полинома. При $t = t_0 = 0$ получаем, первые $m_1 + 1$ значения коэффициентов

$$a_{i0} = X_{i0} \quad a_{i1} = \dot{X}_{i0} \quad a_{i2} = \frac{1}{2} \ddot{X}_{i0}, \dots, \quad a_{im_1} = \frac{X_{i0}^{m_1}}{m_1!}.$$

Действительно, производные полинома

$$X_i(t) = \sum_{j=0}^n a_{ij} t^j, \quad \dot{X}_i(t) = \sum_{j=1}^n j a_{ij} t^{j-1}, \quad \ddot{X}_i(t) = \sum_{j=2}^n j(j-1) a_{ij} t^{j-2}. \quad (8.8)$$

$$X_i^{(m_1)}(t) = \sum_{j=m_1}^n j(j-1) \dots (j-m_1+1) a_{ij} t^{j-m_1}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Если порядок производной в конечной точке равен m_2 , то из системы $m_2 + 1$ уравнений определяем остальные $m_2 + 1$ коэффициенты при $t = t_1$

$$\sum_{j=m_1+1}^n a_{ij} t_1^j = X_{i0} - \sum_{j=0}^{m_1} a_{ij} t_1^j, \quad \sum_{j=m_1+1}^n j a_{ij} t_1^{j-1} = \dot{X}_{i0} - \sum_{j=0}^{m_1} j a_{ij} t_1^{j-1}.$$

$$\sum_{j=m_1+1}^n j(j-1) \dots (j-m_2+1) a_{ij} t_1^{j-m} = X_{i0}^{m_2} - \sum_{j=m_2}^{m_1} j(j-j-m_2+1) a_{ij} t_1^{j-m_2}.$$

Зная законы изменения координат центра масс ЛА, их первых и вторых производных, определим параметры движения БВС и силы, действующие на него.

Из кинематических уравнений движения следует, что

$$V(t) = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \dot{X}_i^2(t)}, \quad \dot{V}(t) = V^{-1} \sum_{i=1}^3 \dot{X}_i \ddot{X}_i. \quad (8.9)$$

Таким образом, заданным зависимостям от времени координат центра масс ЛА $X_i(t)$ соответствует единственная однозначная зависимость $V(t)$. Из тех же кинематических уравнений следует, что

$$\sin \theta = \dot{X}_2 V^{-1}, \quad \tan \varphi = -\dot{X}_3 \dot{X}_1^{-1}. \quad (8.10)$$

Определим производные углов наклона траектории и пути

$$\dot{\theta}(t) = (\ddot{X}_2 V - \dot{X}_2 \dot{V}) V^{-2} \cos^{-1} \theta \quad \dot{\Psi}(t) = (\ddot{X}_3 \dot{X}_1 - \dot{X}_3 \ddot{X}_1) X_1^{-2} \cos^{-2} \Psi. \quad (8.11)$$

Из первого динамического уравнения получим, что потребная тяга двигателя для движения по опорной траектории

$$P(t) = \frac{G}{\cos \alpha_p} [\dot{V} g^{-1} + \sin \theta + X G^{-1}]. \quad (8.12)$$

Решая совместно два остальных динамических уравнения, получаем выражение для потребного угла крена

$$\tan \gamma_a = \dot{\Psi} \cos \theta (\theta + g V^{-1} \cos \theta)^{-1}. \quad (8.13)$$

После этого из тех же уравнений определяем потребное значение нормальной скоростной перегрузки

$$n_{\gamma a} = (V \dot{\theta} - \cos \theta) g^{-1} \cos^{-1} \gamma_a, \quad (8.14)$$

или

$$n_{\gamma a} = -\dot{\Psi} M \cos \theta g^{-1} \sin^{-1} \gamma_a. \quad (8.15)$$

Решая совместно уравнения (8.12) и (8.14), определяем потребную тягу двигателя и угол атаки. Таким образом, определяем все потребные силы в случае, когда имеет БВС имеет классическую схему.

Определение сил усложняется, если на БВС имеется непосредственное управление подъемной и боковой силами, возможность поворота вектора тяги, то есть имеется несколько органов управления ускорением ЛА вдоль каждой оси связанной системы координат. В этом случае для однозначного определения сил, действующих вдоль одной и той же оси, необходимо привлекать либо дополнительные связи между силами, либо, в соответствии с принципом максимума, одновременно и полностью использовать все силы вдоль одной и той же оси.

Таким образом, задание явным образом изменения координат центра масс ЛА однозначно определяет все последующие изменения остальных параметров движения $V(t)$, $\theta(t)$, $\Psi(t)$, $m(t)$ и сил, действующих на ЛА $P(t)$, $X(t)$, $Y(t)$, то есть управлений $P(t)$, $n_{\gamma a}(t)$, $\gamma_a(t)$.

После определения параметров движения и управлений, проблемы применения прямых методов сводится к установлению того, насколько полученные управления и параметры движения соответствуют возможностям ЛА, характеристики которого (высотно-скоростные и дроссельные характеристики двигателя и аэродинамические характеристики ЛА) используются при расчете, а также какие ограничения наложены на фазовые координаты и управление.

Если параметры движения или управления выходят за установленные ограничения, то траектория при заданном законе изменения центра масс

оказывается нереализуемой или недопустимой. Такие траектории должны исключаться из дальнейшего рассмотрения.

