

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА
(РОСАВИАЦИЯ)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ» (МГТУ ГА)

Кафедра аэродинамики, конструкции и прочности
летательных аппаратов

М.С. Кубланов

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

ПРИКЛАДНЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ
АЭРОМЕХАНИКИ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

Учебное пособие

*Утверждено редакционно-
издательским советом МГТУ ГА
в качестве учебного пособия*

Москва
ИД Академии Жуковского
2021

УДК 629.7.015:519.6

ББК 518

К88

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Московского государственного технического университета ГА

Рецензенты:

Ципенко В.Г. (МГТУ ГА) – д-р техн. наук, профессор;

Грумондз В.Т. (МАИ (НИУ)) – д-р физ.-мат. наук, профессор

Кубланов М.С.

К88

Современные методы математического моделирования сложных систем. Прикладные методы моделирования аэромеханики летательных аппаратов [Текст] : учебное пособие / М.С. Кубланов. – М. : ИД Академии Жуковского, 2021. – 72 с.

ISBN 978-5-907490-12-3

В учебном пособии дается обзор современных методов математического моделирования, применяемых в гражданской авиации. Материал излагается простым языком, не перегруженным математическими доказательствами, и сопровождается большим количеством примеров из области гражданской авиации. Особое внимание уделено связи практических задач с объектами прикладной математики.

Данное учебное пособие издается в соответствии с учебным планом для студентов направления 25.04.01 «Техническая эксплуатация летательных аппаратов и двигателей (магистры)» всех форм обучения. Пособие предназначено для дисциплин: «Современные методы математического моделирования сложных систем» и «Прикладные методы моделирования аэромеханики летательных аппаратов».

Рассмотрено и одобрено на заседаниях кафедры 30.08.2021 г. и методического совета 22.09.2021 г.

УДК 629.7.015:519.6

ББК 518

Св. тем. план 2021 г.

поз. 5

КУБЛАНОВ Михаил Семенович

**СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
СЛОЖНЫХ СИСТЕМ. ПРИКЛАДНЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ
АЭРОМЕХАНИКИ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ**

Учебное пособие

В авторской редакции

Подписано в печать 26.10.2021 г.

Формат 60x84/16 Печ. л. 4,5 Усл. печ. л. 4,185

Заказ № 841/1004-УП04 Тираж 30 экз.

Московский государственный технический университет ГА
125993, Москва, Кронштадтский бульвар, д. 20

Издательский дом Академии имени Н. Е. Жуковского
125167, Москва, 8-го Марта 4-я ул., д. 6А

Тел.: (495) 973-45-68 E-mail: zakaz@itsbook.ru

ISBN 978-5-907490-12-3

© Московский государственный технический
университет гражданской авиации, 2021

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	4
Введение	5
Глава 1. Основы механики твердого тела	7
1.1. Уравнения движения сплошной среды в перемещениях.....	7
1.2. Уравнения совместности деформаций.....	8
Глава 2. Задачи теории упругости и пластичности	10
2.1. Происхождение задач теории упругости и пластичности.....	10
2.2. Постановка задач теории упругости.....	12
2.3. О теории пластичности.....	13
Глава 3. Численные методы в задачах механики сплошной среды ..	17
3.1. Метод характеристик.....	19
3.2. Методы конечных разностей.....	21
3.3. Методы конечных объемов.....	22
3.4. Методы частиц в ячейках.....	23
3.5. Методы конечных элементов.....	23
3.6. Методы граничных элементов.....	25
3.7. Панельные методы.....	25
3.8. Методы дискретных вихрей и дискретных особенностей.....	26
3.9. Статистический метод частиц в ячейках.....	26
3.10. Методы моделирования процессов разрушения.....	27
Глава 4. Методы расчета движения летательных аппаратов	28
4.1. Эвристический метод идентификации характеристик математических моделей.....	28
4.2. Математическая модель явления гистерезиса.....	31
4.3. Оценка управляемости самолета.....	33
4.4. Устойчивый вычислительный метод расчета движения летательного аппарата на шасси.....	35
4.5. Многомерные регрессионные математические модели.....	40
4.6. Особые случаи эксплуатации самолетов на ВПП.....	43
4.7. Моделирование динамики различных видов шасси.....	49
4.8. Кватернионы в динамике полета летательных аппаратов.....	52
Глава 5. Методы прикладной математики	55
5.1. Понятие о теории информации.....	55
5.2. Методы нечетких множеств.....	58
5.3. Методы искусственных нейронных сетей.....	62
Рекомендуемый список литературы для самостоятельного изучения	69

Предисловие

Данное учебное пособие посвящено обзору современных методов математического моделирования, которые существуют в области авиационной и космической техники. Классических учебников по ним практически нет. Их в основном докладывают на научно-технических конференциях и семинарах. Одним из таких научных семинаров является постоянно действующий Международный авиационно-космический научно-гуманитарный семинар имени братьев Белоцерковских – Сергея Михайловича и Олега Михайловича.

В данном пособии делается попытка составить системное представление о современных методах обеспечения летно-технической эксплуатации (aircraft operation) в гражданской авиации (ГА). Следует заметить, что такое системное представление у читателя (магистранта) может сформироваться только после изучения фундаментальных учебников или учебных пособий (например, для бакалавриата 25.03.01 [Кубланов М.С. Математическое моделирование. Методология и методы разработки математических моделей механических систем и процессов. Часть I. Издание четвертое: учебное пособие. М.: МГТУ ГА, 2013. – 108 с.]).

Материал излагается весьма конспективно, преследуя лишь цель охарактеризовать как можно более широкую палитру методов. Для того чтобы их использовать в своей работе, НЕОБХОДИМО поднять конкретную литературу и пунктуально проработать материал. Простых методов и решений в XXI веке нет! Основной рецепт успеха – в кропотливом, пунктуальном анализе достигнутого и опоре на фундаментальный математический аппарат.

Введение

Техническая эксплуатация авиационной техники заключается в выборе и поддержании **наивыгоднейших** режимов работы авиационной техники в полете и на земле, а также в поддержании и восстановлении ее работоспособности в полете.

Ключевое слово: наивыгоднейших – предполагает решение оптимизационных задач. Поэтому оговорим цели этой оптимизации в практике ГА: обеспечение безопасности и эффективности эксплуатации воздушных судов (ВС) по назначению. В этом направлении деятельность авиационных предприятий заключается отнюдь и не только в организации технического обслуживания и ремонта. Важнейшим полем деятельности в конкурентной среде оказывается выявление резервов аэродинамического, весового, пилотажного, экономического совершенства располагаемого парка ВС.

Вот только несколько примеров, характеризующих разнонаправленность исследований:

- особые случаи эксплуатации ВС;
- расширение ожидаемых условий эксплуатации;
- технологические процессы;
- управление безопасностью полетов и факторы риска;
- методы оценки параметров, факторов, эффективности и безопасности.

Это многообразие задач требует четкого представления о целях исследований в ГА. В XXI веке приходится иметь дело не с *"хорошо организованными системами"*, а с *"плохо организованными системами"*, для которых необходимо открывать (разрабатывать) не законы природы, а закономерности множества частных процессов. Это значит, что для описания этих познанных явлений не обойтись без математических моделей.

Итак, если целью научных исследований является познание законов природы, то целью инженерных исследований следует считать познание закономерностей, свойственных продуктам человеческой деятельности, и разработка на этой основе согласованных и адекватных математических моделей.

Весь материал данного учебного пособия можно условно разбить на 4 части, которые будут посвящены знакомству с современными методами построения математических моделей:

- механика твердого тела (как раздел механики сплошной среды);
- численные методы в задачах механики сплошной среды;
- методы динамик полета летательных аппаратов;
- методы прикладной математики (для составления математического описания).

Для магистерской подготовки в дополнение к данному учебному пособию необходимо воспользоваться [28, 30, 31]. Они вместе обеспечат знакомство с такими методами математического моделирования сложных систем, как:

- методы теории статистических оценок [31];
- методы многомерного статистического анализа [31];
- методы планирования эксперимента [31];
- методы кинематики и динамики сплошной среды [28];
- методы решения задач теории жидкости и газа [28];
- отдельные методы прикладной математики [30, 31].

Уверенность в правильном решении задач в области эксплуатации авиационной техники основывается на применении строгого математического аппарата и методов вычисления. Во второй половине XX века великое множество математических методов, разработанных в области авиационной и космической техники, обогатили прикладную математику. И это было не самоцелью фанатиков-ученых, а жизненной необходимостью обеспечения безопасности и эффективности воздушного транспорта.

1. ОСНОВЫ МЕХАНИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

1.1. Уравнения движения сплошной среды в перемещениях

В механике твердого тела основным параметром, описывающим движение, является деформация. При этом не рассматривается, как в теории жидкости и газа, перемещение тела. Таким образом, необходимо переписать уравнения движения сплошной среды в терминах деформаций.

В [28] получено *основное дифференциальное уравнение движения сплошной среды*:

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \rho \mathbf{F} + \frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{p}_3}{\partial z},$$

или в проекциях на оси декартовой системы координат:

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{dV_x}{dt} &= \rho F_x + \frac{\partial p_{11}}{\partial x} + \frac{\partial p_{12}}{\partial y} + \frac{\partial p_{13}}{\partial z}, \\ \rho \frac{dV_y}{dt} &= \rho F_y + \frac{\partial p_{21}}{\partial x} + \frac{\partial p_{22}}{\partial y} + \frac{\partial p_{23}}{\partial z}, \\ \rho \frac{dV_z}{dt} &= \rho F_z + \frac{\partial p_{31}}{\partial x} + \frac{\partial p_{32}}{\partial y} + \frac{\partial p_{33}}{\partial z}, \end{aligned} \right\}$$

где ρ – плотность среды, $\mathbf{V}(V_x, V_y, V_z)$ – вектор скорости среды в каждой точке пространства, $\mathbf{F}(F_x, F_y, F_z)$ – вектор массовой силы, $\mathbf{p}_1(p_{11}, p_{21}, p_{31})$, $\mathbf{p}_2(p_{12}, p_{22}, p_{32})$, $\mathbf{p}_3(p_{13}, p_{23}, p_{33})$ – внутренние поверхностные силы.

Ясно, что при отсутствии перемещения тела его деформация (смещение конца радиус-вектора точки среды), т.е. вектор $\mathbf{\rho}' - \mathbf{\rho}$ с координатами (u, v, w) , связана со скоростью перемещения частицы среды естественным образом:

$$\mathbf{V} = \frac{d(\mathbf{\rho}' - \mathbf{\rho})}{dt}, \quad V_x = \frac{du}{dt}, \quad V_y = \frac{dv}{dt}, \quad V_z = \frac{dw}{dt}, \quad (1.1)$$

поэтому *основное дифференциальное уравнение движения сплошной среды в перемещениях* примет вид:

$$\rho \frac{d^2(\mathbf{\rho}' - \mathbf{\rho})}{dt^2} = \rho \mathbf{F} + \frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{p}_3}{\partial z}, \quad (1.2)$$

или в проекциях на оси декартовой системы координат:

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{d^2 u}{dt^2} &= \rho F_x + \frac{\partial p_{11}}{\partial x} + \frac{\partial p_{12}}{\partial y} + \frac{\partial p_{13}}{\partial z}, \\ \rho \frac{d^2 v}{dt^2} &= \rho F_y + \frac{\partial p_{21}}{\partial x} + \frac{\partial p_{22}}{\partial y} + \frac{\partial p_{23}}{\partial z}, \\ \rho \frac{d^2 w}{dt^2} &= \rho F_z + \frac{\partial p_{31}}{\partial x} + \frac{\partial p_{32}}{\partial y} + \frac{\partial p_{33}}{\partial z}, \end{aligned} \right\}. \quad (1.3)$$

Там же, в [28] было введено понятие тензора деформации $\varepsilon_{\mu\nu}$ и тензора скоростей деформации $e_{\mu\nu}$, а также получено соотношение $\varepsilon_{ij} \equiv e_{ij}\Delta t$ между ними. Обычно модели сплошных сред для твердых тел используют связь компонент тензора внутренних напряжений p_{ij} с компонентами тензора деформации $\varepsilon_{\mu\nu}$, например, $p_{ij} = f(\varepsilon_{\mu\nu})$, поэтому в последних уравнениях используется только понятие деформаций. Вообще говоря, в современной механике твердого тела рассматриваются и такие модели, в которых тензор внутренних напряжений p_{ij} зависит не только от тензора деформации $\varepsilon_{\mu\nu}$, но и от таких величин, как, например, температура и время, но это несущественно усложнит основные уравнения.

С помощью (1.1) можно из уравнений для компонент тензора скоростей деформации $e_{\mu\nu}$ получить выражения для компонент *тензора деформации* $\varepsilon_{\mu\nu}$, которые используются для конкретизации модели среды:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &\equiv \varepsilon_{11}, & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) &\equiv \varepsilon_{12}, & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) &\equiv \varepsilon_{13}, \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) &\equiv \varepsilon_{21}, & \frac{\partial v}{\partial y} &\equiv \varepsilon_{22}, & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) &\equiv \varepsilon_{23}, \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) &\equiv \varepsilon_{31}, & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) &\equiv \varepsilon_{32}, & \frac{\partial w}{\partial z} &\equiv \varepsilon_{33}, \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

1.2. Уравнения совместности деформаций

В системе из трех уравнений (1.3), замкнутой с помощью модели состояния твердого тела $p_{ij} = f(\varepsilon_{\mu\nu})$ и (1.4), четыре неизвестные функции: ρ , u , v , w .

Уравнение неразрывности в механике твердого тела следует рассматривать лишь в переменных Лагранжа, в которых закон сохранения массы выглядит следующим образом: $\rho V = \rho_0 V_0$, где 0 относится к исходному моменту времени, а параметры без индекса – к любому другому. Поскольку рассматриваются малые деформации, постольку можно считать, что уравнение неразрывности задает плотность в зависимости от переменных Лагранжа:

$$\rho = \rho(a, b, c, t). \quad (1.5)$$

Однако самая большая трудность кроется в том, что деформации u , v , w не могут изменяться произвольно, независимо друг от друга. Это и понятно: в твердом теле предполагается, что частицы, контактирующие в начальный момент времени, остаются в контакте и в дальнейшем. С другой стороны, шесть независимых компонент симметричного тензора деформаций не могут быть полностью независимыми, так как выражаются через производные только от трех функций u , v , w . Поэтому должны существовать дополнительные уравнения, накладывающие определенные условия на $\varepsilon_{\mu\nu}$.

Эти дополнительные условия **вытекают из кинематики**, т.е. являются производными от тех же шести компонент симметричного тензора деформаций,

как функций от координат. Эти условия являются необходимыми и достаточными для существования однозначных и непрерывных компонент деформации u , v , w , т.е. замыкают полную систему уравнений механики твердого тела без подвода энергии и изменения энтропии.

Для получения одного из шести таких условий используем компоненты ε_{11} , ε_{22} , ε_{12} . Вычислим $\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x^2}$ с помощью (1.4) и сложим их:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Последняя скобка, как нетрудно видеть, равна $2\varepsilon_{12}$. Аналогично получаются и остальные пять уравнений, называемых *уравнениями совместности деформаций*:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial z^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x \partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x \partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x \partial y}. \end{cases} \quad (1.6)$$

Таким образом, полная замкнутая система уравнений напряженно-деформированного состояния твердого тела без изменения энергии и энтропии состоит из (1.4), (1.5) и (1.6).

2. ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ

2.1. Происхождение задач теории упругости и пластичности

Для обоснования постановки задач теории упругости и теории пластичности приведем описание типичного поведения твердых тел, применяемых в технике, дословно позаимствованное из [49].

"На рис. 1 приведена диаграмма одноосного растяжения – сжатия цилиндрического образца из мягкого железа под действием внешних сил, приложенных на его торцах. Аналогичными особенностями обладают диаграммы растяжения – сжатия образцов, изготовленных из других металлов. По оси абсцисс на рис. 1 отложена компонента ε_{11} относительного удлинения вдоль оси цилиндра, которую выбираем за ось x , по оси ординат – компонента p_{11} нормального напряжения на площадках, перпендикулярных к оси цилиндра.

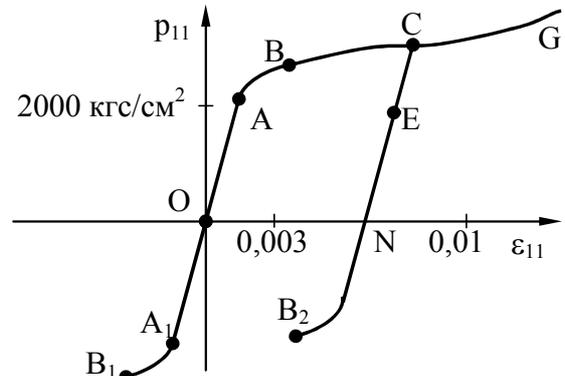


Рис. 1.

Начальный участок диаграммы A_1OA близок к прямой линии

$$p_{11} = E\varepsilon_{11} \quad (2.1)$$

и характеризуется обратимыми деформациями, т.е. как при нагрузке (увеличении $|p_{11}|$), так и при разгрузке (уменьшении $|p_{11}|$) точка, изображающая на диаграмме состояние образца, двигается по одной и той же прямой A_1OA . Деформации при этом обычно весьма малы (для мягкого железа меньше 0,3 %). Границы интервала (A_1, A) применимости линейной формулы (2.1) называются *пределами пропорциональности*, соответствующие напряжения $p_{11}(A)$ и $p_{11}(A_1)$ – напряжениями на пределе пропорциональности. Таким образом, при напряжениях p_{11} , меньших $p_{11}(A)$ и больших $p_{11}(A_1)$, на диаграмме имеется участок A_1A , соответствующий *закону Гука*, или *линейной теории упругости*.

За точкой A , т.е. при дальнейшем увеличении внешнего растягивающего усилия, существует участок AB **нелинейной обратимой зависимости** p_{11} от ε_{11} . Деформации на этом участке диаграммы также обычно весьма малы (меньше 1 %). Изображающая состояние образца точка на участке AB (и соответственно на A_1B_1 для сжатия) как при нагрузке, так и при разгрузке двигается по одной и той же кривой AB (и A_1B_1). Следовательно, при $p_{11}(A) < p_{11} < p_{11}(B)$ образец ведет себя тоже как упругое тело, но с **динамически нелинейной зависимостью** напряжений от деформаций. Понятие динамической нелинейности в данном случае относится к геометрически малым деформациям, для которых можно еще пользоваться приближенными линейными формулами для компонент тензора деформаций при их вычислении через компоненты вектора перемещений.

При дальнейшем увеличении внешнего растягивающего усилия, когда p_{11} становится большим, чем $p_{11}(B)$, проявляются необратимые эффекты *пластичности*. После перехода через точку В, например в точку С, при последующей разгрузке изображающая точка будет уже двигаться не по кривой СВАО, а по другой кривой СЕ. Обычно линия СЕ близка к прямой, наклон которой, вообще говоря, приблизительно совпадает с наклоном прямой ОА. После разгрузки до точки Е при новой нагрузке изображающая точка будет практически двигаться по той же кривой ЕС, а после достижения точки С при дальнейшей нагрузке – вдоль основной кривой ОАГ. Если, находясь за точкой В, внешнюю нагрузку полностью снять и получить состояние, отвечающее $p_{11} = 0$, то в этом состоянии удлинение ε_{11} оказывается отличным от нуля, возникают так называемые *остаточные деформации* ε_{11}^p . Деформацию, например, в точке Е можно рассматривать как состоящую, из двух частей – остаточной ε_{11}^p и упругой ε_{11}^e :

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^p + \varepsilon_{11}^e,$$

причем часто можно принять, что

$$\varepsilon_{11}^e = \frac{p_{11}(\varepsilon)}{E_1}.$$

Если наклон прямой ЕС совпадает с наклоном первоначального участка диаграммы ОА, то $E = E_1$.

Появление остаточных деформаций после достижения внешней нагрузкой определенного предела характеризует собой по определению основное свойство пластичности. При появлении остаточных пластических деформаций характерно различие между функциями $p_{11} = f(\varepsilon_{11})$ при нагрузке и разгрузке. Следует отметить, что появление пластических деформаций в опытах можно обнаружить после проведения разгрузки. Точка В определяет начало проявления свойств пластичности, значение напряжения $p_{11}(B)$ называется *пределом упругости*.

Заметим, что после перехода материала в пластическую область, например в точку С, при разгрузках и последующих нагрузках таких, что $0 < p_{11} < p_{11}(C)$, материал ведет себя как упругое тело (нагрузка и разгрузка идут по одной и той же кривой СN). Поэтому можно говорить, что точка С также играет роль предела упругости для материала, полученного из исходного с помощью пластического деформирования. Однако правильнее называть эту точку *пределом текучести*. Для многих материалов $p_{11}(C) > p_{11}(B)$ по крайней мере для некоторых участков диаграммы. Такие участки называются *участками упрочнения материала*, а повышение предела упругости в результате пластического деформирования называется *упрочнением материала* или *наклёпом*. Материал упрочняется, если $p_{11}(C) > p_{11}(B)$. Для некоторых материалов на диаграмме растяжения – сжатия существует горизонтальный участок, называемый *площадкой текучести*. При деформировании, соответствующем этому участку, упрочнения не происходит. При увеличении внешней нагрузки до $p_{11}(G)$ материал разрушается. Растягивающее напряжение $p_{11}(G)$ называется *пределом прочности* на растяжение."

2.2. Постановка задач теории упругости

Основным свойством тел, описываемых теорией упругости, как это следует из предыдущего параграфа, является обратимость процессов деформации. Поэтому все конечные связи тензоров напряжения и деформации однозначны.

Закон Гука для изотропной упругой среды при малых деформациях имеет вид [28]:

$$p_{ij} = \lambda_1(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})\delta_{ij} + 2\mu_1\varepsilon_{ij}. \quad (2.2)$$

Его подстановка в уравнения движения в перемещениях (1.3) дает:

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{d^2 u}{dt^2} &= \rho F_x + (\lambda_1 + \mu_1) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \mu_1 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \rho \frac{d^2 v}{dt^2} &= \rho F_y + (\lambda_1 + \mu_1) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \mu_1 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \rho \frac{d^2 w}{dt^2} &= \rho F_z + (\lambda_1 + \mu_1) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \mu_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \right\}, \quad (2.3)$$

– уравнения Ламе.

Часто приходится учитывать температурное воздействие на твердое тело. Это достигается следующим видоизменением закона Гука:

$$p_{ij} = \lambda_1(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})\delta_{ij} + 2\mu_1\varepsilon_{ij} - (3\lambda_1 + 2\mu_1)\alpha(T - T_0)\delta_{ij}, \quad (2.4)$$

где α – коэффициент линейного температурного расширения материала тела, T и T_0 – абсолютная температура в текущий и в начальный моменты времени. В этом случае уравнения Ламе приобретают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{d^2 u}{dt^2} &= \rho F_x + (\lambda_1 + \mu_1) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \mu_1 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - (3\lambda_1 + 2\mu_1)\alpha \frac{\partial T}{\partial x} \\ \rho \frac{d^2 v}{dt^2} &= \rho F_y + (\lambda_1 + \mu_1) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \mu_1 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) - (3\lambda_1 + 2\mu_1)\alpha \frac{\partial T}{\partial y} \\ \rho \frac{d^2 w}{dt^2} &= \rho F_z + (\lambda_1 + \mu_1) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \mu_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - (3\lambda_1 + 2\mu_1)\alpha \frac{\partial T}{\partial z} \end{aligned} \right\}. \quad (2.5)$$

Для задач **равновесия** есть еще один подход к их постановке: рассматривать уравнения движения (1.3), в левых частях которых нули, в **напряжениях**:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \rho F_x + \frac{\partial p_{11}}{\partial x} + \frac{\partial p_{12}}{\partial y} + \frac{\partial p_{13}}{\partial z} \\ 0 &= \rho F_y + \frac{\partial p_{21}}{\partial x} + \frac{\partial p_{22}}{\partial y} + \frac{\partial p_{23}}{\partial z} \\ 0 &= \rho F_z + \frac{\partial p_{31}}{\partial x} + \frac{\partial p_{32}}{\partial y} + \frac{\partial p_{33}}{\partial z} \end{aligned} \right\}. \quad (2.6)$$

В этом случае решение задачи при заданных граничных условиях – напряжениях, задает деформации, определяемые с помощью обращения закона Гука в виде зависимости $\varepsilon_{ij} = f(p_{ij})$. Когда в результате каких-либо упрощений (например,

симметрии) удастся сократить количество отыскиваемых независимых компонент тензора напряжений до трех – количества уравнений в (2.6), задача равновесия твердого тела называется *статически определимой*.

