ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА
(РОСАВИАЦИЯ)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ» (МГТУ ГА)

Кафедра прикладной математики

Н.И. Овсянникова

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Учебное пособие

*Утверждено редакционно-
издательским советом МГТУ ГА
в качестве учебного пособия*

Москва
ИД Академии Жуковского
2021

УДК 519.6
ББК 518
О-34

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Московского государственного технического университета ГА

Рецензенты:

Дементьев Ю.И. (МГТУ ГА) – канд. физ.-мат. наук, доцент;
Лукацкий А.М. (ИНЭИ РАН) – д-р физ.-мат. наук, профессор

Овсянникова Н.И.

О-34 Численные методы [Текст] : учебное пособие / Н.И. Овсянникова. – М. : ИД Академии Жуковского, 2021. – 84 с.

ISBN 978-5-907490-04-8

Учебное пособие предназначено для студентов III курса по направлению 01.03.04 («Прикладная математика»). Содержит лекционный материал, образцы выполнения лабораторных работ на языке программирования Python, а также варианты заданий для практических занятий по курсу «Численные методы».

В учебном пособии рассматриваются основные методы численного решения задач прикладной математики, от нелинейного уравнения функции одной переменной до задачи условной оптимизации функции нескольких переменных.

Рассмотрено и одобрено на заседаниях кафедры 16.03.2021 г. и методического совета 16.03.2021 г.

УДК 519.6
ББК 518
Св. тем. план 2021 г.
поз. 32

ОВСЯННИКОВА Наталья Игоревна

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Учебное пособие

В авторской редакции

Подписано в печать 20.09.2021 г.
Формат 60x84/16 Печ. л. 5,25 Усл. печ. л. 4,88
Заказ № 789/0616-УП02 Тираж 35 экз.

Московский государственный технический университет ГА
125993, Москва, Кронштадтский бульвар, д. 20

Издательский дом Академии имени Н. Е. Жуковского
125167, Москва, 8-го Марта 4-я ул., д. 6А
Тел.: (495) 973-45-68 E-mail: zakaz@itsbook.ru

ISBN 978-5-907490-04-8

Оглавление

Глава 1. Нормированные пространства. Решение нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений.

Лекция 1. *Метрические и нормированные пространства. Нормы чисел, функций, векторов, матриц.*

Определение 1. Пространство произвольных элементов называется метрическим, если для любых двух элементов определена неотрицательная функция, такая, что:

1) $\rho(x,y) \geq 0, \rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \ \ \forall x,y \in X$

2) $\rho(x,y) = \rho(y,x) \ \forall x,y \in X$

3) $\rho(x,y) + \rho(y,z) \leq \rho(x,z) \ \forall x,y,z \in X$

Определение 2. Линейное пространство X произвольных элементов называется нормированным, если для любых двух элементов и любого действительного числа определена неотрицательная функция $\|x\|$, такая, что:

1) $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \forall x \in X$

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \ \ \forall x \in X, \forall \lambda \in R$

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \ \forall x,y \in X$

Замечание: Нормированным может быть только линейное пространство, так как в нём определены операции λx, $x + y$, а также нулевой элемент линейного пространства.

Определение 3. Пусть R метрическое пространство. Отображение A пространства R в себя называется сжимающим (или короче сжатием), если существует число $\alpha < 1$, что для любых элементов $x, y \in R$ выполняется условие [2]:

$$\rho(Ax, Ay) \leq \alpha \rho(x,y)$$

Тогда n - кратное отображение A, примененное к элементам x, y – образы $A^n x, A^n y \in R$ находятся на расстоянии

$$\rho(A^n x, A^n y) \leq \alpha \rho(A^{n-1}x, A^{n-1}y) \leq \alpha^2 \rho(A^{n-2}x, A^{n-2}y) \leq \cdots \leq \alpha^n \rho(A^0 x, A^0 y) \equiv \alpha^n \rho(x,y) \qquad (1)$$

При значениях $\alpha < 1$ отображение A будет непрерывным. Другими словами, для последовательности элементов $x_n \to x$; $x_n, x \in R$: $Ax_n \to Ax$. Действительно, из условия $\rho(x_n, x) \to 0$ следует условие $\rho(Ax_n, Ax) \le \alpha\rho(x_n, x) \to 0$, при $n \to \infty$.

Сжимающие отображения используют для исследования устойчивости разностных схем [1,2].

<u>Теорема 1.</u> (*принцип сжимающих отображений, А.Н. Колмогоров*). Всякое сжимающее отображение, определенное в полном метрическом пространстве R имеет одну и только одну неподвижную точку ($Ax = x$).

Доказательство. Пусть x_0 произвольная точка из R. Обозначим

$$x_1 = Ax_0,\ x_2 = Ax_1,\ x_n = Ax_{n-1} = A^n x_0.$$

Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ – фундаментальна. Считаем для определенности $m > n$:

$\rho(x_m, x_n) \le \rho(x_m, x_{m-1}) + \rho(x_{m-1}, x_{m-2}) + \cdots + \rho(x_{n+1}, x_n) \le (\alpha^{m-1} + \alpha^{m-2} + \cdots + \alpha^n)\rho(x_1, x_0) = \alpha^n(1 + \alpha + \cdots + \alpha^{m-n-1})\rho(x_1, x_0) \le \alpha^n(1 + \alpha + \cdots + \alpha^{m-n-1} + \cdots)\rho(x_1, x_0) = \frac{\alpha^n \rho(x_1, x_0)}{1-\alpha}$

Поскольку число $\frac{\rho(x_1, x_0)}{1-\alpha}$ определяется сжимающим отображением A и начальной точкой x_0, то оно фиксировано, но $\frac{\alpha^n \rho(x_1, x_0)}{1-\alpha} \to 0, n \to \infty$. Т.е. $\forall \varepsilon = \frac{\alpha^N \rho(x_1, x_0)}{1-\alpha} > 0\ \exists N(\varepsilon) = 1 + \left[\log_\alpha \frac{\varepsilon(1-\alpha)}{\rho(x_1, x_0)}\right]$, $\forall n, m > N(\varepsilon)$: $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon\ (0 < \alpha < 1)$.

Что и означает по определению фундаментальность последовательности $\{x_n\}$.

Обозначим $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. В силу непрерывности оператора A оператор предельного перехода можно перенести от аргумента функции к самой функции $Ax = A\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x$. Т.е. точка $x = Ax$ является неподвижной. Докажем ее единственность от противного. Пусть $x = Ax$ и $y = Ay$: $\rho(x, y) = \rho(Ax, Ay) \le \alpha\rho(x, y) < \rho(x, y)$ $(\alpha < 1)$. Но положительное число $\rho(x, y)$ не может быть меньше себя. Противоречие можно устранить $\Leftrightarrow \rho(x, y) = 0$. Действительно, $0 \le \alpha \cdot 0 = 0$. Теорема доказана.

