ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА
(РОСАВИАЦИЯ)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ» (МГТУ ГА)

Кафедра вычислительных машин, комплексов, систем и сетей

Н.И. Черкасова

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ И СЕТЕЙ

Учебно-методическое пособие
по выполнению лабораторной работы № 1

для студентов III курса
направления 09.03.01
очной формы обучения

Москва
ИД Академии Жуковского
2021

УДК 519.21+004.94
ББК 6Ф7.3
Ч-48

Рецензент:

Надейкина Л.А. – канд. физ.-мат. наук, доцент

Черкасова Н.И.

Ч-48 Моделирование вычислительных систем и сетей [Текст] : учебно-методическое пособие по выполнению лабораторной работы № 1 / Н.И. Черкасова. – М.: ИД Академии Жуковского, 2021. – 32 с.

Данное учебно-методическое пособие издается в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Моделирование вычислительных систем и сетей» по учебному плану для студентов III курса направления 09.03.01 очной формы обучения.

Рассмотрено и одобрено на заседаниях кафедры 30.08.2021 г. и методического совета 30.08.2021 г.

УДК 519.21+004.94
ББК 6Ф7.3

В авторской редакции

Подписано в печать 27.10.2021 г.
Формат 60x84/16 Печ. л. 2 Усл. печ. л. 1,86
Заказ № 854/1004-УМП17 Тираж 30 экз.

Московский государственный технический университет ГА
125993, Москва, Кронштадтский бульвар, д. 20

Издательский дом Академии имени Н. Е. Жуковского
125167, Москва, 8-го Марта 4-я ул., д. 6А
Тел.: (495) 973-45-68
E-mail: zakaz@itsbook.ru

Содержание

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1
«Исследование характеристик случайных величин и методов их оценки»

1. Цель лабораторной работы

Целью лабораторной работы является:

1.Освоение:

- Понятия случайных величин их свойств.
- Основных законов распределения случайных величин.

2. Приобретения практических навыков по генерации случайных величин и оценки их характеристик

2. Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен включать:

1) цель лабораторной работы;
2) конкретный вариант задания на выполнение;
3) тексты программ;
4) схемы алгоритмов;
5) результаты выполнения программ.

3. Краткие теоретические сведения

3.1. Имитационное моделирование

Модель – это любой образ, аналог, мысленный или установленный, изображение, описание, схема. какого-либо объекта, процесса или явления, который в процессе познания (изучения) замещает оригинал, сохраняя некоторые важные для данного исследования типичные свойства.

Моделирование – это исследование какого-либо объекта или системы объектов путем построения и изучения их моделей. Возможно также использование моделей для определения или уточнения характеристик и рационализации способов построения вновь конструируемых объектов.

Модель является средством для изучения сложных систем.

В общем случае сложная система представляется как многоуровневая конструкция из взаимодействующих элементов, объединяемых в подсистемы различных уровней. К сложным системам, в том числе, относятся информационные системы.

Проектирование таких сложных систем осуществляется в два этапа.

1 Внешнее проектирование.

На этом этапе проводят выбор структуры системы, основных ее элементов, организация взаимодействия между элементами, учет воздействия внешней среды, оценка показателей эффективности системы.
2 Внутреннее проектирование – проектирование отдельных элементов системы.
Типичным методом исследования сложных систем на первом этапе является моделирование их на ЭВМ.

В результате моделирования получаются зависимости, характеризующие влияние структуры и параметров системы на ее эффективность, надежность и другие свойства. Эти зависимости используются для получения оптимальной структуры и параметров системы.

Модель, сформулированная на языке математики с использованием математических методов, называется математической моделью.

Для имитационного моделирования характерно воспроизведение явлений, описываемых математической моделью, с сохранением их логической структуры, последовательности чередования во времени. Для оценки искомых величин может быть использована любая подходящая информация, циркулирующая в модели, если только она доступна регистрации и последующей обработке.

Искомые величины при исследовании процессов методом имитационного моделирования обычно определяют как средние значения по данным большого числа реализаций процесса. Если число реализаций N, используемых для оценки искомых величин, достаточно велико, то в силу закона больших чисел получаемые оценки приобретают статистическую устойчивость и с достаточной для практики точностью могут быть приняты в качестве приближенных значений искомых величин.

Сущность метода имитационного моделирования состоит в следующем. Строятся алгоритмы, при помощи которых можно вырабатывать случайные реализации заданных потоков однородных событий, а также моделировать процессы функционирования обслуживающих систем. Эти алгоритмы используются для многократного воспроизведения реализации случайного процесса обслуживания при фиксированных условиях задачи. Получаемая при этом информация о состоянии процесса подвергается статистической обработке для оценки величин, являющихся показателями качества обслуживания.

3.2. Случайные величины и их свойства

Эксперимент – это процесс, результат которого точно не известен. Совокупность всех возможных результатов эксперимента называется *пространством выборки* и обозначается *S*. Сами результаты называются *элементами выборки* в пространстве выборки

Случайная величина – это функция (или правило), которая определяет вещественное число (любое число больше $-\infty$ и меньше ∞) каждому элементу в пространстве выборки *S*. Случайные величины обозначают прописными буквами X, Y, Z, а значения, которые принимают случайные величины, строчными буквами x, y, z.

Функция распределения вероятностей (иногда именуемая также *интегральной функцией распределения вероятностей*) $F(x)$ случайной величины X определяется для каждого вещественного числа x следующим образом:

F(x) = P(X ≤ x) для –∞ < x < ∞,

где P(X ≤ x) – вероятность, связанная с событием {X ≤ x}.

Следовательно, $F(x)$ – это вероятность того, что после выполнения эксперимента случайная величина X получит значение, не превышающее число x. Функция распределения $F(x)$ имеет такие свойства:

1) 0 ≤ F(x) ≤ 1 для всех значений x;

2) F(x) является неубывающей функцией; т.е., если x1 < x2, тогда F(x1) ≤ F(x2);

3) lim 1 x→∞ F x( ) = и lim 0 x→∞ F x( ) (поскольку X принимает только конечные значения).

Случайная величина X считается *дискретной*, если она может принимать значения из счетного множества, например: $x1$, $x2$, ... (счетное множество – это множество возможных значений переменной, взаимно однозначно соответствующих множеству положительных целых чисел; примером несчетного множества являются вещественные числа между 0 и 1). Следовательно, случайная величина, принимающая только конечное число значений $x1$, $x2$, x_n, является дискретной.

Вероятность, с которой дискретная случайная величина X принимает значение xi, задается как $p(x_i) – P(X – x_i)$ для i = 1, 2, ...

И для нее должно выполняться равенство 1 суммы всех $P(x_i)$

Рассмотрим еще одно определение - определим случайную величину (СВ) как величину, которая в результате опыта может принять то или иное значение, причем неизвестно заранее, какое именно.

Дискретной называется случайная величина, принимающая конечное или бесконечное счетное множество значений.

Непрерывной называется случайная величина, которая может принимать любые значения из некоторого конечного или бесконечного интервала. Очевидно, что число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.

Отметим, что законом распределения СВ называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями. Про случайную величину будем говорить, что она подчинена данному закону распределения.

Как показано выше для количественной характеристики распределения используют зависимость вероятности события $X < x$, где x – некоторая текущая переменная, от x. Эта функция называется функцией распределения СВ X и обозначается $F(x)$: $F(x) = P(X < x)$.

Функция распределения существует для всех СВ – как непрерывных, так и дискретных.

Для дискретной СВ распределение F(x) имеет ступенчатый вид, причем величина каждого скачка равна вероятности значения, при котором имеется скачок F(x).