Важным приемом, применяемым в практике решения задач напряженно-деформированного состояния твердого тела, является *принцип Сен-Венана*. Он предлагает допущение о том, что на достаточно большом удалении от места приложения массовых и поверхностных сил к телу, находящемуся в **равновесии**, деформации и внутренние напряжения определяются лишь главным вектором и главным моментом этих сил и практически не зависят от детального их распределения. Так, например, напряжения и деформации в длинном брусе достаточно далеко от места его закрепления не зависят от вида этого закрепления (местного распределения массовых и поверхностных сил). Этот эффект достаточно хорошо подтверждается на практике.

2.3. О теории пластичности

Как следует из пояснений Л.И. Седова к рис. 1, явления пластических деформаций появляются после того, как среда (материал) испытала нагрузку больше $p_{11}(B)$. Пластические деформации – это прежде всего деформации необратимые. На рис. 1 явлению пластичности соответствует часть диаграммы **правее** точки B, где появляется вторая ветвь кривой, свидетельствующая о неоднозначности связи напряжений с деформациями. Следует учесть, что на рис. 1 показана для примера только одна вторичная ветвь диаграммы, в реальности таких ветвей может быть много.

Иными словами, явление пластичности наступает тогда, когда нагрузка превысила предел упругости $p_{11}(B)$. При этом связь деформаций с напряжениями зависит от предыстории – от того, как и когда был достигнут предел упругости или другие значения нагрузки, бóльшие предела упругости.

Указанные неоднозначности приводят к сложностям решения практических задач, а иногда и к невозможности их решить. В практике конструирования эти сложности обходят разумно спроектированными путями. Самый простой из них – создание конструкции, в которой возможные напряжения не будут превышать предела упругости, чем обеспечат однозначность расчетов и гарантию правильного (расчетного) функционирования объекта.

Пример того, к чему приводит в эксплуатации безграмотное пренебрежение такими конструкторскими решениями, приведен в выписке из акта расследования инцидента с отказом гидросистемы самолета.

"Комиссией установлено: штуцер угольника (24-5603-132) выполнен из стали, а накидная гайка трубопровода (24-5603-90-3-53) из алюминиевого сплава, что привело при неправильном монтаже соединения на АРЗ №410 при выполнении капитального ремонта к смятию 4 витков резьбы накидной гайки трубопровода (24-5603-90-3-53) и сходу её со штуцера угольника (24-5603-132) вследствие циклических нагрузок в процессе эксплуатации."

Приведем несколько примеров математических моделей свойств материалов с пластическими деформациями.

1) "Идеально упруго-пластический материал" характеризуется тем, что до напряжения p_0 при растяжении и p'_0 при сжатии (рис. 2) он ведет себя как упругое тело. При указанных предельных значениях появляются неконтролируемые пластические деформации, которые могут приводить к разрушению, а при сохранении целостности – к остаточным деформациям ε_p .

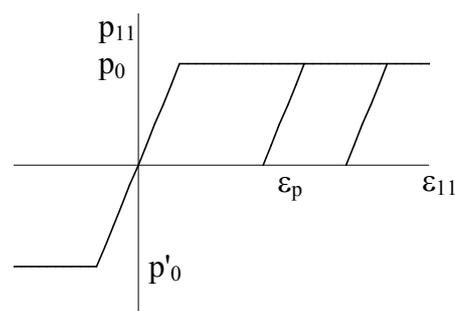


Рис. 2.

2) "Жестко-пластический материал" не учитывает упругие деформации (они чрезвычайно малы). При достижении предельных значений материал "течет" – деформируется неконтролируемым образом – явление *текучести* (рис. 3). Горизонтальный участок диаграммы – площадка текучести. После снятия нагрузки материал остается в том же деформированном состоянии, что и под нагрузкой, которую сняли.

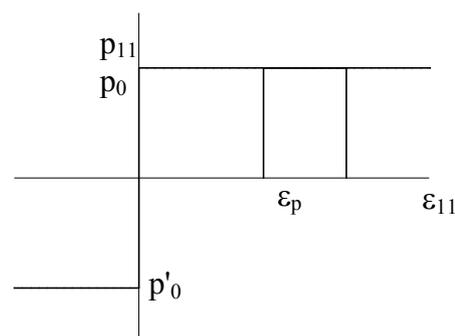


Рис. 3.

3) "Линейно-упрочняющийся материал" моделирует существование как участка линейной упругости, так и участка упрочнения (рис. 4). На участке *упрочнения* (при напряжении больше p_0) происходит изменение предела упругости при пластической деформации. Здесь как бы проявляется другое значение коэффициента линейности деформации по напряжению.

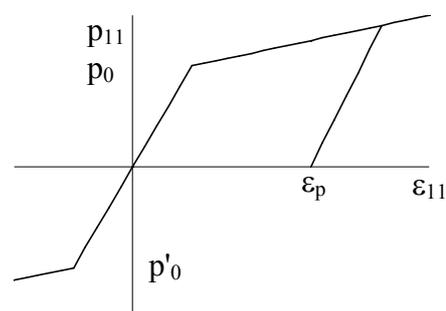


Рис. 4.

4) "Ползучесть" – свойство материала **изменять свою деформацию во времени** под действием постоянной нагрузки (рис. 5). Естественно, при разных нагрузках процесс ползучести протекает по-разному, и создать для ее описания какую-либо приемлемую, тем более, однозначную модель весьма сложно.



Рис. 5.

5) "Релаксация напряжений" – свойство предварительно нагруженного материала **снижать внутреннее напряжение** с течением времени (рис. 6). Обычно такое снижение моделируют асимптотическим падением напряжения до некоторого значения или до нуля.

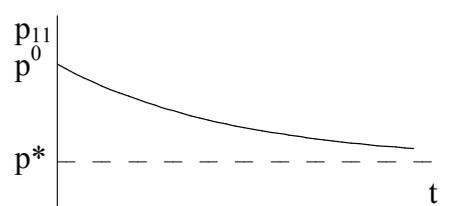


Рис. 6.

6) "*Усталость*" – свойство материала **снижать свой предел прочности** при воздействии периодически изменяющейся нагрузки. В условиях циклических нагрузок под определенным напряжением возникают и развиваются микрповреждения, приводящие к разрушению образца при некотором числе циклов. При напряжении p_0 , называемом *пределом выносливости*, образец не разрушается при практически бесконечном числе циклов нагружения (рис. 7).

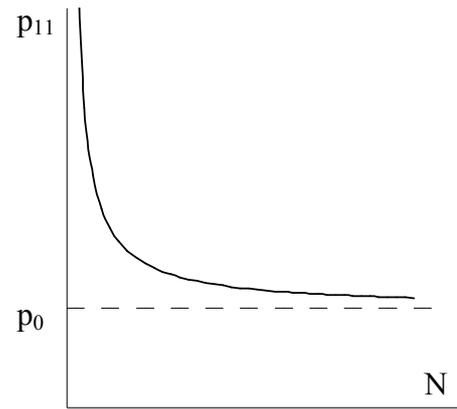


Рис. 7.

7) Особое место сегодня занимают материалы, обладающие свойством "гистерезиса". По сути, это свойство **неоднозначности кривой нагружения** в координатах "усилие – деформация" и зависимость этой диаграммы от скорости нагружения, т.е. от вида самого цикла. Так, например, для некоторого практически реализуемого во времени цикла деформации (рис. 8 а) зависимость развиваемой силы p_{11} от деформации ϵ_{11} приобретает вид, изображенный на рис. 8 б пунктиром. Причем верхняя часть кривой реализуется при растяжении образца с той скоростью, которая определена видом цикла, а нижняя – при сжатии. Средняя сплошная линия задает "статическую" диаграмму растяжения-сжатия, когда скорость деформации можно считать нулевой.

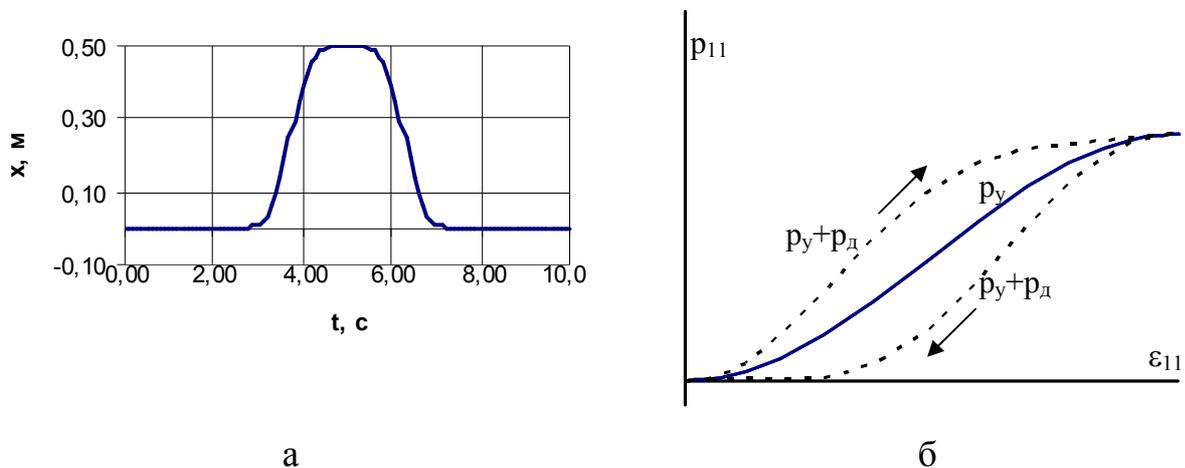


Рис. 8.

Составляющая силы напряжения p_y , не зависящая от скорости деформации, может считаться упругой. Составляющая p_d , определяемая алгебраической величиной скорости деформации, может считаться силой демпфирования. Природа демпфирования может быть любой, а сам эффект гистерезиса может наблюдаться как в области упругих деформаций, так и в области пластических деформаций. Последний эффект может выглядеть весьма сложно (рис. 9), если он сочетается еще и с ползучестью, как, например, на диаграмме испытаний стропы для грузов на внешней подвеске вертолета из синтетических волокон материала СВМ (в зарубежной литературе называемого кевларом).

Гистерезис ленты СВМ

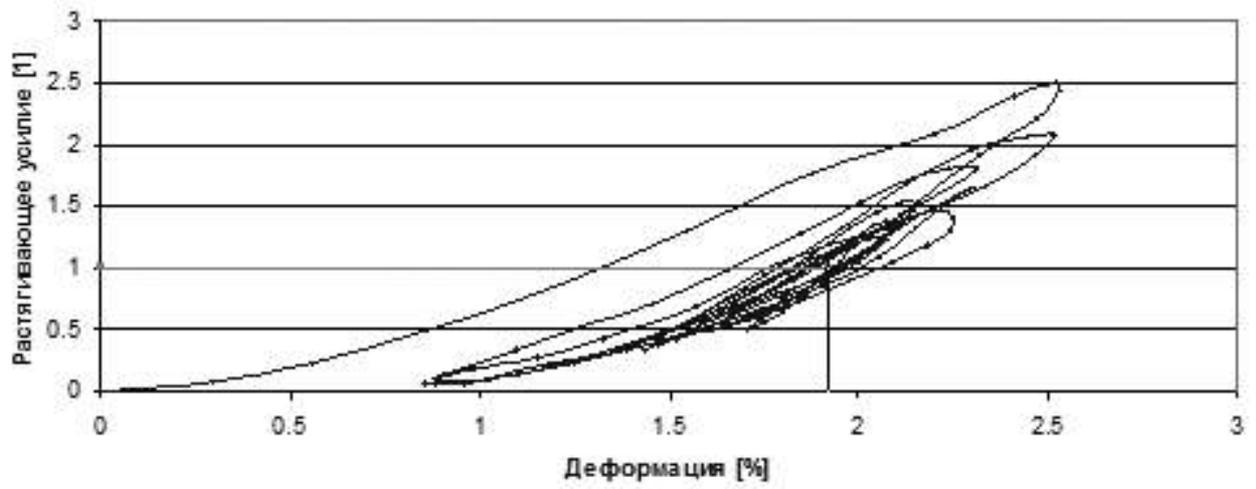


Рис. 9.

3. Численные методы в задачах механики сплошной среды

На определенном этапе развития авиации требования к точности результатов стали превышать возможности рассмотренных **теоретических** методов. Прежде всего, это связано с появлением летательных аппаратов сложных геометрических форм, не поддающихся математической идеализации, ростом скоростей движения и реальными свойствами воздуха (вязкость, сжимаемость). Поэтому возникла необходимость в экспериментальных методах, которые сегодня позволяют получить результаты с высокой точностью.

Один из основных принципов **экспериментальной** аэродинамики подсказан природой: например, воздушный змей можно запускать не только при ветре, но и в штиль, если обеспечить его движение относительно воздуха. Суть *принципа обратимости движения* состоит в предположении, что взаимодействие движущегося тела с покоящейся средой в точности такое же, как при обтекании средой покоящегося тела с той же относительной скоростью. Такое предположение вполне оправдано и законами механики. Этот принцип позволил создать целое научное направление: экспериментальные исследования в аэродинамических трубах и гидродинамических каналах.

Однако не следует переоценивать значение эмпирических выводов, достоверных только в условиях конкретного эксперимента. Для их более широкого использования требуются специальные научные методы: теория подобия, теория обратных задач, теория моделирования и т.п. В современной аэродинамике собственно экспериментальные результаты используются для корректировки результатов теоретических расчетов, для идентификации (уточнения характеристик) математических моделей.

В XXI веке становится очевидной необходимость разработки и применения **численных методов** решения задач механики сплошной среды. Прежде всего, это диктуется необходимостью решения таких задач, которые поставить и решить теоретическими или экспериментальными методами не удается.

Сегодня можно встретить большое количество пакетов прикладных программ для решения задач механики сплошной среды. Но далеко не все они обоснованы с математической точки зрения и дают достаточно адекватные результаты. Поэтому их использование не приводит к ошибкам и дает преимущества только тем их "пользователям", которые могут выявить пригодные именно для решения их задач математические методы и программные средства. Несомненно, такое выявление стоит достаточно дорого: нужны высококлассные специалисты в области математики, механики, программирования и информационных технологий. Но вложенные средства с лихвой окупаются последующим выигрышем в конкурентной борьбе.

На сегодняшний день можно считать научно обоснованными следующие численные методы решения задач механики сплошной среды:

– метод характеристик,

- метод конечных разностей (разностные схемы),
- метод конечных объемов,
- метод частиц в ячейках,
- метод конечных элементов,
- метод граничных элементов и панельный метод,
- метод дискретных вихрей и метод дискретных особенностей.

Все численные методы в механике сплошной среды используют дискретное представление среды: эйлеровы или лагранжевы ячейки, крупные частицы, конечные элементы, дискретные вихри, частицы, молекулы и т.п. Далее, если в классических подходах на дифференциальном уровне устанавливается связь для «точечных» объемов, то приемы вычислительной математики используют **приближенное представление уравнений баланса** для указанных элементарных (но конечных) объемов. Так, например, дифференциальное уравнение движения идеальной изотропной сжимаемой среды (*уравнение Эйлера* [28]):

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad}p$$

после дискретизации (разбивки на конечные элементы и замены производной некоторым конечным выражением, обозначенным $[\]$) приобретает "невязку" ε :

$$\left[\frac{d\mathbf{V}}{dt} \right] = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad}p + \varepsilon.$$

Если удастся научиться управлять этой невязкой в согласии со **своей** задачей, то результат будет похож на правду. В частности, например, если умело "подправлять" эту невязку, то можно ее трактовать как явление вязкости и решать задачу уже для вязкой среды, так как *дифференциальное уравнение движения изотропной вязкой сжимаемой жидкости (уравнение Навье-Стокса* [28]) отличается от уравнения для идеальной среды наличием двух последних слагаемых:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad}p + \frac{\lambda + \mu}{\rho} \text{graddiv}\mathbf{V} + \nu \Delta \mathbf{V}.$$

Установление адекватности такого представления для рассматриваемого явления — один из центральных моментов, который необходимо обеспечить для проведения осмысленного вычислительного эксперимента.

Что касается расплывшихся пакетов прикладных программ для решения задач механики сплошной среды, то здесь ключевым словом является слово **ДЛЯ!** Такие пакеты всегда исходно создаются **ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОЙ ЗАДАЧИ**. Их последующая модернизация всегда уводит от нее в сторону и далеко не всегда строго математически обоснована. Поэтому никогда не следует приступать к решению своей задачи, не убедившись в адекватности полученного с помощью такого пакета решения поведению реального рассматриваемого ВАМИ объекта. Безусловно, **ВСЕГДА** требуется настройка (если пакет достаточно универсальный) или даже модификация такого программного обеспечения **ДЛЯ РЕШЕНИЯ ИМЕННО ВАШЕЙ ЗАДАЧИ!**

3.1. Метод характеристик

Этот метод появился в докомпьютерную эпоху, поэтому в нем много математики. Попробуем понять **смысл** этого метода, а детали оставим математикам.

Итак, наши уравнения движения сплошной среды имеют вид дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка. Рассмотрим детально пример простейшего линейного дифференциального уравнения с частными производными первого порядка:

$$a_x \frac{\partial u}{\partial x} + a_y \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Согласно теории дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка линии в рассматриваемой плоскости (x, y) , описываемые обыкновенным дифференциальным уравнением (через дополнительную переменную s)

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = ds,$$

называются *характеристиками* [23].

Выясним, каким свойством обладают эти линии. В данном простейшем примере найти явный вид характеристик не представляет труда:

$$x = a_x s + C_1, y = a_y s + C_2, \text{ откуда: } y = \frac{a_y}{a_x} x - \frac{a_y}{a_x} C_1 + C_2 = \frac{a_y}{a_x} x - \bar{C}.$$

Из уравнения самой характеристики нетрудно видеть, что вдоль каждой характеристики значение выражения $a_y x - a_x y = \text{const}$. Таким образом, мы выяснили основное свойство характеристики: вдоль нее какое-то определенное соотношение сохраняет свое значение. Правда, на каждой характеристике эта константа может быть своя, но в данном простейшем примере можно сразу увидеть первый интеграл исходного уравнения: $u(x, y) = a_y x - a_x y + C$.

Для иллюстрации применимости *метода характеристик* рассмотрим уравнения **плоского установившегося движения идеальной политропной жидкости без массовых сил**. Вместо уравнений движения Эйлера [28] используем определение ротора скорости для плоского случая:

$$\frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x} = \Omega. \quad (3.1)$$

Интеграл Коши-Лагранжа [28] с учетом модели политропного процесса $\rho = C p^{1/n}$ можно записать в виде:

$$\frac{V_x^2 + V_y^2}{2} + \frac{n}{n-1} \frac{p}{\rho} = \frac{V_x^2 + V_y^2}{2} + \frac{a^2}{n-1} = \text{const}, \quad (3.2)$$

где введено обозначение $a^2 = n \frac{p}{\rho} = n C^{-n} \rho^{n-1}$. Уравнение неразрывности [28] в установившемся случае после несложных преобразований (деления на ρ , замены $\ln(\rho)$ через a с учетом постоянства n и C , умножения на a^2 и замены $\frac{a^2}{n-1}$ через $\frac{V_x^2 + V_y^2}{2}$ получит вид:

$$(a^2 - V_x^2) \frac{\partial V_x}{\partial x} - V_x V_y \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) + (a^2 - V_y^2) \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0. \quad (3.3)$$

Система уравнений (3.1), (3.3) относительно частных производных – линейная алгебраическая. Для этой системы уравнений можно составить уравнения *характеристик*, вдоль которых:

$$\frac{dV_x}{dx} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y} y', \quad \frac{dV_y}{dx} = \frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} y',$$

что можно использовать для исключения $\frac{\partial V_x}{\partial x}$ и $\frac{\partial V_y}{\partial x}$ из (3.1) и (3.3):

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial V_x}{\partial y} + y' \frac{\partial V_y}{\partial y} = \Omega + \frac{dV_y}{dx}, \\ & \left[-(a^2 - V_x^2) y' - V_x V_y \right] \frac{\partial V_x}{\partial y} + \left[a^2 - V_y^2 + V_x V_y y' \right] \frac{\partial V_y}{\partial y} = -(a^2 - V_x^2) \frac{dV_x}{dx} + V_x V_y \frac{dV_y}{dx}. \end{aligned} \right\}$$

Тогда условие неединственности решения этой системы сводится к равенствам нулю ее определителей:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & y' \\ -(a^2 - V_x^2) y' - V_x V_y & a^2 - V_y^2 + V_x V_y y' \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & \Omega + \frac{dV_y}{dx} \\ -(a^2 - V_x^2) y' - V_x V_y & -(a^2 - V_y^2) \frac{dV_x}{dx} + V_x V_y \frac{dV_y}{dx} \end{vmatrix} = 0.$$

Из первого квадратного уравнения следуют дифференциальные уравнения для двух семейств характеристик:

$$y' = \frac{V_x V_y \pm a \sqrt{V_x^2 + V_y^2 - a^2}}{V_x^2 - a^2},$$

которые существуют в вещественном пространстве только при $V_x^2 + V_y^2 > a^2$. Эту скорость a назвали *скоростью звука*. Из второго уравнения, используя найденное y' , можно получить линейные связи между $\frac{\partial V_x}{\partial x}$ и $\frac{\partial V_y}{\partial x}$, действительные

вдоль характеристик. Перейдя в этих связях от полных производных к дифференциалам, можно получить дополнительные соотношения для приближенного вычисления конечных приращений скорости ΔV_x и ΔV_y . Таким образом, если в каких-то **двух** близких точках пространства (например, точки \bullet на границе обтекаемого тела рис. 10 слева) известны значения скорости, то можно найти приближенное значение скорости в **третьей** точке (\circ), находящейся на пересечении двух характеристик различных семейств, проходящих через известные точки.

В более общем, трехмерном случае, семейство характеристик образует поверхность (рис. 10 справа).

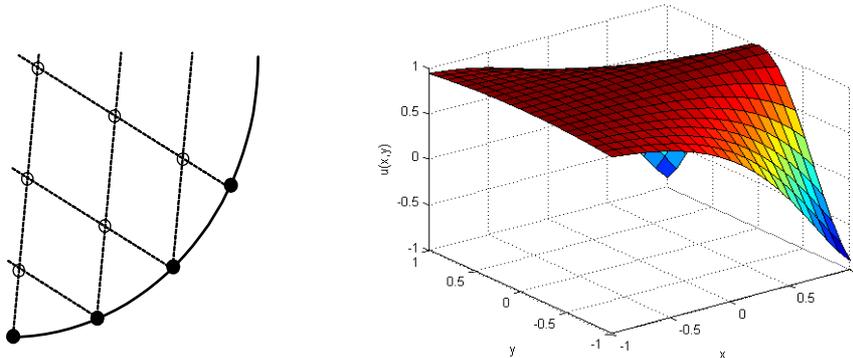


Рис. 10.

Этот численный метод в настоящее время применяется только для решения уравнений гиперболического типа (для сверхзвуковых течений обеспечивается корректная аппроксимация). Решение здесь рассчитывается с помощью характеристической сетки, которая выстраивается в процессе счета. Могут, однако, использоваться и такие схемы метода характеристик, в которых расчет ведется по слоям, ограниченным фиксированными линиями.

Метод характеристик позволяет точно определить место возникновения вторичных ударных волн внутри поля течения, как результат пересечения характеристик одного семейства. Однако если таких ударных волн появляется много, то встречаются трудности при расчете. Кроме того, в процессе вычислений может наблюдаться значительная деформация расчетной сетки. В этой связи методом характеристик целесообразно рассчитывать такие гиперболические задачи, в которых число разрывов невелико (например, установившиеся сверхзвуковые задачи газовой динамики).

