

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА
(РОСАВИАЦИЯ)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ» (МГТУ ГА)

Кафедра технической механики и инженерной графики

Ю.В. Петров, Т.Н. Хромых

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Учебно-методическое пособие
по проведению практических занятий

*для студентов II курса
направления 25.03.01 (ГСМ)
всех форм обучения*

Москва
ИД Академии Жуковского
2021

УДК 539.3/.6
ББК 605
ПЗ1

Рецензент:

Самойленко В.М. – д-р техн. наук, профессор

Петров Ю.В.

ПЗ1 Сопrotивление материалов [Текст] : учебно-методическое пособие по проведению практических занятий / Ю.В. Петров, Т.Н. Хромых. – М.: ИД Академии Жуковского, 2021. – 36 с.

Данное учебно-методическое пособие издается в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Сопrotивление материалов» для студентов II курса направления 25.03.01 (ГСМ) всех форм обучения.

Рассмотрено и одобрено на заседаниях кафедры 14.09.2021 г. и методического совета 29.09.2021 г.

УДК 539.3/.6
ББК 605

В авторской редакции

Подписано в печать 26.10.2021 г.
Формат 60x84/16 Печ. л. 2,25 Усл. печ. л. 2,09
Заказ № 833/1004-УМП03 Тираж 40 экз.

Московский государственный технический университет ГА
125993, Москва, Кронштадтский бульвар, д. 20

Издательский дом Академии имени Н. Е. Жуковского
125167, Москва, 8-го Марта 4-я ул., д. 6А
Тел.: (495) 973-45-68
E-mail: zakaz@itsbook.ru

© Московский государственный технический
университет гражданской авиации, 2021

1. Практическое занятие № 1, 2 (4 часа)

Расчеты на прочность и жесткость при растяжении-сжатии

Основы теории

Центральное растяжение (сжатие) стержня – вид нагружения и деформирования стержня, при котором все внешние силы действуют строго вдоль его продольной оси. В сечениях возникает единственное интегральное внутреннее усилие - продольная сила N , которая является суммой распределенных по площади сечения дифференциальных внутренних усилий (нормальных напряжений σ), действующих в данном поперечном сечении площадью F

$$N = \int_F \sigma dF. \quad (1.1)$$

Нормальную силу N в каждом сечении можно найти, используя метод сечений. При этом составляются уравнения равновесия для отсеченной части стержня на каждом характерном участке, и строится эпюра продольных сил. Анализ эпюры продольных сил позволяет выявить сечения стержня, в которых эти внутренние силы достигают максимального значения (опасные сечения).

Нормальные напряжения σ в каждой точке сечения непосредственно из соотношения (1.1) найти нельзя, так как в общем случае неизвестно, как они распределены по площади сечения. При решении данной задачи применяется обоснованная экспериментальными данными гипотеза плоских сечений (Бернулли). Установлено, что при центральном растяжении – сжатии нормальные напряжения σ равны во всех точках сечения. Однако следует учитывать, что такой характер распределения нормальных напряжений (гипотеза Сен-Венана) справедлив лишь на некотором удалении от точки приложения внешней силы.

Таким образом, нормальные напряжения в текущем сечении стержня с координатой z (ось Oz совпадает с продольной осью стержня) при центральном растяжении – сжатии равны

$$\sigma(z) = \frac{N(z)}{F(z)}, \quad (1.2)$$

где $F(z)$ – площадь поперечного сечения стержня в текущем сечении z .

В сопротивлении материалов принято: при растяжении $\sigma > 0$, а при сжатии $\sigma < 0$.

Эксперимент показывает, что при малых деформациях растяжения - сжатия можно записать закон Гука в следующем виде:

$$\sigma = E \varepsilon, \quad \varepsilon = \Delta l / l, \quad (1.3)$$

где E - модуль Юнга (модуль упругости первого рода); ε - относительная продольная деформация стержня; Δl - абсолютное продольное удлинение стержня; l - исходная длина стержня. Модуль Юнга является важнейшей механической характеристикой материала, из которого изготовлен стержень, определяется опытным путем и приводится в справочной литературе. Таким образом, если относительная продольная деформация ε постоянна по сечению, то и напряжения постоянны во всех точках сечения стержня ($\sigma = \text{const}$) и тогда из соотношения (1.1) имеем:

$$\sigma = \frac{N}{F}. \quad (1.4)$$

Формула (1.4) является основной для расчета на прочность при центральном растяжении (сжатии). С учетом формул (1.1) – (1.4) имеем

$$\Delta l = \varepsilon l = \frac{\sigma l}{E} = \frac{N l}{EF}, \quad (1.5)$$

где произведение EF называют жесткостью стержня на растяжение. Очевидно, что если на некотором участке стержня длиной l продольная сила N постоянна, то постоянна и деформация. Для стержня, состоящего из ряда участков с постоянной жесткостью $(EF)_i$ и продольной силой N_i , производится суммирование по участкам:

$$\Delta l = \sum_i \frac{N_i l_i}{(EF)_i}. \quad (1.6)$$

В самом общем случае сумма заменяется интегралом по всей длине стержня:

$$\Delta l = \int_l \frac{N(z) dz}{EF(z)}. \quad (1.7)$$

По результатам испытаний образцов, изготовленных из различных материалов, определяются важнейшие механические характеристики: предел текучести σ_T и предел прочности (временное сопротивление) σ_B . Значения данных характеристик приводится в справочной литературе. В сопротивлении материалов вводится понятие допускаемых напряжений $[\sigma]$, которые определяют по формуле:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{[n]}, \quad \sigma_{\text{пред}} \in (\sigma_T, \sigma_B), \quad (1.8)$$

где $[n]$ — допускаемый коэффициент запаса прочности. Он зависит от неоднородности материала, неточности задания внешних нагрузок, приближенности расчетных схем и расчетных формул, тяжести последствий разрушения конструкции. Расчет элементов конструкции летательного аппарата проводится не по допускаемым напряжениям, а по разрушающим нагрузкам. В этом случае вводится и нормируется коэффициент безопасности f , который по

существо аналогичен допускаемому коэффициенту запаса прочности $[n]$. Для основных элементов авиационных конструкций $[n]=1,5$.

Расчет на прочность элементов конструкции, работающих в условиях растяжения – сжатия, проводится в соответствии с условием прочности:

$$\sigma_{max} \leq [\sigma], \quad n = \frac{[\sigma]}{\sigma_{max}}, \quad (1.9)$$

где σ_{max} - максимальные расчетные нормальные напряжения в сечениях стержня; n - расчетный (текущий) коэффициент запаса прочности. Очевидно, что при $n > 1,0$ стержень удовлетворяет условию прочности.

Аналогично могут решаться задачи на жесткость, если задаться значениями допускаемых линейных деформаций $[\Delta l]$. Расчет по условию жесткости базируется на соотношениях вида:

$$\Delta l_{max} \leq [\Delta l], \quad n_{\Delta} = \frac{[\Delta l]}{\Delta l_{max}}, \quad (1.10)$$

где n_{Δ} - коэффициент запаса по жесткости; Δl_{max} - максимальная расчетная деформация конструктивного элемента.

Примеры решения задач

Задача 1.1

Условие задачи: определить из условия прочности диаметры стержня (рис. 1.1). Дано: $[\sigma] = 100$ МПа.

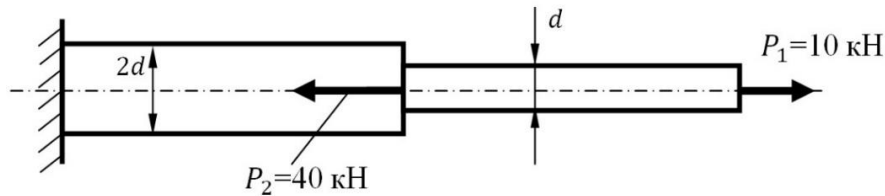


Рис. 1.1

Алгоритм решения задачи

1. Определяем реакции опор

Для определения реакций опор необходимо составить уравнения равновесия стержня с учетом реактивных сил и моментов. В общем плоском случае в жесткой заделке могут возникать две силы реакции R_{Oy}, R_{Oz} и реактивный момент M_O в связанной с заделкой системе координат Oyz (рис. 1.2).

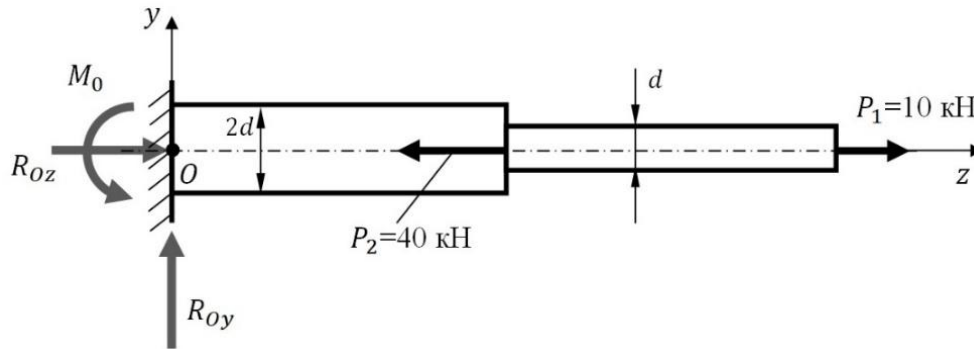


Рис. 1.2

Так как все внешние силы P направлены вдоль продольной оси стержня, то очевидно, что $R_{Oy}, M_O = 0$. Тогда неизвестную реакцию R_{Oz} определим так:

$$\sum P_z = R_{Oz} - P_2 + P_1 = 0 \Rightarrow R_{Oz} = P_2 - P_1 = 30 \text{ кН} .$$

Данную запись нужно понимать следующим образом: сумма проекций всех сил на ось Oz для статического равновесия стержня должна быть равна нулю. При составлении уравнения равновесия используется правило знаков теоретической механики: силы, направление действия которых совпадает с направлением оси Oz , считаются положительными. Из уравнения равновесия вычисляем неизвестную реактивную силу R_{Oz} . Положительное значение силы R_{Oz} означает правильный выбор ее направления при составлении уравнения равновесия. При сложной схеме нагружения направление действия реактивной силы предсказать сложно, поэтому ее направляют произвольно. Если в результате составления уравнения равновесия и вычисления неизвестной реактивной силы она получится со знаком «-», то в расчетной схеме направление действия R_{Oz} нужно изменить на противоположное.

Внимание! В данной задаче выполнение п. 1 алгоритма (определение реакции опор) нецелесообразно. Удобнее исходную систему координат связать со свободным концом и строить эпюру продольных сил справа – налево. Тогда при правильном построении эпюры значение реактивной силы R_{Oz} в заделке вычисляется автоматически.

2. Изображаем расчетную схему стержня

Под расчетной схемой стержня будем понимать исходную схему, у которой отброшены опоры и их действие заменено соответствующими силами реакции. Расчетная схема стержня для задачи 1.1 приведена на рис. 1.3.

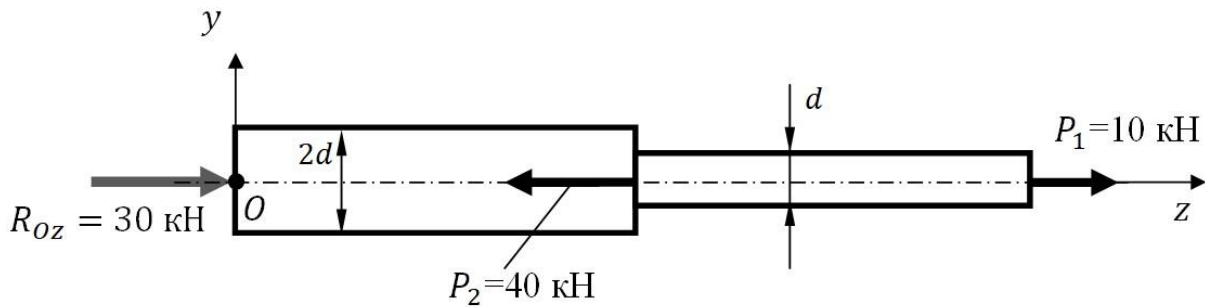


Рис. 1.3

Здесь важно отметить, что если по условию задачи есть внешние силы со знаком минус (например, $P_4 = -15 \text{ кН}$), то на расчетной схеме целесообразно поменять направление действия соответствующей силы.