При решении практических задач часто необходимо вычислять вероятность того, что СВ примет значение, заключенное в некоторых пределах, например от x_1 до x_2. Это событие называется «попаданием СВ X на участок от x_1 до x_2». Выразим вероятность этого события через функцию распределения СВ X. Для этого рассмотрим два события:
– событие A, состоящее в том, что $X < x_2$;
– событие B, состоящее в том, что $X < x_1$;
– событие C, состоящее в том, что $x_1 < X < x_2$.
Учитывая, что $A = B + C$, по теореме сложения вероятностей получим $P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 < X < x_2)$, или $F(x_2) = F(x_1) + P(x_1 < X < x_2)$, откуда $P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$, т.е. *вероятность попадания СВ на заданный участок равна приращению функции распределения на этом участке*.
Пусть имеется непрерывная СВ X с функцией распределения $F(x)$, которую считаем непрерывной и дифференцируемой. Вычислим вероятность попадания этой СВ на участок от x до x + Dx: $P(x < X < x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x)$,т.е. эта вероятность равна приращению функции распределения на этом участке. Рассмотрим отношение этой вероятности к длине участка или среднюю вероятность, приходящуюся на единицу длины на этом участке. Кроме того, устремим Dx к нулю. В пределе получим производную от функции распределения:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x).$$

Обозначим $F'(x)$ через $f(x)$. Полученная функция характеризует *плотность*, с которой распределяется значение СВ в данной точке x. Это и есть *плотность вероятности*. Иногда ее называют дифференциальным законом распределения СВ X.
Если X есть непрерывная СВ с плотностью вероятности $f(x)$, то величина $f(x)dx$ есть элементарная вероятность, соответствующая событию – попаданию СВ X на отрезок dx. Геометрически это есть площадь элементарного прямоугольника, опирающегося на отрезок dx и ограниченного сверху функцией $f(x)$.
Свойства плотности вероятности:

1) $f(x) \geq 0$ при всех *x*, поскольку вероятность не может быть отрицательной (кроме того, производная неубывающей функции не может быть отрицательной);

2) $f(-\infty) = f(\infty) = 0$;

3) $P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$;

4) свойство нормировки $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, т.е. площадь, ограниченная графиком плотности вероятности и осью *x*, всегда равна 1 (кроме того, попадание СВ *X* в неограниченную с обеих сторон ось *x* является достоверным событием).

Во многих практических ситуациях нет необходимости характеризовать СВ плотностью вероятности. Часто бывает достаточно указать только отдельные числовые параметры, характеризующие в какой-то степени существенные черты распределения СВ, например, среднее значение, вокруг которого группируются возможные значения СВ; число, характеризующее степень разбросанности этих значений относительно среднего значения и т.д. Такие характеристики называются *числовыми характеристиками* СВ.

Если X есть непрерывная СВ с плотностью вероятности f(x), то величина f(x)dx есть элементарная вероятность, соответствующая событию – попаданию СВ X на отрезок dx. Геометрически это есть площадь элементарного прямоугольника, опирающегося на отрезок dx и ограниченного сверху функцией f(x).

Во многих практических ситуациях нет необходимости характеризовать СВ плотностью вероятности. Часто бывает достаточно указать только отдельные числовые параметры, характеризующие в какой-то степени существенные черты распределения СВ, например, среднее значение, вокруг которого группируются возможные значения СВ; число, характеризующее степень разбросанности этих значений относительно среднего значения и т.д. Такие характеристики называются числовыми характеристиками СВ.

3.3.Основные законы распределения непрерывных случайных величин

3.3.1.Нормальный закон распределения (Закон Гаусса)

Плотность вероятности нормально распределённой случайной величины X выражается формулой:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Кривая распределения изображена на рис. 1. Она симметрична относительно точки $x = a$ (точка максимума). При уменьшении σ ордината точки максимума неограниченно возрастает, при этом кривая пропорционально сплющивается вдоль оси абсцисс, так что площадь под её графиком остаётся равной единицы (рис. 1).

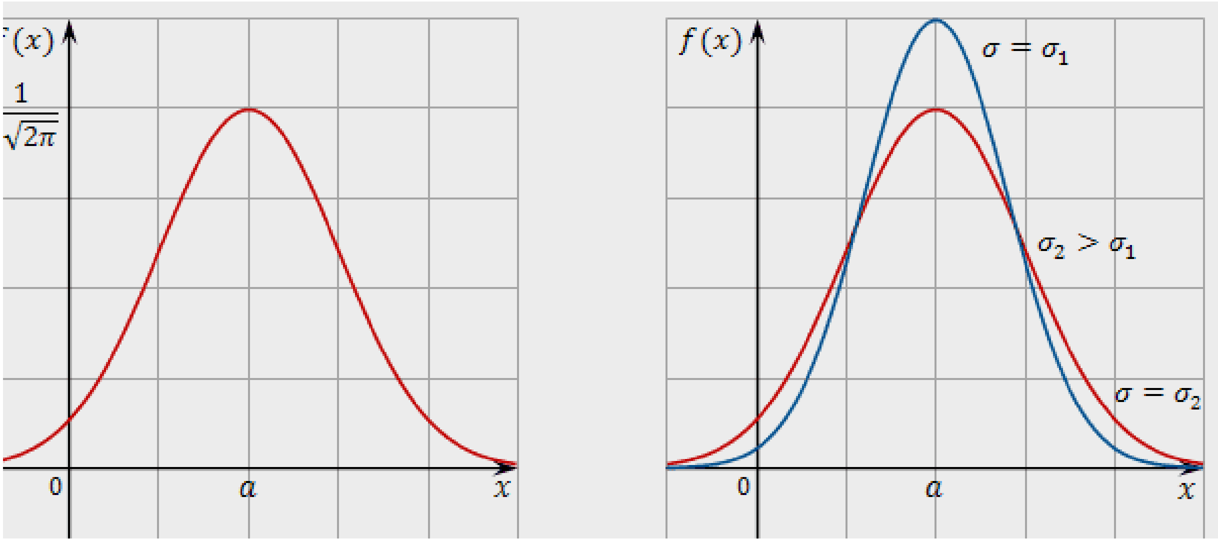

Рис.1. Кривая распределения

Нормальный закон распределения широко применяется в задачах практики. Объяснить причины этого впервые удалось Ляпунову. Он показал, что, если случайная величина может рассматриваться как сумма большого числа малых слагаемых, то при достаточно общих условиях закон распределения этой случайной величины близок к нормальному независимо от того, каковы законы распределения отдельных слагаемых. А так как практически случайные величины в большинстве случаев бывают результатом действия множества причин, то нормальный закон оказывается наиболее распространённым законом распределения. Рассмотрим числовые характеристики нормально распределённой случайной величины (математическое ожидание и дисперсия):

$$M(X) = a; \qquad D[X] = \sigma^2.$$

Таким образом, параметры a и σ в выражении нормального закона распределения представляют собой математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины. Принимая это во внимание, можно представить следующим образом:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D[X]}} \exp\left(-\frac{(x - M(X))^2}{2D[X]}\right).$$

Эта формула показывает, что нормальный закон распределения полностью определяется математическим ожидание и дисперсией случайной величины. Таким образом, математическое ожидание и дисперсия полностью характеризуют нормально распределённую случайную величину. Разумеется, что в общем случае, когда характер закона распределения неизвестен, знание математического ожидания и дисперсии недостаточно для определения этого закона распределения.

Характеристическая функция нормального распределения случайной величины задаётся формулой

$$g(s) = \exp\left(ias - \frac{1}{2}\sigma^2 s^2\right).$$

Пример 1. Найти вероятность того, что нормально распределённая случайная величина X удовлетворяет неравенству $\alpha < X < \beta$.

Решение. Используя свойство плотности вероятности

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right) dx.$$

Положим $\dfrac{x-a}{\sigma} = t$, тогда

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\beta-a}{\sigma}}^{\frac{\alpha-a}{\sigma}} \sigma \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

Где $\Phi(x)$ — функция Лапласа.

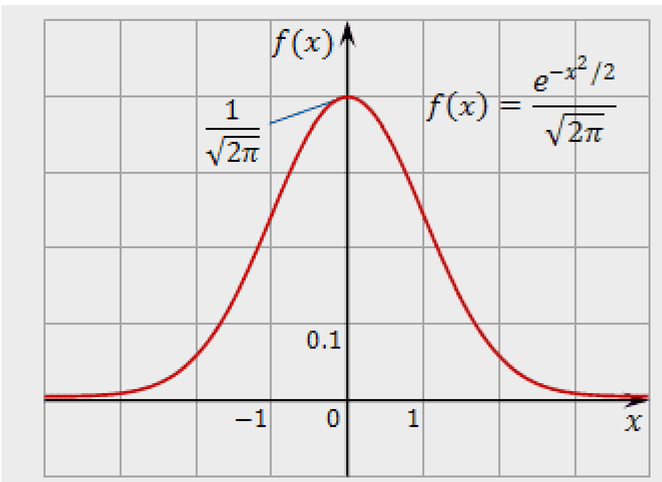

Рис 2. График плотности вероятности

Выполним некоторые числовые расчёты. Если положить $\alpha = a - 3\sigma;\ \beta = a + 3\sigma$ в условии примера 1, то

$$P\{a - 3\sigma < X < a + 3\sigma\} = 2\Phi(3) = 0{,}9973.$$

Последний результат означает, что с вероятностью, близкой к единице (0,9973), случайная величина, подчиняющаяся нормальному закону распределения, не выходит за пределы интервала $(a - 3\sigma; a + 3\sigma)$. Это утверждение называют **правилом трёх сигм**.