3.2. Методы конечных разностей

Методы конечных разностей рассматривались в бакалавриате [30]. Как известно, основа этих методов заключается в приближенной замене производных конечно-разностными соотношениями, например:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{k+1,m} - u_{k,m}}{\Delta x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{u_{k,m+1} - u_{k,m}}{\Delta y}. \quad (3.4)$$

Область интегрирования разбивается на ячейки с помощью некоторой, как правило, прямоугольной фиксированной сетки. Уравнения механики сплошной среды, записываемые для каждой ячейки в виде приближенного соотношения, составляют систему алгебраических уравнений большой размерности. Таким образом, решение находится в виде табличных значений функций, заданных в сетке узловых точек, покрывающих все пространство среды (сеточные функции). Однако конечных разностей, типа (3.4), и сеток можно составить множеством разных способов, поэтому существует и много вариантов методов конечных разностей. Основную сложность в этом подходе составляет выбор вида конечно-разностных соотношений и сеток, которые переводят конкретную исходную задачу из дифференциального в конечный вид без нарушения важных для этой задачи законов сохранения.

3.3. Методы конечных объемов

Методы конечных объемов (контрольных объемов) стоят несколько особняком среди других численных методов механики сплошной среды, так как были разработаны в 1970-х годах для моделирования течений в областях сложной геометрии. Эти методы предлагают для дискретизации уравнений гидродинамики использовать интегральную формулировку законов сохранения. Балансовые соотношения записываются для небольшого конечного объема (рис. 11); их дискретный аналог получается суммированием по всем граням выделенного объема потоков массы, импульса и т.д., вычисленных по каким-либо квадратурным формулам.

Поскольку интегральная формулировка законов сохранения не накладывает ограничений на форму контрольного объема, методы пригодны для дискретизации уравнений гидрогазодинамики как на структурированных, так и на неструктурированных сетках с различной формой ячеек, что, в принципе, полностью решает проблему сложной геометрии расчетной области (рис. 11).

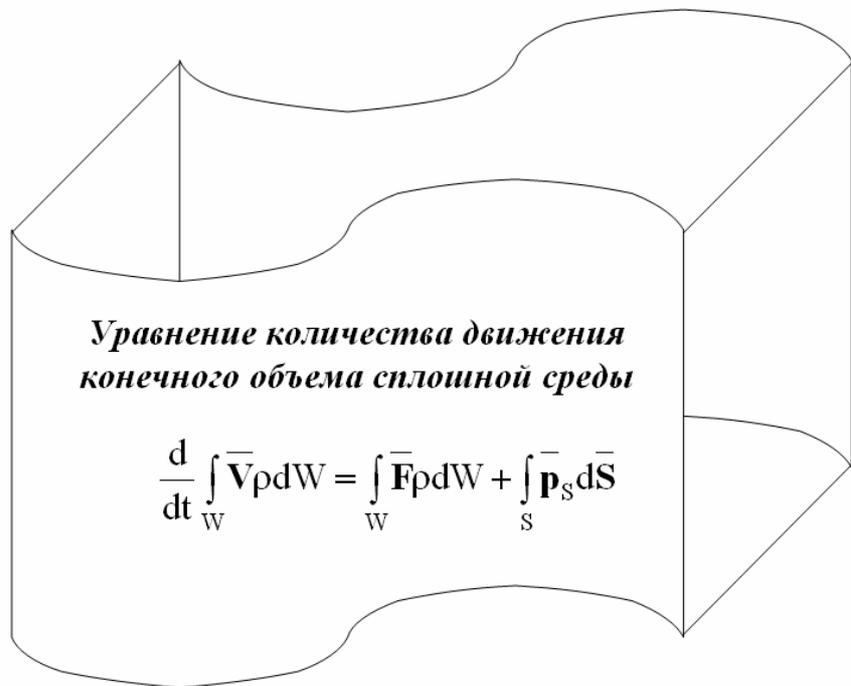


Рис. 11.

Разнообразие методов конечных объемов определяется применением тех или иных формул интерполяции сеточных функций, формул численного дифференцирования и интегрирования по объему и по границам и т.п. Таким образом, и у этих методов есть возможность адаптации к требованиям конкретной задачи.

3.4. Методы частиц в ячейках

В *методах частиц в ячейках* область решения разбивается неподвижной (эйлеровой) сеткой; однако сплошная среда трактуется дискретной моделью – рассматривается **совокупность частиц** фиксированной массы (лагранжева сетка частиц), которые и движутся через эйлерову сетку ячеек (рис. 12). Частицы служат для определения параметров самой жидкости (массы, энергии, скорости), в то время как эйлерова сетка используется для определения параметров полей (давления, плотности, температуры и др.).

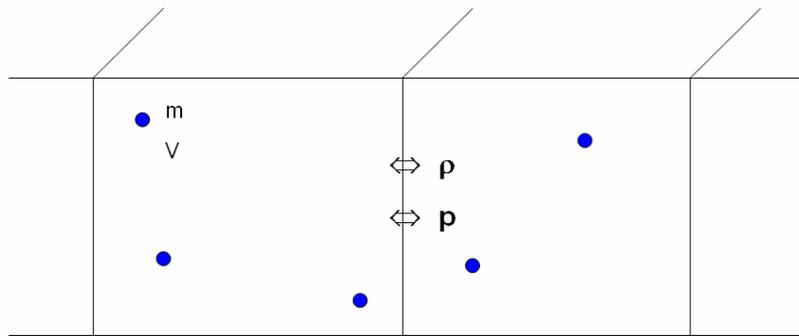


Рис. 12.

Методы частиц в ячейках позволяют исследовать сложные явления в динамике многокомпонентных сред, частицы хорошо «следят» за свободными поверхностями и линиями раздела сред, взаимодействием разрывов. Однако методы частиц в ячейках обладают и рядом недостатков, главный из которых – вычислительная неустойчивость, проистекающая из-за дискретного представления сплошной среды (конечное число частиц в ячейке).

3.5. Методы конечных элементов

Особенно широко используются в механике деформируемого твердого тела *методы конечных элементов*, которые реализуются в 6 этапов. Исходные уравнения и динамические краевые условия удовлетворяются здесь только в некотором осредненном смысле для выбранного типичного конечного «элемента» среды. При этом аппроксимация различных полей проводится на конечном элементе локально и независимо от его положения в общей модели.

1. Выбор конечно-элементной модели (сетки – рис. 13)

Деформируемое тело (конструкция) разбивается на конечные элементы (КЭ), достаточно хорошо покрывающие область исследуемого объекта. Конеч-

ные элементы могут иметь различную форму и различные размеры. В результате разбивки создаётся сетка из границ элементов. Пересечения этих границ образуют узлы. Ансамбль из всех конечных элементов и узлов является основой конечно-элементной модели деформируемого тела.

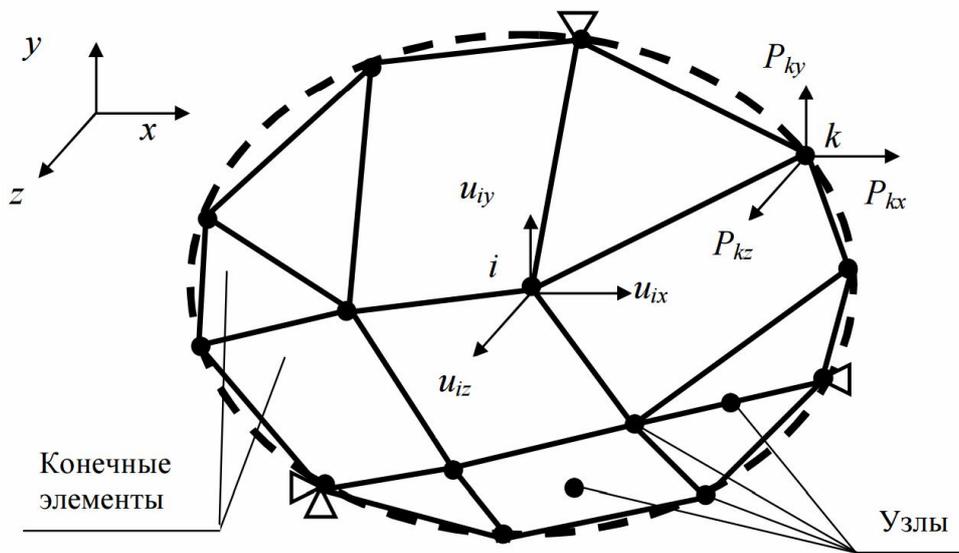


Рис. 13.

Выбор **формы** и **размера** КЭ зависит от вида напряжённо-деформированного состояния, формы и нагрузки исследуемого тела. Стержневой КЭ применяется для моделирования одноосного напряжённого состояния при растяжении-сжатии, а также в задачах о кручении или изгибе. Плоский (двумерный) КЭ в виде, например, треугольной или четырёхугольной пластины используется для моделирования плоского напряжённого или плоского деформированного состояния. Объёмный (трёхмерный) КЭ в виде, например, тетраэдра, шестигранника или призмы служит для анализа объёмного напряжённого состояния. КЭ в форме кольца применяется в случае осесимметричного напряжённого состояния. Для расчёта изгиба пластины берётся соответствующий плоский КЭ, а для расчёта оболочки используется оболочечный КЭ. Разумный выбор конечно-элементной модели позволяет решать даже такие задачи, в которых определяются и развиваются разрушения целостности тела.

2. Выбор способа аппроксимации (рис. 14)

Искомая функция – поле перемещений точек деформированного тела – аппроксимируется с помощью множества кусочно-непрерывных функций.

Выбор вида этих функций опять же диктуется задачей: ими могут быть кусочно-линейные функции (с сохранением на границе элементов непрерывности только самого значе-

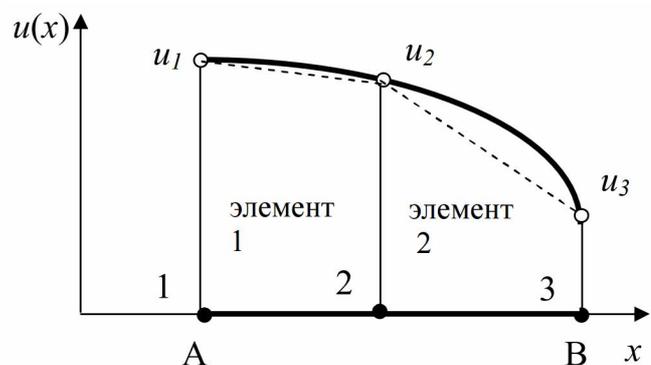


Рис. 14.

ния функции), квадратичные (с сохранением непрерывности не только функции, но и ее производной). Такой выбор аппроксимирующих функций позволяет интерполировать вектор перемещения на любую точку внутри области тела.

3. Уравнения жёсткости конечного элемента
4. Составление общей системы уравнений равновесия всей модели
5. Задание граничных условий
6. Решение общей системы уравнений

Общая система уравнений равновесия, полученная методом конечных элементов для линейно упругой модели тела, является с математической точки зрения системой линейных алгебраических уравнений. После учета правильно наложенных связей, не допускающих движения модели как абсолютно твёрдого тела, определитель матрицы не равен нулю и, следовательно, существует единственное решение – общий вектор узловых перемещений.

3.6. Методы граничных элементов

Методы граничных элементов (методы граничных интегральных уравнений) можно рассматривать, как модификацию методов конечных элементов, состоящую в сведении краевой задачи для дифференциальных уравнений к интегральным уравнениям. Основная идея взята из методов конечных объемов, но применена только к границам: все интегральные соотношения записываются на границах элементов (рис. 15).

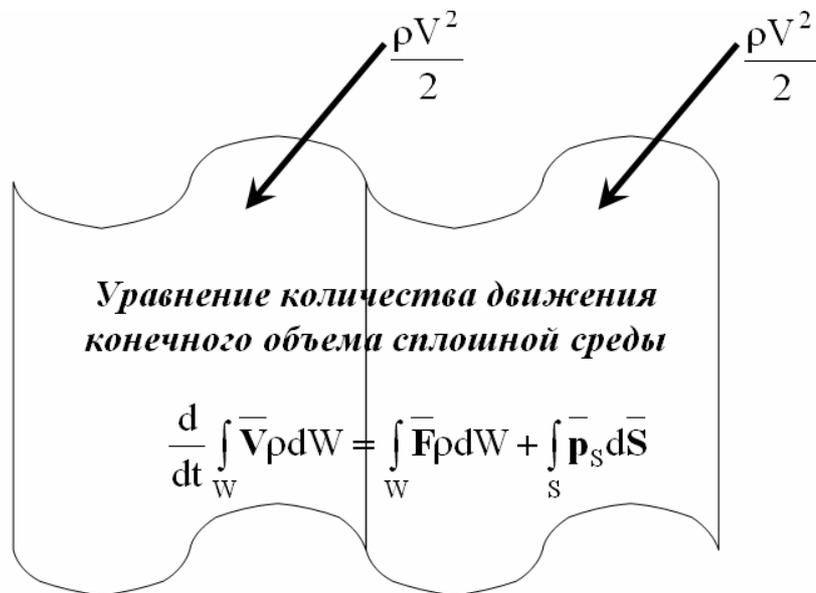


Рис. 15.

3.7. Панельные методы

В **панельных методах**, поверхность твердого тела, находящегося в жидкой или газообразной среде, заменяется мозаикой плоских пластин малого размера. Воздействие на каждую из таких пластин рассчитывается отдельно, но при этом учитывается их взаимное влияние (интерференция, подобное влиянию вихрей по формуле Био и Савара). В этом смысле панельные методы можно трактовать, как модификацию методов граничных элементов (рис. 15). В некоторых задачах, связанных со сложными течениями вихревой пелены, в методы достаточно органично вводится цепочка подвижных дискретных вихрей.

3.8. Методы дискретных вихрей и дискретных особенностей

В *методах дискретных вихрей* и в *методах дискретных особенностей* вся область, занятая несжимаемой идеальной сплошной средой, разбивается на малые, но конечные участки – ячейки, в которых основные параметры среды считаются постоянными. В этом случае дифференциальные уравнения движения сплошной среды можно представить в виде системы алгебраических уравнений. В этой системе столько уравнений, сколько ячеек выбрано для разбиения, т.е. достаточно много. Современные компьютеры могут в обозримое время решить подобные системы для сотен тысяч ячеек. В этих уравнениях, естественно, необходимо учитывать взаимодействие отдельных ячеек друг с другом (см. Закон Био и Савара [28]). Поэтому приходится допускать для каждой отдельной ячейки дополнительные особенности движения, например, приписывать ей определенную величину вектора ротора скорости – дискретный вихрь (рис. 16).

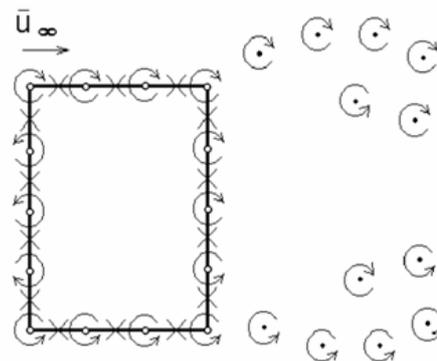


Рис. 16.

Такого в природе, естественно, не существует, так как нарушает вторую теорему Гельмгольца. Однако в рамках некоторого приближения рассматриваемой дискретной постановки задачи к реальной непрерывной задаче сплошной среды такая процедура вполне оправдана. Она тем более оправдана для невязких потенциальных вихревых течений, которые описываются линейными уравнениями. В силу этой линейности справедлив принцип суперпозиции – сложения полей скоростей от всех дискретных вихрей. Более того, в конце XX, начале XXI века математикам (Лифанов Иван Кузьмич) удалось доказать корректность такой формулировки задачи не только для схем построения дискретных вихрей, но и для некоторых схем других дискретных математических особенностей (типа диполей, вихревых рамок и т.п.).

Методы дискретных вихрей показали свою работоспособность в случаях трехмерных нестационарных течений. Появились модификации этих методов и для отдельных вариантов вязких течений. Разработаны и способы имитации твердых границ, являющихся источниками завихренностей: *методы присоединенных вихрей* и *методы отражения*. Для моделирования вихревой пелены, образующейся на острых кромках обтекаемых тел, разработаны методы генерации свободных вихрей.

3.9. Статистический метод частиц в ячейках

Необходимо упомянуть еще об одном типе математических моделей для задач обтекания тела разреженным газом. Имеется в виду статистический метод

частиц в ячейках, основанный на отыскании функции распределения $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{V})$ одноатомных молекул в 6 -мерном пространстве координат \mathbf{x} и скоростей \mathbf{V} частиц. Этот процесс сводится к решению интегро-дифференциального уравнения Больцмана для f в фазовом пространстве размерностью $6 \times N$, где N – количество частиц в рассматриваемом объеме. Такая постановка задачи требует неординарного объема оперативной памяти вычислительных комплексов не только для описания самих функций распределения, но и для построения вычислительного процесса, который в таких задачах можно реализовать только с помощью метода статистических испытаний (метода Монте-Карло). Единственным способом упрощения постановки такой задачи является применение дополнительных предположений о виде искомого решения, т.е. учет индивидуальных особенностей решаемой задачи. Тем не менее, ни достаточно эффективных подходов к такому упрощению, ни математической обоснованности самого процесса решения получающейся совокупности интегро-дифференциальных уравнений на сегодняшний день нет.

3.10. Методы моделирования процессов разрушения

Особняком стоят методы моделирования процесса разрушения твердого тела, т.е. потери сплошности. Во многих случаях интересным является сам процесс разрушения, поскольку, например, появление микротрещин еще не означает полную потерю работоспособности объекта. Основные трудности расчетов на таких моделях кроются в преодолении некорректности граничных условий и несостоятельности дискретизации, когда при мельчении расчетной сетки не удается обеспечить сходимость результатов. Несмотря на большое количество разработок этой темы, на сегодняшний день говорить о существовании математически обоснованных методов моделирования процесса разрушения твердого тела нельзя.

Глава 4. Методы расчета движения летательных аппаратов

4.1. Эвристический метод идентификации характеристик математических моделей

Примером задачи идентификации может служить уточнение характеристик летательного аппарата по результатам летных испытаний или расследование причин авиационных происшествий. В этих случаях считается априори известным аналитический вид функциональной зависимости выходного параметра от входных $y = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_k; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s) = \varphi(X; \Lambda)$, где $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s)$ – вектор параметров модели, для которых известны предварительные оценки их значений: $\Lambda^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_s^{(0)})$. Задача формулируется так: необходимо подобрать план вычислительного эксперимента из N опытов $X_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik})$, где $i = 1, 2, \dots, N$, чтобы по их результатам можно было бы уточнить параметры математической модели наилучшим образом. Под наилучшим здесь обычно понимают минимизацию обобщенной дисперсии оценок.

Конечно, такая задача в общей формулировке выглядит неразрешимой. Тем более, отпугивающим является тот факт, что эта задача чаще всего возникает при недостаточно исчерпывающей информации о поведении оригинала. Однако следует иметь в виду требуемый конечный результат, например, при расследовании авиационного происшествия необходимо сформулировать ВСЕМ ПОНЯТНЫЙ вывод. Это значит, что все рассуждения в процессе решения задачи идентификации должны быть логически обоснованы.

При отсутствии полных и достоверных данных летных испытаний или в случае их собственной противоречивости может помочь только подробный "физический" анализ качественной взаимосвязи управляющих воздействий и параметров движения с целью получения наиболее близких к летным испытаниям результатов расчетов. Этот подход должен учитывать конкретные требования к результатам, а не преследовать цели ответов на все бесчисленное множество возможных вопросов. Он основывается на приоритете "физичности" данных вычислительного эксперимента и летных испытаний над их числовыми значениями.

При этом необходимо четко осознавать, что браться за идентификацию математической модели для всех возможных случаев – бессмысленно, ибо кроме регистрируемой (с погрешностью) полетной информации необходимо достаточно точно знать и внешние условия, и состояние летательного аппарата. Но именно этой информации чаще всего нет – **невозможно** зарегистрировать пространственно-временные характеристики атмосферы, включая порывы ветра, невозможно точно знать характеристики летательного аппарата. Поэтому Можно пытаться решить эту задачу лишь для частных случаев математических моделей, описывающих отдельные этапы полета в отдельных известных условиях.

Кроме того, следует заметить, что попытка воспроизвести в вычислительном эксперименте полет с зарегистрированными отклонениями органов управ-

ления априорно обречена на неудачу, так как погрешности регистрации параметров полета и неизвестные внешние воздействия приводят к их рассогласованию – такая совокупность параметров движения нарушает уравнения динамики полета.

Перечисленная совокупность методических сложностей такой задачи вместе с большим опытом решения задач динамики полета летательных аппаратов позволил разработать эвристический метод идентификации математических моделей [29], представляющий собой ряд последовательных этапов анализа:

1) разделение задачи в различных степенях свободы (продольного и бокового, поступательного и вращательного движений, как это практикуется в динамике полета);

2) выбор данных летных испытаний, описывающих рассматриваемый вид движения;

3) выявление и устранение возможных внутренних несогласованностей в данных летных испытаний (устранение несогласованностей подразумевает не исправление данных, а лишь замену одних параметров другими, известным образом с ними связанными);

4) выявление особенностей выполнения исследуемого этапа реального полета (характерных моментов времени и действий);

5) выбор факторов летных испытаний, по которым требуется обеспечить адекватность математической модели (с их изменением по траектории должно быть качественно согласовано изменение результатов расчетов);

6) выдвижение гипотез об идентифицируемых параметрах (возможных причинах их отклонения от штатных или зарегистрированных);

7) проведение вычислительного эксперимента (подбор идентифицируемых параметров методом последовательных приближений);

8) анализ результатов расчетов и оценка проверяемых гипотез.

Рассмотрим пример решения задачи идентификации параметров математической модели посадки самолета Ил-76ТД на ледовый аэродром в Антарктиде. В Интернете размещены видеоматериалы таких посадок. Характерным явлением в нескольких из них является разворот самолета в конце пробега, т.е. на малой скорости (см. рис. 17, на которых пробег изображен справа налево). Известным является только то, что можно зафиксировать на видео.

Эвристическим методом идентификации был проведен вычислительный эксперимент, воспроизводивший такую посадку. При этом удалось идентифицировать следующие параметры, о которых можно было бы что-то узнать при организации специального расследования, которого, естественно, не было:

– масса самолета;

– скорость бокового ветра;

– коэффициент сцепления ВПП;

– манера пилотирования на ВПП (моменты включения/выключения реверса и тормозов, логику управления элеронами, рулем направления и передней управляемой стойкой шасси).



Положение самолета на 30 с пробега



Положение самолета на 40 с пробега



Положение самолета на 55 с пробега



Положение самолета на 69 с пробега

Рис. 17.

В итоге такой эффект (разворота), как на видео, был зафиксирован (см. рис. 18 и рис. 19 где время отсчитывается от момента касания ВПП).

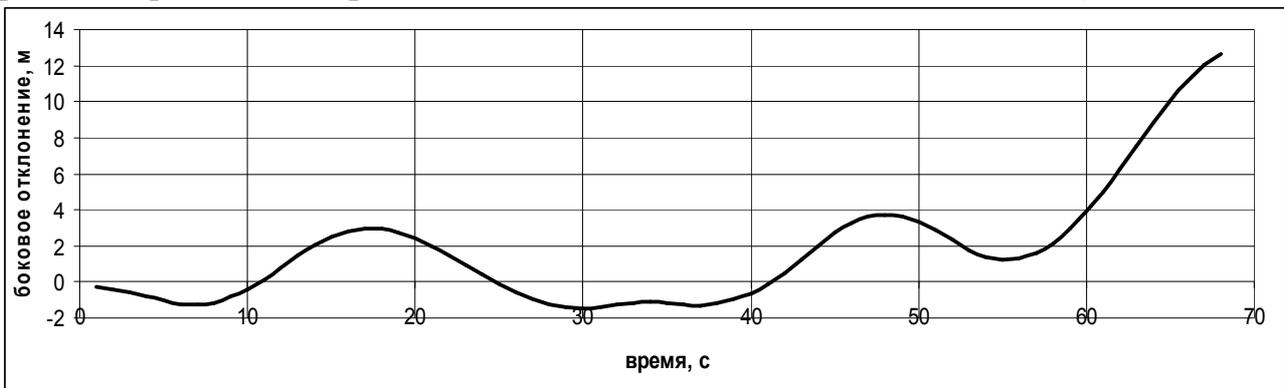


Рис. 18. Боковое отклонение от оси ВПП на пробеге

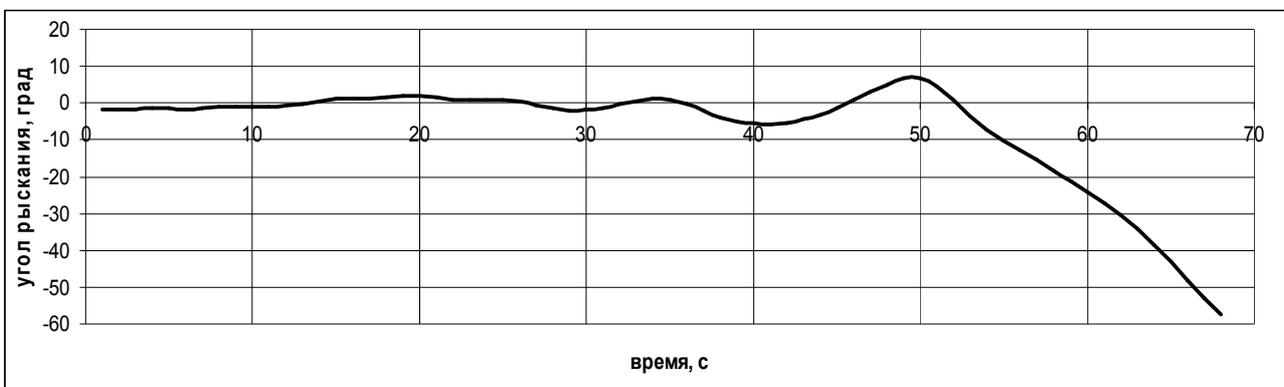


Рис. 19. Угол рыскания на пробеге

Удалось показать, что манера управления пилота в этих условиях мало влияет на качественный характер поведения самолета. Самый существенный фактор, приводящий к такому маневру, скрывается в особенностях связи продольного и поперечного сцепления колес шасси с ВПП.