Метод простой итерации

Простой итерацией называется рекуррентная последовательность $x^{n+1} = \varphi(x^n),\ \bar{x} = \varphi(\bar{x})$, *где* $\bar{x}$*–неподвижная точка.*

Пусть имеется две рекуррентные последовательности

$$x^{n+1} = \varphi(x^n), y^{n+1} = \varphi(y^n) \Rightarrow \rho(x^{n+1}, y^{n+1}) = |y^{n+1} - x^{n+1}| \approx |\varphi'(x^n)||y^n - x^n| = |\varphi'(x^n)|\rho(x^n, y^n)$$

$$\rho(x^{n+1}, y^{n+1}) = \rho(\varphi(x^n), \varphi(y^n)) \leq \left|\varphi`(x^n)\right|\rho(x^n, y^n) = \alpha\rho(x^n, y^n)$$

Пользуясь теоремой о неподвижной точке, получим достаточное условие сходимости рекуррентной последовательности к неподвижной точке $|\varphi'(\bar{x})| < 1$.

Рассмотрим пример. Построить итерационный процесс вычисления всех корней уравнения методом простой итерации

$$f(x) \equiv x^3 + 3x^2 - 1 = 0$$

Найдём методом интервалов области локализации корней.

x	-3	-2	-1	0	1
sign (F(x))	-1	+1	+1	-1	+1

То есть корни расположены на интервалах [-3,-2], [-1,0], [0,1].

1) $x = \varphi(x) = 3 - 1/x^2 \Leftrightarrow x_{n+1} = 3 - 1/x_n^2, \left|\frac{d}{dx}\varphi(x)\right| < 1 \Leftrightarrow \left|{}^2/_{x^3}\right| < 1 \Leftrightarrow |x| > 2^{1/3} > 1$ последовательность $x_{n+1} = 3 - 1/x_n^2, x_0 = -2$ сходится к первому корню $\bar{x}_1 = -2.87938524$.

2) $x = \varphi(x) = \pm\sqrt{\frac{1-x^3}{3}} \Leftrightarrow x_{n+1} = \pm\sqrt{\frac{1-x_n^3}{3}},\ \left|\frac{d}{dx}\varphi(x)\right| < 1 \Leftrightarrow \frac{3x_n^2}{\sqrt{3}\sqrt{1-x_n^3}} < 1 \Leftrightarrow 3x_n^4 + x_n^3 < 1$ верно для достаточно малых x.

$x_{n+1} = -\sqrt{\frac{1-x_n^3}{3}}, x_0 = -1, \bar{x}_2 = -0.6527036,\ x_{n+1} = \sqrt{\frac{1-x_n^3}{3}}, x_0 = 1,\ \bar{x}_3 = 0.532088886.$

Нормы и нормированные пространства.

1) Действительные числа $\|\lambda\| = |\lambda|$.

2) Векторы $x = \{x_1, \dots, x_n\} \in R^n$.

a) $\|x\|_C = \max\limits_{i=\overline{1,n}} |x_i|$ – равномерная норма (норма Чебышева)

b) $\|x\|_{l_1^n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |x_i|$, $\|x\|_{l_2^n} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2}$, $\|x\|_{l_p^n} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$, конечномерное векторное пространство l_p^n с нормой $\|x\|_{l_p^n}$.

<u>Определение 5.</u> Говорят, что две нормы $\|x\|_1, \|x\|_2$ эквивалентны, если существуют положительные числа $0 < C_1 < \infty, 0 < C_2 < \infty$ такие, что $C_1\|x\|_2 < \|x\|_1 < C_2\|x\|_2$.

<u>Утверждение 1</u>. В конечномерных векторных пространствах l_p^n все нормы эквивалентны, причём верно неравенство:

$$\|x\|_{l_1^n} \le \|x\|_{l_2^n} \le \dots \le \|x\|_C \le \dots \le \sqrt{n}\|x\|_{l_2^n} \le n\|x\|_{l_1^n}$$

Для определённости, докажем два крайних неравенства

$$\|x\|_{l_1^n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |x_i| \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \max_{i=\overline{1,n}} |x_i| \le \frac{n}{n}\max_{i=\overline{1,n}} |x_i| = \|x\|_C \le n\|x\|_{l_1^n} =$$

$$= \frac{n}{n}\sum_{i=1}^n |x_i| = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i| + \sum_{i=1, i\ne k}^n |x_i|, \Longrightarrow n\|x\|_{l_1^n} - \|x\|_C \ge 0,$$

$$|x_k| = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i|$$

3) Норма функций.

a) равномерно – непрерывная норма (норма Чебышева) $\|f\|_C = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$

b) пространство L_p интегрируемых функций на отрезке со степенью $p > 1$ и нормой $\|f\|_{L_p} = \left(\frac{1}{(b-a)}\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$, $p > 1$.

<u>Утверждение 2.</u> Справедливо неравенство

$$\|f\|_{L_1} \le \|f\|_{L_2} \le \dots \le \|f\|_{L_p} \le \dots \le \|f\|_C$$

В частности, для функции

$$f(x) = x, a = 0, b = 1: \|f\|_{L_1} = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} < \|f\|_{L_2} =$$

$$= \left(\int_0^1 |x|^2 dx\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} < \left(\int_0^1 |x|^3 dx\right)^{1/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int_0^1 |x|^p dx\right)^{1/p} = \frac{1}{\sqrt[p]{p+1}} \xrightarrow[p\to\infty]{} 1$$

Доказательство. Покажем справедливость, например, последнего неравенства:

$$\|f\|_{L_p}^p = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b |f(x)|^p dx \le \frac{1}{(b-a)} \int_a^b \left(\max_{x\in[a,b]} |f(x)|\right)^p dx =$$
$$\frac{\left(\max_{x\in[a,b]} |f(x)|\right)^p}{(b-a)} \int_a^b dx = \|f\|_C^p \Leftrightarrow \ \|f\|_{L_p} \ \le \|f\|_C$$

4) Нормы матриц.

1. $\|A\|_C = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$

2. $\|A\|_1 = \max\limits_{j=\overline{1,n}} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|$

3. $\|A\|_M = n \max\limits_{i=\overline{1,n}} |a_{i,j}|$

4. $\|A\|_E = \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{i,j}|^2\right)^{1/2}$

5. $\|A\|_2 = \sqrt{\max\limits_{i=\overline{1,n}} \mu_i}$, $A^H A x_i = \mu_i x_i$, A^H – матрица эрмитово сопряженная к A.