Наконец, если $a = 0,\ \sigma = 1$, то случайная величина, распределённая по нормальному закону с такими параметрами, называется стандартизированной нормальной величиной. На рис. 2 изображён график плотности вероятности этой величины

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

3.3.2.Логарифмически нормальное распределение

Случайная величина Y имеет логарифмически нормальное распределение (сокращённо **логнормальное распределение**), если её логарифм $\ln Y = X$ распределён нормально, то есть если $Y = e^X$, где величина X имеет нормальное распределение с параметрами a, σ.

Плотность логнормального распределения задаётся формулой

$$f(y) = \frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(\ln y - a)^2}{2\sigma^2}\right), \quad y > 0.$$

Математическое ожидание и дисперсию логнормального распределения определяют по формулам

$$M(Y) = \exp\left(a + \frac{\sigma^2}{2}\right); \quad D[Y] = e^{2(2\sigma^2 + a)^2 - a^2} - e^{2a + \sigma^2}.$$

Кривая этого распределения изображена на рис. 3.

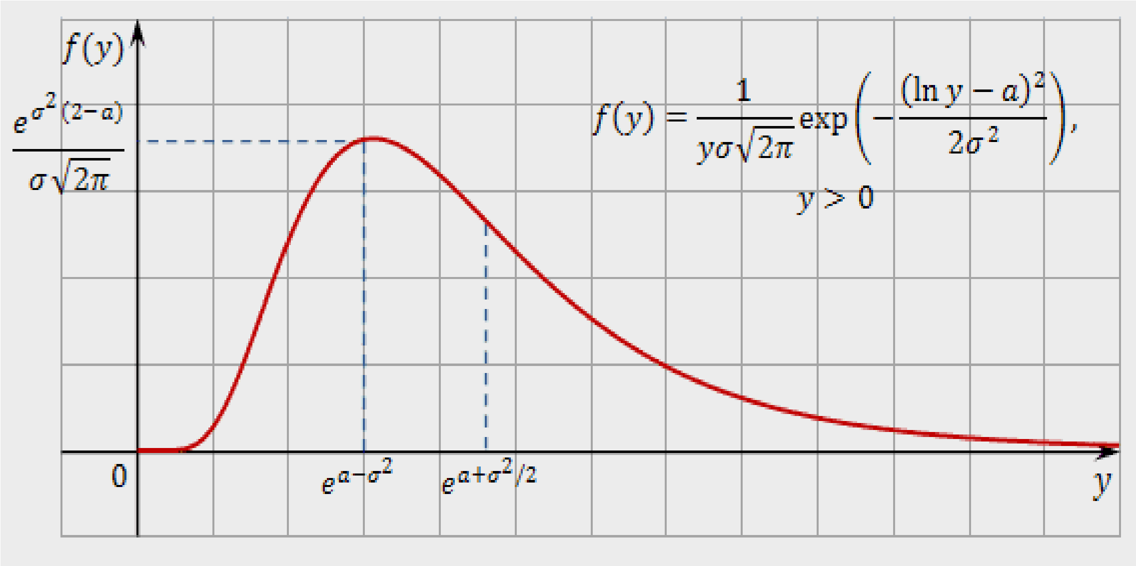

Рис.3. Кривая логнормального распределения

Логарифмически нормальное распределение встречается в ряде технических задач. Оно даёт распределение размеров частиц при дроблении, содержаний элементов в минералах в извержённых горных пародах, численности рыб в море и т.д. Встречается такое распределение во всех задачах, где логарифм рассматриваемой величины можно представить в виде суммы большого количества независимых равномерно малых величин:

$$\ln Y = X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \sum_{k=1}^{n} X_k,$$ то есть $$Y = \prod_{k=1}^{n} e^{X_k}$$, где e^{X_k} независимы.

3.3.3. Гамма-распределение

Случайная величина X имеет гамма-распределение с параметрами $a > 0$ и $b > 0$, если её плотность распределения вероятностей имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx}, & x > 0. \end{cases}$$ где $$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} t^{a-1} e^{-t}\, dt$$ гамма-функция Эйлера.

На рис. 4 показаны кривые распределения вероятностей при значениях параметра $a > 1$ и $a < 1$ (при $a = 1$ получаем экспоненциальное распределение).

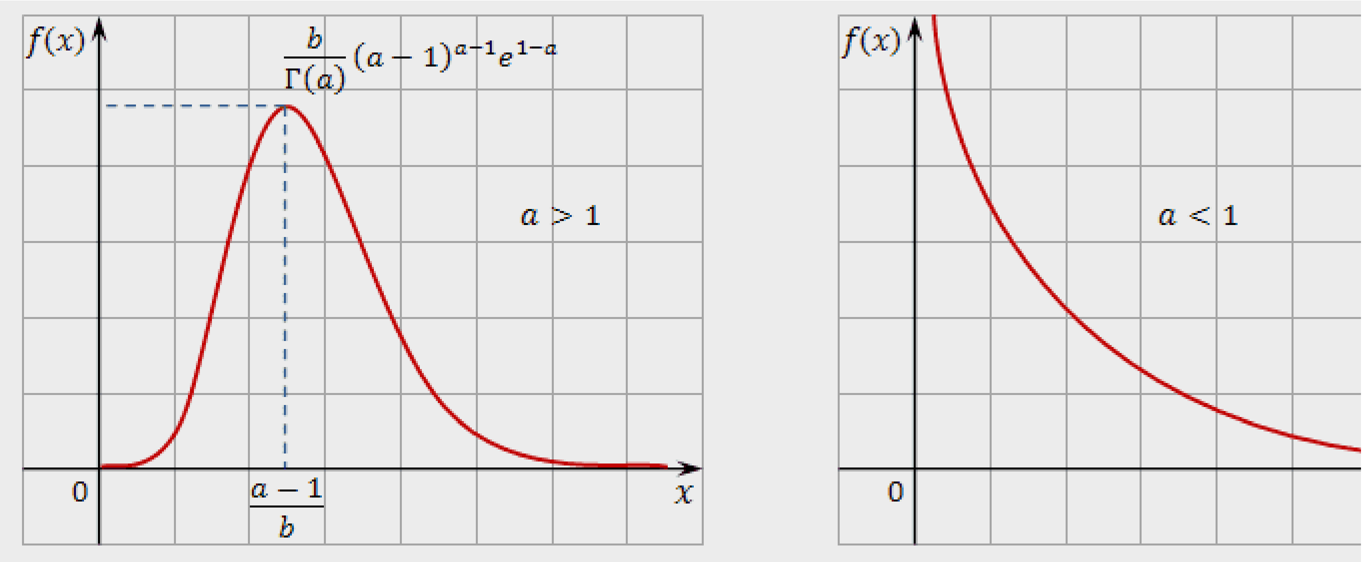

Рис.4 Кривые распределения вероятностей при значениях параметра $a > 1$ и $a < 1$

Математическое ожидание и дисперсия, подчинённые гамма-распределению, задаются формулами

$$M(X) = \frac{a}{b}; \qquad D[X] = \frac{a}{b^2}.$$

Отметим, что при $a > 1$ гамма-распределение имеет моду

$$M_o = \frac{a-1}{b}$$

(графически это означает, что кривая распределения имеет точку максимума $x = M_o$, рис. 3).

3.3.4.Экспоненциальный закон распределения

Экспоненциальным распределением называется частный случай гамма-распределения с параметрами $a = 1;\ b = \lambda > 0$, то есть то есть плотность вероятности в этом случае

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0. \end{cases}$$

Используя свойства два плотности распределения ([]см.[]), можно найти функцию распределения $F(x)$ экспоненциального закона:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

Основные характеристики (математическое ожидание и дисперсия) случайной величины X, распределённой по экспоненциальному, имеют вид

$$M(X)=\frac{1}{\lambda};\quad D[X]=\frac{1}{\lambda^2}.$$

Характеристическая функция экспоненциального распределения задаётся формулой

$$g(s)=\frac{\lambda}{\lambda-is}.$$

Кривая экспоненциального распределения вероятностей показана на рис.5,а, а график функции распределения $F(x)$ - на рис. 5,б.