4.2. Математическая модель явления гистерезиса

В 2.3 встречалось описание такого явления, как гистерезис, особенность которого кроется в зависимости протекания процесса от его направления. Ключевым словом для описания этого явления может служить слово "процесс", так как именно фактор времени, как мы покажем, является основным для возможности построения математической модели этого явления.

Рассмотрим в качестве первого приближения математическое описание явления гистерезиса с помощью двух слагаемых:

$$F(x, \dot{x}) = F_y(x) + F_d(\dot{x}), \quad (4.1)$$

где $F(x, \dot{x})$ – общее усилие, развиваемое материалом при деформации x , $F_y(x)$ – упругая составляющая, зависящая только от деформации x , $F_d(\dot{x})$ – диссипативная составляющая, зависящая только от скорости деформации \dot{x} .

Понятно, что такое упрощенное – аддитивное представление функции от двух переменных – не может рассматриваться как универсальное. Однако и это приближение дает весьма неплохие результаты при интерпретации экспериментальных данных.

В представлении (4.1) классический линейный гистерезис гипотетического материала должен выглядеть следующим образом (рис. 20, 21).

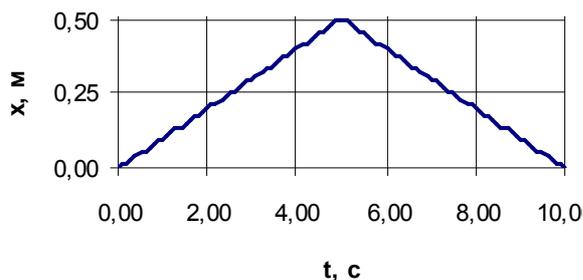


Рис. 20. Тестовая гипотетическая деформация

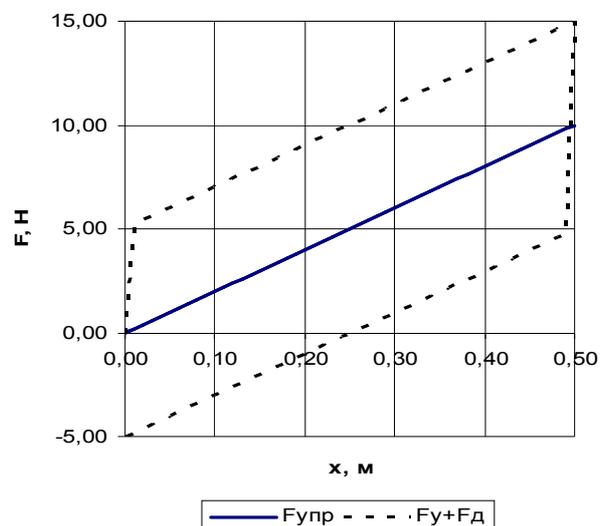


Рис. 21. Силовая диаграмма деформируемого гипотетического материала

Может вызвать вопросы часть диаграммы с отрицательными значениями усилия, чего в практике экспериментирования не бывает. Однако такие усилия неизбежно существуют в любой упруго-диссипативной системе, только заме-

рить их на обычных стендах невозможно, так как в этом случае образец в процессе разгрузки высвобождается. Этот недостаток легко можно исправить в математической модели, но он говорит о необходимости аккуратной постановки эксперимента.

Ширина петли (по оси y) зависит от величины \dot{x} . Если материал анизотропен и имеет различные диссипативные характеристики при растяжении и сжатии, то петля становится несимметричной. Симметрию она может потерять и от вида реализуемого процесса деформации, как это будет видно из дальнейшего материала.

В предложенном гипотетическом примере входящие в (4.1) слагаемые реализованы в следующем, линейном виде:

$$F_y = (20 \text{ Н/м}) \cdot x, \quad F_d = (50 \text{ Н} \cdot \text{с/м}) \cdot \dot{x}. \quad (4.2)$$

Однако даже небольшие осложнения аддитивной модели (4.1) дают хорошие результаты. Так, например, удастся воспроизвести на такой математической модели петлю гистерезиса, полученную в реальном эксперименте (рис. 9), воспроизводящем колебания груза на упруго-диссипативной ленте. Для этого необходимо проанализировать физические особенности процесса и представить их математически:

– в свободном состоянии ленты без груза и без деформации $F_y(\varepsilon=0) = 0$, $F_d(\dot{\varepsilon}=0) = 0$;

– в установившемся состоянии груза, подвешенного на ленте, деформации $\varepsilon = 0,19$ соответствует вес груза $F_y(\varepsilon=0,19) = 1$, $F_d(\dot{\varepsilon}=0) = 0$;

– по окончании первого периода колебаний лента, имея нулевую скорость деформации и существенно ненулевую деформацию, тем не менее развивает силу, очень близкую к нулю;

– за 8 периодов амплитуда колебаний уменьшилась примерно в 2,5 раза.

Эти свойства дают возможность ввести аппроксимацию упругой и диссипативной составляющих усилия, развиваемого материалом при деформации, в виде простых функций:

$$F_y = k \cdot \varepsilon^n, \quad F_d = p \cdot \dot{\varepsilon}. \quad (4.3)$$

Путем простого подбора (даже без решения задачи аппроксимации) найдены приемлемые коэффициенты для указанных функций: $k = 0,2$; $n = 2,5$; $p = 0,35$. Результат такой грубой аппроксимации представлен рис. 22.

Модель гистерезиса рис. 22 имеет "классический" (симметричный) характер. Однако ее можно существенно улучшить с целью приближения к наблюдавшейся в эксперименте зависимости (рис. 9) за счет усложнения аппроксимации диссипативной силы, например, $F_d = p(t) \cdot \dot{\varepsilon}$. Конечно, в этом случае необходимо задавать функцию $p(t)$ таким образом, как она реализовывалась в эксперименте. К счастью, в описании эксперимента присутствовали такие данные. Полученные результаты с зависимостью вида $p(t) = 1,3e^{-2t}$ и коэффициентов $k = 0,25$; $n = 2,5$ представлены на рис. 23.

Модель гистерезиса

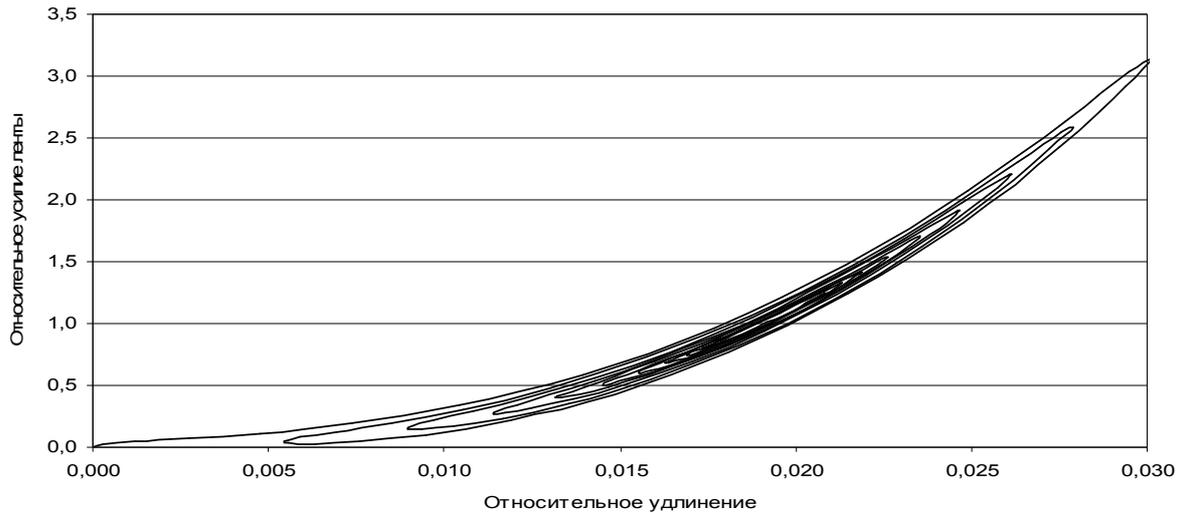


Рис. 22. Расчет простейшей модели гистерезиса

Модель гистерезиса

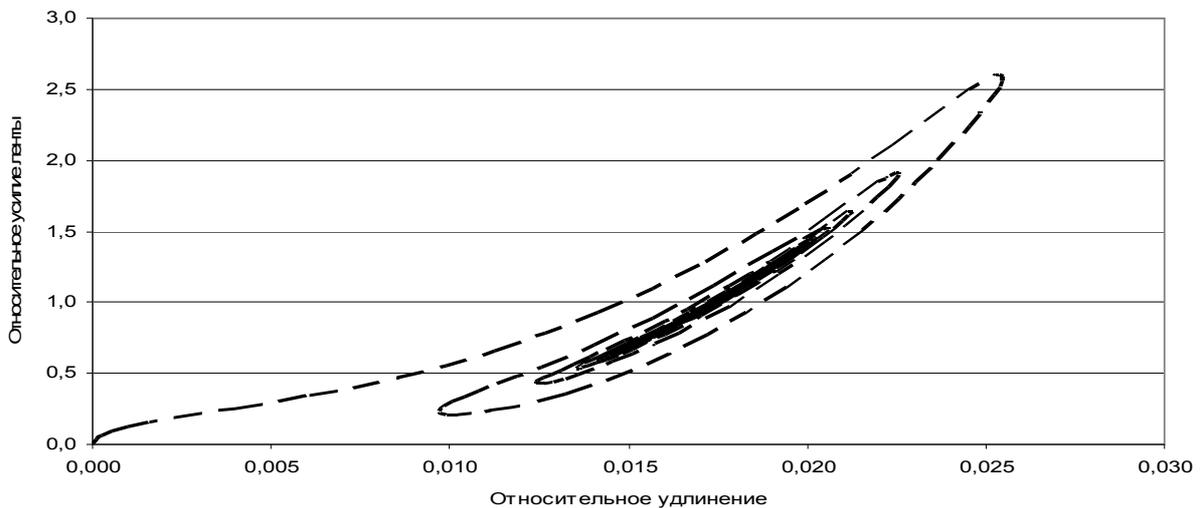


Рис. 23. Расчет улучшенной модели гистерезиса

4.3. Оценка управляемости самолета

В авиастроении существует множество показателей, которые, так или иначе, характеризуют управляемость летательного аппарата. Так, например, есть группы коэффициентов, оценивающих маневренные возможности, расход руля высоты при разгоне и торможении, усилия, потребные для перемещения ручки управления на единицу и т.д. Однако они определяются по балансировочным диаграммам, исходя из упрощенных, линеаризованных уравнений динамики полета, и их можно применять лишь для качественного анализа.

Существуют и другие попытки определения характеристик управляемости, как, например:

$$\text{показатель управляемости} = \frac{\text{величина, характеризующая реакцию (движение) воздушного судна на действия пилота}}{\text{величина, характеризующая действия пилота}}$$

Однако такая мгновенная характеристика может использоваться лишь в качественном анализе.

Для разработки нового **обобщенного** показателя была проанализирована физическая сторона вопроса, что мешает выявлению такой "интегральной" оценки.

Во-первых, в практике далеко не всегда бывает достаточно исходной информации, бывают и сбои в записях параметров полета.

Во-вторых, следует учесть возможность отсчета параметров движения не от нулевого уровня, а от некоторого "балансирующего" положения.

В-третьих, следует учесть, что реальное действие рулей возникает всегда с некоторым запаздыванием – временным лагом – отражающим инертность ВС.

Все это навело на мысль составить показатель, близкий к коэффициенту корреляции, который и предназначен для оценки связи двух параметров.

Таким образом, был предложен *коэффициент управляемости*, который напоминает коэффициент корреляции:

$$K(\tau, \delta_0, y_0) = \frac{\frac{1}{T} \int (\delta(t) - \delta_0) \cdot (y(t + \tau) - y_0) \cdot dt}{\sqrt{\frac{1}{T} \int (\delta(t) - \delta_0)^2 \cdot dt} \cdot \sqrt{\frac{1}{T} \int (y(t + \tau) - y_0)^2 \cdot dt}}, \quad (4.4)$$

где δ – параметр, характеризующий действие органа управления (например, отклонение элеронов δ_y), δ_0 – балансирующее значение действия органа управления (для строго симметричного участка полета $\delta_0 = 0$), y – оцениваемый эффект управления (например, угловая скорость крена ω_x), y_0 – балансирующее значение эффекта управления (например, может быть принято $y_0 = \bar{y} = \frac{1}{T} \int y(t + \tau) \cdot dt$), t – текущее время, τ – временной лаг, T – период времени

для определения коэффициента управляемости.

Поскольку устройства регистрации полетной информации работают с дискретными параметрами, то при условии равной дискретности записей управляющего воздействия и эффекта от него Δt коэффициент управляемости вычисляется следующим образом:

$$K(\tau, \delta_0, y_0) = \frac{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\delta_i - \delta_0) \cdot (y_{i+k} - y_0)}{\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\delta_i - \delta_0)^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_{i+k} - y_0)^2}}, \quad (4.5)$$

где $\tau = k \cdot \Delta t$.

С помощью статистического расчета этой характеристики по данным записей регулярных полетов можно проследить запаздывание реакции самолета на действия пилота, эффективность такой реакции и изменение ее в течение срока эксплуатации экземпляра самолета. Более того, с помощью коэффициента управляемости можно оценивать эффективность систем управления и даже их отдельных узлов.

4.4. Устойчивый вычислительный метод расчета движения летательного аппарата на шасси

Для каждой отдельной задачи следует разрабатывать свою математическую модель. Это не значит, что каждый раз необходимо выводить новые законы природы или использовать новые методы вычисления. Но это значит, что **все** этапы разработки математической модели необходимо пройти заново, проверив пригодность для данных исследовательских целей каждого элемента, заимствованного у других исследователей.

Такое жесткое правило – не блажь, а реальная необходимость, в чем убеждает материал, изложенный в данном параграфе.

Дело в том, что получение результатов с помощью математических моделей может быть проиллюстрировано рис. 24, подчеркивающим, что появление погрешностей возможно на всех стадиях.

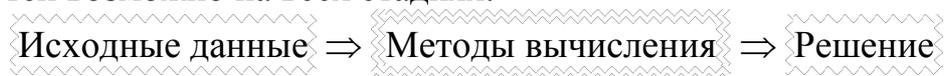


Рис. 24. Происхождение погрешностей математических моделей

При построении математических моделей динамики полета необходимо рассматривать динамическую систему "самолет – шасси – земля". Для описания движения планера можно использовать известные уравнения динамики полета. Однако описание движения стоек шасси даже только в вертикальном направлении не так тривиально.

Наиболее общий подход к описанию этого движения базируется на уравнении динамики материальной точки (второй закон Ньютона):

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = N - F_a - F_r - mg, \quad (4.6)$$

где m – масса подвижной части стойки шасси, g – ускорение силы тяжести, $d^2 y/dt^2$ – вертикальное ускорение подвижной части стойки, N – сила реакции ВПП на пневматики стойки, F_a – упругая сила (газового амортизатора стойки), F_r – диссипативная сила (гидравлического амортизатора стойки и сил трения). При этом считается, что изменение N определяется только обжатием пневматиков "е", а F_a – обжатием стойки "s". F_r принято считать зависящим и от обжатия стойки, и от скорости изменения ее обжатия " \dot{s} ". Все зависимости N , F_a , F_r от своих аргументов являются официальными характеристиками шасси. В целях облегчения изложения здесь не приводятся соотношения, описывающие кинема-

тику стоек, а движение шасси рассматривается строго в вертикальном направлении. Заметим лишь, что воздействие каждой стойки на фюзеляж в вертикальном направлении сводится к величине (рис. 25):

$$F_a + F_r + mg, \quad (4.7)$$

здесь слагаемое mg учитывает разгрузку планера от катящейся по земле стойки (вес воздушного судна обычно считается вместе с шасси).

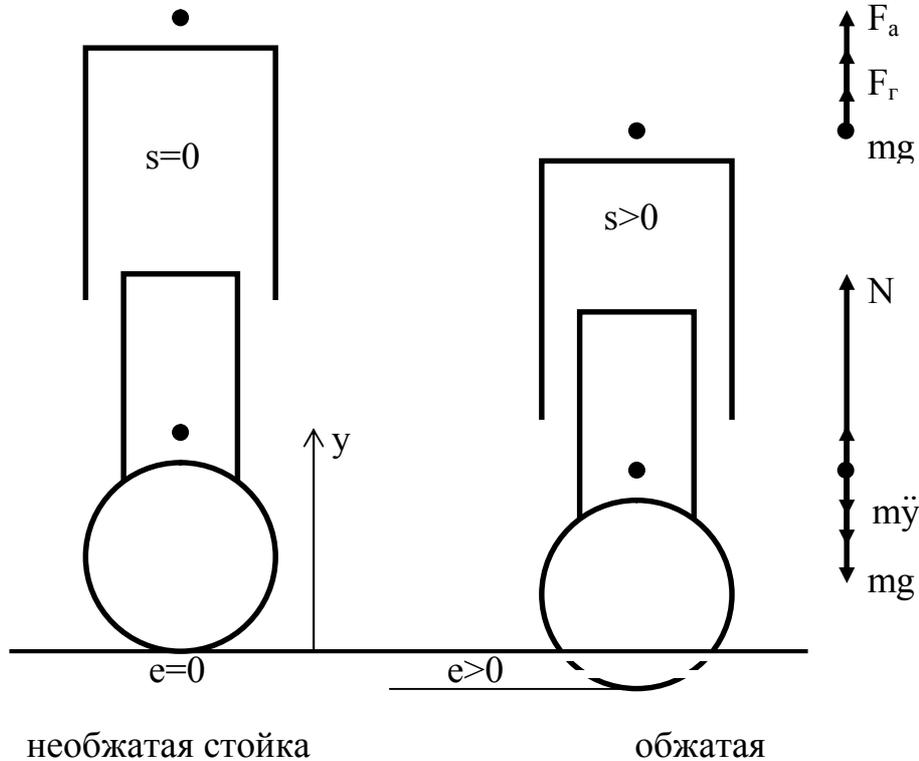


Рис. 25.

Для редукции уравнений второго порядка типа (4.6) в систему двух уравнений первого порядка существуют хорошо известные приемы – таким образом записывается известная классическая система уравнений динамики полета. Для численного интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производной, вида $\frac{dy}{dt} = f(y, t)$ разработано большое количество разностных методов. Наиболее распространенные из них основаны на нисходящих разностных схемах явного вида, позволяющих по известным значениям интегрируемой функции на n -ом шаге вычислить ее значение для $(n+1)$ -го шага по прямым формулам, как, например, в простейшем разностном методе Эйлера первого порядка:

$$\frac{dy}{dt} \approx \frac{y_{n+1} - y_n}{t_{n+1} - t_n}; \quad y_{n+1} = y_n + f(y_n, t_n) \cdot (t_{n+1} - t_n), \quad (4.8)$$

где y_n – известное значение интегрируемой функции на текущем шаге, y_{n+1} – искомое значение интегрируемой функции на следующем шаге, t_n – момент времени начала очередного шага интегрирования, t_{n+1} – момент времени конца

очередного шага интегрирования, $(t_{n+1} - t_n)$ – величина шага интегрирования. Казалось бы, никаких проблем не должно быть...

Были проведены расчеты движения самолета по земле в реальном случае летной эксплуатации с помощью моделей, основанных на некоторых наиболее распространенных нисходящих разностных методах [23, 30]:

- 1) метод Эйлера (простейший),
- 2) метод Эйлера (модифицированный с расчетом на 1/2 шага),
- 3) метод Эйлера с пересчетом (то же, что метод Рунге-Кутты II порядка с расчетом в крайних точках шага),
- 4) метод "прогноз-коррекция" I порядка (простейший),
- 5) метод Рунге-Кутты IV порядка (стандартный),
- 6) метод Адамса II порядка,
- 7) метод Адамса III порядка.

Улучшенные многошаговые методы типа "прогноз-коррекция" очень чувствительны к началу интегрирования другими, одношаговыми методами, поэтому имеют явные признаки неустойчивости и здесь не анализировались.

Результаты оказались весьма красноречивыми: ни один из перечисленных методов даже с весьма малым шагом интегрирования 0,05 с не дал устойчивого решения. Расчеты проводились на примере реального испытательного взлета самолета Ил-96-300 в ординарных условиях, но за время до 0,45 с полученные решения выходили за разумные границы (о "потере" контакта колес с землей можно судить по обнулению обжатия пневматиков, а о "разрушении" колес – по обжатию, превосходящему размеры пневматиков).

Формально для всех рассмотренных схем существуют области устойчивости решения, но они могут требовать шага интегрирования много меньше 0,002. Помимо практического неудобства применения таких шагов интегрирования для получения результатов в обозримое время, существует другая проблема. При таких шагах интегрирования, т.е. при таких высоких частотах колебательных процессов, эмпирические характеристики амортизаторов, полученные в статических условиях, оказываются недостоверными. Иными словами, погрешности этих характеристик могут привести к накоплению ошибки в виде таких же паразитных колебаний.

Анализ этих результатов свидетельствует о том, что причина неустойчивости решения кроется в структуре дифференциальных уравнений. Действительно: при вычислении правой части уравнения (4.6) всегда есть риск получить большую погрешность, так как значения N и F_a близки и на несколько порядков превышают значения остальных членов уравнения, включая инерционный член. Эта погрешность приводит к возникновению паразитного ускорения d^2y/dt^2 подвижной части стойки на текущем шаге интегрирования и паразитной скорости dy/dt – на следующем. В свою очередь эти паразитные решения приводят к появлению дополнительного отклонения подвижной части стойки от положения равновесия, даже малые значения которого способны существенно изменить N и F_a .

Как известно, всякая механическая система, описываемая дифференциальным уравнением второго порядка, имеет собственные колебания. Таким образом, при численном решении уравнения (4.6) в общем решении кроме собственных колебаний появляются паразитные колебания, связанные с погрешностью расчета правой части.

Если бы уравнения для шасси вида (1) решались изолированно, без учета положения планера самолета, т.е. его влияния на обжатие стоек шасси, то свойство устойчивости большинства из рассмотренных разностных схем рано или поздно сыграло бы свою положительную роль – возникающие паразитные колебания имели бы ограниченную амплитуду. Но такое изолированное решение невозможно: без учета изменения положения самолета относительно ВПП вообще нет смысла решать уравнения динамики шасси.

В модели системы "самолет – шасси – земля" погрешности в решении уравнений динамики шасси приводят к существенному изменению воздействия на планер (4.7). Образно говоря, каждая погрешность на шаге интегрирования уравнения (4.6) обращается в весьма ощутимый "удар" по планеру, как при движении по неровной ВПП. Наложение все новых и новых "ударов" на искаженное движение планера приводит к взаимному раскачиванию и к расхождению решения той составляющей системы, которая имеет меньший период собственных колебаний – шасси.