3. Разбиваем стержень на характерные участки

Границами характерных участков при построении эпюр продольных сил являются сечения, в которых приложены внешние силы (включая силы реакции опор) и (или) изменяется геометрия (площадь поперечного сечения). В пределах характерного участка продольная сила описывается одним уравнением. **Важно отметить**, что изменение геометрии сечений стержня на вид эпюры продольных сил не влияет. Однако уже на этом этапе решения задачи рекомендуется выделять характерные участки с измененной геометрией, так как в дальнейшем при построении эпюр нормальных напряжений их необходимо будет учитывать.

В ходе решения задачи вычислено значение реактивной силы R_{Oz} и изображена расчетная схема с системой координат Ouz , связанной с левым по рисунку концом стержня. Покажем, как можно решать задачу для стержня без вычисления силы реакции. Для этого **свяжем систему координат Ouz с правым концом стержня (рис. 1.4)**. Выделим два характерных участка с координатами: первый - $0 \leq z_1 \leq l_1$ и второй $l_1 \leq z_2 \leq l$.

4. Строим эпюру продольных сил N

На 1-ом характерном участке ($0 \leq z_1 \leq l_1$) уравнение равновесия отсеченной части имеет вид: $\sum P_z = N_1 - P_1 = 0$ (сила, направление действия которой совпадает с направлением оси Oz , в уравнение равновесия подставляется со знаком «+»), а значит $N_1 = P_1 = 10 \text{ кН}$. **Важно!** Неизвестную внутреннюю продольную силу N_1 всегда направлять от сечения, т.е. на растяжение. Если в процессе решения уравнения равновесия она получится положительной, то направление ее действия выбрано верно. В данном случае сила N_1 положительна и ее направление выбрано верно.

На 2-ом характерном участке ($l_1 \leq z_2 \leq l$) уравнение равновесия отсеченной части имеет вид: $\sum P_z = N_2 + P_2 - P_1 = 0$, а значит $N_2 = P_1 - P_2 = -30 \text{ кН}$. Исходное направление силы N_2 (рис.1.4) выбрано

неверно (знак «-»). Она будет направлена не от сечения, а к сечению, т.е. является сжимающей. С учетом полученных значений окончательно строим эпюру продольных сил (рис. 1.4).

Важно, что в крайнем левом сечении (в заделке) скачок на эпюре продольных сил равен 30 кН , что соответствует значению реакции опоры, вычисленной в п. 1. Причем реактивная сила сжимающая, так как значение продольной силы на эпюре отрицательное.

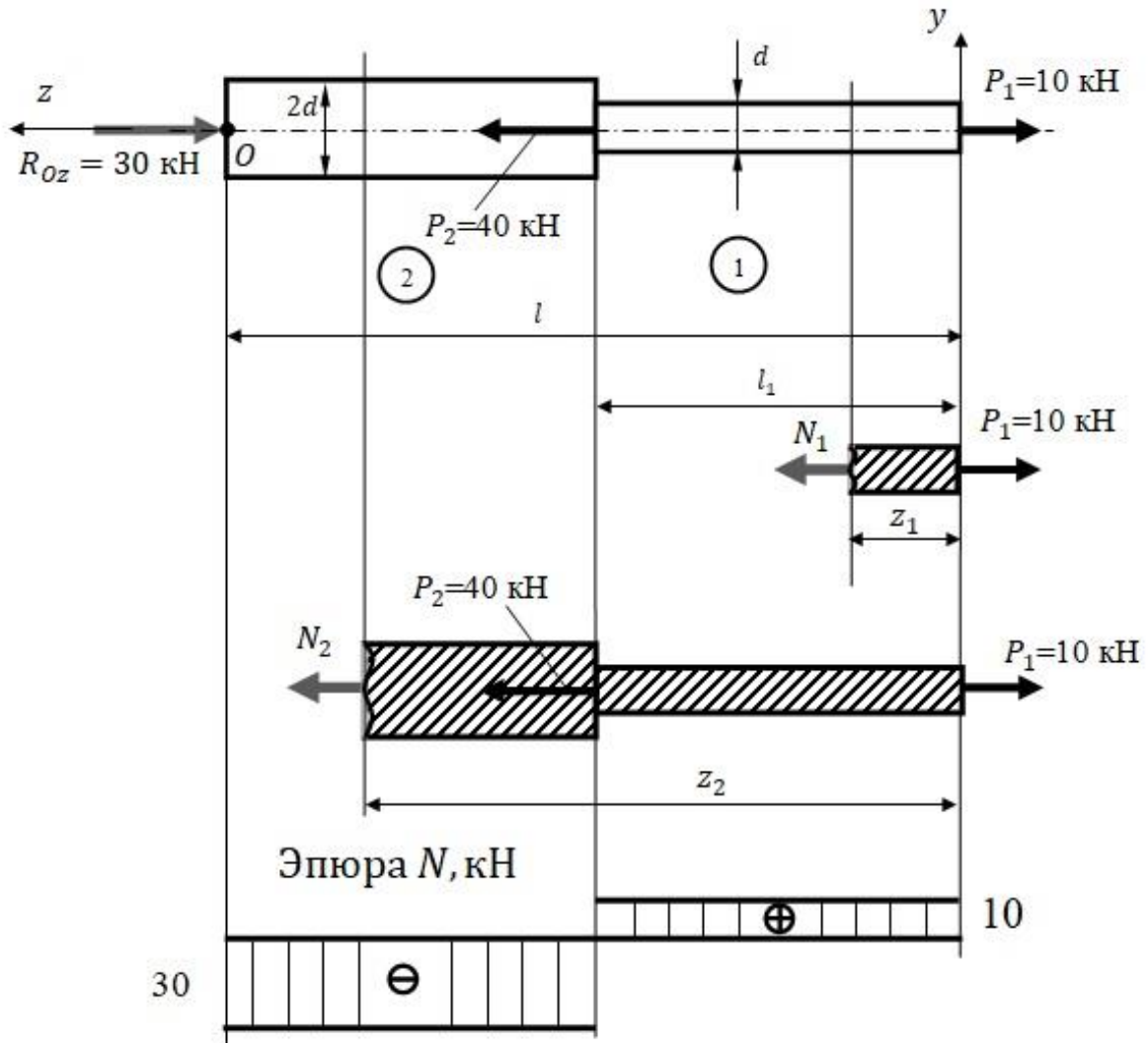


Рис. 1.4

5. Проверяем правильность построения эпюры продольных сил

Простейшим способом проверки правильности построения эпюры является удовлетворение следующему правилу: скачок на эпюре продольных сил может возникать лишь в сечениях приложения сосредоточенных внешних продольных сил и, он численно равен абсолютному значению этих сил. Из рис. 1.4 видно, что указанное условие выполняется, а значит эпюра построена верно.

6. Вычисляем нормальные напряжения на участках 1 и 2

На участке 1 имеем
$$\sigma_1 = \frac{N_1}{\pi d^2} = \frac{4N_1}{\pi d^2} = \frac{40}{\pi d^2} \text{ МПа} .$$

На участке 2 имеем
$$\sigma_2 = \frac{N_2}{\pi (2d)^2} = \frac{N_2}{\pi d^2} = \frac{30}{\pi d^2} \text{ МПа} .$$

Видно, что напряжения на первом характерном участке больше, а значит, диаметры стержня будем вычислять из условия прочности, записанного для 1-го характерного участка.

7. Вычисляем геометрические параметры стержня

Условия прочности запишем в виде (1.9)

$$\sigma_{max} = \sigma_1 = \frac{40 \cdot 10^3}{\pi d^2} \leq [\sigma].$$

Следовательно, минимально допустимый диаметр стержня, удовлетворяющего условию прочности, равен (*округлять полученное число нужно только в большую сторону*)

$$d = \sqrt{\frac{40 \cdot 10^3}{\pi [\sigma]}} = \sqrt{\frac{40 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 10^8}} = 1,13 \cdot 10^{-2} \text{ м} .$$

Задача 1.2

Условие задачи: в какую сторону и насколько переместится крайнее правое сечение стержня (рис. 1.5). Дано: $P = 4 \text{ кН}$; $d = 10 \text{ мм}$; $l = 1 \text{ м}$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

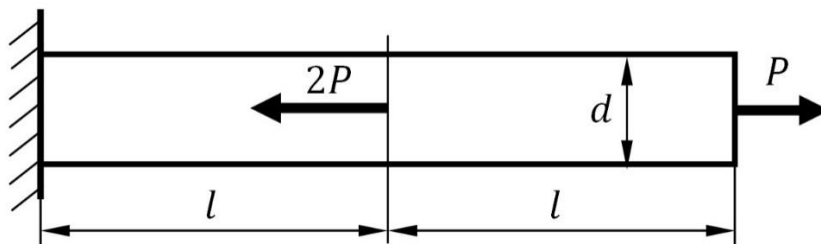


Рис. 1.5

Алгоритм решение задачи

1. Определяем реакции опор

Данный пункт алгоритма опускаем, так как целесообразно эпюру строить со свободного конца стержня.

2. Разбиваем стержень на характерные участки

В данной задаче свяжем систему координат Ouz с правым по рис. 1.5 концом стержня (не нужно вычислять реакцию опор). Выделим два характерных участка с координатами: первый - $0 \leq z_1 \leq l$ и второй $l \leq z_2 \leq 2l$.

3. Изображаем расчетную схему

Данный пункт алгоритма опускаем, так как эпюру будем строить со свободного конца стержня без вычисления реакции опор и все внешние силы положительные.

4. Строим эпюру продольных сил N

На 1-ом участке $0 \leq z_1 \leq l$ уравнение равновесия отсеченной части имеет вид: $\sum P_z = N_1 - P = 0$, а значит $N_1 = P = 4кН$. Сила N_1 (рис. 1.6) направлена от сечения, значит, она растягивающая и имеет знак «+».

На 2-ом участке $l \leq z_2 \leq 2l$ уравнение равновесия отсеченной части имеет вид: $\sum P_z = N_2 + 2P - P = 0$, а значит $N_2 = -P = -4кН$. Исходное направление силы N_2 выбрано неверно (знак «-»), она будет направлена не от сечения, а к сечению, т.е. является сжимающей. С учетом полученных значений строим эпюру продольных сил.

5. Проверяем правильность построения эпюры продольных сил

Правило проверки: скачок на эпюре продольных сил может возникать лишь в сечениях приложения сосредоточенных внешних продольных сил, и он численно равен абсолютному значению этих сил. Из рис. 1.6 видно, что указанное условие выполняется, а значит эпюра построена верно.

6. Вычисляем удлинение стержня в характерных точках О и А

Известно, что удлинение однородного стержня постоянного поперечного сечения изменяется по линейному закону в пределах характерного участка (при условии $N = const$), поэтому для построения эпюры удлинений Δl достаточно определить линейные перемещения в характерных точках А и О. Очевидно, что в заделке (точка В) линейные перемещения стержня равны нулю.

Перемещение точки А относительно заделки определяется соотношением (1.5):

$$\Delta l_A = \frac{N_2 l}{EF} = -\frac{Pl}{EF} = -\frac{4 \cdot 10^3 \cdot 1}{2 \cdot 10^{11} \cdot \frac{\pi d^2}{4}} = -2,55 \cdot 10^{-4} \text{ м},$$

где $F = \frac{\pi d^2}{4}$ - площадь поперечного сечения стержня.

Перемещение характерной точки О (свободного конца стержня) относительно заделки определяется соотношением:

$$\Delta l_O = \Delta l_A + \frac{N_1 l}{EF} = -2,55 \cdot 10^{-4} + \frac{Pl}{EF} = 0.$$

Вывод: при заданной схеме нагружения стержня правое его сечение не совершает линейных перемещений.