Первые две нормы не имеют специального названия, третья называется максимальной, четвёртая сферическая, пятая спектральная.

Определение 6. Норма матрицы $\|A\|$ называется согласованной с нормой вектора $\|x\|$, если верно: $\|Ax\| = \|A\|\|x\|, \forall x \epsilon X$.

Определение 7. Величина $\|A\| = \sup \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ – называется нормой матрицы подчинённой данной норме вектора $\|x\|$.

Пример. $\|Ax\|_C = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j} x_j| \le$
$\max\limits_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}||x_j| \le \max\limits_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \max\limits_{j=\overline{1,n}} |x_j| = \|A\|_C \|x\|_C,$

другими словами, матричная норма $\|A\|_C$ согласована с векторной нормой $\|x\|_C$.

$\|A\|_C \le \frac{\|Ax\|_C}{\|x\|_C}, \bar{x}_j = sign\left(a_{i_0,j}\right) = \pm 1, j = \overline{1,n}$, где $i_0 : \max\limits_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| =$ $\sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}|$, тогда получим $\|A\|_C = \frac{\|A\bar{x}\|_C}{\|\bar{x}\|_C} = \frac{\max\limits_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|}{1} = \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}| =$ $\|A\|_C$. То есть мы показали, что матричная норма $\|A\|_C$ является подчинённой к векторной норме $\|x\|_C$.

Лекция 2. *Численное решение нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений.*

Рассмотрим нелинейное уравнение с однородной правой частью

$$f(x) = 0 \qquad (1)$$

на интервале (a, b), содержащем единственный корень уравнения. В случае нескольких корней необходимо разбить (a, b), на интервалы единственного изменения знака функции, то есть изолировать корни уравнения по одному на интервал $f(a)f(b) < 0$.

Будем считать, что начальная точка x_i^0 итерации находится на изолированном интервале с единственным корнем $x_i^0 \in (a_i, b_i)$, $f(a_i)f(b_i) < 0,\ i = \overline{1,n}$. В случае сходимости итерации к корню начальную точку можно располагать слева или справа от корня (можно выбирать во всех смежных точках интервалов $x^0 \in \{a_i, i = \overline{1,n}, b_n\}$. Итерационная формула касательных Ньютона имеет вид:

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)} \qquad (2)$$

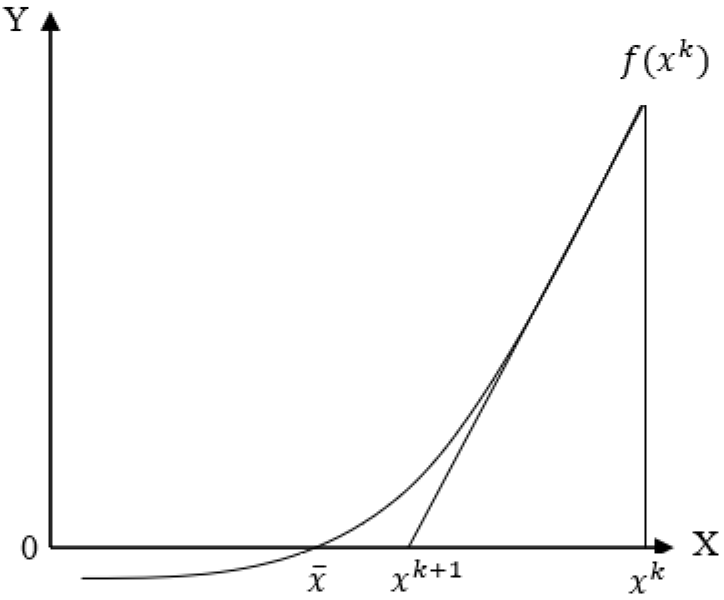


Рис. 1 График функции $f(x)$

Корнем уравнения (1) называется точка $\bar{x} \in (a,b): f(\bar{x}) = 0$ $(f'(\bar{x}) \neq 0)$. Из рис. 1 видно, что точка x^{k+1} расположена ближе к корню $\bar{x}$, чем предыдущая итерация x^k. Можно предположить, что $\lim\limits_{k\to\infty} x^k = \bar{x}$.

Из прямоугольного треугольника рис. 1 получим $f'(x^k) = \frac{f(x^k)}{(x^{k+1}-x^k)}$, откуда $x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)},\ k = 0,1,2,\dots$, т.е. получена формула касательных Ньютона (2).

Введём обозначение $\delta x^k = x^k - \bar{x},\ \delta x^{k+1} = x^{k+1} - \bar{x}$. Вычтем из обеих частей формулы (2) решение $\bar{x}$, получим $\delta x^{k+1} = \delta x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)}, k = 0,1,2,\dots$. (3)

<u>Определение 1.</u> Говорят, что числовая последовательность x^k сходится к предельному значению $\bar{x}$ с порядком $p > 0$, если существуют такие положительные числа $C > 0, h > 0, n \in N$ такие, что $|\delta x^k| < h, \forall k > N: \exists \lim\limits_{k\to\infty} \frac{|\delta x^k|}{|\delta x^{k+1}|^p} = C,\ C = \frac{f''(\bar{x})}{2f'(\bar{x})}$. Формулы (2) и (3) связаны тождественным преобразованием и, следовательно, эквивалентны. Справедливо следующее утверждение.

<u>Теорема 1.</u> Итерационная формула касательных Ньютона (2) при условии, что $(f'(\bar{x}) \neq 0)$ сходится со вторым порядком скорости. Имеет место оценка погрешности $|\delta x^{k+1}| \leq C^{k+1}|\delta x^0|^{(2k+1)}$.