Вышеописанная причина неустойчивости численного решения наводит на мысль, что малые члены уравнения (4.6): инерционный, со второй производной от координаты, и диссипативный, с первой производной – не являются основными с точки зрения физики процесса, а, следовательно, они не должны определять вид уравнения для нахождения воздействия на планер самолета. Однако пренебрежение этими членами переводит уравнение динамики в уравнение статики со всеми последствиями – невозможностью описать вертикальное движение самолета на ВПП, которое реально существует и весьма существенно влияет на продольные и поперечные силы контакта с землей.

Остается только один вариант: определять эти члены, как поправки, обязательно учитывая динамику процесса, т.е. переход от предыдущего шага интегрирования к следующему. Поэтому было предложено вычислить их с помощью восходящей разностной схемы численного интегрирования на каждом шаге, используя уже известные значения координат подвижной части шасси на предыдущих шагах. Например, может быть использована восходящая разностная схема Эйлера первого порядка ("интерполяция назад") для производной первого порядка такого вида:

$$\frac{dy}{dt} \approx \frac{y_n - y_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}; \quad y_n = y_{n-1} + f(y_n, t_n) \cdot (t_n - t_{n-1}), \quad (4.9)$$

где y_n – искомое значение координаты на текущем шаге, y_{n-1} – известное значение координаты на предыдущем шаге, в противоположность общеизвестной нисходящей разностной схеме вида (4.8).

Для решения разностного уравнения (4.9) относительно y_n приходится строить итерационный процесс. Но потери времени на эту итерацию с лихвой компенсируются тем, что вычисляемое таким образом воздействие на планер (функция $f(y_n, y_n)$ в (4.9)) в точности соответствует моменту времени, на котором ведется интегрирование основных уравнений движения планера самолета.

Математическое подтверждение применимости предложенного метода было найдено в теории жестких систем. Принято считать жесткими такие уравнения, решения которых содержат две составляющие: быстро затухающие колебания с большими производными и медленно затухающие колебания с малыми производными. Это свойство в механических системах приводит к тому, что быстро затухающие колебания выпадают из поля зрения исследователей, и все внимание сосредоточивается на медленно затухающих процессах. Так, собственно говоря, и происходило, когда простейшими моделями шасси принимались сначала модели статики (баланс основных сил), а затем диссипативные модели. Общая модель динамики нагруженного планером шасси – дифференциальные уравнения движения – оказывается из разряда жестких систем, что при использовании нисходящих разностных схем выявляет неустойчивость численного решения.

Замечено, что в подавляющем большинстве случаев даже простейшая неявная схема Эйлера первого порядка (4.9) дает наилучшие с точки зрения устойчивости результаты.

Самое важное достижение предложенного устойчивого метода расчета вертикального движения самолета по взлетно-посадочной полосе проявилось в резком повышении степени адекватности расчетов продольно-поперечного движения. Это оказалось естественным следствием адекватного моделирования вертикальной силы воздействия самолета на землю, которая, как известно, и определяет силы продольного и поперечного сцепления. Попутно оказалось возможным моделировать движение самолета ледяной взлетно-посадочной полосе.

Разработка устойчивого метода расчета движения самолета по взлетно-посадочной полосе позволила расширить возможности математической модели работы шасси для воспроизведения таких процессов, которые ранее не моделировались. Прежде всего, оказалось, что без дополнительных усовершенствований воспроизводятся колебания самолета после отпускания тормозов на старте и эффект двойного касания при посадке, который практически всегда присутствует в реальности и от условий которого сильно зависит дальнейшее поведение самолета на взлетно-посадочной полосе. Этот эффект тоже стало возможным воспроизводить в математической модели.

Описанный подход к построению методов вычисления математической модели динамики полета оказался весьма успешным для описания движения вертолета с грузом на внешней подвеске, особенно в случае использования таких строп, как упомянутые в 2.3 и 4.2.

4.5. Многомерные регрессионные математические модели

В данном параграфе рассматривается методика разработки регрессионных математических моделей с достаточно большим числом факторов – более 4. В этом случае основной целью построения моделей является отображение **физических** свойств взаимосвязей факторов, выявленных в экспериментальных исследованиях и **логически** обоснованных. Такие модели именно на основании своей "физичности" имеют право применения в области, несколько более широкой, чем собранный статистический материал.

Следует особо отметить, что в русло таких математических моделей не попадают **формальные** модели, разрабатываемые, например, на основе нелинейных мультипликативных форм (степенных комплексов) и, тем более, линейных форм. Формальные модели, не воспроизводящие важнейшие физические свойства оригинала, с тем или иным (спорным) успехом могут применяться лишь в ограниченном диапазоне изменения аргументов.

Математически строгий регрессионный анализ проводится на основании метода наибольшего правдоподобия. Однако в большинстве случаев для технических систем такой подход невозможен по каким-либо причинам (недостаточный объем выборки, сложный вид исследуемой зависимости, вычислительные трудности реализации метода наибольшего правдоподобия). Поэтому в дальнейшем будем отдавать приоритет не формальным математическим строгостям, а правильному отображению важнейших физических свойств зависимостей. В этом случае вместо метода наибольшего правдоподобия можно воспользоваться методом наименьших квадратов, имеющим самостоятельный физический смысл. В такой постановке успех решения общей задачи находится в прямой зависимости от глубины проработки каждого шага предлагаемой методики с оглядкой на физическое его обоснование. И следует не забывать, что формальное применение метода наименьших квадратов недопустимо. Всегда надо помнить, что это – аппарат регрессионного **анализа** для случая **нормально** распределенных параметров. Следует всегда проверять полученные таким способом регрессионные модели, как и любые другие модели, на **адекватность**.

Именно таким образом была решена задача разработки математических моделей **индивидуальных расходных характеристик** силовых установок для группы самолетов Боинг-747 в зависимости от 8 эксплуатационных параметров полета. Среднее значение относительной погрешности созданной регрессионной модели не превосходит 12,7 %, причем 96 % всех случаев не выходят за пределы 5 %-ой погрешности. Характеристикой собственно адекватности построенной модели мгновенного расхода топлива являются условия выбора полетной информации, обеспечивающие погрешность расчетов до 0,5 % в более чем 80 % случаев.

Еще одна крупная задача регрессионного анализа была решена для разработки математической **модели взаимодействия колес шасси самолета с**

взлетно-посадочной полосой. Здесь удалось получить аппроксимации продольного и поперечного коэффициентов сцепления в зависимости от 7 эксплуатационных параметров.

Решение таких неординарных по объему задач позволило сформулировать *алгоритм построения многомерных регрессионных математических моделей.* Без следования этому алгоритму построение физически верной аппроксимации (т.е. регрессионной математической модели приемлемой степени адекватности) невозможно, так как человек не может анализировать связь одновременно более 2 – 3 параметров.

1. ► **Ранжирование аргументов** исследуемой зависимости для определения последовательности построения регрессий:

– предпочтение отдается тем аргументам, зависимость от которых более объемно представлена экспериментальными данными и лучше изучена;

– проводится некое "расслоение" многомерной зависимости, на каждом слое которой рассматривается зависимость только от одного-двух аргументов, от остальных аргументов предполагаются зависимыми коэффициенты выстраиваемой регрессии;

– полученных уровней не должно быть много, так, например, на первом уровне рассматривается аппроксимация по двум основным аргументам, на втором – аппроксимация полученных коэффициентов по двум оставшимся аргументам и, может быть, по одному из первых, в такой ситуации построение третьего уровня – аппроксимация коэффициентов аппроксимации коэффициентов – нежелательно ввиду опасности потери важных физических свойств исследуемой зависимости.

2. ► Далее в пп. 3 – 6 действия осуществляются последовательно по каждому из проранжированных уровней.

3. ► **Выявление физических свойств** исследуемой зависимости в целом, которые будут диктовать математические свойства (область определения, область принимаемых значений, замечательные точки, симметрия (четность, нечетность), периодичность, постоянство знака, монотонность, выпуклость, точки разрыва, асимптоты, экстремумы и точки перегиба).

4. ► **Выбор аналитической зависимости** наиболее общего вида, имеющей все выявленные физические свойства.

5. ► Конкретизация **особых значений коэффициентов** исследуемой зависимости для реализации выявленных конкретных физических свойств, и рассмотрение возможности упрощения уравнения регрессии.

6. ► **Построение регрессии** (с помощью метода наибольшего правдоподобия или метода наименьших квадратов определение коэффициентов регрессии), здесь возможны несколько приемов, облегчающих достижение результата:

– не обязательно решать оптимизационную задачу, быстродействия нынешних компьютеров достаточно, чтобы с необходимой точностью **перебрать узлы сетки** значений коэффициентов, вычислить по ним регрессии, сравнить с

исходной выборкой и вычислить значения дисперсионной суммы для выявления случая (узла значений коэффициентов) ее минимума;

– сложные функции можно **редуцировать** с помощью исследуемого регрессионного уравнения (так как известное значение функции y_i зависит от известных узловых значений аргумента x_i через регрессионные коэффициенты, например, в виде $y_i = a \cdot \exp(bx_i) + c$, то можно заранее для очередного просматриваемого значения b вычислить все значения $\exp(bx_i) = z_i$ и в итоге свести задачу к отысканию линейной регрессии $y_i = a \cdot z_i + c$); возможны и более изощренные алгебраические преобразования с целью упрощения процесса вычисления регрессионных коэффициентов;

– в том случае, когда количество экспериментальных точек меньше или равно количеству коэффициентов регрессии, задача приобретает вид не регрессионного анализа, а построения интерполяции; однако обычно в этом случае рассматривается целое семейство таких регрессий по другому, следующему аргументу, поэтому представление об общем виде таких регрессий в семействе можно составить, **изучая всю совокупность статистических зависимостей**, а затем построить конкретные регрессии выявленного вида для каждого частного случая опять же методом перебора узлов, при необходимости замораживая значения "лишних" коэффициентов.

7. ► Полученные на предыдущем этапе **коэффициенты** для всех регрессий семейства кривых по другому аргументу следует исследовать по пп. 1 и 2 на предмет выявления вида зависимости от этого другого аргумента и повторить пп. 3 – 6 для построения этих регрессий.

Замечание. О физических свойствах статистически выявленных зависимостей можно спорить – каждая точка зрения может опираться на свой опыт и свои эксперименты. Однако всегда можно найти несколько таких незыблемых свойств, с которыми согласятся все оппоненты. Если таких свойств недостаточно для однозначного выбора вида регрессии, то вину за возможные варианты следует возложить на недостаточный статистический материал, не позволяющий увидеть недостающие свойства. С одной стороны, такая ситуация дает пищу для планирования новых экспериментов, а с другой стороны, порождает необходимые в этом случае научные дебаты.

Так, например, экспериментальные данные взаимодействия колес шасси самолета с ВПП демонстрируют явную недостаточность информации для строгого регрессионного анализа, особенно в области малых значений скорости и коэффициента сцепления. Однако именно выявление физических свойств позволило построить удачные аппроксимации, которые в последующих вычислительных экспериментах показали:

– более высокую степень адекватности, чем у предыдущих исследователей, особенно при низких скоростях;

– возможность редукции полученной аппроксимации на случаи сверхнизких значений коэффициента сцепления (ледяной аэродром в Антарктиде);

– возможность получать объяснения физической сути процессов на ВПП.

4.6. Особые случаи эксплуатации самолетов на ВПП

Результаты для анализа всех рассмотренных в данном параграфе случаев получены с помощью Системы математического моделирования динамики полета летательных аппаратов (СММ ДП ЛА), разработанной и находящейся в эксплуатации с начала 1990-х годов на кафедре Аэродинамики, конструкции и прочности летательных аппаратов Московского государственного технического университета гражданской авиации.

СММ ДП ЛА – это диалоговый (интерактивный) комплекс унифицированного программного обеспечения и методик решения прикладных задач.

Применение современных достижений теории математического моделирования позволило решить проблему создания системы высокой степени адекватности, обладающей следующими свойствами:

- воспроизведение движения твердого тела с 6 степенями свободы;
- ЛА с органами управления, типичными для самолетов, и вектором тяги каждого двигателя, жестко связанным с ЛА;
- шасси любого типа (упруго-диссипативное, с амортизаторами, с учетом массы подвижной части, с учетом юза и бокового заноса);
- все параметры представляются в стандартных системах координат по ГОСТ 20058-80;
- полная унификация программного обеспечения;
- использование безусловно устойчивого алгоритма работы шасси, позволяющего добиться высокой степени адекватности моделирования движения ЛА по взлетно-посадочной полосе (ВПП);
- использование характеристик ЛА в полностью унифицированном виде, максимально приближенном к используемому в конструкторских бюро авиационной промышленности;
- моделирование сложных взаимодействий различных органов управления между собой;
- идентификация параметров движения самолета в воздухе или на ВПП, в том числе определение начальной точки движения на моделируемом этапе;
- оценка адекватности результатов расчетов реальному движению ЛА;
- диалоговый режим работы с СММ ДП ЛА, позволяющий оперативно готовить входную информацию, компоновать программное обеспечение для проведения конкретного вычислительного эксперимента, обрабатывать и оформлять выходную информацию;
- использование оправдавших себя на практике методик планирования, проведения и анализа результатов вычислительных экспериментов.

Находящаяся в эксплуатации СММ ДП ЛА позволяет для любого типа ЛА при наличии исчерпывающего объема характеристик на любых участках траектории:

- имитировать усложненные метеоусловия, отказы систем и органов управления, различные способы пилотирования, аварийные и катастрофические ситуации;
- выявить границы безопасных условий полета;
- проанализировать возможные причины летных происшествий;
- оценить значения внешних эксплуатационных факторов, не регистрируемых в конкретных условиях полета;
- выявить особенности пилотирования ЛА в разнообразных условиях и разработать рекомендации по летной эксплуатации;
- определить оптимальное положение органов механизации;
- выявить возможности ослабления летных ограничений;
- оценить влияние аэроупругости и нестационарности;
- определить оптимальный (по экономическим критериям) профиль полета в условиях реальных эксплуатационных ограничений
- оценить адекватность результатов моделирования данным реальных полетов;
- обеспечить более высокую точность результатов, чем точность регистрации параметров полета бортовой аппаратурой.

Снижение минимума аэропорта Сочи для ухода на второй круг самолета Ту-154М. Эта задача была решена в 1989 году по заказу ГТК "Россия" (в то время отдельный летный отряд ГА № 235).

По аэронавигационным документам аэропорта г. Сочи уход на второй круг самолета Ту-154М должен производиться с высоты не ниже 200 м. При этом над территорией, ограниченной окружностью с центром в вершине ближайшей горы и радиусом 4 км, самолет должен пролетать на высоте не ниже 550 м (ограничение жирной сплошной линией на рис. 26).

В отряде возник вопрос, не могут ли пилоты правительственных самолетов обеспечить требования безопасности полетов, снизив минимум, т.е. обеспечив выполнение полетного задания в существенно большем количестве полетных случаев.

В качестве условий проведения вычислительного эксперимента для этой задачи выдвигались следующие требования:

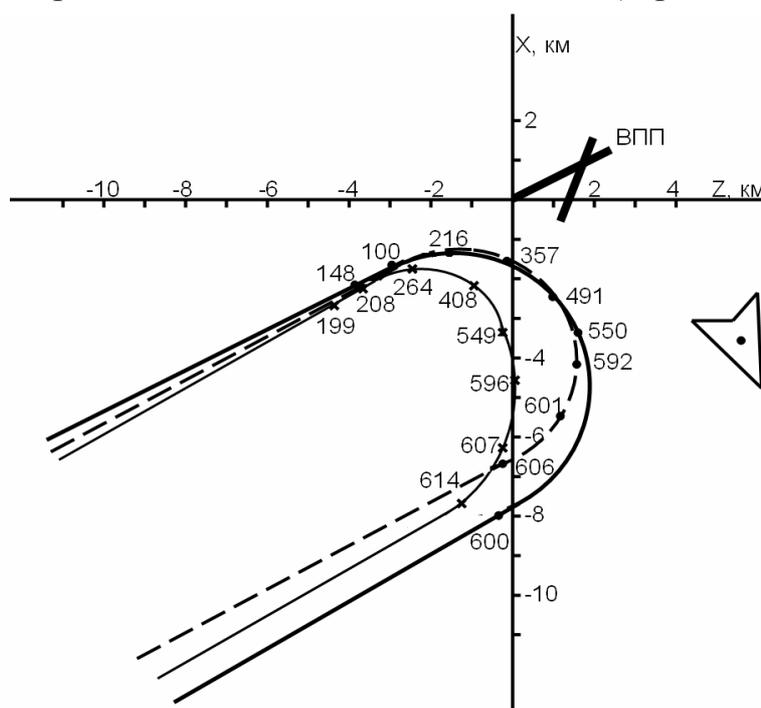


Рис. 26.

- безусловное выполнение всех требований РЛЭ;
- наименее благоприятные эксплуатационные условия: масса самолета 80 т, атмосферное давление 750 мм.рт.ст., температура 25°C, попутный ветер с предельной допустимой скоростью 5 м/с, отказ левого двигателя;
- обеспечить минимальный радиус разворота и максимальный устойчивый темп набора высоты без потери скорости;
- запаздывание принятия решения об уходе на второй круг с заданной высоты не более 2 с.

На рис. 26 представлены результаты: тонкая сплошная линия – уход на второй круг с высоты 200 м; пунктир – с высоты 150 м; в скобках указаны значения высоты полета в точках траектории; многоугольник справа – схематическое изображение горы.

Эти результаты позволяют сделать следующие выводы:

- 1) стандартная траектория ухода на второй круг с высоты принятия решения 200 м не достигает ограничения с большим запасом;
- 2) траектория ухода на второй круг с высоты принятия решения 150 м не нарушает ограничение по проекции маневра (хотя и без запаса) и выполняет требование по высоте.

На основании этих расчетов и опыта пилотирования в ГТК "Россия" внедрен минимум аэропорта г. Сочи для ухода на второй круг самолета Ту-154М в 150 м.

Идентификация аварии самолета Ил-76 в Иркутске 26.07.99. Ко времени проведения вычислительного эксперимента на СММ ДП ЛА 30.07.99 г. по воспроизведению аварии были известны из периодической печати лишь скудные сведения о метеоусловиях и факт столкновения с ближним приводным радиомаяком (высотой около 4 м), находящимся в створе ВПП, а также то, что взлет не завершен, и самолет оказался вновь на земле.

Для решения этой задачи оказалось достаточно иметь добротные характеристики самолета Ил-76ТД и идентифицированную математическую модель взлета и посадки в продольном канале.

В результате применения эвристического метода идентификации установлены наиболее вероятные условия взлета и способы пилотирования, которые могли привести к аварии:

- 1) взлетная масса самолета 210 т;
- 2) взлетная тяга двигателей на 10 % ниже стендовой;
- 3) скорость $V_R = 255$ км/ч по прибору;
- 4) отрыв совершен на скорости $V_{отр} = 262$ км/ч по прибору в 2460 м от линии исполнительного старта;
- 5) при попытке пилота удерживать угол тангажа на взлете $\vartheta = 12^\circ$ самолет достигает максимальной высоты 4 м без роста скорости, после чего приземляется на расстоянии 3350 м от линии исполнительного старта с первым касанием хвостом (см. сплошную линию на рис.27);

б) при попытке пилота сохранить скорость первоначального набора высоты за счет выдерживания градиента набора $\eta = 0,4 \%$ самолет набирает высоту 4 м на расстоянии 2830 м от линии исполнительного старта, а высоту 5 м на расстоянии 3290 м от линии исполнительного старта (см. штрих-пунктирную линию на рис. 27);

7) реальная траектория, приведшая к столкновению с ближним приводным радиомаяком, находится между расчетными по пп. 5 и 6.

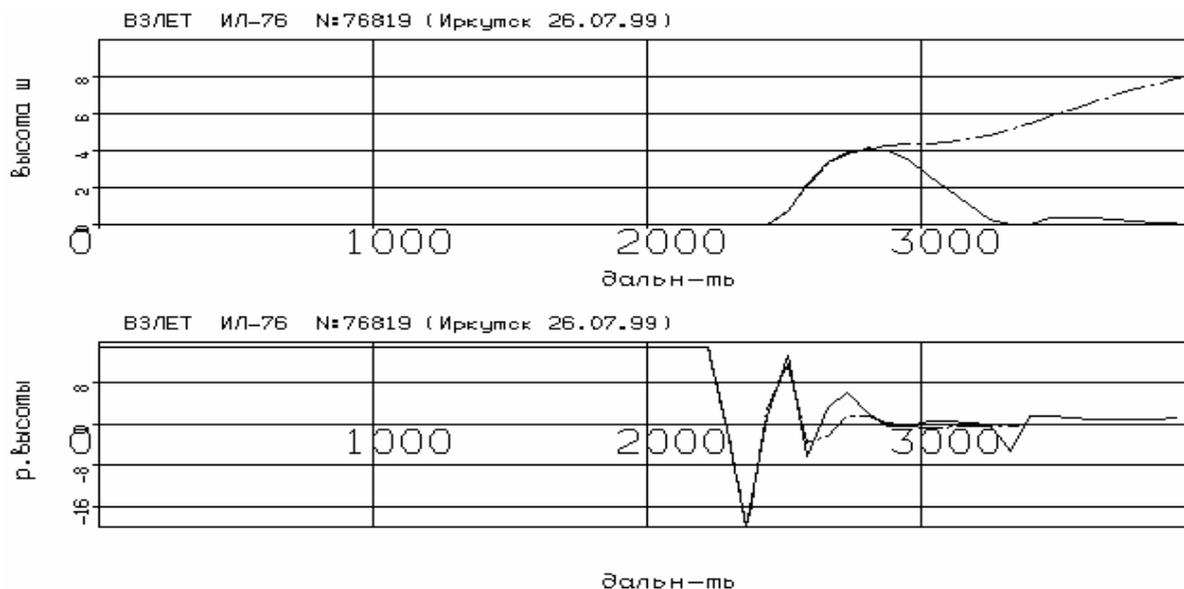


Рис. 27.

Расчеты АК им. С.В. Ильюшина, проведенные весной 2000 года с использованием записей нескольких взлетов и посадок этого самолета, подтвердили основные выводы, приведенные выше. Основным фактором, приведшим к аварии явилась перегрузка самолета, из-за чего располагаемой дистанции разбега на аэродроме не хватило для достижения необходимой скорости отрыва.

Посадка самолета Ту-154Б-2 RA-85477 в а/п Томск 26 декабря 1996 г.

Анализ развития событий в данном инциденте проведен по данным бортовых самописцев и Заключение по исследованию посадки самолета Ту-154Б-2 RA-85477 в а/п Томск 26 декабря 1996 года (далее по тексту "Заключение"), утвержденного Директором Государственного центра "Безопасность полетов на воздушном транспорте" в марте 1997 г.

В качестве метода анализа данного инцидента выбран эвристический метод идентификации параметров ММ. В качестве инструмента исследования применена СММ ДП ЛА с усовершенствованной ММ работы шасси.

Обстоятельства инцидента. 26 декабря 1996 года ВС Ту-154Б-2 RA-85477 Хабаровского ОАО при выполнении рейса 3837 "Хабаровск – Новосибирск" по метеоусловиям а/п Толмачево (Новосибирск) произвел вынужденную посадку в а/п Томск при метеоусловиях **ниже минимума аэродрома**

(установленная минимальная видимость аэродрома Томск – 900 м, фактическая при посадке – 700 м).

После посадки при послеполетном осмотре было обнаружено повреждение хвостовика правого внутреннего закрылка, а также то, что ниша правой стойки шасси забита снегом...

Состояние ИВПП: коэффициент сцепления:

- по данным замеров за 39 мин до посадки - 0,4 - 0,4 - 0,4, ИВПП заснежена;

- по данным замеров через 1 час 06 мин ... 2 час 21 мин после посадки - 0,35 в зоне 5 ... 7 м от оси ИВПП, на остальной части - **0,32**; ИВПП заснежена, **слой снега 3 см**, на ИВПП в ~3 м от обочин **валы** убранного свежевыпавшего снега, высотой 32 ... 62 см...