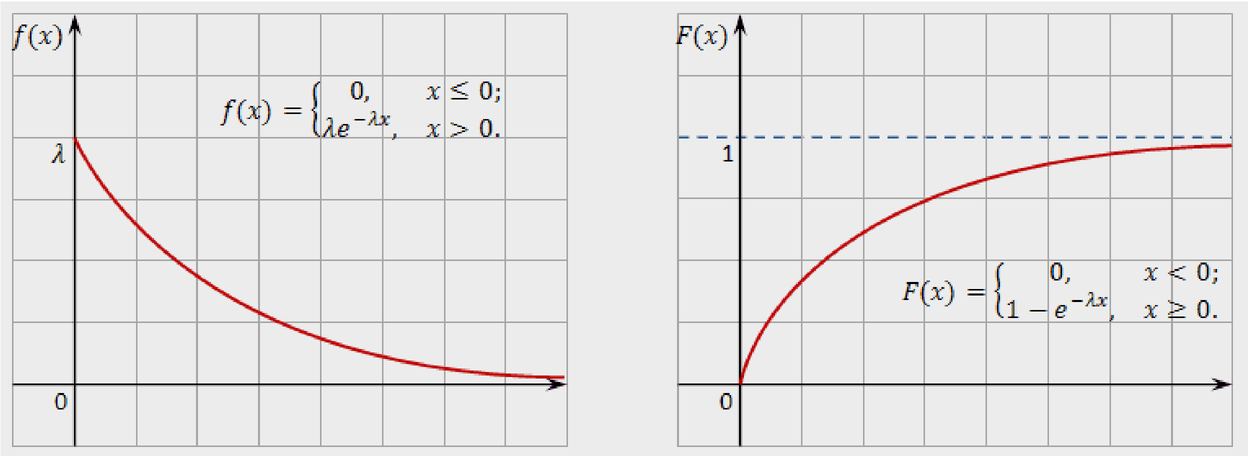

Рис.5.а - Кривая экспоненциального распределения вероятностей, б- график функции распределения .

Статистический смысл параметра λ состоит в следующем: λ есть среднее число событий на единицу времени, то есть $1/\lambda$ есть средний промежуток времени между двумя последовательными событиями.

Экспоненциальное (показательное) распределение часто встречается в теории массового обслуживания (например, X - время ожидания при техническом обслуживании или X - продолжительность телефонных разговоров, ежедневно регистрируемых на телефонной станции) и теории надёжности (например, X - срок службы радиоэлектронной аппаратуры).

Пример 2.Случайная величин X - время работы радиолампы - имеет показательное распределение. Определить вероятность того, что время работы лампы будет не меньше 600 ч, если среднее время работы радиолампы 400 ч.

Решение. По условию задачи математическое ожидание случайной величины X равно 400 ч, следовательно, $\lambda=1/400$. Искомая вероятность есть

$$P\{X\geqslant 600\}=1-P\{X<600\}=1-F(600)=1-\left(1-\exp\frac{-600}{400}\right)=e^{-1.5}\approx 0{,}2231.$$

3.3.5. Распределение Вейбула

Случайная величина X подчиняется закону распределения Вейбула с параметрами $n \in \mathbb{N},\ a \in \mathbb{R},\ b > 0$, если её плотность распределения вероятностей записывается в виде

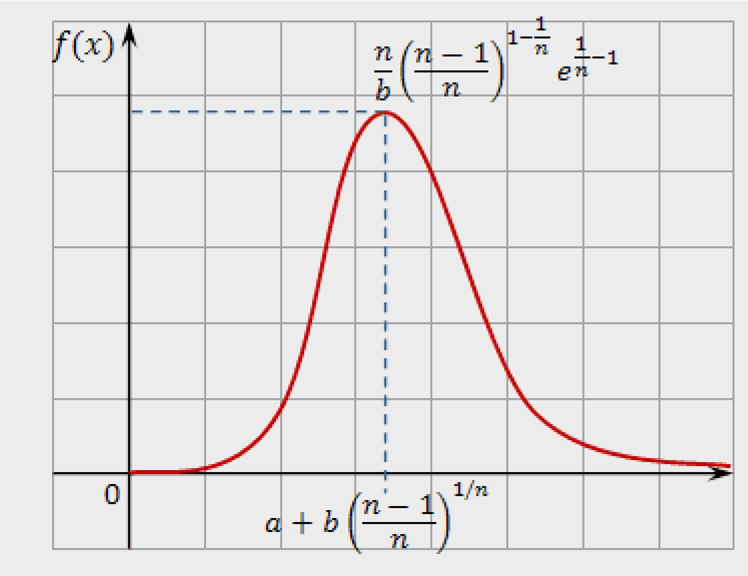

Рис.6. Кривая распределения Вейбула

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant a; \\ \dfrac{n}{b}\left(\dfrac{x-a}{b}\right)^{n-1} \exp\left[-\left(\dfrac{x-a}{b}\right)^{n}\right], & x > a. \end{cases}$$

Математическое ожидание и мода случайной величины, распределённые по закону Вейбула, имеют следующий вид:

$$M(X) = a + b\Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right); \qquad M_0 = a + \sqrt[n]{\frac{n-1}{n}}.$$

Кривая распределения Вейбула изображена на рис. 6.

Распределение Вейбула в ряде случаев характеризует срок службы радиоэлектронной аппаратуры и, кроме того, применяется для аппроксимации различных несимметричных распределений в математической статистике.

3.3.6.Равномерный закон распределения

Случайная величина X называется распределённой равномерно на отрезке $[a;b]$, если её плотность распределения вероятностей постоянна на данном отрезке:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a;b], \\ \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a;b]. \end{cases}$$

Все возможные значения равномерно распределённой случайной величины лежат в пределах некоторого интервала; кроме того. в пределах этого интервала все значения случайной величины одинаково вероятны (обладаю одной и той же плотностью вероятности). Равномерно распределение реализуется в экспериментах, где наудачу ставиться точка на отрезке $[a;b]$

(X - абсцисса поставленной точки). Равномерно распределённая случайная величина встречается также в измерительной практике при округлении отчётов измерительных приборов до целых делений шкал. Ошибка при округлении отчёте до ближайшего целого деления является случайной величиной X, которая может принимать с постоянной плотностью вероятности любое значение между двумя соседними целыми делениями.

Математическое ожидание и дисперсия равномерно распределённой случайной величины

$$M(X)=\frac{a+b}{2};\qquad D[X]=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Характеристическая функция равномерного распределения задаётся формулой

$$g(s)=\frac{1}{is(b-a)}(e^{isb}-e^{isa}).$$

График плотности равномерного распределения изображён на рис. 7.

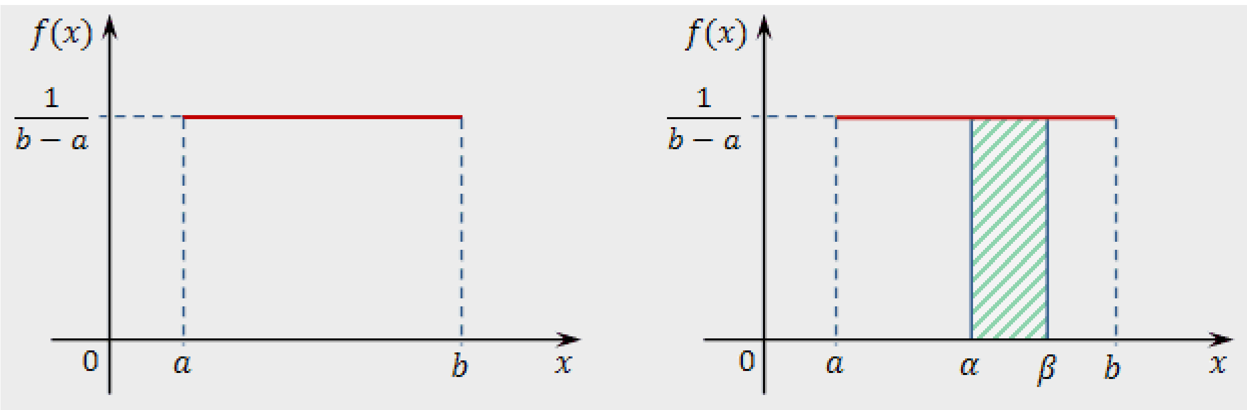

Рис.7. График плотности равномерного распределения

Пример 3. Найти вероятность попадания случайной величины, имеющей равномерное распределение на отрезке $[a;b]$, на участок $(\alpha;\beta)$, представляющий собой часть отрезка $[a;b]$.