Доказательство. Преобразуем формулу (3)

$\delta x^{k+1} = \delta x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)} = \delta x^k - \frac{f(\bar{x}+\delta x^k)}{f'(\bar{x}+\delta x^k)} = \delta x^k -$

$$\frac{f(\bar{x})+f'(\bar{x})\delta x^k+\frac{f''(\bar{x})\left(\delta x^k\right)^2}{2}+O\left(\left(\delta x^k\right)^3\right)}{f'(\bar{x})\left(1+\frac{f''(\bar{x})\delta x^k}{f'(\bar{x})}+O\left(\left(\delta x^k\right)^2\right)\right)}=\delta x^k-\frac{f'(\bar{x})\delta x^k+\frac{f''(\bar{x})\left(\delta x^k\right)^2}{2}+O\left(\left(\delta x^k\right)^3\right)}{f'(\bar{x})\left(1+\frac{f''(\bar{x})\delta x^k}{f'(\bar{x})}+O\left(\left(\delta x^k\right)^2\right)\right)}=\delta x^k-$$

$$\frac{f'(\bar{x})\delta x^k\left(1+\frac{f''(\bar{x})\left(\delta x^k\right)^2}{2f'(\bar{x})}+O\left(\left(\delta x^k\right)^2\right)\right)}{f'(\bar{x})\left(1+\frac{f''(\bar{x})\delta x^k}{f'(\bar{x})}+O\left(\left(\delta x^k\right)^2\right)\right)}=\delta x^k-\delta x^k\left(1+\frac{f''(\bar{x})\delta x^k}{2f'(\bar{x})}+O((\delta x^k)^2)\right)-$$

$$(\delta x^k)^2\left(1-\frac{f''(\bar{x})\delta x^k}{f'(\bar{x})}+O((\delta x^k)^2)\right)=\delta x^k-\delta x^k\left(1+\frac{f''(\bar{x})\delta x^k}{2f'(\bar{x})}-\right.$$

$$\left.\frac{f''(\bar{x})\delta x^k}{f'(\bar{x})}O((\delta x^k)^2)\right)-(\delta x^k)^2\left(\frac{f''(\bar{x})}{2f'(\bar{x})}-\frac{f''(\bar{x})}{f'(\bar{x})}+O(\delta x^k)\right)=(\delta x^k)^2\frac{f''(\bar{x})}{2f'(\bar{x})}+$$

$$O((\delta x^k)^3) \qquad (4)$$

Из формулы (4) находим порядок скорости сходимости

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|\delta x^k|}{\left|\delta x^{k+1}\right|^2}=\left|\frac{f''(\bar{x})}{2f'(\bar{x})}\right|=C,\ p=2 \qquad (5)$$

Что и требовалось доказать.

Замечание 1. Формула (5) согласуется с рис. 1 ($f''(\bar{x})>0, f'(\bar{x})>0$, $\delta x^{k+1}>0$), т.е. итерация x^{k+1} находится правее решения $\bar{x}$.

Замечание 2. Из формулы (5) следует оценка погрешности

$$|\delta x^{k+1}|\le C|\delta x^k|^2\le C^2|\delta x^{k-1}|^4\le\cdots\le C^k|\delta x^1|^{2k}\le C^{k+1}|\delta x^0|^{2(k+1)}$$

$$\xrightarrow[k\to\infty]{}0,C=\frac{f''(\bar{x})}{2f'(\bar{x})} \qquad (6)$$

Начальное удаление от решения, δx^{k+1} – удаление от решения после $(k+1)-$й итерации.

Замечание 3. При выводе формулы (4) использовалось условие $f(\bar{x})=0$, следовательно, итерация (4) сходится не к произвольной точке, а к решению $\bar{x}$ (удаление δx^{k+1} отсчитывается от решения $\bar{x}$).

Замечание 4. Если $f'(\bar{x})=0$ для конкретного корня $\bar{x}$, $f(x)=(x-\bar{x})^m\varphi(x)$, $\varphi(\bar{x})\ne 0, m\ge 2$.

Сходимость итерации $|\delta x^{k+1}|$ к нулю не квадратичная, а линейная (с первым порядком).

Доказательство.

$$\delta x^{k+1}=\delta x^k-\frac{f(x^k)}{f'(x^k)}=\delta x^k-\frac{\left(\delta x^k\right)^m\varphi(x^k)}{\left(m\left(\delta x^k\right)^{m-1}\varphi(x^k)+\left(\delta x^k\right)^m\varphi'(x^k)\right)}=$$

$$\frac{\delta x^k\varphi(x^k)}{\left(m\varphi(x^k)+\delta x^k\varphi'(x^k)\right)}=\frac{\delta x^k}{\left(m+\delta x^k\frac{\varphi'(x^k)}{\varphi(x^k)}\right)}\xrightarrow[\delta x^k\to 0]{}\frac{\delta x^k}{m} \qquad (7)$$

Из формулы (7) и определения 1 получим значение предела

$\lim\limits_{k\to\infty}\frac{|\delta x^k|}{\left|\delta x^{k+1}\right|^1}=\left|\frac{1}{m}\right|=C,p=1$, т.е. сходимость линейная с первым порядком.

Несмотря на потерю скорости сходимости в случае кратного корня можно предложить модифицировать формулу Ньютона, которая всегда сходится со вторым порядком.

Имеем $f(x) = (x-\bar{x})^m \varphi(x), \varphi(\bar{x}) \neq 0, m \geq 2$.

Рассмотрим вспомогательную функцию $F(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$ (8)

Для неё составим итерацию аналогичную формуле Ньютона

$$x^{k+1} = x^k - \frac{F(x^k)}{F'(x^k)}, k = 0,1,2,\dots \quad (9)$$

Теорема 2. Итерационные формулы (2) и (9) сходятся к одному и тому же решению, но (9) имеет второй порядок сходимости для любого m.

Доказательство. Поскольку $F(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{(x-\bar{x})^m \varphi(x)}{m(x-\bar{x})^{m-1}\varphi(x)+(x-\bar{x})^m \varphi'(x)} \xrightarrow[x\to\bar{x}]{} \frac{x-\bar{x}}{m}$, то функция $F(x)$ имеет тот же самый корень в точке $\bar{x}$, что и итерация (2), несмотря на различие функций $F(x)$ и $f(x)$ корень кратности 1 и, следовательно, по теореме 1 имеет второй порядок сходимости. Для однократного корня можно применить итерацию (2), имеем: $x^{k+1} = x^k - \frac{F(x^k)}{F'(x^k)} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)} \frac{1}{\left(\frac{f'(x^k)^2 - f(x^k)f''(x^k)}{f'(x^k)^2}\right)} = x^k - \frac{f(x^k)f'(x^k)}{f'(x^k)^2 - f(x^k)f''(x^k)}$ (10)

Таким образом, мы показали, что итерационная формула (10) сходится к тому же корню, что и итерация (2), но в отличие от (2) всегда со вторым порядком при любой кратности корня. Теорема 2 доказана. Формулу (10) называют также модифицированной формулой Ньютона.