Заход на посадку в а/п Томск осуществлялся по крутой (с углом наклона 2 град 55 мин) глиссаде в директорном режиме по КГС в сложных метеоусловиях: сильного снегопада при видимости 700 м (что менее допустимой для аэродрома Томск - 900 м) при попутно-боковом (справа) ветре силой 15 м/с, который практически без изменения направления уменьшался до ~3 м/с к высоте ~50 м и ниже оставался постоянным, т.е. при **сдвиге ветра** по величине близкого к предельно-допустимому (3,7 м/с на 30 м высоты при допустимом не более 4 м/с на 30 м высоты)...

Указанные в Заключении исходные данные инцидента были воспроизведены в СММ ДП ЛА. Недостающие начальные условия, которые предусмотрены в СММ ДП ЛА и не могли в данном конкретном ВЭ быть обнулены, были собраны в результате скрупулезного анализа расшифровки данных бортового самописца или восстановлены эвристическим методом идентификации.

Сложность воспроизведения всей посадки определялась тем отмеченным в Заключении фактом, что приземление произошло при неустановившемся режиме полета, а данные записей основных параметров приводятся с интервалом не менее 0,125 с. Однако в рассматриваемом случае удалось заметить, что такие величины, как ω_x и ω_y в районе выбранной по времени начальной точки полета имели значения, весьма близкие к 0. Этот факт свидетельствует о высоком профессионализме экипажа, проявленном в таких сложных условиях.

В результате ВЭ удалось воспроизвести процесс посадки и пробега самолета до скорости $V_{пр} = 95$ км/ч (скорости выключения реверса) со всеми основными отмеченными особенностями поведения на ВПП:

- три касания,
- первые два касания с опережением передней стойки,
- после третьего касания попытка удержать переднюю стойку от опускания,
- боковые отклонения от оси ВПП вправо и влево,
- попадание в снежный вал на краю ВПП,
- выход к оси ВПП к концу рассматриваемого участка пробега.

Наиболее значимые результаты вычислительного эксперимента (сплошная линия) приведены на рис. 28 в виде сравнения с данными бортовых самописцев (дискретные ромбики). Боковое отклонение сравнивалось с данными, зафиксированными в Заключении по анализу крок места происшествия, поэтому "экспериментальных" точек там так мало.

Сравнение результатов ВЭ с данными бортовых самописцев в случае рядовых рейсовых полетов (не специально организованных летных испытаний) нельзя проводить с точки зрения оценки адекватности. Особенно ярко это проявляется в рассматриваемом случае посадки в сложных метеоусловиях: попадание в сдвиг ветра при плохой видимости и приземление на заснеженную ВПП. Речь может идти лишь об анализе качественного характера изменения параметров движения и выявлении возможных причин именно такого характера для профилактики подобных инцидентов.

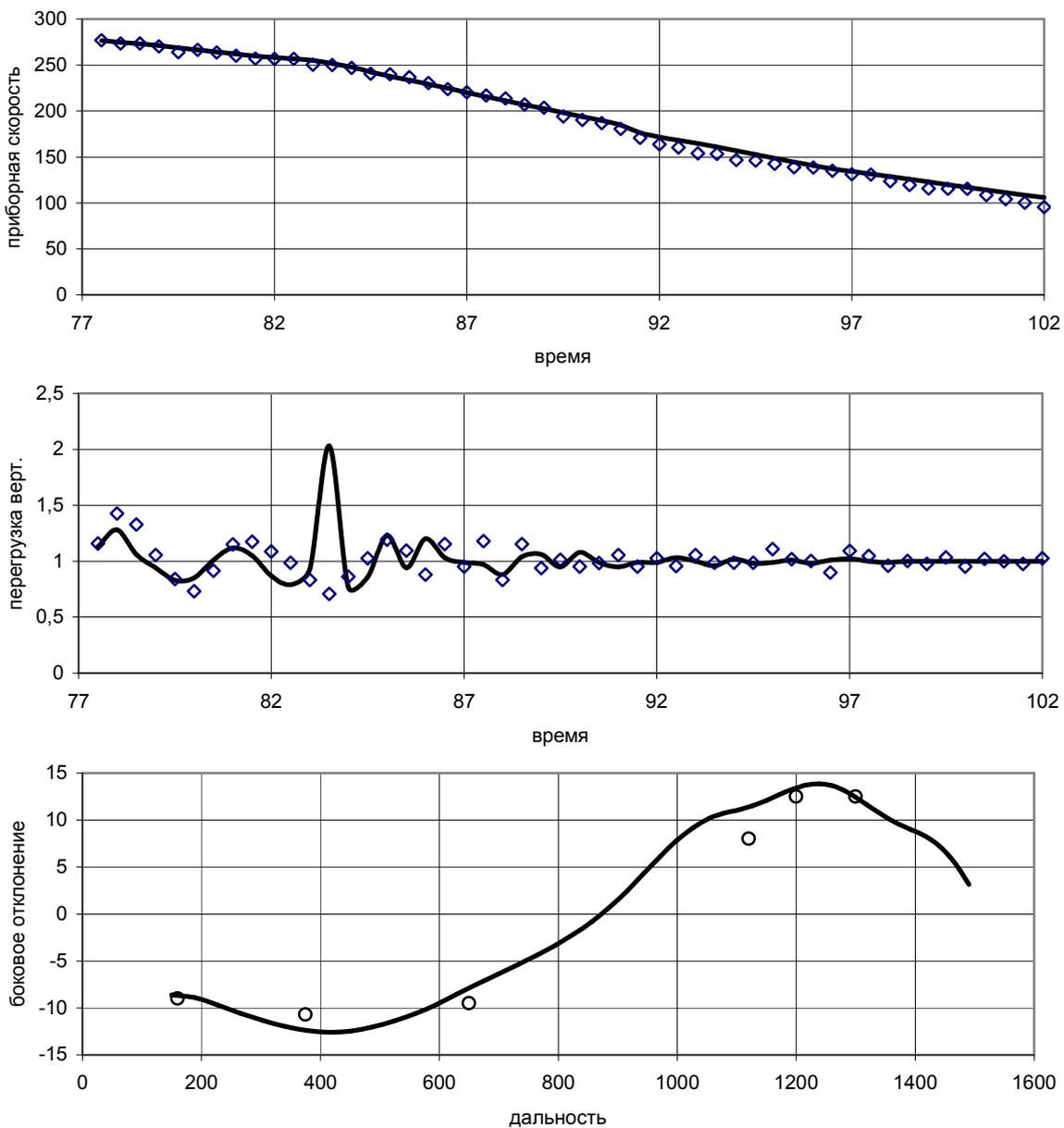


Рис. 28.

4.7. Моделирование динамики различных видов шасси

В современной авиации применяется широкий спектр авиационных шасси для движения по твердой поверхности. В данной работе внимание сосредоточено на механических устройствах указанного назначения и не рассматриваются поплавки гидросамолетов или ноги пилотов дельтапланов. Основные трудности моделирования шасси связаны с адекватным воспроизведением вертикальных сил, что и будет составлять основной интерес исследования. В таком случае можно ввести следующую классификацию видов шасси:

- упруго-диссипативная система с подвижной частью (относительно ЛА);
- упруго-диссипативная система, неподвижная относительно ЛА;
- жесткая система опор в виде непневматических колес или лыж.

Предложенные виды шасси существенно различаются с точки зрения их математического моделирования, поскольку не могут быть описаны каким-либо единым уравнением или алгоритмом движения.

Общее назначение шасси – передавать определенную реакцию земной поверхности через свою конструкцию на конструкцию ЛА. Поэтому общим свойством всех шасси для движения по земле следует считать наличие нескольких опорных точек – точек соприкосновения с землей. При детальном рассмотрении, конечно, такое соприкосновение осуществляется не в точках, а в "пятнах" контакта конечного размера. Однако в целях разработки математической модели вертикальных сил в системе "ЛА – шасси – твердая поверхность" достаточно абстрагировать этот контакт до точечного. Будем считать, что таких точек опоры у шасси столько, чтобы обеспечить описание свойств симметрии и устойчивости. Кроме того, математическая модель шасси должна строго учитывать и положение ЛА относительно земной поверхности, и его вес, и влияние аэродинамических сил и моментов, и влияние сил тяги и моментов двигателей, так или иначе, незагружающих или разгружающих шасси.

Исходя из приведенных соображений, первый вид шасси, соответствующий наиболее распространенной конструкции у магистральных самолетов, моделируется обычно раздельно по стойкам шасси. Описание динамики такой стойки шасси с особыми математическими подходами для адекватного моделирования представлено в § 4.4.

Второй вид шасси по нашей классификации соответствует шасси легких самолетов и многих вертолетов. Здесь имеется в виду, что каждая опора представляет собой упруго-диссипативную (или только упругую) балку с определенными степенями свободы. В этом случае инерционный член подвижной части опоры отсутствует, но учитываются упругие и упруго-диссипативные свойства пневматика. Уравнение движения для математической модели такой стойки (рис. 29) можно представить в виде:

$$F_a(s) + \langle F_r(s, \dot{s}) \rangle - N(\varepsilon, \langle \dot{\varepsilon} \rangle) = 0. \quad (2)$$

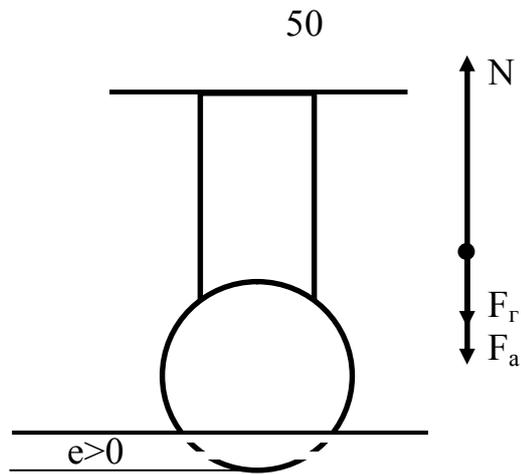


Рис. 29. Схема упруго-диссипативного шасси, неподвижного относительно ЛА. Это уравнение дифференциальное только при учете явлений диссипации, в отсутствии такового уравнение приобретает вид алгебраического. Однако описанный в § 4.4 устойчивый алгоритм решения такой задачи безразличен к виду уравнения динамики (или уравнения статики) стойки шасси и позволяет получать описание движения колес относительно планера ЛА при движении по взлетно-посадочной полосе ничуть не хуже, чем для шасси первого вида.

Третий вид шасси по предложенной классификации встречается на моделях ЛА, предназначенных для летных испытаний, на беспилотных летательных аппаратах и на легких вертолетах. При построении математической модели этого типа шасси не важно, снабжено оно колесами (например, металлическими) или лыжами (рис. 30). Для математического описания обоих вариантов существенными оказываются лишь крайние точки контакта с поверхностью земли. В целях облегчения изложения будем считать, что эти точки образуют прямоугольник, с двумя сторонами, параллельными оси ЛА, а поверхность земли – плоская, горизонтальная. В каждой из этих четырех точек взаимодействие с поверхностью земли исчерпывающим образом описывается тремя составляющими силы: N – нормальной реакции земли, F_x – продольная сила трения (качения для колес или скольжения для лыж) и F_z – поперечная сила трения (скольжения). Последние две из них с помощью известных моделей трения типа $F_x = \mu_t N$ и $F_z = \mu_z N$, где коэффициенты μ_t и μ_z задаются простейшим образом или в виде сложных зависимостей от нескольких важных факторов, как в [8 – 10], выражаются через N . Именно эту нормальную реакцию N и должен давать для каждой опорной точки вычислительный алгоритм математической модели шасси в этом случае.

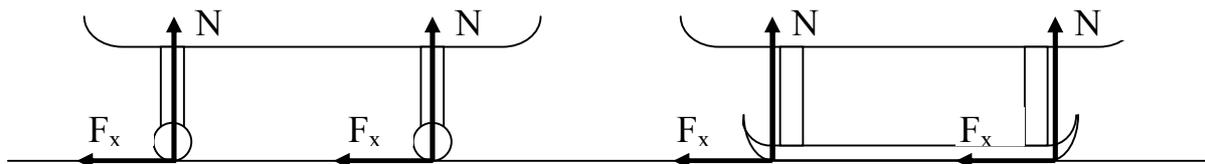


Рис. 30. Схема "жесткого" шасси

Третий вид шасси назван "жестким" не случайно. Дело в том, что в такой постановке не имеет смысла определять реальные ничтожные деформации шасси от соприкосновения с землей – следует рассматривать весь ЛА вместе с его опорными точками как единое твердое тело. Число степеней свободы у такого твердого тела при условии сохранения контакта с землей не велико. Каждая степень свободы может быть рассмотрена отдельно. В данной постановке задачи степенями свободы будем считать возможные с учетом связей виды движения ЛА относительно поверхности земли. Так, например, на взлете следует рассматривать:

- 1) скольжение (качение) по поверхности земли всех четырех точек опоры (и в продольном, и в поперечном направлении);
- 2) процесс отрыва от земли с вращением относительно находящихся на земле задних опорных точек;
- 3) процесс отрыва от земли с вращением относительно находящихся на земле передних опорных точек;
- 4) процесс отрыва от земли с вращением относительно находящихся на земле правых опорных точек;
- 5) процесс отрыва от земли с вращением относительно находящихся на земле левых опорных точек.

Вращение вокруг одной опорной точки или "зависание" с касанием земли рассматривать не будем ввиду чрезвычайной краткости таких видов движения в реальных условиях.

Алгоритм в такой математической модели представляет собой проверку нескольких условий для идентификации текущего вида движения по земле и вычисление сил и моментов от воздействия земли на ЛА именно в данном случае движения:

- 1) если сумма вертикальных составляющих сил тяги двигателей и аэродинамических сил больше силы тяжести – свободный полет с нулевыми силами и моментами от шасси;
- 2) если $M_{от}$ – сумма аэродинамического момента и моментов от аэродинамических сил, от тяги движителей, от силы тяжести и от силы инерции относительно оси, проходящей через задние опорные точки шасси, больше нуля – подъем передних опор с силами F_x и N , определяемыми из условия равенства вычисленному выше $M_{от}$ суммы моментов F_x и N относительно центра масс ЛА, сила F_z определяется по условиям поперечного движения ЛА;
- 3) если $M_{от}$ – сумма аэродинамического момента и моментов от аэродинамических сил, от тяги движителей, от силы тяжести и от силы инерции относительно оси, проходящей через передние опорные точки шасси, меньше нуля – подъем задних опор с силами F_x и N , определяемыми из условия равенства вычисленному выше $M_{от}$ суммы моментов F_x и N относительно центра масс ЛА, сила F_z определяется по условиям поперечного движения ЛА;
- 4) если $M_{от}$ – сумма аэродинамического момента и моментов от аэродинамических сил, от тяги движителей, от силы тяжести и от силы инерции отно-

сительно оси, проходящей через правые опорные точки шасси, больше нуля – подъем левых опор с силами F_z и N , определяемыми из условия равенства вычисленному выше Mom суммы моментов F_z и N относительно центра масс ЛА, сила F_x определяется по условиям продольного движения ЛА;

5) если Mom – сумма аэродинамического момента и моментов от аэродинамических сил, от тяги двигателей, от силы тяжести и от силы инерции относительно оси, проходящей через левые опорные точки шасси, меньше нуля – подъем правых опор с силами F_z и N , определяемыми из условия равенства вычисленному выше Mom суммы моментов F_z и N относительно центра масс ЛА, сила F_x определяется по условиям продольного движения ЛА;

6) при невыполнении условий 1 – 5 – скольжение (качение) по поверхности земли на всех четырех точках опоры с определением сил F_x , F_z и N из условия соответствующего вида движения ЛА.

Для случая посадки алгоритм составляется аналогичными рассуждениями.

4.8. Кватернионы в динамике полета летательных аппаратов

Традиционные задачи динамики полета ЛА – треакторные и "вращательные" в последние годы получили новый вектор развития. Дело в том, что пилотов обучают, а системы управления строят весьма жестко для простейших полетов в простейших условиях. К сожалению, атмосферные условия никогда не бывают совсем спокойными, а пилоты не бывают подготовленными к абсолютно всем неожиданным и непрогнозируемым обстоятельствам. Когда этих обстоятельств собирается достаточно много, происходят авиационные происшествия (АП). Управление безопасностью полетов задумано в ИКАО именно для того, чтобы ВСЕ пилоты делились информацией друг с другом, в какие особые условия они попадали. Но и простой описательной части для накопления опыта недостаточно – необходим глубокий непредвзятый анализ АП. А для этого необходимо математическое моделирование динамики полета ЛА и в условиях отказов, и при неожиданном изменении внешних условий и внешних воздействий. Как известно, описание поведения самолета при угле тангажа 90° языком углов Эйлера становится неоднозначным, а, следовательно, непродуктивным. Бывают и другие случаи сбоя "Эйлерового" описания положения самолета. Сегодня математическое моделирование динамики полета ЛА вышло из колыбели углов Эйлера и начало применять серьезный математический аппарат – аппарат кватернионов.

Кватернионы впервые были введены в математику в 1843 г. Гамильтоном как удобный аппарат для описания геометрии пространства в виде гиперкомплексного числа. Основные удобства кватернионов проявляются не только при описании особых положений летательного аппарата, но и при описании объектов, расположенных на сфере (например, на поверхности Земли) или объектов типа криволинейных стержней и оболочек. Основа использования кватернио-

нов в прикладной механике и теории полета – теорема Эйлера-Шалля о конечном повороте твердого тела, утверждающая, что любой поворот твердого тела или системы координат, жестко с ним связанной в заданной системе координат, может быть осуществлен одним **поворотом** твердого тела **относительно оси**, неподвижной в заданной системе координат. Таким образом, кватернион – это математический элемент, задающий определенный поворот объекта в пространстве.

Для описания такого поворота необходимо задать четыре параметра:

– три направляющих косинуса, определяющих положение оси I поворота в заданной системе координат;

– угол φ поворота относительно оси поворота I.

В качестве этих четырех параметров используются параметры Родриго-Гамильтона или Кейли-Клейна:

$$q_0 = \cos \frac{\varphi}{2}; \quad q_1 = l_x \sin \frac{\varphi}{2}; \quad q_2 = l_y \sin \frac{\varphi}{2}; \quad q_3 = l_z \sin \frac{\varphi}{2},$$

где φ – угол поворота относительно оси I поворота, l_x, l_y, l_z – косинусы углов между осью поворота I и осями заданной системы координат (направляющие косинусы).

В теории полета используются нормированные кватернионы, характеризующиеся свойством элементов: $q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$. Кватернион принято представлять или в виде гиперкомплексного числа:

$$Q = q_0 + q_1 \mathbf{i}_1 + q_2 \mathbf{i}_2 + q_3 \mathbf{i}_3,$$

где q_0 – действительная часть кватерниона; $q_1 \mathbf{i}_1 + q_2 \mathbf{i}_2 + q_3 \mathbf{i}_3$ – мнимая часть кватерниона ($\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ – мнимые единицы гиперкомплексного числа), или в матричном виде:

$$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}.$$

Простейшие действия над кватернионами:

1. сложение: $P + Q = (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1)\mathbf{i}_1 + (p_2 + q_2)\mathbf{i}_2 + (p_3 + q_3)\mathbf{i}_3$;

2. умножение на число (обозначается знаком \cdot , операция коммутативна):
 $a \cdot Q = Q \cdot a = aq_0 + aq_1 \mathbf{i}_1 + aq_2 \mathbf{i}_2 + aq_3 \mathbf{i}_3$;

3. умножение кватернионов (обозначается знаком \circ , операция **некоммутативна**):

$$Q \circ P = \begin{bmatrix} q_0 \cdot p_0 - q_1 \cdot p_1 - q_2 \cdot p_2 - q_3 \cdot p_3 \\ q_0 \cdot p_1 + q_1 \cdot p_0 + q_2 \cdot p_3 - q_3 \cdot p_2 \\ q_0 \cdot p_2 - q_1 \cdot p_3 + q_2 \cdot p_0 + q_3 \cdot p_1 \\ q_0 \cdot p_3 + q_1 \cdot p_2 - q_2 \cdot p_1 + q_3 \cdot p_0 \end{bmatrix}.$$

Причем правила умножения кватернионных единиц задаются следующим образом:

$$\mathbf{i}_k \circ \mathbf{i}_k = -1, \quad k = 1, 2, 3, \\ \mathbf{i}_1 \circ \mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_3, \quad \mathbf{i}_2 \circ \mathbf{i}_3 = \mathbf{i}_1, \quad \mathbf{i}_3 \circ \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_2,$$

$$\mathbf{i}_2 \circ \mathbf{i}_1 = -\mathbf{i}_3, \quad \mathbf{i}_3 \circ \mathbf{i}_2 = -\mathbf{i}_1, \quad \mathbf{i}_1 \circ \mathbf{i}_3 = -\mathbf{i}_2.$$

В качестве примера рассмотрим получение кватерниона, описывающего переход от *нормальной земной системы координат* к *связанной* в следующей последовательности поворотов: $\vartheta \rightarrow \psi \rightarrow \gamma$.

Каждый элементарный поворот системы координат вокруг определенной оси описывается своим кватернионом:

$$Q_{\vartheta} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\vartheta}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \sin \frac{\vartheta}{2} \end{pmatrix}, \quad Q_{\psi} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\psi}{2} \\ 0 \\ \sin \frac{\psi}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q_{\gamma} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\gamma}{2} \\ \sin \frac{\gamma}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

в итоге получаем известную матрицу перехода:

$$\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \\ \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\psi}{2} \sin \frac{\gamma}{2} - \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \\ \cos \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\psi}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \\ -\cos \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \sin \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \end{pmatrix}.$$

Обратные переходы можно представить следующим образом (только надо не забывать, что определение углов Эйлера здесь может быть неоднозначным):

$$\begin{aligned} \cos \vartheta \cos \psi &= 2(q_0^2 + q_1^2) - 1, & \cos \psi \cos \gamma &= 2(q_0^2 + q_3^2) - 1, & \sin \psi &= 2(q_0 q_2 - q_1 q_3), \\ \sin \vartheta \cos \psi &= 2(q_1 q_2 + q_0 q_3), & \cos \psi \sin \gamma &= 2(q_2 q_3 + q_0 q_1), \end{aligned}$$

если $2(q_0^2 + q_1^2) - 1 \neq 0$ и $2(q_0^2 + q_3^2) - 1 \neq 0$, то

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{2(q_1 q_2 + q_0 q_3)}{2(q_0^2 + q_1^2) - 1}, \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{2(q_2 q_3 + q_0 q_1)}{2(q_0^2 + q_3^2) - 1}.$$

Глава 5. Методы прикладной математики

5.1. Понятие о теории информации

Теория информации – раздел теории вероятностей, изучающий количественные закономерности, связанные с получением, передачей, обработкой и хранением информации [13]. Эта теория сформировалась в дисциплину в период Второй Мировой войны при решении практических задач обеспечения связи. Идею измерения информации предложил Р.Хартли в 1928 г., а основные понятия ввел К.Шеннон в конце 40-х годов XX века [57].

Можно сформулировать три основные вида задач, которыми занимается *теория информации* [13].

1. Отыскание экономных методов кодирования информации с помощью минимального числа символов.

2. Определение пропускной способности канала связи.

3. Определение объема устройств хранения информации.

Отсюда следует, что любой процесс, которым занимается эта теория можно изобразить схемой рис. 31 [57].



Рис. 31.

В этой схеме стрелки обозначают поток информации. Вместо канала связи может рассматриваться устройство хранения информации.

Итак, чтобы решать перечисленные задачи, необходимо перевести на математический язык измерение информации и ее кодировку. Представим себе источник информации в виде генератора какого-то сигнала. С одной стороны, этот сигнал должен давать получателю сведения, например, о том, в каком из множества возможных состояний находится некоторая система. Такое представление является наиболее общим и позволяет договориться с получателем о **системе обозначений**. С другой стороны, получателю заранее не известно, какой именно сигнал он сейчас получит. Если бы он это знал, не было бы смысла в передаче сигнала, не несущего никакой информации. Эти рассуждения позволяют ввести терминологию, основанную на том, что для получателя очередной сигнал является **случайным событием** среди известного ему списка возможных событий, т.е. алфавита.

Алфавитом источника называется конечное множество $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ значений случайной величины, генерируемой источником.

Отсутствие сигнала нельзя рассматривать в качестве информации, поскольку не ясно "передает" это источник или он просто не работает. Поэтому минимально возможный алфавит насчитывает два сигнала, например,

$X = \{0;1\}$. Это хорошо известная ситуация с телефонным номером, когда по характеру гудков мы получаем **информацию** о его состоянии: свободен или занят. Разберем эту ситуацию подробнее.