Решение. Используя свойство плотности вероятности, получаем

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \int_a^b \frac{dx}{b-a} = \frac{\beta - \alpha}{b-a}.$$

Графически вероятность $P\{\alpha < X < \beta\}$ представляется в виде площади заштрихованного прямоугольника на рис. 7.

3.3.7.Распределение хи-квадрат $\chi^2(n)$

Частный случай гамма-распределения с параметрами $a = \frac{n}{2},\ n \in \mathbb{N}$ и $b = \frac{1}{2}$ называется распределением хи-квадрат с n степенями свободы (пишут $\chi^2(n)$). Если случайная величина X подчиняется закону $\chi^2(n)$, то её плотность распределения вероятностей есть

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ \dfrac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{n/2-1} e^{-x/2}, & x > 0. \end{cases}$$

Основные характеристики распределение хи квадрат (математическое ожидание и дисперсия):

$$M(X) = n; \qquad D[X] = 2n.$$

Кривые распределения (для различных значений n) изображены на рис. 8.

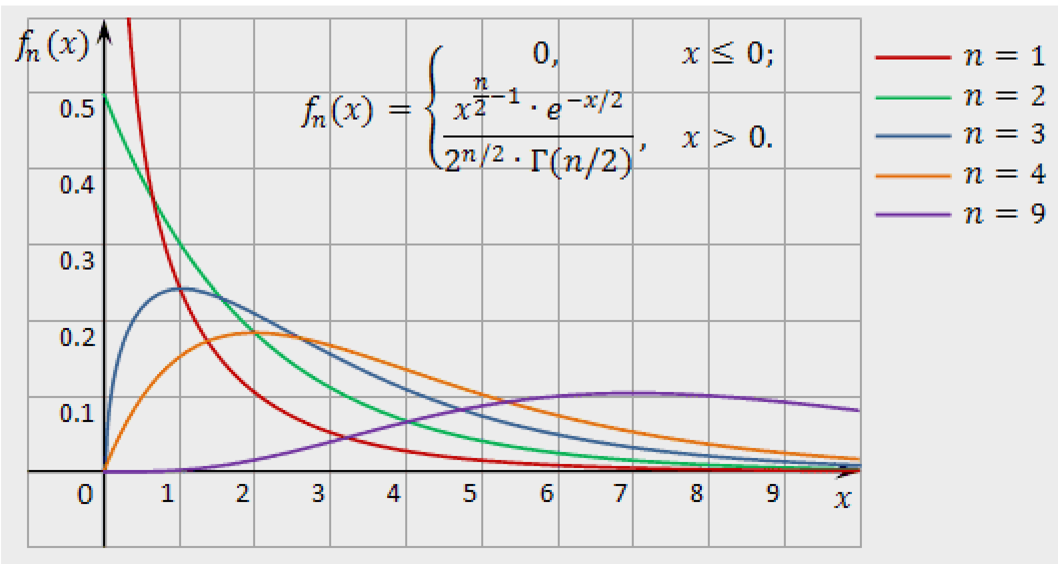

Рис.8. Кривые распределения (для различных значений n)

Случайная величина $X = \chi^2(n)$, подчиняющаяся хи-квадрат распределению, равна сумме квадратов n независимых случайных величин

$U_j,\ j \in \mathbb{N}$, каждая из которых имеет стандартизированное нормальное распределение, то есть

$$\chi^2(n) = U_1^2 + U_2^2 + \cdots + U_n^2.$$

Пусть $\chi^2(n_1)$ и $\chi^2(n_2)$ - независимые случайные величины, имеющие хи-квадрат распределение со степенью свободы соответственно n_1 и n_2. Сумма этих случайных величин имеет также хи-квадрат распределение с $n_1 + n_2$ степенями свободы:

$$\chi^2(n_1) + \chi^2(n_2) = \chi^2(n_1 + n_2).$$

Отметим, что распределение $\chi^2(n)$ при больших значениях $n\ (n > 30)$ с достаточной для практических расчётов точностью аппроксимируется нормальным распределением с математическим ожиданием n и дисперсией $2n$ Поэтому при больших значениях n вероятности рассчитываются по нормальному закону.

Распределение $\chi^2(n)$ играет большую роль в математической статистике.

3.3.8.Распределение Стьюдента

Распределение хи-квадрат Случайная величина $T(n)$ есть отношение двух независимых случайных величин U и $\sqrt{\dfrac{\chi^2(n)}{n}}$, то есть

$$T(n) = U \cdot \left(\frac{\chi^2(n)}{n}\right)^{-1/2}.$$

Распределение случайной величины $T(n)$ называется распределением Стьюдента с n степенями свободы. Его плотность задаётся формулой

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, подчинённой распределению Стьюдента $X = T(n)$, есть

$$M(X) = 0; \qquad D[X] = \frac{n}{n-2}.$$

Кривые распределения Стьюдента (для различных значений n) изображены на рис. 9.

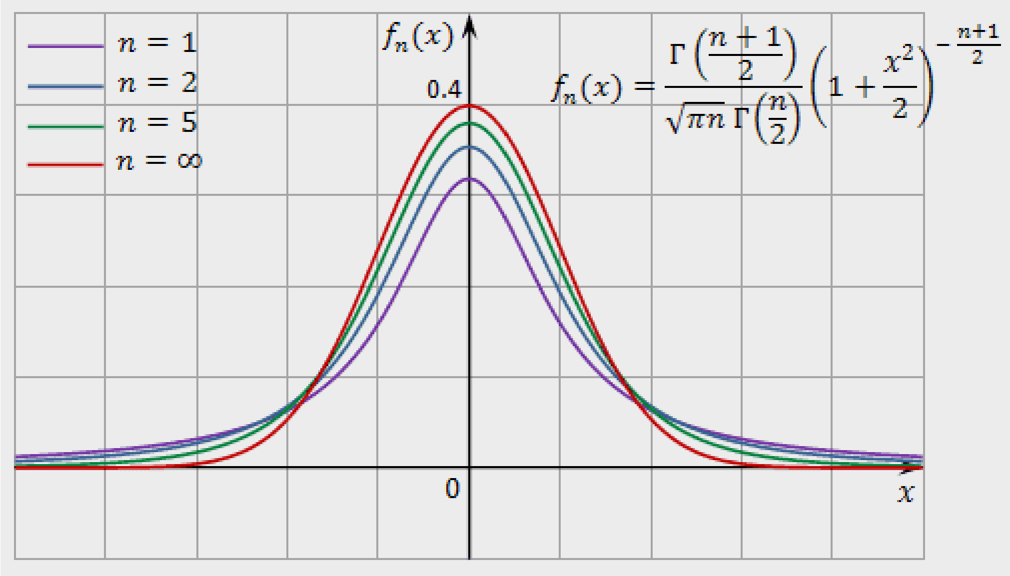

Рис. 9. Распределение Стьюдента

Как и в случае и хи-квадрат распределением, при увеличении n распределение Стьюдента стремиться к нормальному, более того, стандартизованному нормальному (то есть с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией). Распределение Стьюдента, как хи-квадрат распределение, широко применяется в задачах математической обработки измерений.

3.4. Числовые характеристики случайных величин.

Числовые характеристики случайных величин. Различают следующие группы числовых характеристик: характеристики положения (математическое ожидание, мода, медиана, квантиль и др.), рассеивания (дисперсия, среднеквадратичное отклонение и др.), характеристики формы плотности распределения (показатель асимметрии, эксцесса и др.).

3.4.1.Определения средних величин

Средняя арифметическая является наиболее часто употребляемой из всех видов средних величин. Она часто называется просто «средней». В формулах средняя арифметическая обозначается в виде X «с черточкой». Формула для расчета средней арифметической набора данных приведена ниже:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

Средняя арифметическая используется чаще других видов средних, т. к. она обладает удобными статистическими свойствами. Например, сумма отклонений отдельных значений от средней арифметической равна нулю.

Медиана является еще одним часто применяемым видом средней. Она особенно подходит для описания асимметрично распределенных данных. Медиана буквально означает середину. Медианой будет являться среднее значение набора данных, упорядоченных по возрастанию центральный член вариационного ряда). Точнее, медиана - это значение, делящее набор данных на две половины, одна из которых состоит из наблюдений больше значения медианы, а другая - из значений меньших медианы.