Для функции нескольких переменных формула (2), решающей одновременно систему нескольких уравнений, другими словами, вектор-уравнение.

$$F(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

А итерация, решающая (11), принимает матричный вид

$$x^{k+1} = x^k - F'(x^k)^{-1} F(x^k), k = 0,1,2,\dots \quad (12)$$

где квадратная матрица $F'(x_i^k) = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x_i^k), i,j = \overline{1,n}, x^k = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)$, называемая якобианом, очевидно, должна быть невырожденной: $det\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x_i^k)\right) \neq 0$. Иначе, не существует матрицы, обратной к матрице Якоби в уравнении (12). Действительно, возьмём дифференциал от (11) в окрестности решения – точки $\bar{x}$.

$$dF(\bar{x}) \Leftrightarrow \begin{cases} dF_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) = \nabla F_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)dx \\ dF_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) = \nabla F_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)dx \\ \dots \\ dF_n(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) = \nabla F_n(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)dx \end{cases} \quad (13)$$

$dx = (dx_1, dx_2, \dots, dx_n) = (x_1 - \bar{x}_1, x_2 - \bar{x}_2, \dots, x_n - \bar{x}_n)$

Формула (13) эквивалентна

$$dF_i(\bar{x}) = F_i(x) - F_i(\bar{x}) = F_i(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\bar{x})dx_j \Leftrightarrow F(x) = F'(\bar{x})dx \Leftrightarrow$$

$$dx = (F'(\bar{x}))^{-1}F(x) \tag{14}$$

Учитывая, что итерация x^{k+1} ближе к решению $\bar{x}$ (заменим $\bar{x}$ на x^{k+1}), чем x^k из (14), получим

$$x^k - x^{k+1} = dx = \left(F'(x^k)\right)^{-1}F(x^k) \Leftrightarrow x^{k+1} = x^k - \left(F'(x^k)\right)^{-1}F(x^k) \tag{15}$$

Матричная формула касательных Ньютона (15), кроме не вырожденности матрицы Якоби, для получения максимальной скорости сходимости $(p = 2)$ требует дополнительных условий [1] с оценкой погрешности аналогичной формуле (6).

<u>Теорема 3.</u> Пусть $\omega_a = \{x: \|x - X\|_H < a\}$. Пусть при некоторых $a, a_1, a_2, 0 < a, 0 \le a_1, a_2 < \infty$ выполняются условия

$$\|(F'(x))^{-1}\|_H \le a_1\|y\|_Y \text{ при } x\epsilon\omega_a, \forall y \tag{16}$$

$$\|F(u_1) - F(u_2) - F'(u_2)(u_1 - u_2)\|_Y \le a_2\|u_2 - u_1\|_H^2 \text{ при } u_1, u_2\epsilon\omega_a \tag{17}$$

Обозначим $c = a_1 \cdot a_2,\ b = min\{a, c^{-1}\}$. Тогда справедливо утверждение (О сходимости метода Ньютона). При условиях (16), (17) $x^0\epsilon\omega_a$итерационный процесс Ньютона (15) сходится с оценкой погрешности

$$\|x^n - X\|_X \le c^{-1}(c\|x^0 - X\|_H)^{2^n} \tag{18}$$

Отметим, что (18) является многомерным аналогом доказанной нами формулы (6), (16) обеспечивает не вырожденность матрицы Якоби, (17) эквивалентно условию Липшица для функции $F(u)$, кроме того, требуется гладкость функции $F(u)$.

Однако на практике удобно пользоваться не матричной формулой (15), а формулой Ньютона-Зейделя (19), требующей знание не n^2 элементов матрицы Якоби, а всего n элементов (в случае, если все её диагональные элементы не вырождены). Это уменьшает вычислительные затраты (машинное время) и полную ошибку округления.

$$\begin{cases} x_1^{m+1} = x_1^m - \frac{F_1(x_1^m, x_2^m, \ldots, x_n^m)}{F'_{1x_1}(x_1^m, x_2^m, \ldots, x_n^m)}, \\ x_2^{m+1} = x_2^m - \frac{F_2(x_1^{m+1}, x_2^m, \ldots, x_n^m)}{F'_{2x_2}(x_1^{m+1}, x_2^m, \ldots, x_n^m)}, \\ \ldots \\ x_i^{m+1} = x_i^m - \frac{F_i(x_1^{m+1}, x_2^{m+1}, \ldots, x_{i-1}^{m+1}, x_i^m, \ldots, x_n^m)}{F'_{ix_i}(x_1^{m+1}, x_2^{m+1}, \ldots, x_{i-1}^{m+1}, x_i^m, \ldots, x_n^m)}, \\ \ldots \\ x_n^{m+1} = x_n^m - \frac{F_n(x_1^{m+1}, x_2^{m+1}, \ldots, x_{i-1}^{m+1}, x_i^{m+1}, \ldots, x_{n-1}^{m+1}, x_n^m)}{F'_{nx_n}(x_1^{m+1}, x_2^{m+1}, \ldots, x_{i-1}^{m+1}, x_i^{m+1}, \ldots, x_{n-1}^{m+1}, x_n^m)} \end{cases} \tag{19}$$

Для использования формулы Ньютона-Зейделя (19) требуется выполнение условий:

<u>Теорема 4.</u> *(достаточные условия применимости формулы Ньютона-Зейделя)* Пусть открытая область $A \subset R^n$ содержит начальную итерацию $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in A$ и решение $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n) \in A$ (решение системы уравнений (11)). Функция $F(x), x \in A$ конечного числа n переменных:

1) Дважды непрерывно дифференцируема $F(x) \in C^2(A)$
2) Матрица Якоби $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ $\forall i, j = \overline{1, n}$ обладает диагональным преобладанием:

$\left|\frac{\partial F_i(x)}{\partial x_i}\right| > M_{1,i} \geq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \left|\frac{\partial F_i(x)}{\partial x_j}\right|, \forall i = \overline{1,n}, \forall x \in A$

3) Диагональные элементы матрицы Якоби равномерно не вырождены: $\left|\frac{\partial F_i(x)}{\partial x_i}\right| > M_{2,i} > 0, i = \overline{1,n}, \forall x \in A$ где $M_{1,i}, M_{2,i}, i = \overline{1,n}$ – некоторые константы. $\frac{M_{1,i}}{M_{2,i}} = q_i < 1, i = \overline{1,n}$. Обозначим $q = \max_{i=\overline{1,n}} q_i$. Тогда система уравнений (6) сходится к единственной стационарной точке (5), по крайней мере, с первым порядком скорости сходимости и имеет место оценка погрешности после m итераций $|\delta x^m| = |x^m - \bar{x}| \leq \frac{(1+q)|\delta x^0|q^m}{1-q} \leq \frac{(1+q)q^m}{(1-q)^2} l_0$, где $l_0 = |x^1 - x^0|$ – расстояние между начальными итерациями $x^0, x^1, \delta x^0 = (x_1^0 - \overline{x_1}, x_2^0 - \overline{x_2}, \ldots, x_n^0 - \overline{x_n})$.