Если мы знаем, что нашего звонка ждут, то фактически никакой информации этот сигнал нам не дает: состояние системы для нас полностью **определенное**. Но если это не так, то мы неизбежно мучаемся **неопределенностью**: ответят нам или нет. В теории информации мера априорной неопределенности системы называется энтропией.

На первый взгляд энтропию следует считать по числу возможных состояний: чем их больше, тем больше энтропия. Так было введено понятие энтропии по Эшби У.Р. [58], который предложил вычислять ее через двоичный логарифм от мощности множества возможных состояний системы: $H(X) = \log_2 N$. Заметим, что в общем случае с телефоном энтропия по Эшби равна 1. Если же состояние системы известно, то $\log_2 N = 0$. Таким образом, получение информации однозначно связано с изменением энтропии системы – с ее **уменьшением**. Так как в результате получения информации о системе неопределенность пропадает и энтропия становится нулевой, то количество информации определяется энтропией системы: $I(X) = H(X)$.

Энтропия обладает некоторыми очевидными свойствами:

1) $H(X) = 0$ при полностью определенном состоянии системы;

2) $H(X)$ растет с ростом числа возможных состояний системы;

3) $H(X+Y) = \log_2(N \cdot M) = \log_2 N + \log_2 M = H(X) + H(Y)$, т.е. энтропия

обладает свойством **аддитивности**.

К.Э. Шеннон заметил [58], что степень неопределенности не всегда можно считать по числу возможных состояний системы. Если априори известно, что одно из состояний существенно более вероятно, чем другое, то естественно считать такую систему более **определенной**, т.е. ее энтропия должна выражаться числом, близким к нулю. По Шеннону энтропию и, следовательно, количество информации о состоянии системы следует считать по другой формуле:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^N p_i \log_2 p_i = I(X),$$

где p_i – вероятность состояния x_i , а знак минус внесен для того, чтобы энтропия была неотрицательна (так как $p_i < 1$ и $\log_2 p_i < 0$) и сохраняла вышеперечисленные свойства. Эта формула получила наибольшее применение на практике и позволяет использовать еще одно свойство:

4) при $N = \text{const}$ максимальное значение энтропии равно $\log_2 N$ – энтропии по Эшби – и достигается при **равновероятных** состояниях системы.

В случае непрерывных распределений состояний системы возникает дополнительная задача об их дискретизации. Для этого вводят в алфавит величину Δx , определяющую интервал различимости состояний. Тогда энтропия по Шеннону вычисляется по формуле

$$H(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} p(x) \log_2 p(x) dx - \log_2 \Delta x,$$

где $p(x)$ – плотность распределения вероятностей, и обладает дополнительным свойством:

$$5) H(X) \rightarrow \infty \text{ при } \Delta x \rightarrow 0.$$

Обратимся к выражению количества информации по Шеннону. Его вид совпадает с видом формулы математического ожидания величины $-\log_2 p_i$, т.е. дает осреднение значений этой величины по вероятности их появления. Поэтому естественно рассматривать каждое такое слагаемое как частную информацию отдельного сообщения о нахождении системы в данный момент времени в состоянии x_j :

$$I(x_j) = -\log_2 p_j.$$

Заметим, что частные информации не складываются в общую, а дают лишь вклад в нее **с учетом** вероятности состояния. Однако в системе с равновероятными состояниями любая частная информация равна полной (!) и определяется формулой Эшби. Эти особенности следует всегда иметь в виду при оценке количества информации в сложных сообщениях о состоянии нетривиальных систем – **простая арифметика не годится**. Вместо простой арифметики для расчета количества информации следует пользоваться теоремами сложения и умножения, понятиями зависимых систем и условной энтропии [13].

Рассмотрим систему с двумя возможными состояниями, т.е. ограничимся двоичным алфавитом. К такой ситуации можно свести практически любую задачу передачи информации. Это означает, что любое сложное сообщение можно закодировать последовательностью нулей и единиц, которые появляются у получателя равновероятно. В этом случае частная информация, передаваемая одним **двоичным разрядом**, измеряется величиной:

$$I(0) = I(1) = -\log_2 \frac{1}{2} = 1.$$

Благодаря этому выражению появилась единица бит – количество информации, передаваемое с помощью одного двоичного символа.

Учет воздействия шума на канал передачи (хранения) информации приводит к необходимости кодирования сообщений с избыточной информацией. Простейший прием использования избыточной информации состоит в ее повторении. Однако если шум невелик, то повторение всей информации кажется расточительным. Люди не задавались, конечно, целью вычислить необходимую в разговоре добавочную информацию, но человеческие языки и речь естественным отбором оказались построены именно на этом принципе. Их избыточность доходит до 50%. Современные каналы связи и ЭВМ используют для избыточности информации контрольные суммы и дополнительные идентификационные разряды в числовых регистрах. Азбука Морзе создана с учетом частоты повторения и возможности различения отдельных букв даже при наличии помех. Правда, все эти приемы не были заранее просчитаны и на самом деле не оптимальны.

Сильный толчок развитию теории информации дало появление вычислительных машин, самыми узкими местами которых всегда были и остаются пропускная способность каналов передачи информации и объем памяти. Поэтому

большинство решенных практических задач относятся именно к компьютерной и вообще к электронной технологии.

В качестве примеров, иллюстрирующих возможность использования методов теории информации в других областях, рассмотрим задачи о построении технологического процесса обслуживания техники, допускающей отказы подсистем или определенное управление.

(Построен на основе примера из [13]). Для обнаружения отказа некоторой подсистемы производится диагностическая операция. Вероятность отказа подсистемы в течение месяца равна p . Требуется максимизировать количество информации о системе, получаемое в результате диагностической операции, с помощью выбора ее периодичности.

После k месяцев работы подсистема может находиться в одном из двух состояний: P (работоспособная) и O (отказавшая) – с вероятностями соответственно: $(1-p)^k$ и $1-(1-p)^k$. Максимум информации достигается при равенстве этих вероятностей, т.е. при $k = -1/\log_2(1-p)$. Задача решена в общем виде. В частности, при $p = 0,2$ получаем: $k = 1/0,3219 \approx 3$.

Рассмотрим систему с единственной конечной целью (достичь аэродрома назначения, произвести полный цикл обслуживания и т.п.) [58]. Пусть p_0 – априорная вероятность достижения цели. После поступления некоторого сообщения производится определенное управление, в результате которого вероятность достижения цели становится равной p_1 .

Тогда мерой целесообразности управления может служить величина $\log_2 \frac{p_1}{p_0}$. Действитель-

но, если, в частности, $p_1 = p_0$, т.е. управление ничего не дает, то $\log_2 \frac{p_1}{p_0} = \log_2(1) = 0$.

5.2. Методы нечетких множеств

Прежде всего, договоримся о терминологии. Четкость в суждениях любого вида – это двоичная система: или да, или нет. Если исходить из этого посыла, то все дальнейшие разговоры о современных методах становятся совершенно "четкими". Таким образом, в жизни, следует признать, существует много нечеткостей. Но мы с Вами занимаемся вполне определенным делом – изучением разработанного человечеством арсенала методов решения житейских задач. Поэтому, что особенно важно и естественно, нечеткостей в **знаниях** этого арсенала быть не может – дорого обходится. Поэтому начнем изучать "нечеткости" с терминологии той области знаний человечества, которая разговаривает на предельно "четком" языке, т.е. с терминологии в математике.

В математике, естественно, первоначально, существовали конкретные, однозначные соотношения между вполне конкретными множествами. То, что теперь называют иногда теорией четких множеств. Что же это такое? Математики обычно обозначают принадлежность элемента определенному множеству специальным знаком. Так, например, факт принадлежности числа 3 множеству $A = \{1, 2, 3, \dots\}$ целых чисел обозначается следующим знаком: $3 \in A$. И здесь

все ясно: $3,14 \notin A$ – "или, или". Но это соотношение принадлежности можно описать с помощью *характеристической функции* $\mu_A(x)$, определяемой следующим образом:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A, \\ 0, & \text{если } x \notin A. \end{cases}$$

Особенностью этой функции является бинарный характер ее значений: 1 или 0.

С точки зрения характеристической функции нечеткие множества являются естественным обобщением обычных множеств, когда мы отказываемся от бинарного характера этой функции и предполагаем, что она может принимать **любые значения** из отрезка $[0, 1]$. В теории нечетких множеств характеристическая функция называется *функцией принадлежности*, а ее значение $\mu_A(x)$ – степенью принадлежности элемента x нечеткому множеству A .

Нечёткое множество – понятие, введённое Лотфи Заде в 1965 году в статье «Fuzzy Sets» в журнале *Information and Control*, в котором он расширил классическое понятие множества, допустив, что *характеристическая функция* множества (названная Заде *функцией принадлежности* для нечеткого множества) может принимать любые значения в интервале $[0,1]$, а не только значения 0 или 1.

Определение. Нечётким множеством A называется совокупность упорядоченных пар, составленных из элементов x универсального множества X и соответствующих *функций принадлежности* $\mu_A(x)$:

$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\}$, (знак $|$ означает удовлетворяют условию)
 причём $\mu_A(x)$ – **функция принадлежности** (обобщение понятия **характеристическая функция** обычных чётких множеств), указывающая, в какой степени (мере) элемент x принадлежит нечёткому множеству A . Функция $\mu_A(x)$ принимает значения в некотором упорядоченном множестве M . Множество M называют **множеством принадлежностей**, часто в качестве M выбирается отрезок $[0, 1]$. Если M состоит **только** из двух элементов 0 и 1, то нечёткое множество может рассматриваться как обычное чёткое множество.

Примеры функций принадлежности: составьте описание соответствующих нечетких множеств (рис. 32).

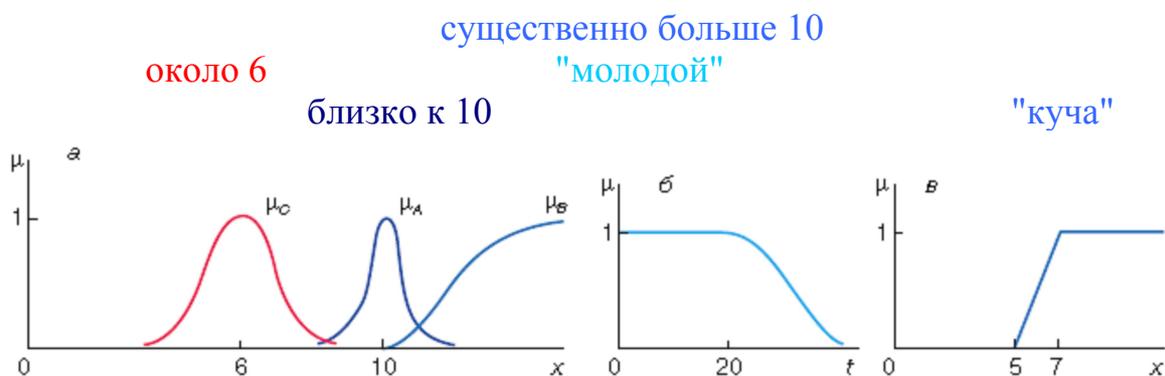


Рис. 32.

Описание операций с нечеткими множествами начнем с отношения между ними. Для определенности будем говорить об элементах x из универсального множества U . Пусть A и B – нечеткие множества; будем говорить, что A содержится в B , и обозначать $A \subseteq B$, если для любого x :

$$\forall x \in U: \mu_A(x) \leq \mu_B(x).$$

Два нечетких множества A и B **равны** $A = B$ в том и только том случае, если равны их функции принадлежности $\mu_A(x) = \mu_B(x)$.

Объединением нечетких множеств A и B называется нечеткое множество, обозначаемое $A \cup B$, функция принадлежности которого определяется следующим образом:

$$\forall x \in U: \mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}.$$

Пересечение множеств $A \cap B$ определяется функцией принадлежности:

$$\forall x \in U: \mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}.$$

Дополнение \bar{A} нечеткого множества A имеет функцию принадлежности $\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$.

На рис. 33 приведены функции принадлежности (красные линии) для некоторых операций над нечеткими множествами: а – операция объединения, б – операция пересечения, в – операция дополнения.

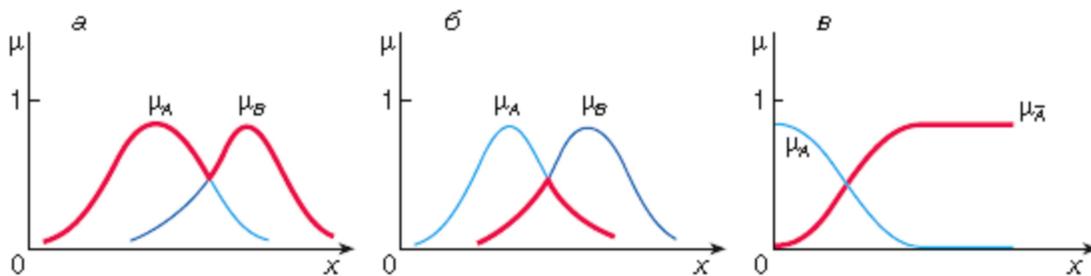


Рис. 33.

Алгебраическое произведение множеств A и B – это множество $A \cdot B$ с функцией принадлежности $\mu_{A \cdot B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$.

Использование нечетких множеств может дать новый взгляд на решение задач оптимизации. Рассмотрим это на примере определения наибольшего значения функции $y = f(x)$ при ограничении на переменную x в виде $x \leq c$. Из рис. 34 видно, что при заданном виде целевой функции решение достигается в точке c .

Обсудим ограничение $x \leq c$. Иногда оно носит объективный характер (например, обусловлено законами природы, ограниченными ресурсами и т.д.) и, безусловно, должно соблюдаться. Нередко же его наличие связано с субъективными причинами, в частности, нежеланием

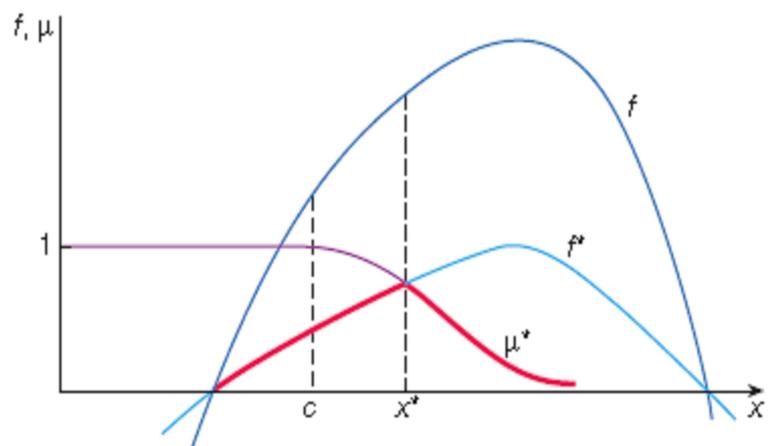


Рис. 34.

лица, поставившего задачу, выйти за определенные пределы (в данном случае превысить число c). В этом случае более реалистичным является подход, когда ограничение формулируется нечетким образом: "переменная x не должна быть существенно больше числа c ". Соответствующая функция принадлежности показана на рис. 34.

Введем функцию $f^*(x) = \frac{f(x)}{\max[f(x)]}$ (рис. 34). Ясно, что $f^*(x) \leq 1$ и, следовательно,

но, в интервале, где $f^*(x) \geq 0$, эту функцию можно рассматривать в качестве функции принадлежности некоторого нечеткого множества. По условию задачи необходимо найти максимальное значение $f^*(x)$ при выполнении нечеткого ограничения на переменную x . Это отвечает операции пересечения соответствующих нечетких множеств и дает функцию принадлежности μ^* , показанную на рис. 34 красной линией. Ее можно рассматривать как нечеткую инструкцию решения задачи. С позиции нечеткого подхода этой инструкции наилучшим образом соответствует ее наибольшее значение, достигаемое при $x = x^*$, что можно считать решением задачи; ясно, что $f(x^*) > f(c)$.

Основную сложность данной задачи можно трактовать как многокритериальность, поскольку, с одной стороны, требуется найти наибольшее значение функции f (или f^*), а с другой – наилучшим образом удовлетворить нечеткому ограничению, что также приводит к необходимости поиска наибольшего значения функции принадлежности μ . Известно, что такие задачи не имеют решения, если не привлекать дополнительные соображения, приводящие, в частности, к переходу от многих критериев к одному тем или иным способом (так называемая свертка критериев). Одним из таких способов является описанный выше переход к функции принадлежности μ^* .

Требуется разработать стратегию диагностирования с помощью устройства диагностирования (рис. 35 а). На него поступают два типа сигналов: во-первых, те же управляющие сигналы и, что и на объект диагностирования, во-вторых, сигналы u с датчиков, установленных на объекте диагностирования, которые несут информацию о происходящих в нем процессах. Устройство диагностирования непрерывно обрабатывает поступающую на него информацию и формирует заключение о состоянии объекта диагностирования (фактор Γ) – появились в нем дефекты, существенно влияющие на качество его функционирования, или нет, и если появились, то какие.

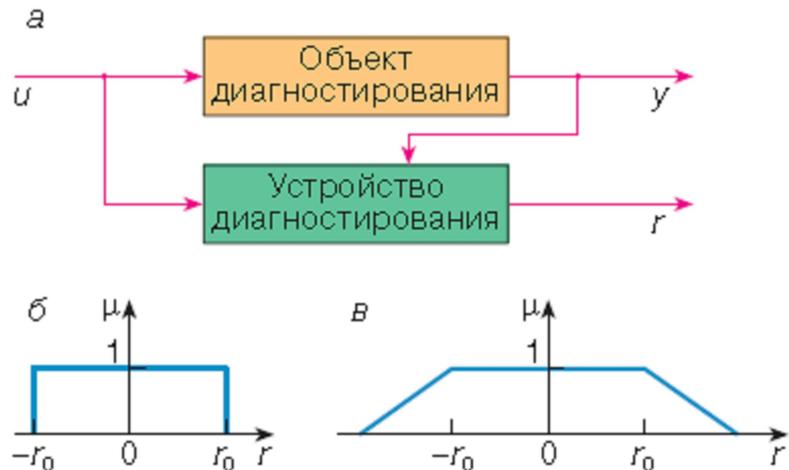


Рис. 35.

Во многих случаях такое заключение принимается весьма просто: если $\Gamma = 0$, то дефектов нет. Ненулевое значение Γ говорит о появлении дефекта, причем по величине Γ можно с большей или меньшей точностью сказать, какой дефект возник. Однако нередко из-за действующих помех, неучтенных факторов и прочих причин сигнал Γ может принимать ненулевые значения даже при отсутствии дефектов. Самый простой выход из положения здесь – ввести порог Γ_0 и принимать решение очевидным образом: $|\Gamma| \leq \Gamma_0$ – дефекта нет, $|\Gamma| > \Gamma_0$ –

дефект появился (рис. 35 б). Ясно, что такая проверка может производиться автоматически без вмешательства человека.

Приведенное простое бинарное правило имеет недостатки, один из которых состоит в том, что при небольших значениях Γ_0 будет велика вероятность ложной тревоги (дефекта нет, а порог превышен). При больших значениях Γ_0 существенно возрастет вероятность того, что возникший дефект останется незамеченным.

Выход здесь может быть найден за счет использования нечеткого порога (рис. 35 в) и включения человека-оператора в процесс принятия решения. В качестве информации для принятия решения оператору сообщается величина $1 - \mu$, характеризующая уровень тревоги. Она может быть представлена в форме звукового сигнала различной интенсивности, уровня яркости красного цвета на экране или иным способом, согласующимся с тем, как оператору сообщается другая информация об объекте.

Интересно отметить, что в отличие от рассмотренных выше (и многих других) случаев нечеткие представления используются в настоящей задаче как бы в обратную сторону. Имеется в виду то, что, как правило, нечеткие модели, описывая представления человека о процессах, происходящих в сложной системе, позволяют исключить его из процесса управления этой системой. В рассмотренной же задаче они, напротив, делают присутствие человека обязательным, представляя информацию о системе в нечетком виде.

Наиболее трезвые головы в последние годы придерживаются той точки зрения, что доводить до автоматизма сложные системы и исключать человека из контура управления нельзя, так как кумулятивно повышается вероятность аварий или растут издержки. Поэтому подход к проблеме выбора оптимального соотношения решаемых задач между человеком и автоматическими системами видится вполне естественно лежащим на языке нечетких множеств.

5.3. Методы искусственных нейронных сетей

При изучении процессов, протекающих в мозге человека, возникла идея смоделировать эти процессы. Эта идея была впервые сформулирована в статье **Мак-Каллок У.С. и Питтс В.** Логическое исчисление идей, относящихся к нервной активности // Автоматы / Под ред. К. Э. Шеннона и Дж. Маккарти. – М.: Изд-во иностр. лит., 1956. – С. 363—384. (Перевод английской статьи: McCulloch W.S. and W. Pitts. "A logical calculus of The ideas immanent in nervous activity", Bulletin of Mathematical Biophysics, 1943, vol. 5, p. 115- 133.)

Таким образом, мы с Вами будем знакомиться не с человеческим мозгом, а с **моделью**, которую исследователи приспособили для решения технических задач. Возможность такого приспособления доказана математиками. В опровержение так называемой 13-й проблемы Гильберта **А.Н. Колмогоровым** в 1956 г. была доказана теорема о возможности представления непрерывных функций нескольких переменных суперпозициями непрерывных функций меньшего числа переменных [Колмогоров А.Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных суперпозициями непрерывных функций меньшего числа переменных // Докл. АН СССР, том 108, с. 2, 1956.].

Искусственная нейронная сеть (ИНС) представляют собой систему соединённых и взаимодействующих между собой простых процессоров (искусственных **нейронов**). Такие процессоры обычно довольно просты (особенно в сравнении с процессорами, используемыми в персональных компьютерах). Каждый процессор подобной сети имеет дело только с сигналами, которые он периодически получает, и сигналами, которые он периодически посылает другим процессорам. И, тем не менее, будучи соединёнными в достаточно **большую сеть** с управляемым взаимодействием, такие по отдельности простые процессоры вместе способны выполнять довольно сложные задачи.

Нейрон – единица обработки информации в сети (рис. 36).

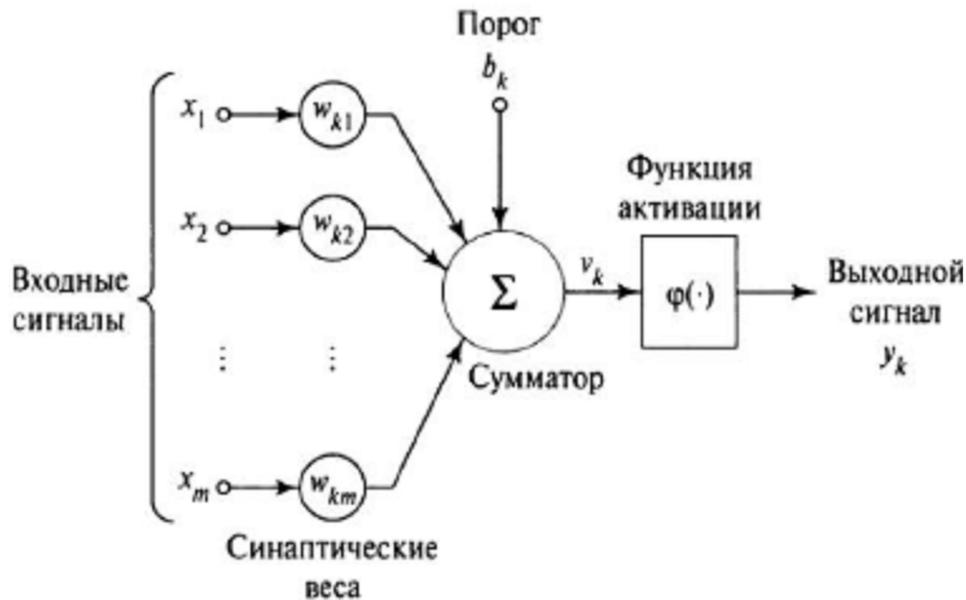


Рис. 36.

Синапсы (связи) – передают i -й входной сигнал x_i с весом (коэффициентом) w_{ki} на вход k -го сумматора, представляющего собой базу k -го нейрона.

Сумматор – суммирует входные сигналы со своими весами, т.е. строит линейную комбинацию.