Имеется два подхода при исключении недопустимых траекторий. При первом из них недопустимая траектория отбрасывается из рассмотрения сразу после первого выхода управления или параметра движения на ограничение: решение при этом отыскивается в классе непрерывных функций.

При втором способе при первом выходе управления или параметра движения на ограничение траектория не отбрасывается, а движение осуществляется вдоль ограничения. Если ограничивается управление, то изменение параметров движения координат осуществляется интегрированием уравнений движения ЛА при известном управлении, соответствующим его значениям по ограничению.

При этом траектория попадает в разряд недопустимых только в том случае, если из-за ограничений на управление не выполняются конечные условия или из-за ограничений на фазовые координаты. В этом случае решение задачи оптимального управления отыскивается в классе кусочно-непрерывных функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Асанов А.З Введение в математическое моделирование динамических систем. Казань: Издательство Казанского университета, 2007. – 205 с.
2. Александровская Л.Н., Круглов В.И., Кузнецов А.Г., и др. Теоретические основы испытаний и экспериментальная отработка сложных технических систем. Учебное пособие. –М.: Логос, 2003. – 736 с.
3. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Том 1. – М.: Наука, 1966. – 632 с.
4. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1980. – 520 с.
5. Вентцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. – М.: Наука, 1980. – 208 с.
6. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1964. – 576 с.
7. Голубева Н.В. Математическое моделирование систем и процессов. –СПб.: Издательство «Лань», 2016. –192 с.
8. Горлач Б.А., Шахов В.Г. Математическое моделирование. Построение моделей и численная реализация. Учебное пособие для вузов. –СПб.: Издательство «Лань», 2016. –292 с.
9. ГОСТ 24026–80. Исследовательские испытания. Планирование эксперимента. Термины и определения. – М.: Изд-во стандартов, 1980.-18 с.
10. ГОСТ Беспилотные авиационные системы с беспилотными воздушными судами самолетного типа. Требования к летной годности. М.: Российский институт стандартизации, 2021. –122 с.
11. Дыхненко Л.М. и др. Основы моделирования сложных систем: Учебное пособие для вузов. – Киев: Вища школа. 1981. – 359 с.
12. Дьяконов В.П. MATLAB. Полный самоучитель. –М.: ДКМ Пресс, 2012. – 768 с.
13. Звонарев С.В. Основы математического моделирования. Учебное пособие для вузов. – Екатеринбург: Изд-во Урал. Ун-та, 2019. – 112 с.
14. Кривель С.М. Динамика полета. Расчет летно-технических и пилотажных характеристик самолета. –Санкт-Петербург: Лань, 2016. – 190 с.
15. Кубланов М.С. Математическое моделирование. Методология и методы разработки математических моделей механических систем и процессов. Часть 1. Моделирование систем и процессов. М.: МГТУ ГА, 2004. –108 с.
16. Лазарев Ю.Ф. Начала программирования в среде MatLAB. Учебное пособие. –К.: НТУУ «КПИ». 2003. –424 с.
17. Лебедев А.Н. Моделирование в научно-технических исследованиях. М.: Радио и связь, 1989. – 224 с.
18. Лемешонок Т.Ю., Сизова А.А., Баранов Н.Е., Санников В.А. Математические модели динамики движения летательных аппаратов. Учебное пособие. –СПб.: Балт. гос. техн. ун-т, 2020. –122 с.
19. Момджи В.Г. Методология математического моделирования и оптимизация функционирования авиационной техники Учебное пособие. – М.: ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского, 1988. – 258 с.

20. Моисеев В.С. Динамика полета и управление беспилотными летательными аппаратами. – Казань: РИЦ «Школа», 2017. –
21. Мышкис А.Д. Элементы теории математических моделей. – М.: Физматгиз, 1994. – 192 с.
22. Моржов В.И., Ермачков Ю.А. Моделирование физических процессов в авиации. – М.: «Инфа-Инженерия», 2021. – 158 с.
23. Неймарк Ю.И., Коган Н.Я., Савелов В.П. Динамические модели теории управления. – М.: Наука, 1995. – 400 с.
24. Остославский И.В., Стражева И.В. Динамика полета. Траектории летательных аппаратов. – М.: Машиностроение, 1969. – 500 с.
25. Припадчев А.Д., Горбунов А.А., Магдин А.Г. Моделирование устойчивости и управляемости летательных аппаратов. М.: «Инфа-Инженерия», 2021. – 116с.
26. Савченко А.А. Введение в математическую статистику с применением в гражданской авиации. – Киев: МИИГА, 1975. – 132 с.
27. Савченко А.А. Многомерный статистический анализ для инженеров гражданской авиации. – М.: МИИГА, 1976. – 112 с.
28. Тарасенков А.М., Брага В.Г., Тараненко В.Т. Динамика полета и боевого маневрирования летательных аппаратов. – М.: ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского, 1984. – 512 с.
29. Тарасик В.П. Математическое моделирование технических систем. Учебник для вузов. – Минск; Новое знание, 2013. – 584 с.
30. Бюшгенс Г.С., и др. Аэродинамика, устойчивость и управляемость сверхзвуковых самолетов. – М.: Наука. Физматлит. 1998. – 816с.