Кроме достаточных условий сходимости итерационных формул (2), (19) необходимо получить условие задания открытой области $A \subset R^n$, в которую мы будем помещать начальную точку итерации. Для этого воспользуемся формулой простой итерации, которую сведём к формуле Ньютона – Зейделя. Метод простой итерации пишут в виде формулы:

$$x^{k+1} = g(x^k), k = 0,1,2, \ldots \qquad (20)$$

Из формулы (20) получим, полагая непрерывную дифференцируемость функции $g(x)$:

$x^{k+1} - x^k = g(x^k) - g(x^{k-1}) = g'(x^{k-1})(x^k - x^{k-1})$, обозначим $y^k = x^{k+1} - x^k, y^{k-1} = x^k - x^{k-1}$, тогда $y^k = g'(x^k)y^{k-1} + O((y^k)^2)$.

Возьмём норму от последнего уравнения

$$\|y^k\| \leq \|g'(x^k)\| \cdot \|y^{k-1}\| \qquad (21)$$

Из (21) получаем достаточное условие, наложенное на функцию $g(x)$, при котором отображение (20) будет сжимающим

$$|g'(x^{k-1})| \leq q < 1, \forall k = 1,2, \ldots \qquad (22)$$

Используем формулу (20), условие (22) для указания области сходимости в итерации (2)

$$x^{k+1} = g(x^k) = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)} \Leftrightarrow g'(x^k) = 1 - \frac{\left(f'(x^k)\right)^2 - f(x^k)f''(x^k)}{\left(f'(x^k)\right)^2} =$$

$$\frac{f(x^k)f''(x^k)}{\left(f'(x^k)\right)^2}, \text{ тогда } |g'(x^k)| = \frac{|f(x^k)||f''(x^k)|}{\left(f'(x^k)\right)^2} \leq q < 1, \forall k = 1,2, \ldots \qquad (23)$$

Лекция 3. Эффективный поиск точек экстремума и точек перевала гладких функционалов

Введение. Градиентные методы являются недостаточно эффективными с точки зрения точности. Действительно, пусть необходимо найти решение с абсолютной точностью 10^{-3}, а значение функционала в экстремальной точке с точностью порядка $(10^{-3})^2 = 10^{-6}$ 6 – значащими цифрами. Зададим шаг итерации $h = 0.001$ с начальным расстоянием между первым приближением

и стационарной точкой на 100 единиц. Понадобится число $10^2/10^{-3} = 10^5$ итераций (если градиент по модулю 1, иначе точность оценки ещё хуже или число итераций ещё больше), в то время как можно получить решение и экстремальное значение гладкого функционала с абсолютной точностью 10^{-15} всего за 30 шагов итерации с тем же начальным удалении от стационарной точки. Число арифметических операций и ошибка округления пропорциональны размерности цикла. Одним из эффективных методов численного решения системы уравнений является метод Зейделя [2]. Даже более эффективным по сравнению с формулой касательных Ньютона (в случае если метод Зейделя и метод Ньютона применимы одновременно). В матричном методе Ньютона нужно вычислить n^2 элементов матрицы Якоби, погрешность дополнительно увеличивается при отыскании обратной матрицы к матрице Якоби:
$\overline{x^{m+1}} = \overline{x^m} - \left(F'(\overline{x^m})\right)^{-1} * F((\overline{x^m}))$, где $\left(F'(\overline{x^m})\right)^{-1}$ – матрица обратная к матрице Якоби. Метод Зейделя использует только диагональные элементы матрицы Якоби, т. е. n элементов. Поэтому при одинаковом числе итераций в методе Зейделя меньше элементарных операций и, следовательно, ошибка округления.

Определение 1. Среди двух методов, решающих одну и ту же задачу с одинаковой точностью при одинаковых начальных условиях, более эффективным назовём тот, который использует минимальное число элементарных операций (+, -, /, *).

Постановка задачи.

Рассмотрим n- мерную $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in A \subset R^n$ задачу на безусловный экстремум достаточно гладкого функционала$f(x) \in C^3(A)$, т.е. множество функционалов трижды непрерывно дифференцируемых в открытой области A, имеющих непрерывные частные производные до 3 – го порядка включительно [1].

$$\begin{cases} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \to extr \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A \subset R^n, f(x) \in C^3(A) \end{cases} \qquad (1)$$

Для поиска экстремальных точек задачи (1) можно использовать 2 подхода. Первый заключается в исследовании основного функционала, например, градиентными методами. Другой подход заключается в использовании необходимых условий экстремума функции нескольких переменных [1]:

$$\begin{cases} f'_{x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f'_{x_2}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ f'_{x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

где $(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})$ стационарная точка, т. е. решение системы уравнений (2).

Будем решать систему уравнений (2) численно методом простой итерации. Метод Зейделя для системы уравнений, заданных в неявном виде [2]:

$$\begin{cases} F_1(x_1^{m+1}, x_2^m, \dots, x_n^m) = 0, \\ F_2(x_1^{m+1}, x_2^{m+1}, \dots, x_n^m) = 0, \\ \dots \\ F_n(x_1^{m+1}, x_2^{m+1}, \dots, x_{n-1}^{m+1}, x_n^{m+1}) = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

То есть исходная система (2) сводится к последовательному решению n уравнений системы (3), каждое из которых $F_i(x_1^{m+1}, x_2^{m+1}, \dots, x_i^{m+1}, \dots, x_n^m) = 0,\ i = \overline{1,n}$ представляет уравнение с одной неизвестной x_i^{m+1} переменной, а все остальные переменные при фиксированной итерации остаются «замороженными», т.е. постоянными. В этом случае можно для нахождения i–ой переменной использовать i–ое уравнение с явным видом итерации – формулу касательных Ньютона для уравнения с одной неизвестной переменной:

$$\begin{cases} x_1^{m+1} = x_1^m - \frac{F_1(x_1^m, x_2^m, \dots, x_n^m)}{F'_{1x_1}(x_1^m, x_2^m, \dots, x_n^m)}, \\ x_2^{m+1} = x_2^m - \frac{F_2(x_1^{m+1}, x_2^m, \dots, x_n^m)}{F'_{2x_2}(x_1^{m+1}, x_2^m, \dots, x_n^m)}, \\ \dots \\ x_i^{m+1} = x_i^m - \frac{F_i(x_1^{m+1}, x_2^{m+1}, \dots, x_{i-1}^{m+1}, x_i^m, \dots, x_n^m)}{F'_{ix_i}(x_1^{m+1}, x_2^{m+1}, \dots, x_{i-1}^{m+1}, x_i^m, \dots, x_n^m)}, \\ \dots \\ x_n^{m+1} = x_n^m - \frac{F_n(x_1^{m+1}, x_2^{m+1}, \dots, x_{i-1}^{m+1}, x_i^{m+1}, \dots, x_{n-1}^{m+1}, x_n^m)}{F'_{nx_n}(x_1^{m+1}, x_2^{m+1}, \dots, x_{i-1}^{m+1}, x_i^{m+1}, \dots, x_{n-1}^{m+1}, x_n^m)} \end{cases} \qquad (4)$$