Функция активации (функция сжатия) – преобразование линейной комбинации v_k , построенной k -ым сумматором в функцию φ определенного свойства.

Изображенная на рис. 36 структура k -го нейрона обеспечивает следующее преобразование входных сигналов в выходной y_k :

$$y_k = \varphi(v_k) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n w_{ki} x_i\right).$$

В табл. 1 приводится достаточно обширная сводка распространенных функций активации.

Название	Формула	Область значений
Пороговая	$f(s) = \begin{cases} 0, & s < \theta \\ 1, & s \geq \theta. \end{cases}$	$[0, 1]$
Знаковая (сигнатурная)	$f(s) = \begin{cases} 1, & s > 0, \\ -1 & s \leq 0. \end{cases}$	$[-1, 1]$
Линейная	$f(s) = ks.$	$(-\infty, \infty)$
Полулинейная	$f(s) = \begin{cases} ks, & s > 0, \\ 0 & s \leq 0. \end{cases}$	$[0, \infty)$
Линейная с насыщением	$f(s) = \begin{cases} -1, & s \leq -1, \\ s, & -1 < s < 1, \\ 1, & s \geq 1. \end{cases}$	$[-1, 1]$
Полулинейная с насыщением	$f(s) = \begin{cases} 0, & s \leq 0, \\ s, & 0 < s < 1, \\ 1, & s \geq 1. \end{cases}$	$[0, 1]$
Сигмоидальная (рациональная)	$f(s) = \frac{s}{\alpha + s }.$	$(-1, 1)$
Треугольная	$f(s) = \begin{cases} 1 - s , & s \leq 1, \\ 0, & s > 1. \end{cases}$	$(0, 1)$
Модульная	$f(s) = s .$	$[0, \infty)$
Квадратичная	$f(s) = s^2.$	$[0, \infty)$
Экспоненциальная	$f(s) = e^{-\alpha s}.$	$(0, \infty)$
Сигмоидальная (логистическая)	$f(s) = \frac{1}{1 + e^{-\alpha s}}.$	$(0, 1)$
Гиперболический тангенс (сигмоидальная)	$f(s) = th(\alpha s) = \frac{e^{\alpha s} - e^{-\alpha s}}{e^{\alpha s} + e^{-\alpha s}}.$	$(-1, 1)$
Радиальная базисная (гауссова)	$f(s) = e^{-\alpha s^2}.$	$(0, 1)$
Синусоидальная	$f(s) = \sin(\alpha s).$	$(-1, 1)$

Искусственные нейронные сети представляют собой сложные архитектуры, в которых для определенности различают слои нейронов (рис. 37).

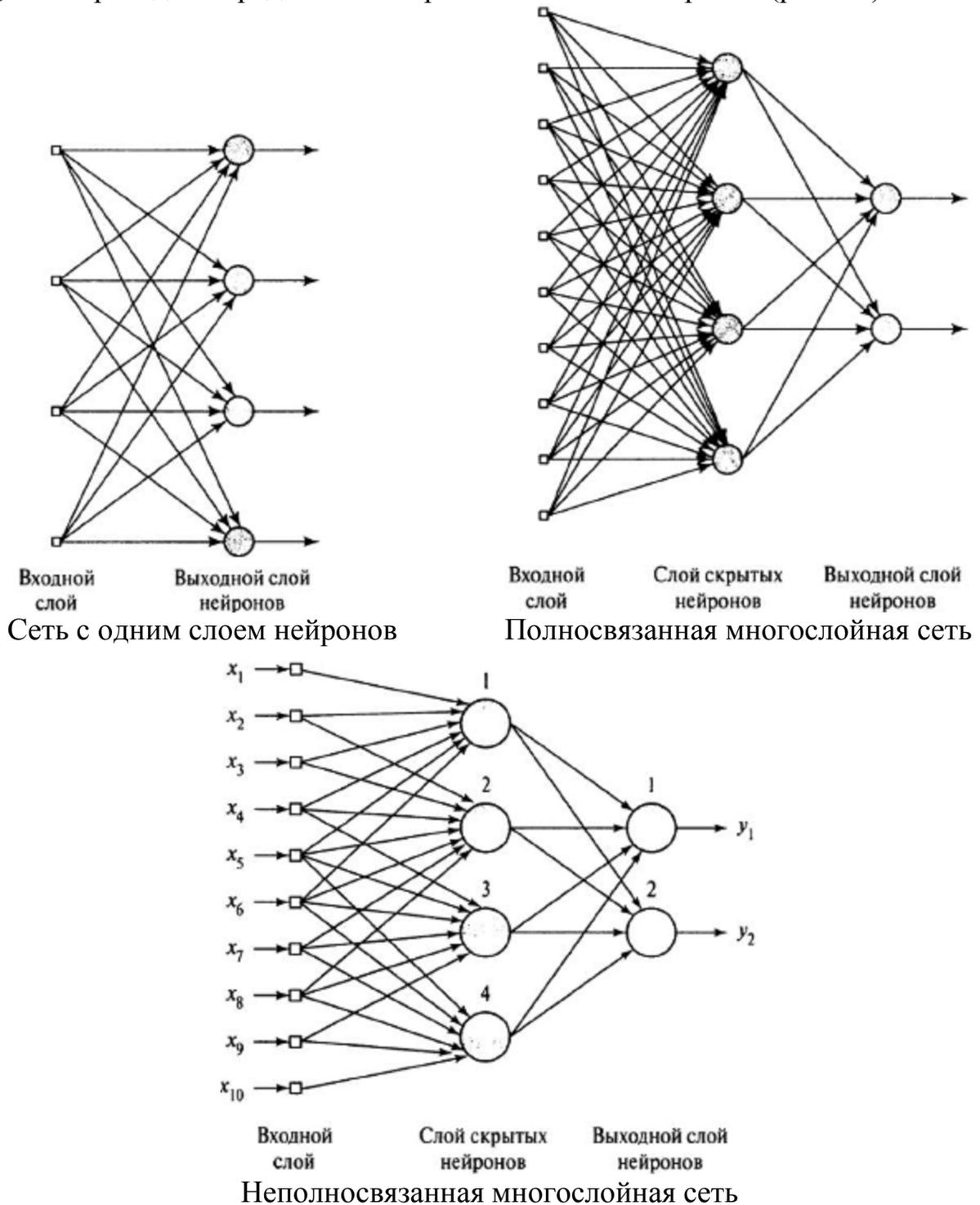


Рис. 37.

Специальным образом построенная нейронная сеть с **одним скрытым слоем**, с *пороговой функцией активации* называется **перцептроном** (рис. 38). Перцептрон, как кибернетическая модель мозга, предложен Фрэнком Розенблаттом в 1957 году. Он же и реализовал эту модель в виде электронной маши-

ны «Марк-1» в 1960 году. Перцептрон стал одной из первых моделей нейросетей.

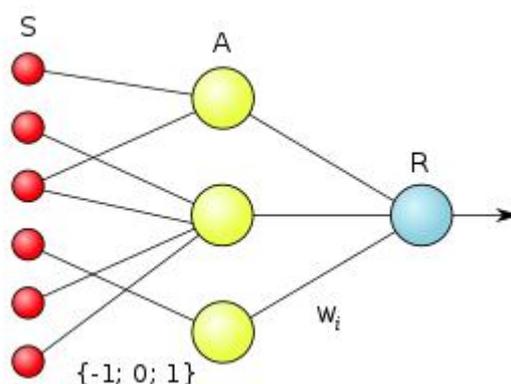


Рис. 38.

Опишем логическую схему элементарного перцептрона. Веса $S - A$ связей могут иметь значения -1 , $+1$ или 0 . Веса $A - R$ связей w_i могут быть любыми. Функции активации (пороговые функции) сумматоров A построены таким образом, что выходной сигнал x_i принимает значение 1 , как только количество сигналов от S -элементов на его входе превысило некоторую величину θ . Функция R -элемента аналогична, только входные сигналы для нее предварительно масштабируются:

$$f(x) = \text{sign} \left(\sum_{i=1}^n w_i x_i - \theta \right).$$

Наиболее важным открытием в теории искусственных нейронных сетей стало выявление возможности "обучения" перцептрона. **Обучение** элементарного перцептрона состоит в настройке весовых коэффициентов w_i и значений порогов θ (и в сумматорах A , и в выходном сумматоре R). Более того, как доказал Ф. Розенблатт, процесс обучения элементарного перцептрона независимо от начального состояния весовых коэффициентов **всегда** приведёт к достижению решения за **конечный** промежуток времени. В качестве целей такой настройки могут выступать самые разные задачи, например, распознавание образа по определенным признакам, распознавание неработоспособности сложной системы из-за частных отказов или отклонения частных характеристик элементов системы.

Конечно, в технике перцептроны слишком примитивная вещь — искусственные нейронные сети могут решать куда более сложные задачи. Предлагается такой пример, в котором процесс обучения фактически вообще не проводился, однако цель была достигнута несколькими шагами подбора.

искусственной нейронной сети. Входной сигнал один — градусная мера угла атаки α° . Выходные сигналы должны выдавать значения C_{ya} и C_{xa} самолета Ту-154Б2 в базовой (полетной) конфигурации.

Трехслойная искусственная нейронная сеть:

шаг 1 входной слой нейронов, входной нейрон, синапс: $x = k \times \alpha^\circ = 0,303 \times \alpha^\circ$;

шаг 2 слой скрытых нейронов, функции активации: f_i ;

шаг 3 выходной слой нейронов, адаптивные сумматоры с синаптическими весами w_{ij} .

Таким образом, искусственная нейронная сеть (ИНС), решающая задачу, имеет вид, изображенный на рис. 39.

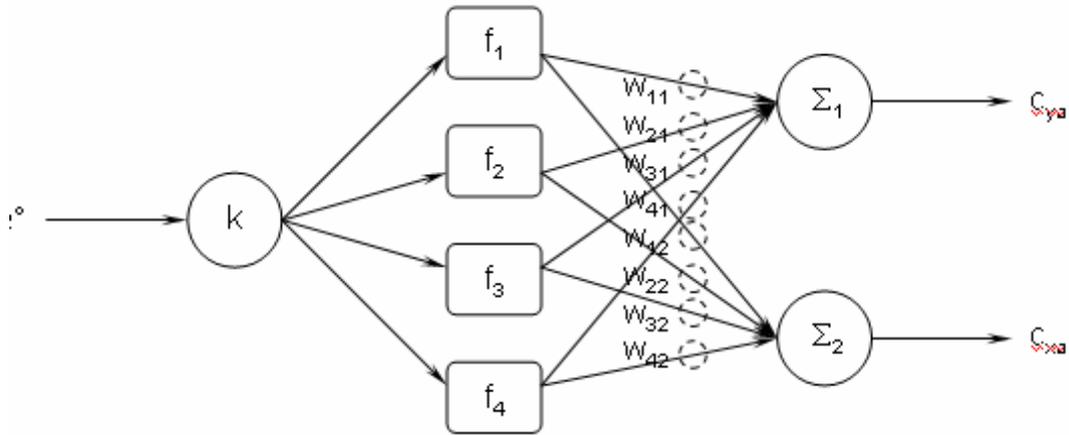


Рис. 39.

Ее элементами являются:

- входной коэффициент $k = 0,303$;
- функции активации – табл. 2 и рис. 40;

Таблица 2.

№	Функции активации нейронов	$f(x)$	Вес для c_{ya}	Вес для c_{xa}
1	линейная	x	1,9	0,3
2	логистическая	$\frac{1}{1+e^{-x}}$	-2,4	1,6
3	гауссова	e^{-x^2}	1	-0,8
4	гиперболический тангенс	$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	2	-0,75

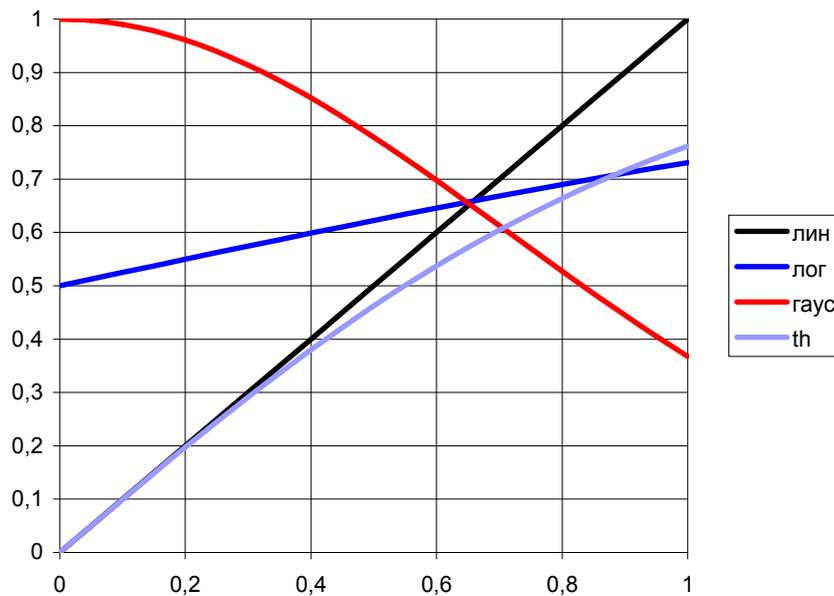


Рис. 40.

– выходной слой (рис. 41): $Y_j = \sum_{i=1}^4 w_{ij} f_i(k\alpha^\circ)$

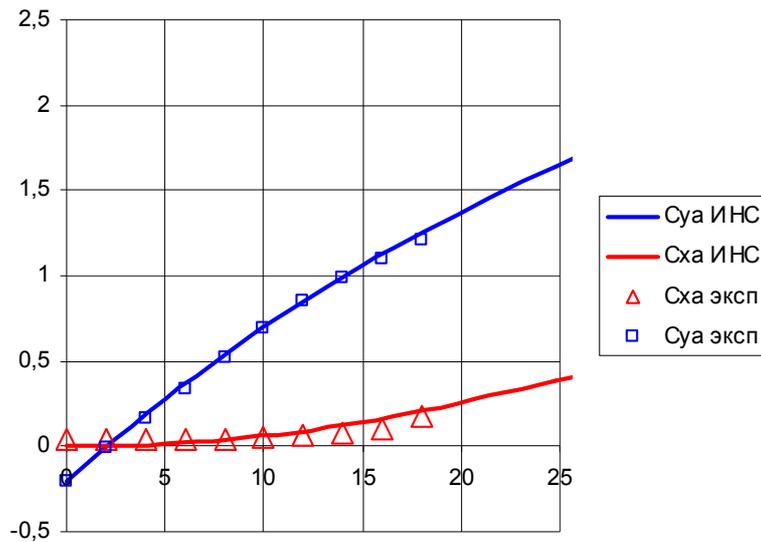


Рис. 41.

Согласно *теореме Колмогорова* с помощью нейронных сетей можно изобразить любую функцию сколь угодно точно, **НО ТОЛЬКО В ОБЛАСТИ ЕЕ ЗАДАНИЯ**. Здесь нигде не идет речи о физических свойствах отображаемой функции. В этом смысле искусственные нейронные сети проигрывают перед регрессионным анализом, в котором можно априори учитывать свойства отображаемой функции, а, следовательно, экстраполировать аппроксимацию.

Еще одно замечание: применение искусственных нейронных сетей в науке и технике можно рассматривать, как гибрид аналоговой и цифровой логики. Этот взгляд сулит большие возможности такого направления науки. Однако следует весьма осторожно относиться к любым высказываниям о возможности создания "искусственного интеллекта". То, на что способны искусственные нейронные сети, следовало бы назвать "искусственным повторителем" или "искусственным исполнителем", так как ничего **ПРИНЦИПИАЛЬНО НОВОГО** они создать не могут. Даже "самообучающиеся" искусственные нейронные сети должны иметь исходный материал для своего обучения, а создать новую информацию для этого процесса, расширить ее в новую область, они не могут. Это может сделать только человек со своим интеллектом.

Рекомендуемый список литературы для самостоятельного изучения

1. Альсведе Р., Вегенер И. Задачи поиска. – М.: Мир", 1982. – 368 с.
2. Бабкин А.В., Селиванов В.В. Основы механики сплошных сред: Учебник для вузов. 2-е изд., испр. В 3 томах. - М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2004. – Т. 1, 376 с., Т. 2, 420 с., Т. 3, 520 с.
3. Барзилович Е.Ю. Оптимально управляемые случайные процессы и их приложения (теоретические основы эксплуатации авиационных систем по состоянию). – Егорьевск: ЕАТК ГА, 1996. – 299 с.
4. Белов В.В., Воробьев Е.М., Шаталов В.Е. Теория графов. Учебное пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 1976. – 392 с.
5. Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред: 2-е изд., перераб. И доп. – М.: Физматлит, 1994. – 448 с.
6. Белоцерковский С. М., Гиневский А. С. Моделирование турбулентных струй и следов на основе метода дискретных вихрей. – М.: Физматлит, 1995. – 367 с.
7. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Том 1. – М.: Наука, 1966. – 632 с.
8. Бернацкий Ф.И. Планирование экспериментов в инженерных исследованиях. – Владивосток: 1986. – 45 с.
9. Бормотов М.Ю., Гуров А.Г., Корунов С.С., Кукушкин С.Н. Экспертные методы прогнозирования. – М.: МАИ, 1985. – 60 с.
10. Бураго Н.Г. Вычислительная механика. – Москва, 2017. – 286 с.
<http://www.ipmnet.ru/~burago/papers/nummet.pdf>
11. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1980. – 520 с.
12. Вентцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. – М.: Наука, 1980. – 208 с.
13. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1964. – 576 с.
14. Вилисов В.Я. и др. Экспертные методы в АСУ производством и обработкой ЛА. – М.: МАИ, 1984. – 72 с.
15. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы (введение в теорию). – М.: Наука, 1973. – 400 с.
16. Голубева О.В. Курс механики сплошных сред: Учебное пособие для педвузов. - М.: Высшая школа. 1972. – 368 с.
17. Гордеев В.Н. Кватернионы и трехмерная геометрия. Киев 2012
http://techlibrary.ru/b/2k1p1r1e1f1f1c_2j.2v._2s1c1a1t1flr1o1j1p1o2c_1j_1t1r1f1w1n1f1r1o1a2g_1d1f1p1n1f1t1r1j2g._2012.pdf
18. ГОСТ 24026–80. Исследовательские испытания. Планирование эксперимента. Термины и определения. – М.: Изд-во стандартов, 1980.

19. Добров Г.М., Ершов Ю.В., Левин Е.И., Смирнов Л.П. Экспертные оценки в научно-техническом прогнозировании. – Киев: Наукова Думка, 1974. – 160 с.
20. Дыхненко Л.М. и др. Основы моделирования сложных систем: Учебное пособие для вузов. – Киев: Вища школа. 1981. – 359 с.
21. Жирабок А.Н. Нечеткие множества и их использование для принятия решений. Соросовский образовательный журнал, том 7, №2, 2001 http://window.edu.ru/resource/814/20814/files/0102_109.pdf
22. Ибрагимов И.А. и др. Моделирование систем: Учебное пособие. – Баку: Азинефтехим, 1989. – 83 с.
23. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – М.: Наука, 1973. – 832 с.
24. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств: Пер. с франц. — М.: Радио и связь, 1982. — 432 с.
25. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. – М.: Физматгиз, 1963. – Ч. 1, 583 стр., Ч. 2, 728 с.
26. Красовский Г.И., Филаретов Г.Ф. Планирование эксперимента. – Минск: БГУ, 1982. – 302 с.
27. Круглов В. В., Дли М. И., Голунов Р. Ю. Нечёткая логика и искусственные нейронные сети. – М.: Физматлит, 2001. – 221 с.
28. Кубланов М.С. Гидрогазодинамика: учебное пособие М.: МГТУ ГА, 2013. – 80 с.
29. Кубланов М.С. Математическое моделирование задач летной эксплуатации воздушных судов на взлете и посадке: монография. - Москва: РИО МГТУ ГА, 2013. - 270 с.: ил. - ISBN 978-5-86311-908-3
30. Кубланов М.С. Математическое моделирование. Методология и методы разработки математических моделей механических систем и процессов. Часть I. Издание четвертое: учебное пособие. М.: МГТУ ГА, 2013. – 108 с.
31. Кубланов М.С. Математическое моделирование. Методология и методы разработки математических моделей механических систем и процессов. Часть II. Издание четвертое: учебное пособие. М.: МГТУ ГА, 2013. – 124 с.
32. Кубланов М.С. Методика построения многомерных регрессионных математических моделей. // Научный вестник Московского государственного технического университета гражданской авиации. 2010. № 154. С. 149 – 151.
33. Кубланов М.С., Чернигин К.О. Математическое моделирование посадки самолета Ил-76ТД-90ВД в Антарктиде. // Научный вестник МГТУ ГА. 2016; 19(6): 35-41.
34. Ламб Г. Гидродинамика. Перевод с 6-го английского издания, под ред. Н.А. Слезкина. – М.-Л.: ОГИЗ, 1947. – 928 с.

35. Лебедев А.Н. Моделирование в научно-технических исследованиях. М.: Радио и связь, 1989. – 224с.
36. Лесовский А.С. Применение корреляционного анализа для оценки управляемости самолета // Научный вестник МГТУ ГА. Сер. Аэромеханика и прочность. 2008. № 125. С. 173 – 178.
37. Липатов Е.П. Теория графов и ее применения. – М.: Знание, 1986. – 32 с.
38. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред. Пер. с английского Е.И. Свешниковой, под ред. М.Э. Эглит. – М.: Мир. 1974. – 319 с.
39. Мышкис А.Д. Элементы теории математических моделей. – М.: Физматгиз, 1994. – 192 с.
40. Налимов В.В. Теория эксперимента. – М.: Наука, 1971. – 208 с.
41. Неймарк Ю.И., Коган Н.Я., Савелов В.П. Динамические модели теории управления. – М.: Наука, 1995. – 400 с.
42. Остославский И.В., Стражева И.В. Динамика полета. Траектории летательных аппаратов. – М.: Машиностроение, 1969. – 500 с.
43. Победря Б.Е., Георгиевский Д.В. Основы механики сплошной среды. Курс лекций. – М.: Физматлит. 2006. – 272 с.
44. Под ред. Боровикова В.П. Нейронные сети STATISTICA Neural Networks. – М. 2008. – 392 с.
45. Пустыльник Е.И. Статистические методы анализа и обработки наблюдений. – М.: Наука, 1968. – 288 с.
46. Савченко А.А. Введение в математическую статистику с применением в гражданской авиации. – Киев: МИИГА, 1975. – 132 с.
47. Савченко А.А. Многомерный статистический анализ для инженеров гражданской авиации. – М.: МИИГА, 1976. – 112 с.
48. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. – М.: Наука, 1992. – 424 с.
49. Седов Л.И. Механика сплошной среды. 5-е изд., испр. – М.: Наука, 1994. – Т 1, 528 с., Т 2, 560 с.
50. Советов Б.Я., Яковлев С.Я. Моделирование систем: Учебник для вузов. – М.: Высшая школа, 1998. – 320 с.
51. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкости. Т. 1, 2. – М: Мир, 1991. – 552 с.
52. Фомичев А.В. Теоретическая механика 1 (Фомичев, МФТИ) http://mipt1.ru/3_teor_meh.php
53. Хайкин С. Нейронные сети: полный курс. 2-е изд., испр.: Пер. с англ. – М.: ООО "И.Д. Вильямс", 2006. – 1104 с.: ил. – ISBN 5-8459-0890-6 (рус.).
54. Хальд А. Математическая статистика с техническими приложениями. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1956. – 664 с.
55. Хикс Ч.Р. Основные принципы планирования эксперимента. – М.: Мир, 1967. – 406 с.

56. Чернов В.Г. Основы теории нечетких множеств. Решение задач многокритериального выбора альтернатив : учеб. пособие / В. Г. Чернов ; Владим. гос. ун-т. – Владимир: Изд-во Владим. гос. ун-та, 2005. – 100 с. –ISBN 5-89368-612-8.
57. Чисар И., Кёрнер Я. Теория информации: теоремы кодирования для дискретных систем без памяти. – М.: Мир, 1985. – 400 с.
58. Шилейко А.В., Кочнев В.Ф., Химушин Ф.Ф. Введение в информационную теорию систем. – М.: Радио и связь, 1985. – 280 с.
59. Шторм Р. Теория вероятностей. Математическая статистика. Статистический контроль качества. – М.: Мир, 1970. – 368 с.