Определение медианы набора данных.

1.Расположите наблюдения по возрастанию или по убыванию.

2. Найдите номер среднего по порядку значения по следующей формуле:

Номер среднего по порядку = (n+1)/2:

1. Если число наблюдений (n) нечетно, средним по порядку будет одно из наблюдений.
2. Если n четно, среднее по порядку попадает между двумя наблюдениями.

3. Определите значение медианы:

1. Если средним по порядку является одно из наблюдений (то есть, если n нечетно), медиана равна значению этого наблюдения.
2. Если среднее по порядку попадает между двумя значениями (то есть, если п четно), медиана равна среднему арифметическому этих значений.

Мода - это значение, наиболее часто встречающееся в наборе данных. Если данные непрерывные, то мы обычно группируем их и вычисляем модальную группу.

Некоторые наборы данных не имеют моды, потому что каждое значение встречается только 1 раз. Иногда бывает более одной моды; это происходит тогда, когда 2 значения или больше встречаются одинаковое число раз и встречаемость каждого из этих значений больше, чем любого другого значения.

Как обобщающую характеристику моду используют редко.

Дисперсия

Один из способов измерения рассеяния данных заключается в том, чтобы определить степень отклонения каждого наблюдения от средней арифметической. Очевидно, что чем больше отклонение, тем больше изменчивость, вариабельность наблюдений.

Однако нельзя использовать среднее этих отклонений как меру рассеяния, потому что положительные отклонения компенсируют отрицательные отклонения (их сумма равна нулю). Чтобы решить эту проблему, мы возводим в квадрат каждое отклонение и находим среднее возведенных в квадрат отклонений; эта величина называется вариацией, или дисперсией.

Возьмем n наблюдений x1, x2, x3, ..., xn, среднее которых равняется

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n}$$

Вычисляем дисперсию:

$$D = \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n}$$

дисперсия.

В случае, если мы имеем дело не с генеральной совокупностью, а с выборкой, то вычисляется выборочная дисперсия:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$$

выборочное стандартное отклонение.

Теоретически можно показать, что получится более точная дисперсия по выборке, если разделить не на n, а на (n-1).

Единицы измерения (размерность) вариации - это квадрат единиц измерения первоначальных наблюдений.

Рассмотрим среднеквадратическое отклонение, стандартное отклонение выборки.

Среднеквадратическое отклонение - это положительный квадратный корень из дисперсии.

Стандартное отклонение выборки - это корень из выборочной дисперсии, то есть можно представить себе стандартное отклонение, как своего рода среднее отклонение наблюдений от среднего. Оно вычисляется в тех же единицах (размерностях), что и исходные данные.

Если разделить стандартное отклонение на среднее арифметическое и выразить результат в процентах, получится коэффициент вариации. Он является мерой рассеяния, не зависит от единиц измерения (безразмерный), но имеет некоторые теоретические неудобства и поэтому не очень одобряется статистиками.

Математическое ожидание иногда называют средним значением случайной величины. Рассмотрим дискретную случайную величину X, принимающую значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с вероятностями соответственно $p_1, p_2, \ldots, p_n$ Определим среднюю арифметическую значений случайной величины, взвешенных по вероятностям их появлений. Таким образом, вычислим среднее значение случайной величины, или ее математическое ожидание $M(X)$:

$$M(X) = \frac{x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_ip_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i}.$$

Учитывая, что $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ получаем

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

Итак, ***математическим ожиданием*** дискретной случайной величины называется сумма произведений всех ее возможных значений на соответствующие вероятности.

Для непрерывной случайной величины математическое ожидание

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx.$$

Математическое ожидание непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат отрезку $[a; b]$,

$$M(X) = \int_{a}^{b} x f(x)\, dx.$$

Используя функцию распределения вероятностей $F(x)$, математическое ожидание случайной величины можно выразить так:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, d(F(x)).$$

Свойства математического ожидания

Свойство 1. Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме их математических ожиданий:

$$M(X+Y) = M(X) + M(Y).$$

Свойство 2. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$$M(XY) = M(X)M(Y).$$

Свойство 3. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной:

$$M(c) = c.$$

Свойство 4. Постоянный множитель случайной величины можно вынести за знак математического ожидания:

$$M(cX) = cM(X).$$

Свойство 5. Математическое ожидание отклонения случайной величины от ее математического ожидания равно нулю:

$M(X - M(X)) = 0.$

Для непрерывной случайной величины математическое ожидание вычисляется по формуле

$$M[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x)\, dx,$$

Где $f(x)$— плотность распределения вероятностей случайной величиныX.

Рассмотрим случаи, когда для нахождения математического ожидания функции случайных аргументов не требуется знание даже законов распределения аргументов, а достаточно знать только некоторые их числовые характеристики. Сформулируем эти случаи в виде теорем.

Теорема 1.*Математическое ожидание суммы как зависимых, так и независимых двух случайных величин равно сумме математических ожиданий этих величин:*

$M(X + Y) = M(X) + M(Y).$

Теорема 2. *Математическое ожидание произведения двух случайных величин равно произведению их математических ожиданий плюс корреляционный момент:*

$M(XY) = M(X)M(Y) + \mu_{xy}.$

Следствие 1.*Математическое ожидание произведения двух некоррелированных случайных величин равно произведению их математических ожиданий.*

Следствие 2.*Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий.*

Дисперсия функции случайных величин

По определению дисперсии имеем $D[Y] = M[(Y - M(Y))^2].$. Следовательно,

$D[\varphi(x)] = M[(\varphi(x) - M(\varphi(x)))^2]$, где$M(\varphi(x)) = M[\varphi(X)]$.

Приведем расчетные формулы только для случая непрерывных случайных аргументов. Для функции одного случайного аргумента$Y = \varphi(X)$дисперсия выражается формулой

$$D[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi(x) - M(\varphi(x)))^2 f(x)\, dx,$$

где$M(\varphi(x)) = M[\varphi(X)]$ - математическое ожидание функции $\varphi(X)$; $f(x)$ - плотность распределения величины X.

Формулу можно заменить на следующую:

$$D[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x) f(x)\, dx - M^2(X)$$

Рассмотрим **теоремы о дисперсиях**, которые играют важную роль в приложениях.

Теорема 3. Дисперсия суммы случайных величин равна сумме дисперсий этих величин плюс удвоенная сумма корреляционных моментов каждой из слагаемых величин со всеми последующими:

$$D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} D[X_i] + 2\sum_{i<j} \mu_{x_i x_j}$$

Следствие 3. Дисперсия суммы некоррелированных случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых:

$$D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} D[X_i]$$

Теорема 4. Дисперсия произведения двух независимых случайных величин вычисляется по формуле

$$D[XY] = D[X]D[Y] + M^2(X)D[Y] + M^2(Y)D[X].$$

Корреляционный момент функций случайных величин

Согласно определению корреляционного момента двух случайных величин X и Y, имеем

$$\mu_{xy} = M[(X - M(X))(Y - M(Y))].$$

Раскрывая скобки и применяя свойства математического ожидания, получаем

$$\mu_{xy} = M(XY) - M(X)M(Y).$$

Рассмотрим две функции случайной величины X

$$Y_1 = \varphi_1(X); \qquad Y_2 = \varphi_2(X).$$

Согласно формуле -

$$\mu_{y_1 y_2} = M(Y_1 Y_2) - M(Y_1)M(Y_2).$$

следует

$$\mu_{y_1 y_2} = M(\varphi_1(X)\varphi_2(X)) - M(\varphi_1(X))M(\varphi_2(X)).$$

т.е. корреляционный момент двух функций случайных величин равен математическому ожиданию произведения этих функций минус произведение из математических ожиданий.

Рассмотрим основные **свойства корреляционного момента и коэффициента корреляции**.

Свойство 1. От прибавления к случайным величинам постоянных величин корреляционный момент и коэффициент корреляции не изменяются.

Свойство 2. Для любых случайных величин X и Y абсолютная величина корреляционного момента не превосходит среднего геометрического дисперсий данных величин:

$$|\mu_{xy}| \leqslant \sqrt{D[X] \cdot D[Y]} = \sigma_x \cdot \sigma_y,$$

Где σ_x, σ_y - средние квадратические отклонения величин X и Y.

