3. ЗАДАЧА № 3: ОЦЕНКА УСТОЙЧИВОСТИ РАЗОМКНУТЫХ И ЗАМКНУТЫХ САР

3.1. Цель, исходные данные и последовательность решения задачи

Целью выполнения настоящего задания является получение практических навыков по оценке устойчивости САР с использованием алгебраических и частотных критериев.

Последовательность решения задачи должна включать в себя следующие пункты.

1. Используя функциональную схему (рис.3.1.) и структурную схему (рис.3.2.) записать уравнение динамики *разомкнутой и замкнутой* систем автоматического регулирования в общем виде.
2. По таблицам 3.1….3.3 выбрать значения постоянных времени T_2^2 ,T_1, T_{op} и коэффициентов усиления k_1, k_2, k_3 , k_4 входящих в соотношения для передаточных функций (рис.3.2) , соответствующих шифру вашей зачетной книжки, и *записать уравнение динамики в виде линейного дифференциального уравнения с известными коэффициентами.*
3. Оценить устойчивость *разомкнутой* системы с помощью алгебраических критериев Рауса и Гурвица.
4. Оценить устойчивость *разомкнутой* системы с помощью частотного критерия Михайлова.
5. Оценить устойчивость *замкнутой* системы с помощью частотного критерия Найквиста.

3.2.Выбор варианта задачи и рекомендации по расчетам и оформлению.

Как следует из предыдущего пункта, исходными данными для расчетов являются функциональная и структурная схемы (рис.3.1., рис.3.2), которые для всех вариантов являются общими, и значения коэффициентов T_2^2 ,T_1, T_{op},k_1, k_2, $k_{3,}$, k_4 , которые являются индивидуальными для каждого студента и выбираются в соответствии с номером зачетной книжки по последним трем цифрам.

Коэффициенты T_2^2 ,T_1 ,k_1 уравнения динамики чувствительного элемента (ЧЭ) выбираются по последней цифре номера зачетной книжки в соответствии с табл.3.1.

Коэффициенты усиления k_1,k_2 преобразующего элемента (ПЭ) и регулирующего органа (РО) выбираются по предпоследней цифре номера зачетной книжки в соответствии с табл.3.2.

Коэффициенты уравнения динамики газотурбинного двигателя (объекта регулирования (ОР)) T_{op},k_4 выбираются по третьей с конца цифре номера зачетной книжки в соответствии с табл.3.3

.

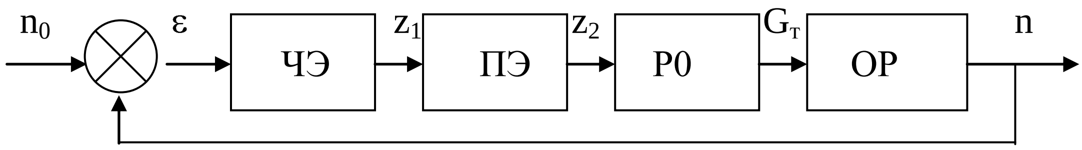

Рис.3.1. Функциональная схема регулятора оборотов двигателя ГТД

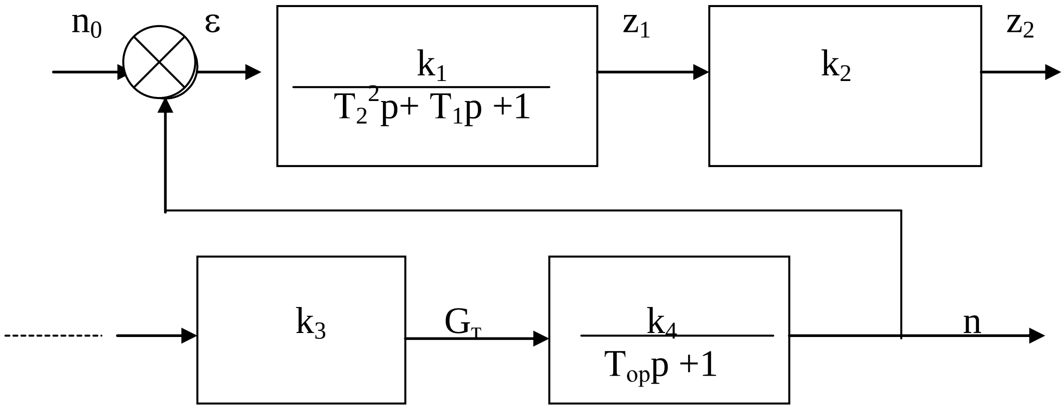

Рис.3.2. Структурная схема регулятора оборотов ГТД

Построение математической модели САР, структурная схема которой изображена на рис.3.2, осуществляется также как и в задачах №1 и №2. Сначала записываются результирующие передаточные функции замкнутой и разомкнутой систем регулирования, используя правила преобразования структурных схем , затем записываются соответствующие дифференциальные уравнения, моделирующие функционирование САР.