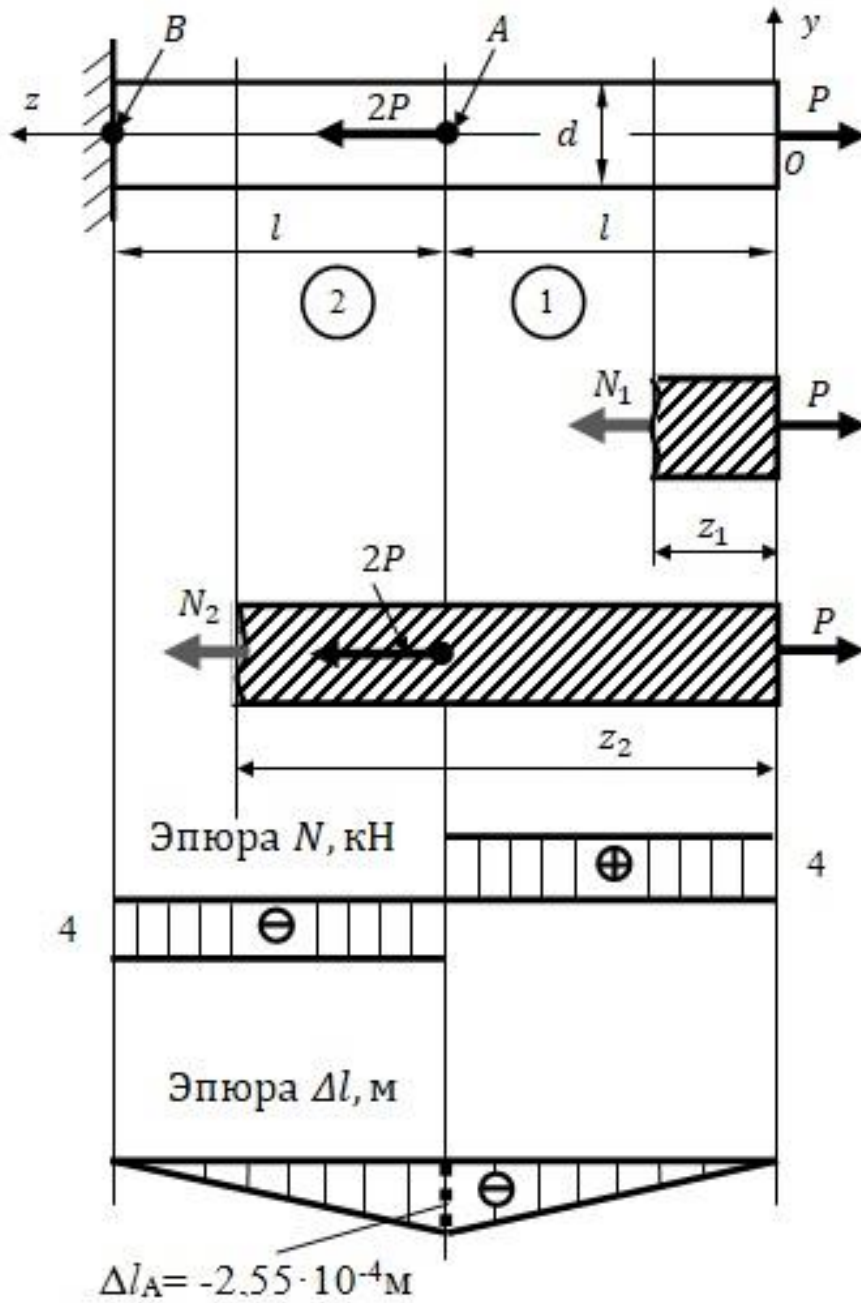


Рис. 1.6

Практическое занятие № 3, 4 (4 часа)

Расчеты на прочность и жесткость при кручении

Основы теории

Кручением называется такой вид напряженно – деформированного состояния бруса, при котором в поперечных сечениях возникает лишь один интегральный внутренний силовой фактор - крутящий момент $M_k(z)$. Брус, работающий на кручение, обычно называют валом. При расчете вала на прочность и жесткость при кручении нужно решить две задачи: определить дифференциальные внутренние усилия (касательные напряжения) во всех точках опасных сечений и найти относительные угловые смещения сечений при заданном внешнем воздействии.

На первом этапе решения практических задач на кручение, используя метод сечений, строится эпюра крутящих моментов. Анализ данной эпюры позволяет выявить потенциально опасные сечения, в которых крутящий момент M_k достигает максимального значения. В расчетах используются следующие основные допущения:

- поперечные сечения остаются плоскими после деформации (выполняется гипотеза Бернулли - гипотеза плоских сечений);
- расстояние между поперечными сечениями не изменяется.

Касательные напряжения при кручении вала определяются по формуле

$$\tau = \frac{M_k}{J_p} \rho, \quad J_p = \int_F \rho^2 dF, \quad (2.1)$$

где τ - касательные напряжения в точке, удаленной от продольной оси вала на расстояние ρ ; J_p - полярный момент инерции сечения. Так, для вала круглого поперечного сечения диаметром D имеем $J_p = \frac{\pi D^4}{32}$.

Полученные результаты позволяют сформулировать ряд важных выводов:

- касательные напряжения при кручении направлены перпендикулярно к текущему радиусу ρ ;
- касательные напряжения достигают своего максимального значения в точках наиболее удаленных от продольной оси вала, где $\rho = \rho_{max} = D/2$.

В этом случае

$$\tau_{max} = \frac{M_k}{J_p} \rho_{max} = \frac{M_k}{W_p}, \quad (2.2)$$

Геометрическая характеристика сечения $W_p = \frac{2 \cdot J_p}{D}$ называется полярным моментом сопротивления. Для сплошного круглого вала он равен

$$W_P = \frac{\pi D^3}{16}. \quad (2.3)$$

Взаимный угол поворота сечений определяется по формуле (интегрирование проводят по длине вала l)

$$\varphi = \int_l \frac{M_k(z)}{G J_P(z)} dz, \quad (2.4)$$

где G - модуль сдвига (модуль упругости второго рода), который является характеристикой материала и приводится в справочной литературе. Если по длине вала крутящий момент и полярный момент инерции имеют постоянное значение, то получим

$$\varphi = \frac{M_k l}{G J_P}. \quad (2.5)$$

Условия прочности для вала при использовании метода расчета по допускаемым напряжениям имеют вид:

$$\tau_{max} = \left(\frac{M_k}{W_P} \right)_{max} \leq [\tau], \quad (2.6)$$

Допускаемые напряжения при кручении определяются подобно растяжению – сжатию

$$[\tau] = \frac{\tau_{пред}}{[n]}, \quad \tau_{пред} \in (\tau_T, \tau_B),$$

где $[n]$ - допускаемый коэффициент запаса прочности; τ_T, τ_B - соответственно, предел текучести и предел прочности при кручении.

При оценке жесткости сравнивают максимальный расчетный относительный (погонный) угол закручивания сечений с нормируемым по каким либо условиям (например, эксплуатационные ограничения) значением

$[\theta] = \left[\frac{d\varphi}{dz} \right]$. Таким образом, имеем:

$$\theta_{max} = \left(\frac{d\varphi}{dz} \right)_{max} = \left(\frac{M_k}{G J_P} \right)_{max} \leq [\theta]. \quad (2.7)$$

Примеры решения задач

Задача 2.1

Условие задачи: определить из условия прочности диаметры вала (рис. 2.1). Дано: внешний крутящий момент $T = 1 \text{ кНм}$; $[\tau] = 100 \text{ МПа}$.

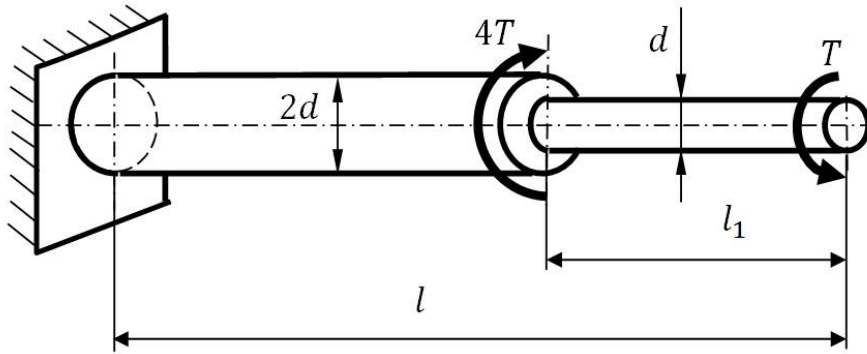


Рис. 2.1

Алгоритм решение задачи

1. Определяем реакции опор

Для определения реакции опоры (рис. 2.2) необходимо составить уравнение моментов (равновесия вала) относительно оси Oz с учетом неизвестного реактивного момента M_{RO} . В общем плоском случае в жесткой заделке могут возникать две силы реакции R_{Oy}, R_{Oz} и реактивный момент M_{RO} в связанной с заделкой системе координат Oyz . Так как в данной задаче на вал не действуют активные внешние силы, то очевидно, что $R_{Oy} = R_{Oz} = 0$. Тогда неизвестный реактивный момент M_{RO} определится:

$$\sum M_z = M_{RO} - 4T + T = 0 \Rightarrow M_{RO} = 3T = 3 \text{ кНм}.$$

Получено положительное значение реактивного момента M_{RO} , что указывает на правильный выбор направления его действия. Если же при вычислении получено отрицательное значение реактивного момента, то направление действия момента M_{RO} необходимо изменить на противоположное.

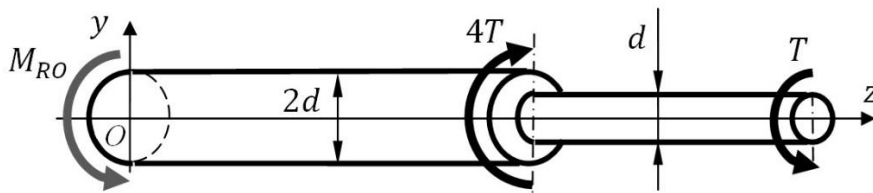


Рис. 2.2

Внимание! В данной задаче выполнение п.1 алгоритма (определение реакции опоры) нецелесообразно. Удобнее исходную систему координат связать со свободным концом и строить эпюру крутящих моментов справа – налево. Тогда при правильном построении эпюры значение реактивного момента M_{RO} в заделке вычисляется автоматически.

2. Изображаем расчетную схему вала

Под расчетной схемой будем понимать исходную схему, у которой отброшены опоры и их действие заменено соответствующим реактивным

моментом. Расчетная схема изображена на рис. 2.2. **Важно!!!** Если по условию задачи есть внешние моменты со знаком минус (например, $T = -15 \text{ кНм}$), то на расчетной схеме целесообразно поменять направление действия соответствующего момента.

В данной задаче выполнение п.2 алгоритма нецелесообразно, так как исходную систему координат свяжем с правым по рисунку свободным концом.

3. Разбиваем вал на характерные участки

Границами характерных участков при построении эпюр крутящих моментов являются сечения, в которых приложены внешние моменты (включая реактивный момент) и (или) изменяется геометрия (площадь или форма поперечного сечения). Важно, что в пределах характерного участка интегральный внутренний силовой фактор - крутящий момент описывается одним уравнением. **Важно отметить**, что изменение геометрии сечений вала на вид эпюры крутящих моментов не влияет. Однако уже на этом этапе решения задачи рекомендуется выделять характерные участки с измененной геометрией, так как в дальнейшем при анализе напряженно – деформированного состояния вала их необходимо будет учитывать.

Известно, что абсолютные длины участков вала не влияют на вид эпюры крутящих моментов, что позволяет в данной задаче границы характерных участков рассматривать в общем виде, как показано на рис. 2.3.

Свяжем систему координат Ouz с правым концом вала. Выделим два характерных участка с координатами: первый - $0 \leq z_1 \leq l_1$ и второй $l_1 \leq z_2 \leq l$.

4. Построение эпюр крутящих моментов

Условно разделяем вал на два характерных участка 1 и 2, как показано на рис.2.3. Будем считать крутящий момент положительным, если он стремится повернуть рассматриваемое сечение против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора Oz .

На 1-ом участке $0 \leq z_1 \leq l_1$ уравнение равновесия отсеченной части имеет вид: $\Sigma M_z = M_{к1} - T = 0$, а значит $M_{к1} = T$. Таким образом, крутящий момент на участке 1 направлен против часовой стрелки и он имеет знак «+».