Следствие 5. *Для любых случайных величин X и Y абсолютная величина коэффициента корреляции не превосходит единицы:*

$$|r_{xy}| \leqslant 1.$$

3.5. Характеристики простейшего потока событий

Искомые величины при исследовании процессов методом имитационного моделирования обычно определяют как средние значения по данным большого числа реализаций процесса. Если число реализаций N, используемых для оценки искомых величин, достаточно велико, то в силу закона больших чисел получаемые оценки приобретают статистическую устойчивость и с достаточной для практики точностью могут быть приняты в качестве приближенных значений искомых величин.

При исследовании сложных систем методом имитационного моделирования существенное внимание уделяется учету случайных факторов. В качестве математических схем, используемых для формализации действия этих факторов, используются случайные события, случайные величины и случайные процессы (функции). Формирование на ЭВМ реализаций случайных объектов любой природы сводится к выработке и преобразованию случайных чисел. Рассмотрим способ получения возможных значений случайных величин с заданным законом распределения. Для формирования возможных значений случайных величин с заданным законом распределения исходным материалом служат случайные величины, имеющие равномерное распределение в интервале (0, 1). Другими словами, возможные значения xi случайной величины ξ, имеющей равномерное распределение в интервале (0, 1), могут быть преобразованы в возможные значения yi случайной величины η, закон распределения которой задан. Способ преобразования состоит в том, что из равномерно распределенной совокупности отбираются случайные числа, удовлетворяющие некоторому условию таким образом, чтобы ото бранные числа подчинялись заданному закону распределения. Предположим, что необходимо получить последовательность случайных чисел yi, имеющих функцию плотности fη(y). Если область определения функции fη(y) не ограничена с одной или обеих сторон, необходимо перейти к соответствующему усеченному распределению.

Поток событий - последовательность событий , происходящее в последовательные моменты времени одно за другим.

Потоки однородных событий отличаются только временем их появления. Их можно описать как последовательность моментов времени наступления событий. Для их моделирования достаточно сформировать вектора чисел, которые будут соответствовать интервалу времени между очередными событиями.

Поток однородных событий называется простейшим, если он обладает следующими тремя свойствами.

Стационарность. Для любого положительного t (t>0) всегда существует такое k>=0, что вероятность появления k событий за период времени (a, a+t), обозначим ее через pk(t), является одной и той же для всех a>=0. Для потоков, в которых за конечный промежуток времени с вероятностью 1 происходит конечное число событий, всегда выполняется равенство $\sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) = 1 \quad (\forall t > 0)$. Таким образом, сущность данного свойства заключается в постоянстве вероятностного режима во времени, или другими словами, вероятностные характеристики потока не зависят от времени.

Отсутствие последействия. Оно выражает собой отсутствие взаимной зависимости появления событий в потоке в непересекающихся между собой промежутках времени. В данном случае условная вероятность появления k событий (в зависимости от возможных вариантов чередования до начального момента времени a) за промежуток времени (a, a+t) равняется безусловной вероятности pk(t). Таким образом, появление в потоке очередного события не зависит от чередования предшествующих моменту a событий и как давно произошло последнее из них.

Ординарность. Это означает, что вероятность появления в стационарном потоке за промежуток времени Δt более чем одного события является бесконечно малой величиной o(t) более высокого порядка чем Δt .

В итоге получаем следующее окончательное определение простейшего потока.

Определение Простейшим потоком однородных событий называем всякий стационарный ординарный поток без последействия. Одной из характеристик потока случайных событий является его интенсивность – среднее число событий, происходящих в единицу времени.

Отметим, что при поступлении заявок группами, их объем может быть как постоянным, так и случайным. В случае неординарного потока заявок в виде партий с постоянным размером рекомендуется переходить к ординарному потоку групповых заявок.

Основная задача теории простейшего потока состоит в определении закона распределения числа событий за период времени t, рассматриваемый в качестве случайной величины. Это соответствует задачи отыскания функции pk(t).

Однако сначала определим ее с фиксированным t. Возьмем интервал (0,1) и разобьем его произвольно на n равных частей. Длина каждой i-й части равна 1 / n. Так как поток обладает свойством отсутствия последействия, а, следовательно, события и их вероятности являются несовместными, то вероятность того, что за весь период t не поступит ни один клиент, определяется как

$$p_0(1)=\prod_{i=1}^{n}p_0\left(\frac{1}{i}\right)=p_0\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

Предположим $p_0(1)=\prod_{i=1}^{n}p_0\left(\frac{1}{i}\right)=p_0\left(\frac{1}{n}\right)^n$, тогда

$$p_0\left(\frac{1}{n}\right)^n=\theta$$, (4)

откуда выразим вероятность того, что за промежуток времени длины 1 / n не поступит ни один клиент:

$$p_0\left(\frac{1}{n}\right)=\theta^{\frac{1}{n}}$$

Если период времени, равный k / n, где k – целое положительное число разбить на k частей, (длина каждой части равна 1/n), то, учитывая, получим

$$p_0\left(\frac{k}{n}\right)=p_0\left(\frac{1}{n}\right)^k=\theta^{\frac{k}{n}}.$$

Пусть $\exists\, k\in N$ (натуральное число):

$$\frac{k-1}{n}<t\le\frac{k}{n},$$

и из предположения, что p0(t) является невозрастающей функцией, поскольку, чем больше промежуток времени, тем меньше вероятность отсутствия клиентов, имеем

$$p_0\left(\frac{k-1}{n}\right)\ge p_0(t)\ge p_0\left(\frac{k}{n}\right).$$

В соответствии с ранними формулами

$$\theta^{\frac{k-1}{n}}\ge p_0(t)=\theta^{\frac{k}{n}}.$$

Так как $\frac{k}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}t$, то $\theta^{\frac{k-1}{n}}\to\theta^t$ и $\theta^{\frac{k}{n}}\to\theta^t$. Таким образом, $p_0(t)=\theta^t$

Из равенства $p_0(1)=\theta$ следует $0\le\theta\le1$. Случаи, когда $\theta=0$, не рассматриваются, поскольку означают достоверное прибытие клиентов и достоверное отсутствие какого бы то ни было потока клиентов соответственно в любом промежутке времени. Поэтому для нас представляет интерес случай, когда $0<\theta<1$. Исходя из данных жестких ограничений, положим $\theta=e^{-\lambda}$ (рис .10)

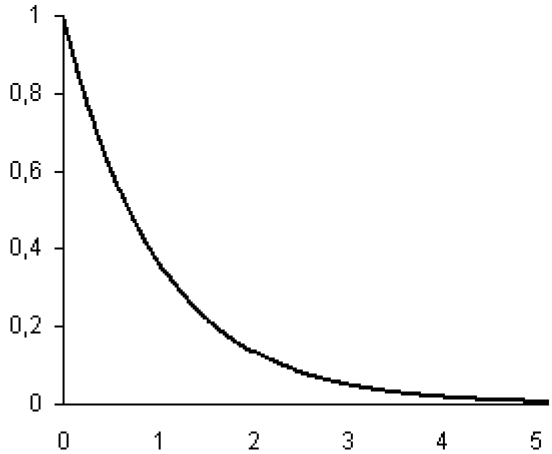

Рис. 10 $\theta = e^{-\lambda}$

Следовательно, для любого стационарного потока без последействия функцию p0(t) можно выразить через $e^{-\lambda t}$:

$$p_0(t) = e^{-\lambda t}$$.

Перейдем к определению функции pk(t) при k>0.

Разобьем период времени (0,t) на произвольное число n>k равных частей длины $\frac{t}{n} = \delta$.

Относительно расположения поступления клиентов в этих частях возможны две гипотезы:

H1 – ни в одном из n промежутков не поступит более одного клиента;

H2 – хотя бы в одном из n промежутков поступит более одного клиента.

Тогда вероятность pk(t) равна сумме вероятностей двойного события:

$$p_k(t) = \sum_{i=1}^{2} P(H_i, k)$$

Двойная вероятность P(Hi, k) включает вероятность реализации гипотезы Hi и одновременно вероятность того, что за период (0,t) поступает k клиентов. Таким образом P(H1, k) – вероятность того, что во всех частях n периода (0,t) не поступит более одного клиента, при этом общее количество клиентов за данный период составит k. Следовательно, насчитывается k из n частей, которые содержат по одному поступлению клиента, а в оставшихся (n – k) временных промежутках клиенты не поступают.