Поскольку критерии Михайлова и Найквиста расчетно-графические, то графики должны быть выполнены с четким указанием системы координат и масштабов на отдельных листах. При этом необходимо *вычислить и указать на графиках точки пересечения соответствующих кривых с осями координат.* В процессе выполнения пунктов 3…5 задания *необходимо привести формулировки соответствующих критериев в общем случае и конкретно для вашего уравнения динамики, а затем подставлять конкретные числовые значения*

При использовании критерия Найквиста особое значение имеет положение точки с координатами (-1,0) относительно графика Найквиста. Поэтому, в работе необходимо *особо выделить процедуру нахождения точки пересечения графика функции Найквиста с осью абсцисс*.

Результаты вычислений дискретных значений функций Михайлова и Найквиста, которые необходимы для построения соответствующих графиков, должны быть сведены в таблицы. Интервал дискретизации аргумента функций выбирается таким образом, чтобы в каждом квадранте системы координат находилось не менее трех точек .

Таблица 3.1

Последняя цифра	T_2^2	T_1	k_1
0	1,15	0,97	0,71
1	1,27	0,92	0,61
2	1,39	0,82	0,52
3	1,44	0,72	0,82
4	1,51	0,60	0,37
5	1,56	0,51	0,98
6	0,71	0,42	0,69
7	1,80	0,35	1,2
8	1,83	0,22	0,95
9	1,95	0,11	0,71

Таблица 3.2

Пред-послед-няя цифра	K_2	K_3
0	1,2	0,8
1	0,5	1,5
2	0,9	1,1
3	0,7	1,0
4	1,00	0,8
5	1,25	0,97
6	1,3	0,67
7	1,4	0,98
8	1,5	0,7
9	2	0,4

Таблица 3.3

Цифра, третья от конца	T_{op}	k_4
0	0,12	1,00
1	0,45	0,90
2	0,13	1,12
3	0,37	1,00
4	0,18	0,87
5	0,25	1,15
6	0,19	1,05
7	0,20	0,98
8	0,22	0,95
9	0,30	1

3.3. Краткие теоретические сведения к задаче №3.

3.3.1. Понятие об устойчивости

Понятие устойчивости системы регулирования связано со способностью возвращаться в состояние равновесия после исчезновения внешних сил, которые вывели ее из этого состояния. **Устойчивость-** это свойство системы возвращаться в исходное установившееся состояние после прекращения воздействия на вход системы или переходить в новое установившееся состояние при сохранении воздействия на вход системы. Система будет устойчивой и в случае, если при внешнем возмущающем воздействии на ее вход новое установившееся состояние не отличается от исходного состояния. Например, устойчивая САР оборотов ГТД при перемещении РУД должна в короткий период времени перенастроиться и вновь обеспечить постоянство оборотов с заданной погрешностью. Если РУД своего положения не меняет, а меняются внешние воздействия на ГТД (например, давление и температура на входе в двигатель), то устойчивая система должна обеспечить стабилизацию оборотов. Очевидно, что если система *неустойчивая, то она и неработоспособна*. Поэтому анализ САР всегда начинается с проверки ее устойчивости.

Понятие устойчивости имеет четкий математический смысл и связано с анализом уравнений динамики систем автоматического регулирования. В общем случае, чтобы определить устойчива САР или нет, необходимо решить уравнение динамики. Этот путь трудоемок и не всегда реализуем даже для линейных систем автоматического регулирования. Поэтому желательно иметь такие критерии, с помощью которых можно было бы судить об устойчивости системы без вычисления корней дифференциальных уравнений динамики. Такие критерии существуют и называются *критериями устойчивости*.

Все известные критерии можно разбить на две группы: *алгебраические*, к которым относятся критерии Рауса и Гурвица и *частотные* - критерии Михайлова и Найквиста.

3.3.2. Алгебраические критерии Рауса и Гурвица

Критерий устойчивости в алгебраической форме был впервые сформулирован Раусом в 1873 году для уравнений четвертой и пятой степеней и 1877 году - полностью. Критерий Рауса формулируется в виде соотношений между коэффициентами левой части уравнений динамики. Т.е. для применения данного критерия нет необходимости решать дифференциальное уравнение, определять корни характеристического уравнения , а *нужно лишь знать коэффициенты левой части линейного дифференциального уравнения, моделирующего динамику САР*. Алгебраический критерий Рауса для линейных уравнений динамики САР до пятой степени включительно формулируется следующим образом.