На 2-ом участке $l_1 \leq z_2 \leq l$ уравнение равновесия отсеченной части имеет вид: $\Sigma M_z = M_{к2} + 4T - T = 0$, а значит $M_{к2} = -3T$. Следовательно, уравновешивающий крутящий момент имеет знак «-» и направлен против часовой стрелки, а не по часовой, как показано на рис. 2.3.

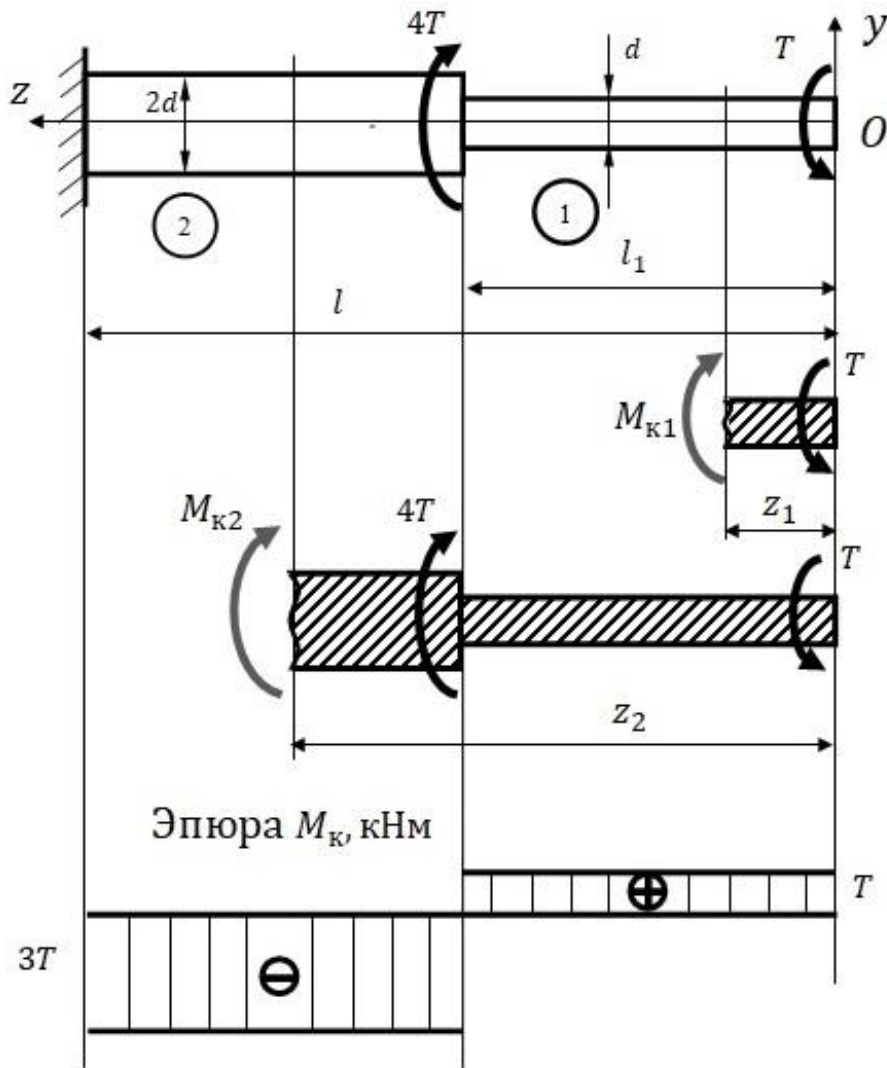


Рис. 2.3

5. Вычисляем полярные моменты сопротивления на участках 1 и 2

Известно, что полярный момент сопротивления является геометрической характеристикой сечения и для сплошного вала вычисляется по известным формулам: на 1 участке $W_{P1} = \frac{\pi d^3}{16}$; на 2 участке $W_{P2} = \frac{\pi (2d)^3}{16} = \frac{\pi d^3}{2}$.

6. Вычисляем максимальные касательные напряжения на участках 1 и 2

На 1 участке $\tau_1 = \frac{M_{K1}}{W_{P1}} = \frac{16 T}{\pi d^3}$, на 2 участке $\tau_2 = \frac{M_{K2}}{W_{P2}} = \frac{6 T}{\pi d^3}$.

Из формул видно, что наибольшие касательные напряжения возникают на 1 участке (хотя абсолютное значение крутящего момента в три раза меньше, чем на втором характерном участке). Следует учитывать, что знак крутящего момента носит условный характер и не влияет на расчетные формулы.

7. Определяем геометрические параметры вала по условию прочности на кручение

Условия прочности запишем в виде $\tau_{max} = \tau_1 \leq [\tau]$.

Тогда $\tau_1 = \frac{16 T}{\pi d^3} \leq [\tau]$, следовательно, $d = \sqrt[3]{\frac{16 T}{\pi [\tau]}} = 3,7 \cdot 10^{-2} \text{ м}$.

Задача 2.2

Условие задачи: определить угол закручивания вала кольцевого сечения (рис. 2.4). Дано: внешний крутящий момент $T = 20 \text{ кНм}$; $l = 1 \text{ м}$; $D = 30 \text{ см}$; $d = 20 \text{ см}$; $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$.

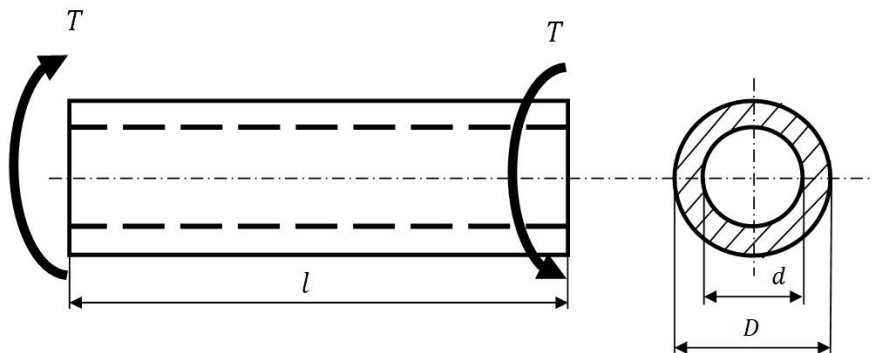


Рис. 2.4

Алгоритм решение задачи

Для данного простого случая нет необходимости выполнять пункты 1-4 алгоритма по аналогии с задачей 2.1, включая построение эпюры крутящих моментов. Очевидно, что во всех сечениях вала действует постоянный внутренний интегральный силовой фактор - крутящий момент, численно равный внешнему моменту T . Значит, $M_k = T$.

Формула для вычисления угла закручивания вала (2.5) запишем в виде:

$$\varphi = \frac{M_{кр} l}{G J_p},$$

где G - модуль сдвига; $J_p = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4)$, $\alpha = \frac{d}{D}$ - полярный момент инерции кольцевого сечения. Тогда имеем

$$\varphi = \frac{M_{кр} l}{G J_p} = \frac{T l}{G \frac{\pi D^4}{32} \left(1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right)} = \frac{2 \cdot 10^4 \cdot 1 \cdot 32}{8 \cdot 10^{10} \cdot 3,14 \cdot (0,3)^4 \cdot 0,8} = 3,9 \cdot 10^{-4} \text{ рад}.$$

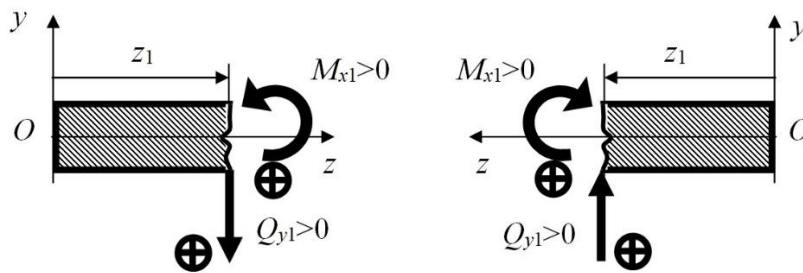
Практическое занятие № 5, 6 (4 часа)

Расчеты на прочность и жесткость при поперечном изгибе

Основы теории

На практическом занятии рассматривается прямой поперечный изгиб балки под действием системы внешних сил. В общем плоском случае в поперечном сечении балки действуют изгибающий момент M_x и поперечная сила Q_y . Прежде чем исследовать напряженное и деформированное состояние в текущем сечении балки, необходимо знать абсолютные значения внутренних силовых факторов в этих сечениях, которые могут быть получены в процессе построения эпюр.

Правила знаков для поперечной силы и изгибающего момента при построении эпюр удобно пояснить графически.



Правила знаков при поперечном изгибе

Рисунок нужно понимать так: если отсекается правая часть балки (рисунок слева), то в текущем сечении, заданном координатой z_1 , положительное направление поперечной силы - вниз и изгибающего момента – против часовой стрелки. Если отсекается левая часть балки (рисунок справа), то положительное направление поперечной силы - вверх и изгибающего момента – по часовой стрелке.

При поперечном изгибе в сечениях балки от поперечной силы Q_y возникают касательные напряжения τ и соответствующие угловые деформации γ , а от действия изгибающего момента M_x – нормальные напряжения σ . Наличие угловых деформаций приводит к искажению сечений, и они в процессе деформации уже не остаются плоскими.

Аналитические исследования методами теории упругости и многочисленные эксперименты показывают, что в первом приближении при исследовании напряженно – деформированного состояния балки при поперечном изгибе для вычисления нормальных напряжений можно использовать зависимости, полученные для чистого изгиба (поперечная сила равна нулю):

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} y, \sigma_{max} = \frac{M_x}{W_x}, W_x = \frac{J_x}{y_{max}}, \quad (3.1)$$

где J_x - осевой момент инерции сечения (для типовых сечений приводится в справочниках); W_x - осевой момент сопротивления сечения при изгибе, y - расстояние от нейтральной линии сечения (линии, на которой нормальные напряжения равны нулю) до рассматриваемой точки. Так, для балки прямоугольного сечения при изгибе относительно центральной оси, параллельной меньшей стороне b имеем (высота сечения h):

$$J_x^{прям} = \frac{bh^3}{12}; \quad y_{max} = \frac{h}{2}; \quad W_x^{прям} = \frac{bh^2}{6}. \quad (3.2)$$

Для балки круглого сечения диаметром d :

$$J_x^{круг} = \frac{\pi d^4}{64}; \quad y_{max} = \frac{d}{2}; \quad W_x^{круг} = \frac{\pi d^3}{32}. \quad (3.3)$$

Для вычисления касательных напряжений в поперечном сечении балки используется формула Д.И. Журавского:

$$\tau = \frac{Q_y S_x^*}{J_x b}. \quad (3.4)$$

где Q_y - поперечная сила в рассматриваемом сечении; S_x^* - статический момент отсеченной части площади поперечного сечения; b - текущая ширина сечения в рассматриваемой точке.

При поперечном изгибе балки произвольного поперечного сечения в различных точках сечения возникают разные напряженные состояния. Так в точках, наиболее удаленных от нейтральной линии, действуют только нормальные напряжения. В этом случае можно считать, что волокна в данных точках работают в условиях одноосного напряженного состояния (центральное растяжение - сжатие). Тогда условие прочности имеет вид:

$$\sigma_{max} = \frac{M_x^{max}}{W_x} \leq [\sigma], \quad (3.5)$$

где $[\sigma]$ - допускаемые напряжения при растяжении – сжатии.

На нейтральной линии сечения нормальные напряжения равны нулю, а касательные достигают максимального значения. Напряженное состояние в этих точках такое же, как при чистом сдвиге. Условия прочности запишем в виде

$$\tau_{max} = \frac{Q_y S_{xmax}^*}{J_x b} \leq [\tau], \quad (3.6)$$

где $[\tau]$ - допускаемые напряжения при сдвиге; S_{xmax}^* , b - соответственно, статический момент и ширина отсеченной части сечения на уровне нейтральной линии.