Чтобы определить вероятность появления по одному клиенту в k из n промежутках времени, необходимо воспользоваться биномиальным законом распределения:

$$P(H_1, k) = C_n^k (p_0(\delta))^k (p_0(\delta))^{n-k}$$.

В силу формулы (10) и однородности данного потока получаем, что при $(\delta \to 0)$ и k=const

$$\left(p_0(\delta)\right)^{n-k} = e^{-\lambda\delta(n-k)} = e^{-\lambda\frac{t}{n}(n-k)} = e^{-\lambda t}\cdot e^{\lambda\frac{tk}{n}} = e^{-\lambda t}\left[1+o(1)\right]$$

и

$$\left(p_1(\delta)\right)^k = \left[1-e^{-\lambda\delta}-\psi(\delta)\right]^k,$$

где $\psi(\delta)$ – вероятность того, что за промежуток времени длины поступит по меньшей мере два клиента:

$$\psi(\delta) = 1 - p_0(\delta) - p_1(\delta)$$

$\psi(\delta) = o(\delta)$ при $\delta \to 0$ ($n \to \infty$).

Тогда уравнение примет вид

$$\left(p_1(\delta)\right)^k = \left[1-e^{-\lambda\delta}-o(\delta)\right]^k = (\lambda\delta)^k\left[1+o(1)\right] = \frac{(\lambda t)^k}{n^k}\left[1+o(1)\right].$$

После подстановки упростим его:

$$P(H_1,k) = C_n^k e^{-\lambda t}\frac{\lambda t}{n^k}\left[1+o(1)\right] = \frac{n!}{k!(n-k)!n^k}e^{-\lambda t}(\lambda t)^k\left[1+o(1)\right] =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k)(n-k-1)\dots1}{k!(n-k)(n-k-1)\dots1}\cdot\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k\left[1+o(1)\right]}{n^k} =$$

$$= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k}\cdot\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k\left[1+o(1)\right]}{k!} = \frac{n^k\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{n^k}\times$$

$$\times\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k\left[1+o(1)\right]}{k!}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}.$$

Так как для отдельного промежутка времени вероятность появления более одного клиента есть , то вероятность того, что по меньшей мере один из n промежутков содержит более одного клиента (то есть выполняется гипотеза H2 составит $n\psi(\delta)$. Очевидно

$$P(H_2,k) \le n\psi(\delta) = \frac{t}{\delta}\psi(\delta)\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{2}P(H_i,k) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

Так как pk(t) не зависит от n, то, исходя из равенства , получаем

$$p_k(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots.$$

Вывод: для простейшего потока число поступлений клиентов в промежутке времени длины t распределено по закону Пуассона с параметром .

На рис. 11 представлен трехмерный график функции pk(t) из уравнения для (t=1,2,…,30).

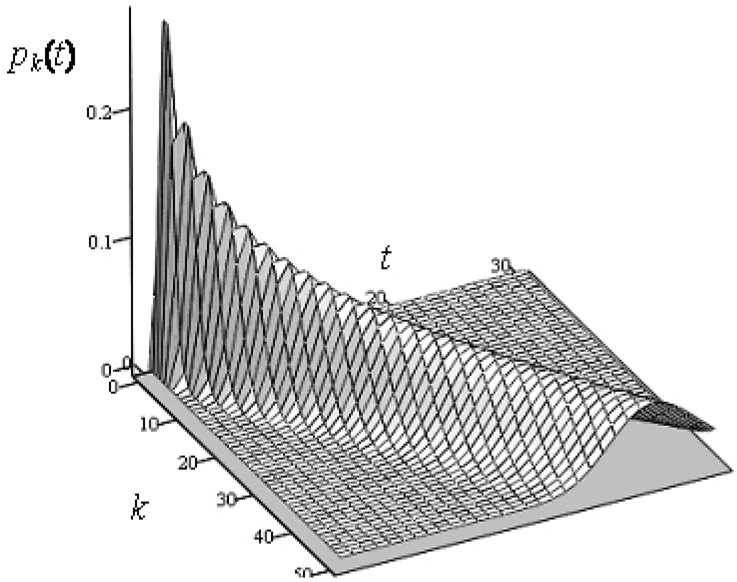

Рис. 11. Трехмерный график функции pk(t), где

Различие двух простейших потоков заключается только в разных значениях параметра λ.

Пусть w(t) – вероятность того, что за промежуток времени t поступит по меньшей мере одна заявка:

$$w(t) = 1 - p_0(t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(t) = p_1(t) + \psi(t)$$

,

Где $\psi(t) = \sum_{k=2}^{\infty} p_k(t)$ – вероятность поступления по меньшей мере двух заявок за промежуток времени t.

Мы знаем, что для простейшего потока с параметром

$$p_0(t) = e^{-\lambda t}$$

.

Отсюда следует, что

$$w(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

.

Параметр потока вычисляется по формуле

$$\lim_{t \to 0} \frac{w(t)}{t} \to \lambda$$

.

Подобный предел существует у любого стационарного потока и является важнейшей характеристикой этого потока.

Из теории вероятности известно, что математическое ожидание случайной величины, распределенной по Пуассоновскому закону, равно параметру этого закона. Тем не менее, в этом можно убедиться, рассчитав математическое ожидание количества заявок, поступающих за промежуток времени t:

$$\sum_{k=1}^{\infty} kp_k(t) = e^{-\lambda t}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda t}(\lambda t)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda t,$$

поскольку, из математического анализа известно, что сумма

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} = 1 + \frac{\lambda t}{1!} + \frac{(\lambda t)^2}{2!} + \frac{(\lambda t)^3}{3!} + \ldots,$$

является разложением функции по степеням (k-1).

3.5.1.Поток однородных событий

При моделировании процессов обслуживания возникает необходимость формирования реализаций случайного потока однородных событий (заявок). Каждое событие потока характеризуется моментом времени tj, в который оно наступает. Чтобы описать случайный поток однородных событий как случайный процесс, достаточно задать закон распределения, характеризующий последовательность случайных величин tj. Для того, чтобы получить реализацию потока однородных событий t1, t2, …, tk, необходимо сформировать реализацию z1, z2, …, zk k-мерного случайного вектора ξ1, ξ2, , ξk и вычислить значения ti в соответствии со следующими соотношениями:

t1 = ξ1,

t2 = ξ1 + ξ2,

…………………….

tk = ξ1 + ξ2 + … + ξk.

<u>Гистограмма</u>

Для исследования случайных величин необходимо определить закон их распределения. Иногда это можно сделать с помощью гистограммы. Построение ее осуществляется следующим образом – на оси абсцисс откладываются единицы измерения случайной величины. По оси ординат - количество случайных величин, попавших в соответствующий интервал. Сумма всех ординат нормируется общим количеством случайных величин. При неограниченном увеличении числа случайных величин и уменьшении длин интервала гистограмма будет приближаться к функции плотности вероятности.

Задание на выполнение

1. Сформировать вектор случайных величин, длиной 100 элементов, распределенных по равномерному закону.

2. Вычислить 6 оценок математического ожидания.
3. 10 раз повторив пункты 1, 2 вычислить оценки дисперсий оценок математического ожидания.
4. Преобразовать вектора в потоки.
5. Сложить потоки.
6. Для суммарного потока построить гистограмму и вычислить оценки математического ожидания и дисперсии.

Порядок выполнения

1. Ознакомиться с представленным описанием.
2. Определить множество законов распределений случайных величин, генерируемых в системе MathCAD.
3. Сгенерировать последовательности (векторы) случайных величин для различных законов распределений случайных величин.
4. Для сгенерированных векторов определить числовые характеристики случайных величин.
5. Построить графики функции распределения и плотности распределения случайных величин, генерируемых в системе

Вопросы к защите отчета по ЛР №1.

Исследование характеристик случайных величин и методов их оценки.

1. Случайные величины. Свойства.
2. Дискретные и непрерывные случайные величины.
3. Основные законы распределения случайных величин.
4. Функция распределения вероятностей случайной величины.
5. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины
6. Основные свойства математического ожидания.
7. Основные свойства дисперсии случайной величины.

Литература

1. Замятина О.М. Моделирование сетей: учебное пособие / О.М. Замятина: Томский политехнический университет. - Томск: Изд-во Томского политехнического университета
2. http://simulation.su/static/ru-information.html
3. http://window.edu.ru –единое окно доступа к образовательным ресурсам.
4. http://www.intuit.ru/studies/courses- Национальный открытый университет.
5. http:// elibrary.ru – научная электронная библиотека.