Пусть математическая модель САР имеет вид линейного дифференциального уравнения степени ***n*** с постоянными коэффициентами характеристический многочлен (собственный оператор) которого в общем виде записывается следующим образом

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0. \qquad (3.1)$$

Тогда условия для устойчивости систем регулирования описываемых линейными дифференциальными уравнениями определяются только видом (степенью и значениями коэффициентов) . В частности, *критерий Рауса для уравнений динамики до пятого порядка включительно записывается следующим образом:*

1. Для уравнений первого порядка ($a_1 p + a_0 = O$) необходимым и достаточным условием устойчивости является положительность коэффициентов : $a_0 >$ O; $a_1 >$ O;

2. Для уравнений второго порядка ($a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = O$) необходимым и достаточным условием устойчивости является также положительность коэффициентов : $a_0 >$ O; $a_1 >$ O; $a_2 >$ O;

3. Для уравнений третьего порядка ($a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = O$) необходимым и достаточным условием устойчивости является положительность коэффициентов $a_0 >$ O; $a_1 >$ O; $a_2 >$ O; $a_3 >$ O и выполнение неравенства

$$a_1 a_2 - a_3 a_0 > \text{O}.$$

4. Для уравнений четвертого порядка ($a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = O$) кроме положительности коэффициентов требуется выполнение неравенства

$$a_1 (a_3 a_2 - a_4 a_1) - a_0 a_3^2 > \text{O}.$$

5.Для уравнений пятого порядка ($a_5 p^5 + a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0$) необходимым и достаточным условием устойчивости является положительность коэффициентов и еще два дополнительных неравенства

$$a_4 a_3 - a_5 a_2 > \text{O}.$$

$$(a_4 a_3 - a_5 a_2)(a_2 a_1 - a_3 a_0) - (a_4 a_1 - a_5 a_0)^2 > 0.$$

Таким образом для уравнений первого и второго порядка необходимым и достаточным условием является положительность всех коэффициентов характеристического уравнения, а для уравнений высшего порядка накладываются дополнительные условия, выраженные соответствующими неравенствами.

Как следует из формулировки критерия Рауса сутью его применения для уравнений невысокого порядка является простая проверка выполнения соответствующих неравенств. В общем случае критерий Рауса формулируется в форме алгоритма с непростой последовательностью операций, что затрудняет его использование на практике.

Поэтому наибольшее распространение получил алгебраический критерий устойчивости, сформулированный в 1895 году математиком А.Гурвицом для исследования процессов регулирования турбин. *Критерий Гурвица формулируется следующим образом.*

Предположим, что исследуется система автоматического регулирования, описываемая дифференциальным уравнением **n**-го порядка и имеющего характеристическое уравнение вида (3.1).

Используя коэффициенты характеристического уравнения составим квадратичную матрицу, содержащую **n** строк и **n** столбцов:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & a_n & a_{n-2} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdot & \cdot & a_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdot & \cdot & a_2 & a_0 \end{vmatrix}$$

Определитель **Δ** составляется следующим образом. По диагонали от левого верхнего до правого нижнего углов выписываются все коэффициенты характеристического уравнения (3.1) в порядке убывания от a_{n-1} до a_0. Каждый столбец дополняется так, чтобы вниз от коэффициентов главной диагонали шли коэффициенты с увеличивающимся индексом, а вверх - с уменьшающимся индексом. В случае отсутствия коэффициента, а также если индекс его меньше нуля, или больше n, на его место пишется нуль. Обозначим главные миноры матрицы Δ через $\Delta_{n-1},...,\Delta_1$. Эти миноры в определителе Δ выделены штриховыми линиями. Тогда критерий Гурвица формулируется следующим образом: *для того, чтобы САР была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты характеристического уравнения, определитель* Δ *и его главные миноры были положительными*.

Следует отметить, что с увеличением степени характеристического уравнения САР вычисление определителей становится громоздким.

Раскрывая определители, фигурирующие в общей формулировке критерия устойчивости, можно получить частные критерии устойчивости , которые будут совпадать с формулами Рауса.

Необходимо обратить внимание, что в рассмотренных критериях требуется положительность коэффициентов. *Положительность коэффициентов является необходимым условием устойчивости* САР.

Существенным недостатком критерия является то обстоятельство, что для уравнений высокого порядка вычисления матриц получаются достаточно громоздкими.

При этом в случае неустойчивой системы критерий не дает ответы на то, каким образом надо изменить параметры системы, чтобы сделать ее устойчивой. Это обстоятельство требует использования и других критериев, которые были бы более удобными в инженерной практике.