В других i -тых точках сечения одновременно возникают нормальные и касательные напряжения, которые можно вычислить по известным формулам

$$\sigma_i = \frac{M_x}{J_x} y_i, \quad \tau_i = \frac{Q_y S_{xi}^*}{J_x b_i}. \quad (3.7)$$

В этих точках возникает плоское напряженное состояние. При расчете на прочность в таком случае используется понятие эквивалентных напряжений, которые, например, по гипотезе максимальных касательных напряжений равны

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma_i^2 + 4\tau_i^2}. \quad (3.8)$$

Тогда условие прочности для точек, находящихся в плоском напряженном состоянии, запишем в виде

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma_i^2 + 4\tau_i^2} \leq [\sigma]. \quad (3.9)$$

Для проверки условий прочности в конкретном сечении балки необходимо проверить выполнение этих условий во всех характерных точках, используя формулы (3.5), (3.6) и (3.9).

Авиационные конструкции обычно тонкостенные, поэтому их расчет на прочность при поперечном изгибе проводится в полном объеме. Для массивных машиностроительных конструкций в ряде случаев влиянием касательных напряжений от поперечных сил можно пренебречь и использовать для расчета на прочность формулы для чистого изгиба.

Примеры решения задач

Задача 3.1

Условия задачи: определить из условия прочности размеры квадратного поперечного сечения балки (рис. 3.1). Дано: сила $P = 10 \text{ кН}$; момент изгибающий $M = 40 \text{ кНм}$; $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

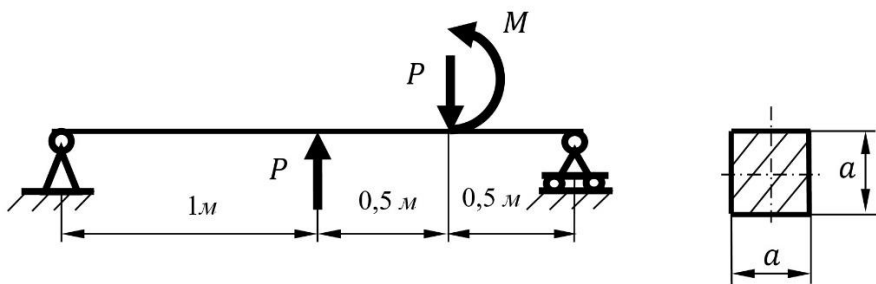


Рис. 3.1

Алгоритм решение задачи

1. Вычисляем реакции опор, используя уравнения статики

Для вычисления реакций опор изобразим возможные реактивные силы (рис. 3.2). В левой шарнирно – неподвижной опоре в общем случае возникает горизонтальная сила реакции R_{Oz} и вертикальная реактивная сила R_{Oy} , а в шарнирно – подвижной опоре возникает только вертикальная реакция R_{Ay} .

Составляем уравнение равновесия балки в проекциях всех сил на ось Oz :
 $\Sigma P_z = R_{Oz} = 0 \Rightarrow R_{Oz} = 0$.

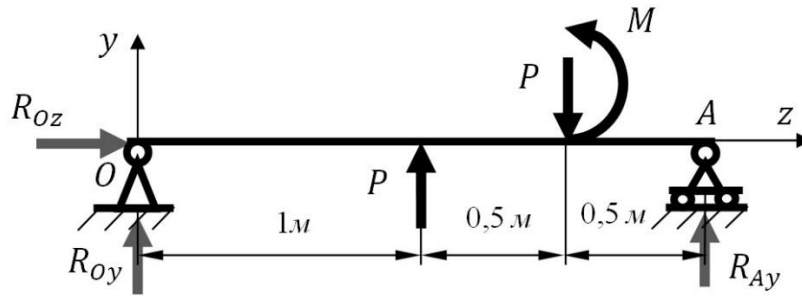


Рис. 3.2

Составляем уравнение равновесия для моментов всех внешних сил, действующих относительно точки O (используется правило знаков теоретической механики, когда момент, направленный против часовой стрелки, - положительный), и вычисляем силу реакции R_{Ay} :

$$\Sigma M_O = P \cdot 1 - P \cdot 1,5 + M + R_{Ay} \cdot 2 = 0 \Rightarrow R_{Ay} = -17,5 \text{ кН}.$$

Составляем уравнение равновесия в проекциях всех сил на ось Oy и вычисляем реакцию R_{Oy} :

$$\Sigma P_y = R_{Oy} + P - P + R_{Ay} = 0 \Rightarrow R_{Oy} = -R_{Ay} = 17,5 \text{ кН}.$$

Анализ полученных результатов показывает, что при вычислении реакций опор направление действия силы R_{Ay} было выбрано неверно.

Важно. Одной из основных причин ошибок при решении задач на поперечный изгиб является неверное вычисление реакций опор. Поэтому рекомендуется проверить правильность вычислений, составив уравнение моментов относительно другой характерной точки, например, точки A :

$$\Sigma M_A = -R_{Oy} \cdot 2 - P \cdot 1 + P \cdot 0,5 + M = -35,0 - 10 + 5 + 40 = 0.$$

Условие равновесия соблюдается, значит, реакции опор вычислены верно.

2. Изображаем расчетную схему балки

Для избежания возможных ошибок при построении эпюр поперечных сил и изгибающих моментов целесообразно все вычисления вести для расчетной схемы, показанной на рис. 3.3. В этом случае в соответствии с результатами расчетов (п.1) изменено направление действия силы R_{Ay} . Под расчетной схемой будем понимать исходную схему, у которой отброшены опоры, а их действие заменено соответствующими реакциями, причем все силы и моменты положительные (по знаку). Далее в расчетах силы реакций опор рассматриваются, как активные внешние силы.

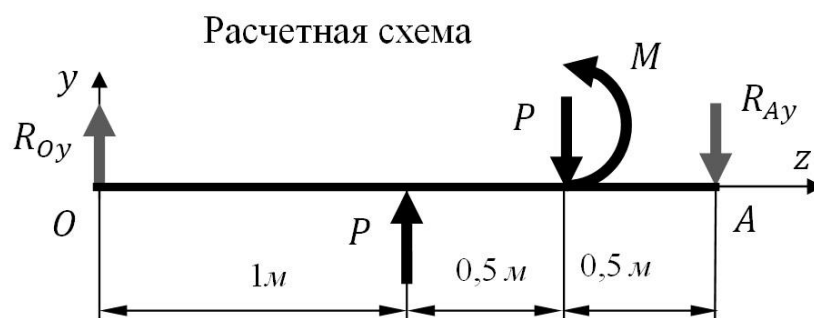


Рис. 3.3

3. Разбиваем балку на характерные участки

Границами характерных участков при построении эпюр поперечных сил и изгибающих моментов являются сечения, в которых приложены внешние силы и моменты (включая реакции опор) и (или) изменяется геометрия (площадь поперечного сечения). В пределах характерного участка поперечная сила и изгибающий момент описываются соответствующими неизменными уравнениями. **Важно отметить**, что изменение геометрии сечений балки на вид эпюр поперечных сил и изгибающих моментов не влияет. Однако уже на этом этапе решения задачи рекомендуется выделять характерные участки с измененной геометрией, так как в дальнейшем при анализе напряженно – деформированного состояния балки их необходимо будет учитывать.

Балку разделяем на три характерных участка - 1, 2 и 3, как показано на рис.3.4. В данной задаче свяжем систему координат Oy с левым торцом балки. Выделим характерные участки с координатами: первый - $0 \leq z_1 \leq 1 м$; второй - $1 м \leq z_2 \leq 1,5 м$ и третий – $1,5 м \leq z_3 \leq 2,0 м$.

4. Строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

Для правильного построения эпюр интегральных внутренних силовых факторов определяющим является учет правила знаков поперечных сил и изгибающих моментов. При использовании метода сечений будем в текущем сечении **задаваться положительным значением неизвестного внутреннего силового фактора** (см. правило знаков при изгибе), как показано на рис. 3.4.

На первом характерном участке имеем $0 \leq z_1 \leq 1 м$. Тогда для вычисления поперечной силы на первом характерном участке Q_{y1} составляем уравнение равновесия отсеченной части балки в проекциях всех сил на ось Oy :

$$\sum P_y^1 = R_{Oy} - Q_{y1} = 0 \Rightarrow Q_{y1} = R_{Oy} = 17,5 кН .$$

Знак поперечной силы положителен.

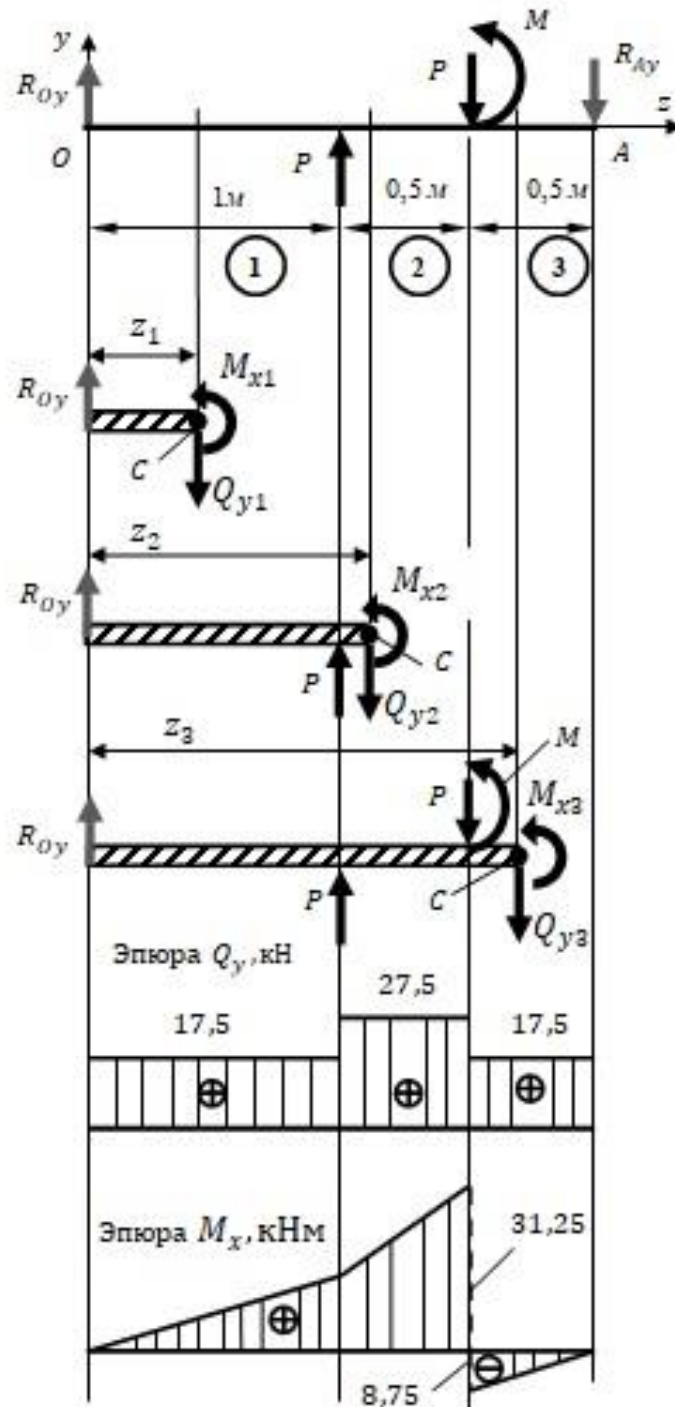


Рис. 3.4

Для вычисления изгибающего момента на первом участке необходимо составить уравнение равновесия отсеченной части балки относительно точки С, принадлежащей текущему сечению с координатой z_1 . **Важно!** Знаки при составлении уравнения моментов выбираются по правилам теоретической механики (момент, направленный против часовой стрелки, положительный).

Уравнение равновесия имеет вид:

$$\Sigma M_x^1 = M_{x1} - R_{Oy} \cdot z_1 = 0 \Rightarrow M_{x1} = R_{Oy} \cdot z_1.$$

График изменения изгибающего момента на первом участке представляет собой прямую, которую можно построить по двум характерным точкам: при $z_1 = 0 \Rightarrow M_{x1} = 0$; при $z_1 = 1 \text{ м} \Rightarrow M_{x1} = 17,5 \text{ кНм}$.

На втором характерном участке $1 \text{ м} \leq z_2 \leq 1,5 \text{ м}$. Для вычисления поперечной силы на втором участке Q_{y2} составляем уравнение равновесия отсеченной части балки в проекциях на ось Oy :

$$\Sigma P_y^2 = R_{Oy} + P - Q_{y2} = 0 \Rightarrow Q_{y2} = R_{Oy} + P = 27,5 \text{ кН}.$$

Знак поперечной силы положителен.

Для вычисления изгибающего момента на втором участке необходимо составить уравнение равновесия отсеченной части балки относительно точки С, принадлежащей текущему сечению с координатой z_2 . Уравнение равновесия имеет вид:

$$\Sigma M_x^2 = M_{x2} - R_{Oy} \cdot z_2 - P \cdot (z_2 - 1) = 0 \Rightarrow M_{x2} = (27,5 \cdot z_2 - 10) \text{ кНм}.$$

График изменения изгибающего момента на втором участке также представляет собой прямую линию, которую можно построить по двум характерным точкам: при $z_2 = 1 \text{ м} \Rightarrow M_{x2} = 17,5 \text{ кНм}$, а при $z_2 = 1,5 \text{ м} \Rightarrow M_{x2} = 31,25 \text{ кНм}$.

На третьем характерном участке $1,5 \text{ м} \leq z_3 \leq 2,0 \text{ м}$. Для вычисления поперечной силы на третьем участке Q_{y3} составляем уравнение равновесия отсеченной части балки в проекциях на ось Oy :

$$\Sigma P_y^3 = R_{Oy} + P - P - Q_{y3} = 0 \Rightarrow Q_{y3} = R_{Oy} = 17,5 \text{ кН}.$$

Знак поперечной силы положителен.

Для вычисления изгибающего момента на третьем участке необходимо составить уравнение равновесия отсеченной части балки относительно точки С, принадлежащей текущему сечению с координатой z_3 . Уравнение равновесия имеет вид:

$$\begin{aligned} \Sigma M_x^3 &= M_{x3} - R_{Oy} \cdot z_3 - P \cdot (z_3 - 1) + P \cdot (z_3 - 1,5) + M = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow M_{x3} = (17,5 \cdot z_3 - 35) \text{ кНм}. \end{aligned}$$

График изменения изгибающего момента на третьем участке также представляет собой прямую линию, которую можно построить по двум характерным точкам: при $z_3 = 1,5 \text{ м} \Rightarrow M_{x3} = -8,75 \text{ кНм}$, а при $z_3 = 2,0 \text{ м} \Rightarrow M_{x3} = 0$.

Полученные значения поперечных сил и изгибающих моментов на всех характерных участках наносим на графики, как показано на рис. 3.4. На эпюрах необходимо указать абсолютные значения интегральных силовых факторов в характерных точках и размерность.

5. Определяем положение опасного сечения и значение максимального изгибающего момента

Анализ эпюры изгибающего момента показывает, что максимального значения момент достигает в конце второго характерного участка и численно равен $M_x^{max} = 31,25 \text{ кНм}$.

6. Вычисляем максимальные нормальные напряжения

Максимальные нормальные напряжения возникают в точках опасного сечения, наиболее удаленных от нейтральной линии и определяются соотношением:

$$\sigma_{max} = \frac{M_x^{max}}{W_x},$$

где $W_x = \frac{a^3}{6}$ - осевой момент сопротивления квадратного сечения.

Важно! Такой подход к определению опасного сечения справедлив лишь в том случае, если рассматривается балка постоянного поперечного сечения. Для составной балки необходимо вычислять напряжения на всех характерных участках и из них выбирать максимальное значение.

7. Записываем условия прочности и определяем геометрические характеристики сечения

Для вычисления минимально необходимых по условию прочности размеров квадратного сечения балки воспользуемся соотношением:

$$\begin{aligned} \sigma_{max} &= \frac{M_x^{max}}{W_x} = \frac{6 M_x^{max}}{a^3} \leq [\sigma] \Rightarrow \\ \Rightarrow a &= \sqrt[3]{\frac{6 M_x^{max}}{[\sigma]}} = 0,1055 \text{ м} \end{aligned}$$

Важно отметить, что округление возможно лишь в большую сторону, иначе условие прочности не будет выполнено.

Задача 3.2

Условие задачи: определить размеры балки круглого поперечного сечения (рис. 3.5) из условия прочности. Дано: $q = 2 \text{ кН/м}$; $l = 1 \text{ м}$; $[\sigma] = 100 \text{ МПа}$.

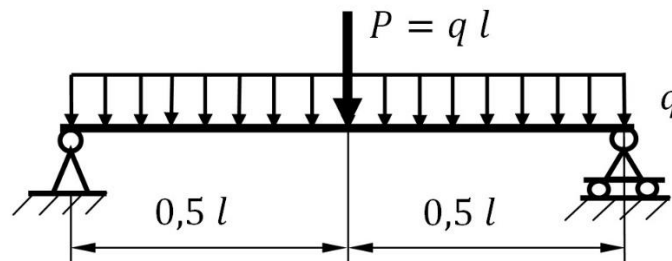


Рис. 3.5

Алгоритм решения задачи

1. Вычисляем реакции опор, используя уравнения статики

Для вычисления реакций опор изобразим возможные реактивные силы (рис. 3.6).

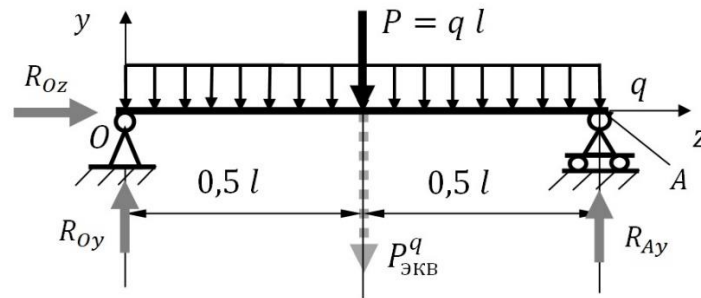


Рис. 3.6

В шарнирно – неподвижной опоре в общем случае возникает горизонтальная сила реакции R_{Oz} и вертикальная реактивная сила R_{Oy} , а в шарнирно – подвижной опоре возникает только вертикальная реакция R_{Ay} .

Составляем уравнение равновесия балки в проекциях всех сил на ось Oz :

$$\Sigma P_z = R_{Oz} = 0 \Rightarrow R_{Oz} = 0.$$

Составляем уравнение равновесия для моментов всех внешних обобщенных сил, действующих относительно точки O (используется правило знаков теоретической механики, когда момент, направленный против часовой стрелки, положительный), и вычисляем силу реакции R_{Ay} . Распределенную внешнюю нагрузку q целесообразно при вычислении реакций опор заменить эквивалентной силой $P_{\text{ЭКВ}}^q = ql$, приложенной в центре тяжести эпюры q (центр тяжести прямоугольника высотой q и основанием l). Имеем

$$\begin{aligned} \Sigma M_O &= -P_{\text{ЭКВ}}^q \cdot 0,5 \cdot l - P \cdot 0,5 \cdot l + R_{Ay} \cdot l = -q \cdot l \cdot 0,5 \cdot l - q \cdot l \cdot 0,5 \cdot l + R_{Ay} \cdot l = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow R_{Ay} = q \cdot l \text{ кН} = 2 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Составляем уравнение равновесия в проекциях всех сил на ось Oy и вычисляем реакцию R_{Oy} :

$$\begin{aligned} \Sigma P_y &= R_{Oy} - P_{\text{ЭКВ}}^q - P + R_{Ay} = q \cdot l - q \cdot l - q \cdot l + R_{Ay} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow R_{Oy} = q \cdot l \text{ кН} = 2 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Анализ полученных результатов показывает, что при вычислении реакций опор направление действия всех реактивных сил было выбрано верно.

Важно. Целесообразно проверить правильность вычисления реакций опор, составив уравнение равновесия для моментов относительно другой характерной точки, например, точки A :

$$\Sigma M_A = P_{\text{ЭКВ}}^q \cdot 0,5 \cdot l + P \cdot 0,5 \cdot l - R_{Oy} \cdot l = q \cdot l \cdot 0,5 \cdot l + q \cdot l \cdot 0,5 \cdot l - q \cdot l \cdot l = 0.$$

Условие равновесия соблюдается, значит, реакции опор вычислены верно.

2. Изображаем расчетную схему балки

Для избежания возможных ошибок при построении эпюр поперечных сил и изгибающих моментов целесообразно все вычисления вести для расчетной схемы, показанной на рис. 3.7. Под расчетной схемой будем понимать исходную схему, у которой отброшены опоры, а их действие заменено соответствующими реакциями. Далее в расчетах силы реакций опор рассматриваются, как активные внешние силы.

3. Разбиваем балку на характерные участки

Границами характерных участков при построении эпюр поперечных сил и изгибающих моментов являются сечения, в которых приложены внешние распределенные нагрузки, сосредоточенные силы и моменты (включая реакции опор) и (или) изменяется геометрия (площадь поперечного сечения). В пределах характерного участка поперечная сила и изгибающий момент описываются соответствующими неизменными уравнениями. **Важно отметить**, что изменение геометрии сечений балки на вид эпюр поперечных сил и изгибающих моментов не влияет.

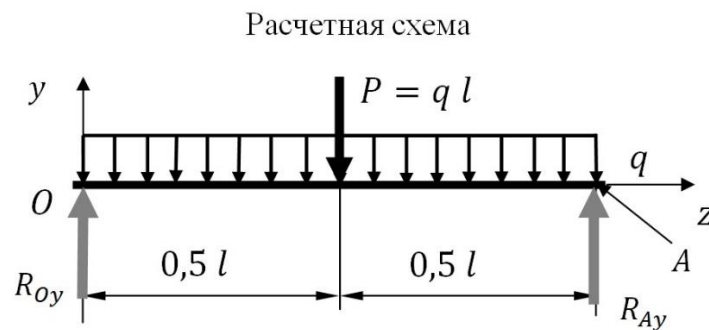


Рис. 3.7

Балку разделяем на два характерных участка – 1 и 2, как показано на рис.3.8. В данной задаче свяжем систему координат Oy с левым торцом балки. Выделим характерные участки с координатами: первый - $0 \leq z_1 \leq 0,5l$ и второй - $0,5l \leq z_2 \leq l$.

4. Строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

Для правильного построения эпюр интегральных внутренних силовых факторов определяющим является учет правила знаков поперечных сил и изгибающих моментов. При использовании метода сечений будем в текущем сечении задаваться положительным значением неизвестного внутреннего силового фактора.

На первом характерном участке (рис. 3.8) имеем $0 \leq z_1 \leq 0,5l$. Для вычисления поперечной силы на первом характерном участке Q_{y1} составляем уравнение равновесия отсеченной части балки в проекциях на ось Oy :

$$\Sigma P_y^1 = R_{Oy} - q \cdot z_1 - Q_{y1} = 0 \Rightarrow Q_{y1} = R_{Oy} - q \cdot z_1 = q \cdot (l - z_1) \text{ кН.}$$

Полученному уравнению соответствует прямая линия, которую строим по двум характерным точкам: при $z_1 = 0 \Rightarrow Q_{y1} = q \cdot l = 2 \text{ кН}$, а при $z_1 = l/2 \Rightarrow Q_{y1} = q \cdot 0,5l = 1 \text{ кН}$.

Для вычисления изгибающего момента на первом участке необходимо составить уравнение равновесия отсеченной части балки относительно точки С, принадлежащей текущему сечению с координатой z_1 . **Важно!** Знаки при составлении уравнения моментов выбираются по правилам теоретической механики (момент, направленный против часовой стрелки, положительный). Уравнение равновесия имеет вид:

$$\Sigma M_x^1 = M_{x1} - R_{Oy} \cdot z_1 + q \cdot z_1 \cdot z_1 \cdot 0,5 = 0 \Rightarrow M_{x1} = q \cdot z_1 (l - 0,5 \cdot z_1).$$

График изменения изгибающего момента на первом участке представляет собой параболу. Найдем значения изгибающего момента для двух характерных точек: при $z_1 = 0 \Rightarrow M_{x1} = 0$; при $z_1 = 0,5l \Rightarrow M_{x1} = \frac{3ql^2}{8} = 0,75 \text{ кНм}$.