3.3.3. Частотные критерии Михайлова и Найквиста

Сущность *критерия Михайлова* заключается в следующем. Рассмотрим отдельно левую часть характеристического уравнения (3.1), которое представляет собой характеристический полином степени **n** :

$$L(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0 . \qquad (3.2)$$

Подставим в этот полином чисто мнимую величину $p = i\omega$, выделив при этом действительные и мнимые части. Тогда

$$M(\omega) = L(i\omega) = U(\omega) + iV(\omega) . \qquad (3.3)$$

Очевидно, что вещественная часть будет содержать четные степени ω, а мнимая - нечетные. Если значение частоты ω менять от нуля до бесконечности, то вектор $M(\omega)$ опишет на комплексной плоскости (U, V) некоторую кривую (годограф), которая называется годографом Михайлова. Практически кривая Михайлова строится по точкам , задаваясь значениями частоты ω и вычисляя $U(\omega), V(\omega)$. Результаты расчетов сводятся в таблицу, по которой и строится затем кривая. Введенные выше понятия позволяют дать *формулировку критерия в следующей наиболее простой форме: для устойчивости САР необходимо и достаточно, чтобы при изменении параметра ω от нуля до бесконечности, кривая Михайлова последовательно пересекала оси координат (U,V) «**n**» раз, где **n** - степень характеристического полинома.* Кривая Михайлова для устойчивых систем имеет плавную спиралевидную форму, причем конец ее уходит в бесконечность. Таким образом, для выполнения задания № 3, в части, касающейся оценки устойчивости по критерию Михайлова, следует построить кривую Михайлова и посчитать число ее пересечений с осями координат.

Критерий Найквиста позволяет по виду амплитудно-фазовой частотной (АФЧХ) характеристики разомкнутой системы регулирования судить об ее устойчивости в замкнутом состоянии. Для его формулировки воспользуемся соотношением для передаточной функции разомкнутой системы регулирования, которое имеет вид:

$$W(p) = \frac{Q(p)}{L(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_0}, \tag{3.4}$$

В соотношении (3..4) $L(\omega)$-характеристический многочлен левой части линейного дифференциального уравнения САР (собственный оператор), $Q(\omega)$-характеристический многочлен правой части (входной оператор). При подстановке $p = i\omega$ в соотношение (3.4) и после выделения действительной и мнимой частей получим

$$W(i\omega) = Q(i\omega)/L(i\omega) = \varphi(\omega) + i\psi(\omega) \tag{3.5}$$

Функция $W(i\omega)$ определенная соотношением (3.5) называется амплитудно-фазовой частотной характеристикой Если значение частоты ω менять от нуля до бесконечности, то вектор $W(\omega)$ опишет на комплексной плоскости (U,V) некоторую кривую, которая называется годографом вектора амплитудно-фазовой частотной характеристики разомкнутой системы или функцией Найквиста. Практически амплитудно-фазовая характеристика строится по точкам , задаваясь положительными значениями частоты ω и вычисляя $\varphi(\omega), \psi(\omega)$. Результаты расчетов сводятся в таблицу, по которой и строится затем кривая. Введенные выше понятия позволяют дать формулировку критерия в следующей форме: *для того, чтобы система регулирования, устойчивая в разомкнутом состоянии, была устойчивой и в замкнутом состоянии необходимо и достаточно, чтобы годограф вектора амплитудно-фазовой частотной характеристики разомкнутой системы не охватывал точку с координатой [-1,0] при изменении параметра ω от нуля до бесконечности.* Таким образом, для выполнения задания № 3, в части, касающейся оценки устойчивости по критерию Найквиста, следует построить амплитудно-фазовую характеристику разомкнутой системы, просчитав в обязательном порядке точки пересечения с осями координат.

Следует отметить, что замкнутая система может быть устойчивой вне зависимости от того , устойчива или неустойчива разомкнутая система.
Поэтому критерий Найквиста применим только к системам устойчивым в замкнутом состоянии. Формулировки критериев для анализа устойчивости замкнутой системы при неустойчивой разомкнутой системе можно найти в специальной литературе.

ЛИТЕРАТУРА

1.Никонов В.В. Автоматика и управление. Часть 1. Основные понятия, элементы и математические модели. - М.; МГТУ ГА, 2002-100с.

2.Черкасов Б.А. Автоматика и регулирование воздушно-реактивных двигателей.- М.; Машиностроение, 1988 - 360с.

3.Бессекерский Б.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования.- М:, Наука, 1975-768с.

4.Кринецкий И.И. Основы авиационной автоматики. – М.; Машиностроение, 1979-344 с.