На втором характерном участке $0,5l \leq z_2 \leq l$. Для вычисления поперечной силы на втором участке Q_{y2} составляем уравнение равновесия отсеченной части балки в проекциях на ось Oy :

$$\Sigma P_y^2 = R_{Oy} - q z_2 - P - Q_{y2} = 0 \Rightarrow Q_{y2} = R_{Oy} - q z_2 - P = -q z_2 \text{ кН}.$$

Полученному уравнению соответствует прямая линия, которую строим по двум точкам: при $z_2 = 0,5l \Rightarrow Q_{y2} = -q \cdot 0,5l = -1 \text{ кН}$, при $z_2 = l \Rightarrow Q_{y2} = -q \cdot l = -2 \text{ кН}$.

Для вычисления изгибающего момента на втором характерном участке необходимо составить уравнение равновесия отсеченной части балки относительно точки С, принадлежащей текущему сечению с координатой z_2 . Уравнение равновесия имеет вид:

$$\begin{aligned} \Sigma M_x^2 &= M_{x2} + R_{Oy} \cdot z_2 + P \cdot (z_2 - 0,5l) - q \cdot z_2 \cdot z_2 \cdot 0,5 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow M_{x2} = \frac{q}{2} (l^2 - z_2^2) \text{ кНм} \end{aligned}$$

График изменения изгибающего момента на втором участке также представляет собой параболу, которую можно построить по двум характерным точкам: при $z_2 = 0,5l \Rightarrow M_{x2} = \frac{3q \cdot l^2}{8} = 0,75 \text{ кНм}$, а при $z_2 = l \Rightarrow M_{x2} = 0$.

Важно. Если в шарнирной опоре не действует внешний сосредоточенный момент, то на эпюре изгибающих моментов в данном сечении должен быть ноль.

Полученные значения поперечных сил и изгибающих моментов на всех характерных участках наносим на графики, как показано на рис. 3.8. На эпюрах необходимо указать абсолютные значения интегральных силовых факторов в характерных точках и размерность.

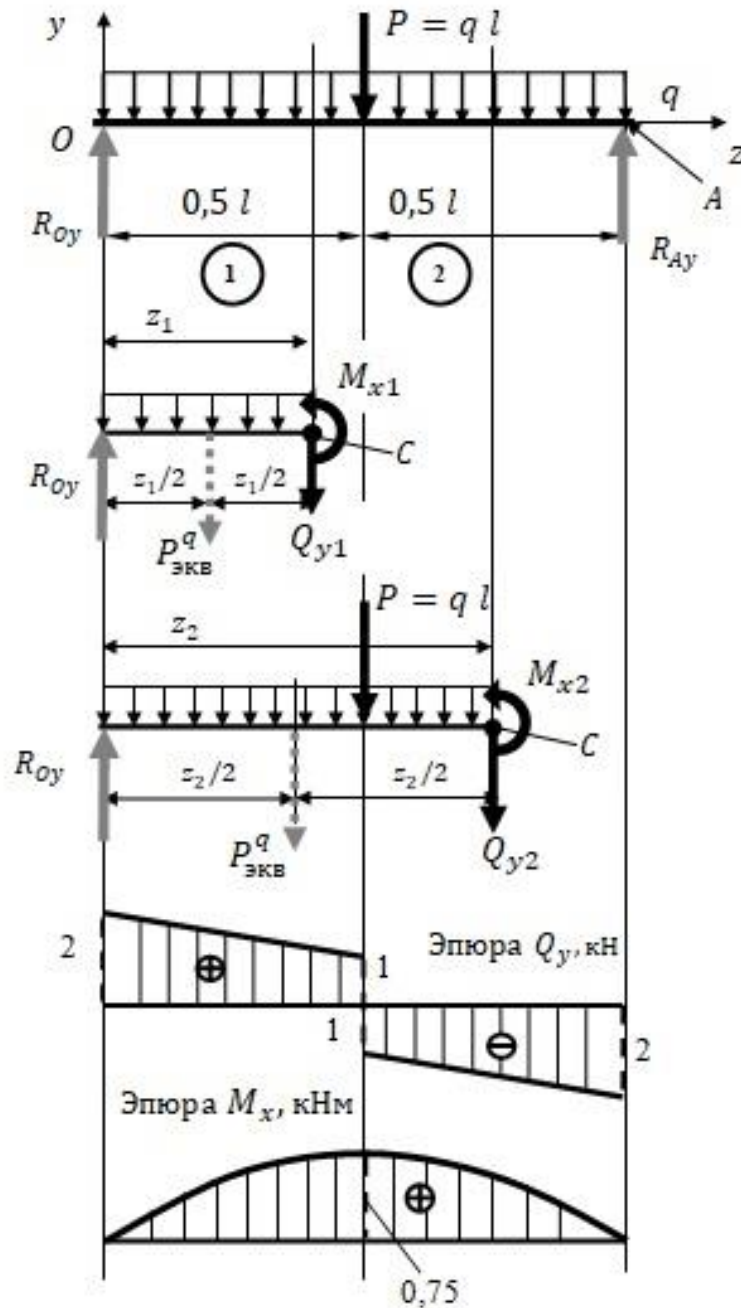


Рис. 3.8

5. Определяем положение опасного сечения и значение максимального изгибающего момента

Анализ эпюры изгибающего момента показывает, что максимального значения момент достигает в середине балки и численно равен $M_x^{max} = 0,75$ кНм.

6. Вычисляем максимальные нормальные напряжения

Максимальные нормальные напряжения в опасном сечении возникают в точках, наиболее удаленных от нейтральной линии и определяются

соотношением $\sigma_{max} = \frac{M_x^{max}}{W_x}$, где $W_x = \frac{\pi d^3}{32}$ - осевой момент сопротивления круглого сечения.

7. Записываем условия прочности и определяем геометрические характеристики сечения

$$\sigma_{max} = \frac{M_x^{max}}{W_x} = \frac{32 \cdot M_x^{max}}{d^3} \leq [\sigma] \Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_x^{max}}{[\sigma]}} = 6,22 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Важно отметить, что округление возможно лишь в большую сторону, иначе условие прочности не будет выполнено.

Задача 3.3

Условие задачи: для консольно-защемленной балки (рис. 3.9), используя интегралы Мора, определить угол поворота поперечного сечения, в котором приложена сосредоточенная сила P . Дано: балка изготовлена из стального двутавра № 27 (модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $W_x = 371 \text{ см}^3$; $J_x = 5010 \text{ см}^4$; $M = 20 \text{ кНм}$; $P = 50 \text{ кН}$; $q = 10 \text{ кН/м}$.

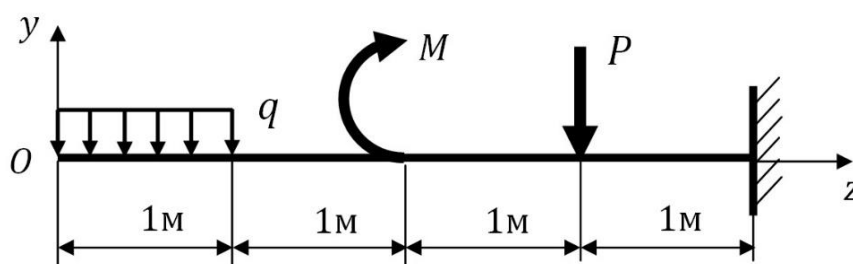


Рис. 3.9

Алгоритм решения задачи

1. Вычисляем реакции опор, используя уравнения статики

В случае консольно защемленной балки вычисление реакций в опоре проводить нецелесообразно. Необходимо начало координат связать со свободным концом, тогда реактивные силы и момент вычисляются автоматически в процессе построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.

2. Изображаем расчетную схему балки

В данной задаче расчетная схема ничем не отличается от исходной при размещении начала координат на свободном конце балки, поэтому ее можно не изображать. Кроме того, все внешние обобщенные силы по условию задачи положительны. **Важно!** Если заданы отрицательные значения изгибающего момента, сосредоточенной силы или распределенной нагрузки, то при формировании расчетной схемы их направление действия нужно изменить на противоположное.

3. Разбиваем балку на характерные участки

Границами характерных участков при построении эпюр поперечных сил и изгибающих моментов являются сечения, в которых приложены внешние распределенные нагрузки, сосредоточенные силы и моменты (включая реакции опор) и (или) изменяется геометрия (площадь поперечного сечения). В пределах характерного участка поперечная сила и изгибающий момент описываются соответствующими неизменными уравнениями. **Важно отметить**, что изменение геометрии сечений балки на вид эпюр поперечных сил и изгибающих моментов не влияет.

Учитывая, что геометрические параметры балки не изменяются по ее длине (по условию задачи), границами характерных участков являются точки приложения внешних нагрузок, а также начало и окончание приложения распределенной нагрузки. В рассматриваемом случае выделяем четыре характерных участка, как показано на рис.3.10. На первом характерном участке $0 \leq z_1 \leq 1 м$, второй участок - $1 м \leq z_2 \leq 2 м$, третий участок - $2 м \leq z_3 \leq 3 м$, четвертый участок - $3 м \leq z_4 \leq 4 м$.

4. Строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

Для правильного построения эпюр интегральных внутренних силовых факторов определяющим является учет правила знаков поперечных сил и изгибающих моментов. При использовании метода сечений будем в текущем сечении задаваться положительным значением неизвестного внутреннего силового фактора.

На первом характерном участке (рис.3.10) имеем $0 \leq z_1 \leq 1 м$. Для вычисления поперечной силы на первом характерном участке Q_{y1} составляем уравнение равновесия отсеченной части балки в проекциях на ось Oy :

$$\Sigma P_y^1 = -q \cdot z_1 - Q_{y1} = 0 \Rightarrow Q_{y1} = -10 \cdot z_1 \text{ кН}.$$

Это уравнение прямой, которая на эпюре поперечных сил может быть построена по двум характерным точкам: при $z_1 = 0, Q_{y1} = 0$; при $z_1 = 1 м, Q_{y1} = -10 \cdot 1 = -10 \text{ кН}$.

Для вычисления изгибающего момента на первом участке необходимо составить уравнение равновесия отсеченной части балки относительно точки С, принадлежащей текущему сечению с координатой z_1 . **Важно!** Знаки при составлении уравнения моментов выбираются по правилам теоретической механики (момент, направленный против часовой стрелки, положительный). Уравнение равновесия имеет вид:

$$\Sigma M_x^1 = q \cdot \frac{z_1^2}{2} + M_{x1} = 0 \Rightarrow M_{x1} = -q \cdot \frac{z_1^2}{2} = -10 \cdot \frac{z_1^2}{2}.$$

Это уравнение квадратичной функции (параболы), которую на эпюре изгибающих моментов построим по двум характерным точкам: при $z_1 = 0 \Rightarrow M_{x1} = 0$; при $z_1 = 1 \text{ м} \Rightarrow M_{x1} = -5 \text{ кНм}$.

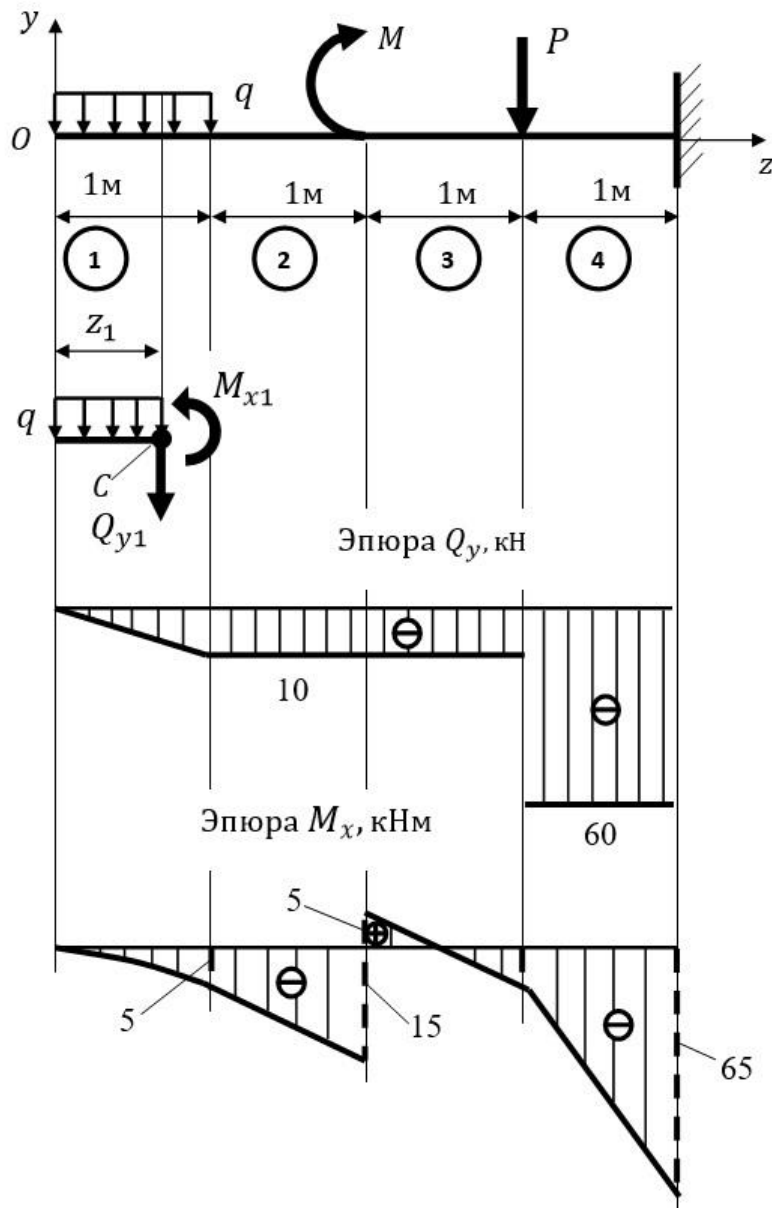


Рис. 3.10

Изображаем эпюру поперечных сил и изгибающих моментов на первом участке.

По аналогии получаем уравнения для поперечных сил и изгибающих моментов на других участках и строим эпюры для всех характерных участков. Ниже приводятся соответствующие уравнения.

На втором характерном участке $1\text{ м} \leq z_2 \leq 2\text{ м}$. Для вычисления поперечной силы на втором участке Q_{y2} составляем уравнение равновесия отсеченной части балки в проекциях на ось Oy :

$$\Sigma P_y^2 = -10 - Q_{y2} = 0 \Rightarrow Q_{y2} = -10\text{ кН}.$$

Это уравнение прямой, которая параллельна оси Oz , т.е. на втором участке поперечная сила постоянна.

Для вычисления изгибающего момента на втором характерном участке необходимо составить уравнение равновесия отсеченной части балки относительно точки C , принадлежащей текущему сечению с координатой z_2 . Уравнение равновесия имеет вид:

$$\Sigma M_x^2 = q \cdot 1 \cdot (z_2 - 0,5) + M_{x2} = 0 \Rightarrow M_{x2} = -10 \cdot (z_2 - 0,5)\text{ кНм}.$$

Это уравнение прямой. Строим эпюру изгибающих моментов на втором участке по двум характерным точкам: при $z_1 = 1\text{ м} \Rightarrow M_{x2} = -10 \cdot 1 \cdot 0,5 = -5\text{ кНм}$ (совпадает с крайней правой точкой первого характерного участка); $z_1 = 2\text{ м} \Rightarrow M_{x2} = -10 \cdot 1 \cdot 1,5 = -15\text{ кНм}$.

На третьем характерном участке $2\text{ м} \leq z_3 \leq 3\text{ м}$. Для вычисления поперечной силы на третьем участке Q_{y3} составляем уравнение равновесия отсеченной части балки в проекциях на ось Oy :

$$\Sigma P_y^3 = -10 - Q_{y3} = 0 \Rightarrow Q_{y3} = -10\text{ кН}.$$

Это уравнение прямой, которая параллельна оси Oz , т.е. на третьем участке поперечная сила постоянна. **Важно!** Наличие сосредоточенного изгибающего момента M не оказывает влияния на эпюру поперечных сил.

Для вычисления изгибающего момента на третьем характерном участке необходимо составить уравнение равновесия отсеченной части балки относительно точки C , принадлежащей текущему сечению с координатой z_3 . Уравнение равновесия имеет вид:

$$\Sigma M_x^3 = q \cdot 1 \cdot (z_3 - 0,5) - M + M_{x3} = 0 \Rightarrow M_{x3} = M - 10 \cdot (z_3 - 0,5)\text{ кНм}.$$

Уравнение изгибающих моментов на третьем участке – прямая линия. Строим эпюру изгибающих моментов на третьем участке по двум характерным точкам: при $z_3 = 2\text{ м} \Rightarrow M_{x3} = 20 - 15 = 5\text{ кНм}$ (не совпадает с крайней точкой второго участка, т.к. в этой точке приложен сосредоточенный момент M и скачек на эпюре изгибающих моментов должен быть численно равен этому моменту); при $z_3 = 3\text{ м} \Rightarrow M_{x3} = 20 - 25 = -5\text{ кНм}$.

На четвертом характерном участке $3\text{ м} \leq z_4 \leq 4\text{ м}$. Для вычисления поперечной силы на четвертом участке Q_{y4} составляем уравнение равновесия отсеченной части балки в проекциях на ось Oy :

$$\Sigma P_y^4 = -10 - P - Q_{y4} = 0 \Rightarrow Q_{y4} = -60 \text{ кН}.$$

Это уравнение прямой, которая параллельна оси Oz , т.е. на четвертом участке поперечная сила постоянна. Видно, что значение поперечной силы на левом конце четвертого характерного участка не совпадает с крайней правой точкой третьего участка, т.к. в этой точке приложена сосредоточенная сила P и скачек на эпюре поперечных сил должен быть численно равен этой силе.

Для вычисления изгибающего момента на четвертом характерном участке необходимо составить уравнение равновесия отсеченной части балки относительно точки C , принадлежащей текущему сечению с координатой z_4 . Уравнение равновесия имеет вид:

$$\begin{aligned} \Sigma M_x^4 &= q \cdot 1 \cdot (z_4 - 0,5) - M + P(z_4 - 3) + M_{x4} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow M_{x4} &= 20 - 10 \cdot (z_4 - 0,5) - 50(z_4 - 3) \text{ кНм} \end{aligned}$$

Уравнение изгибающих моментов на четвертом участке – прямая линия. Строим эпюру изгибающих моментов на четвертом участке по двум характерным точкам: при $z_4 = 3 \text{ м} \Rightarrow M_{x4} = 20 - 15 = -5 \text{ кНм}$ (совпадает с крайней правой точкой третьего участка); при $z_4 = 4 \text{ м} \Rightarrow M_{x4} = 20 - 35 - 50 = -65 \text{ кНм}$.

5. Вычисляем угол поворота сечения в точке приложения силы P

Для определения угла поворота сечения в точке приложения силы P нужно построить дополнительную эпюру M_1 от единичного момента (фактически это эпюра безразмерных коэффициентов пропорциональности при приложении единичного момента), приложенного в точке действия силы P , как показано на рис. 3.11. Уравнение коэффициентов M_1 на участке $3 \text{ м} \leq z_4 \leq 4 \text{ м}$ запишем в виде $M_1 = 1$ (в уравнениях индекс «х» опускаем). Уравнение моментов от внешней нагрузки определены в пункте 4 ($M_{P4} = M_{x4} = 20 - 10 \cdot (z_4 - 0,5) - 50(z_4 - 3)$). ВАЖНО!!! Так как на первых трех характерных участках эпюра $M_1 = 0$, то для определения угла поворота сечения в точке приложения силы P достаточно вычислить всего один интеграл Мора:

$$\varphi_P = \int_0^l \frac{M_P M_1}{EJ_x} dz = \int_3^4 \frac{M_{x4} M_1}{EJ_x} dz,$$

Итого имеем

$$\begin{aligned}
 \varphi_P &= \int_3^4 \frac{M_{x4} M_1}{EJ_x} dz = \frac{1}{EJ_x} \int_3^4 (-10 \cdot (z_4 - 0,5) + 20 - 50 \cdot (z_4 - 3)) \cdot 1 \cdot dz = \\
 &= \frac{1}{EJ_x} \int_3^4 (-10 \cdot z_4 + 5 + 20 - 50z_4 + 150) dz = \frac{1}{EJ_x} \int_3^4 (-60z_4 + 175) dz = \\
 &= \frac{1}{EJ_x} \left(-60 \frac{z_4^2}{2} \Big|_3^4 + 175z_4 \Big|_3^4 \right) = \frac{1}{EJ_x} (-210 + 175) = \\
 &= -\frac{35}{EJ_x} = -\frac{3,5 \cdot 10^4}{2 \cdot 10^{11} \cdot 5,01 \cdot 10^{-5}} \approx -3,5 \cdot 10^{-3} \text{ рад} \approx -0,2^\circ
 \end{aligned}$$

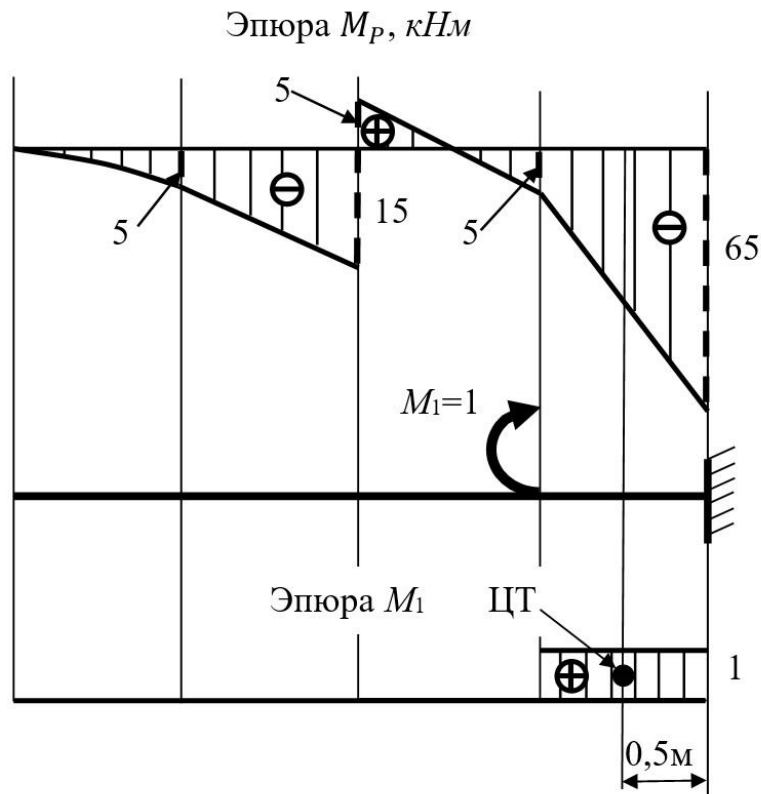


Рис. 3.11

Знак минус в полученном результате означает, что сечение в точке приложения силы P поворачивается в сторону, противоположную приложенному единичному моменту M_1 (не по часовой стрелке, а против), на угол $0,2^\circ$.

Учитывая, что на четвертом характерном участке обе эпюры линейные, можно вычислить угол поворота сечения по правилу Верещагина:

$$\varphi_P = \int_3^4 \frac{M_{x4} M_1}{EJ_x} dz = \frac{\Omega_{M_1} \cdot y_{x4}(z_{ЦТ})}{EJ_x},$$

где $\Omega_{M_1} = 1 \cdot 1 = 1 \text{ м}^2$ - площадь эюры единичного момента на четвертом участке; $y_{x4}(z_{ЦТ} = 3,5 \text{ м}) = -\frac{5+65}{2} = -35 \text{ кНм}$ - значение ординаты на эюре M_{x4} под центром тяжести эюры M_1 , как это показано на рис. 3.11.

Важно, что при применении правила Верещагина все параметры берутся со своими знаками.

Тогда окончательно

$$\varphi_P = \frac{\Omega_{M_1} \cdot y_{x4}(z_{ЦТ})}{EJ_x} = -\frac{3,5 \cdot 10^4}{2 \cdot 10^{11} \cdot 5,01 \cdot 10^{-5}} \approx -3,5 \cdot 10^{-3} \text{ рад} \approx -0,2^\circ.$$

Очевидно, что при правильном решении задачи результаты, полученные непосредственным интегрированием по Мору и вычисленные по методу Верещагина должны совпадать.