Обозначим вектор $\overline{\delta x^m} = (\delta x_1^m, \delta x_2^m, \dots, \delta x_n^m) = (x_1^m - \overline{x_1}, x_2^m - \overline{x_2}, \dots, x_n^m - \overline{x_n})$, аналогично: $\overline{\delta x^{m+1}} = (\delta x_1^{m+1}, \delta x_2^{m+1}, \dots, \delta x_n^{m+1}) = (x_1^{m+1} - \overline{x_1}, x_2^{m+1} - \overline{x_2}, \dots, x_n^{m+1} - \overline{x_n})$ где вектор $(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})$ – представляет стационарную искомую точку решения системы (2)⟺(5), т.е.:

$$\begin{cases} \lim\limits_{m\to\infty} x_1^{m+1} = \lim\limits_{m\to\infty} x_1^m = \overline{x_1}, \quad f'_{x_1}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}) = 0, \\ \dots, \\ \lim\limits_{m\to\infty} x_n^{m+1} = \lim\limits_{m\to\infty} x_n^m = \overline{x_n}, \quad f'_{x_n}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}) = 0 \\ f''_{x_i x_i}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}) \neq 0, \quad i = \overline{1,n} \end{cases} \qquad (5)$$

Перейдем к старой переменной – функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, учитывая обозначения (5)

$f'_{x_1}(x_1^{m+1}, x_2^{m+1}, \dots, x_i^{m+1}, \dots, x_n^m) = F_i(x_1^{m+1}, x_2^{m+1}, \dots, x_i^{m+1}, \dots, x_n^m),\ i = \overline{1,n}.$

Вычтем из правой и из левой части (4) каждого i-го уравнения $\bar{x}_i$, $\delta x_i^{m+1} = x_i^{m+1} - \bar{x}_i, \delta x_i^m = x_i^m - \bar{x}_i$, кроме того, в частных производных $f'_{x_i}, f''_{x_i x_i}$ переменные с порядком m и m+1 выразим через переменные $\delta x_k^m, \delta x_k^{m+1}$:

$x_k^{m+1} = \overline{x_k} + \delta x_k^{m+1}, x_k^m = \overline{x_k} + \delta x_k^m, k = \overline{1,n}$

$$\begin{cases} \delta x_1^{m+1} = \delta x_1^m - \frac{f'_{x_1}(\overline{x_1}+\delta x_1^m, \overline{x_2}+\delta x_2^m, \dots, \overline{x_n}+\delta x_n^m)}{f''_{x_1x_1}(\overline{x_1}+\delta x_1^m, \overline{x_2}+\delta x_2^m, \dots, \overline{x_n}+\delta x_n^m)}, \\ \delta x_2^{m+1} = \delta x_2^m - \frac{f'_{x_2}(\overline{x_1}+\delta x_1^{m+1}, \overline{x_2}+\delta x_2^m, \dots, \overline{x_n}+\delta x_n^m)}{f''_{x_2x_2}(\overline{x_1}+\delta x_1^{m+1}, \overline{x_2}+\delta x_2^m, \dots, \overline{x_n}+\delta x_n^m)} \\ \dots \\ \delta x_i^{m+1} = \delta x_i^m - \frac{f'_{x_i}(\overline{x_1}+\delta x_1^{m+1}, \overline{x_2}+\delta x_2^{m+1}, \dots, \overline{x_{i-1}}+\delta x_{i-1}^{m+1}, \overline{x_i}+\delta x_i^m, \dots \overline{x_n}+\delta x_n^m)}{f''_{x_ix_i}(\overline{x_1}+\delta x_1^{m+1}, \overline{x_2}+\delta x_2^{m+1}, \dots, \overline{x_{i-1}}+\delta x_{i-1}^{m+1}, \overline{x_i}+\delta x_i^m, \dots, \overline{x_n}+\delta x_n^m)} \\ \dots \\ \delta x_n^{m+1} = \delta x_n^m - \frac{f'_{x_n}(\overline{x_1}+\delta x_1^m, \overline{x_2}+\delta x_2^m, \dots, \overline{x_{n-1}}+\delta x_{n-1}^{m+1}, \overline{x_n}+\delta x_n^m)}{f''_{x_nx_n}(\overline{x_1}+\delta x_1^m, \overline{x_2}+\delta x_2^m, \dots, \overline{x_{n-1}}+\delta x_{n-1}^{m+1}, \overline{x_n}+\delta x_n^m)} \end{cases} \quad (6)$$

Сходимость метода

<u>Теорема 1.</u> *(условия сходимости итерации (6))*
Пусть открытая область $A \subset R^n$ содержит начальную итерацию $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in A$ и стационарную точку $(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}) \in A$ (решение системы уравнений (2)). Функция $f(x), x \in A$ конечного числа n переменных:
1) Трижды непрерывно дифференцируема $f(x) \in C^3(A)$
2) Матрица вторых частных производных (матрица Гессе) обладает диагональным преобладанием $f''_{x_ix_j}(x) \forall i, j = \overline{1,n}$: $\left|f''_{x_ix_i}(x)\right| > M_{1,i} \geq \sum_{j=1, j\neq 1}^n \left|f''_{x_ix_j}(x)\right|, \forall i = \overline{1,n}, \forall x \in A$
3) Диагональные элементы матрицы Гессе равномерно не вырождены: $\left|f''_{x_ix_i}(x)\right| > M_{2,i} > 0, i = \overline{1,n}, \forall x \in A$ где $M_{1,i}, M_{2,i}, i = \overline{1,n}$ - некоторые константы.
$\frac{M_{1,i}}{M_{2,i}} = q_i < 1, i = \overline{1,n}$. Обозначим $q = \max\limits_{i=\overline{1,n}} q_i$.
Тогда система уравнений (6) сходится к единственной стационарной точке (5), по крайней мере, с первым порядком скорости и имеет место оценка погрешности после m итераций:
$|\delta x^m| = |x^m - \bar{x}| \leq \frac{(1+q)|\delta x^0|q^m}{1-q} \leq \frac{(1+q)q^m}{(1-q)^2} l_0$, где $l_0 = |x^1 - x^0|$ – расстояние между начальными итерациями $x^0, x^1, \delta x^0 = (x_1^0 - \overline{x_1}, x_2^0 - \overline{x_2}, \dots, x_n^0 - \overline{x_n})$.
Доказательство проведём по индукции (достаточность).
Разложим последовательно
$f'_{x_i}(\overline{x_1} + \delta x_1^{m+1}, \overline{x_2} + \delta x_2^{m+1}, \dots, \overline{x_{i-1}} + \delta x_{i-1}^{m+1}, \overline{x_i} + \delta x_i^m, \dots \overline{x_n} + \delta x_n^m), i = \overline{1,n}$, входящую в каждое уравнение системы (6) в ряд Тейлора с центром в стационарной точке, для первого уравнения имеем:

1) $i = 1$:

$f'_{x_1}(x_1^m, x_2^m, \dots, x_n^m) = f'_{x_1}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}) + \sum_{j=1}^n f''_{x_1x_j}(\bar{x})\delta x_j^m + O(\alpha_1|\delta x^m|^2) = \sum_{j=1}^n f''_{x_1x_j}(\bar{x})\delta x_j^m + O(\alpha_1|\delta x^m|^2)$ в силу справедливости (5). Где

$$|\delta x^m| = \max_{j=\overline{1,n}}\left|\delta x_j^m\right|, \left|\delta x_j^m\right| \leq |\delta x^m|, \forall j = \overline{1,n}, \forall m = 0,1,2, \dots \quad (7)$$

$\lim\limits_{|\delta x^m|\to 0} \alpha_1(\delta x^m) = C_i \neq 0, i = \overline{1,n}.$

В силу условий (5), (6), (7) и условия 1) теоремы:

$$\delta x_1^{m+1} = \delta x_1^m - \frac{f'_{x_1}(\overline{x_1}+\delta x_1^m, \overline{x_2}+\delta x_2^m, \dots, \overline{x_n}+\delta x_n^m)}{f''_{x_1x_1}(\overline{x_1}+\delta x_1^m, \overline{x_2}+\delta x_2^m, \dots, \overline{x_n}+\delta x_n^m)} =$$

$$= \delta x_1^m - \frac{f'_{x_1}(\bar{x}) + \sum_{j=1}^n f''_{x_1x_j}(\bar{x})\delta x_j^m + O(\alpha_1|\delta x^m|^2)}{f''_{x_1x_1}(\overline{x_1}+\delta x_1^m, \overline{x_2}+\delta x_2^m, \dots, \overline{x_n}+\delta x_n^m)} =$$

$$= \delta x_1^m - \frac{\sum_{j=1}^n f''_{x_1x_j}(\bar{x})\delta x_j^m + O(\alpha_1|\delta x^m|^2)}{f''_{x_1x_1}(\overline{x_1}+\delta x_1^m, \overline{x_2}+\delta x_2^m, \dots, \overline{x_n}+\delta x_n^m)} =$$

$$= \delta x_1^m - \frac{\delta x_1^m}{\dfrac{f''_{x_1x_1}(\overline{x_1}+\delta x_1^m, \overline{x_2}+\delta x_2^m, \dots, \overline{x_n}+\delta x_n^m)}{f''_{x_1x_1}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})}} -$$

(В силу условия 1) теоремы) $f(x) \in C^3(A)$:

$$\frac{\sum_{j=2}^n f''_{x_1x_j}(\bar{x})\delta x_j^m}{f''_{x_1x_1}(\overline{x_1}+\delta x_1^m, \overline{x_2}+\delta x_2^m, \dots, \overline{x_n}+\delta x_n^m)} + O(\alpha|\delta x^m|^2)$$

$$= \delta x_1^m - \frac{\delta x_1^m}{1 + \dfrac{\sum_{j=1}^n f^{(3)}_{x_1x_1x_j}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})\delta x_j^m}{f''_{x_1x_1}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})}} + O(\alpha|\delta x^m|^2)$$

$$- \frac{\sum_{j=2}^n f''_{x_1x_j}(\bar{x})\delta x_j^m}{f''_{x_1x_1}(\overline{x_1}+\delta x_1^m, \overline{x_2}+\delta x_2^m, \dots, \overline{x_n}+\delta x_n^m)}$$

$$= \delta x_1^m - \delta x_1^m - \frac{\sum_{j=2}^{nx} f''_{x_1x_j}(\bar{x})\delta x_j^m}{f''_{x_1x_1}(\overline{x_1}+\delta x_1^m, \overline{x_2}+\delta x_2^m, \dots, \overline{x_n}+\delta x_n^m)}$$

$$+ O(\alpha|\delta x^m|^2)$$

$$\delta x_1^{m+1} = -\frac{\sum_{j=2}^n f''_{x_1x_j}(\bar{x})\delta x_j^m}{f''_{x_1x_1}(\overline{x_1}+\delta x_1^m, \overline{x_2}+\delta x_2^m, \dots, \overline{x_n}+\delta x_n^m)} + O(\alpha|\delta x^m|^2).$$

Оценим последнее выражение по модулю (в следующей оценке использовано неравенство треугольника для модуля суммы величин и неравенство (7)):

$$|\delta x_1^{m+1}| \le \frac{\sum_{j=2}^n \left|f''_{x_1x_j}(\bar{x})\right| \left|\delta x_j^m\right|}{\left|f''_{x_1x_1}(\overline{x_1}+\delta x_1^m, \overline{x_2}+\delta x_2^m, \dots, \overline{x_n}+\delta x_n^m)\right|} + O(|\delta x^m|^2)$$

$$\le \frac{|\delta x^m| \sum_{j=2}^n \left|f''_{x_1x_j}(\bar{x})\right|}{\left|f''_{x_1x_1}(\overline{x_1}+\delta x_1^m, \overline{x_2}+\delta x_2^m, \dots, \overline{x_n}+\delta x_n^m)\right|} + O(|\delta x^m|^2)$$

Используя условие равномерной невырожденности 3) и условие диагонального преобладания 2) Т.1:

$$\left|f''_{x_1x_1}(\overline{x_1}+\delta x_1^m, \overline{x_2}+\delta x_2^m, \dots, \overline{x_n}+\delta x_n^m)\right| > M_{2,1}, \forall x \in A;$$

$$M_{1,1} \ge \sum_{j=1, j\neq 1}^n \left|f''_{x_1x_j}(x)\right| = \sum_{j=2}^n \left|f''_{x_1x_j}(x)\right|:$$

$$|\delta x_1^{m+1}| \le |\delta x^m| \frac{M_{1,1}}{M_{2,1}} = |\delta x^m| q_1 \le |\delta x^m| q < |\delta x^m| \qquad (8.1)$$

2) Для произвольного i-го уравнение системы (6) продолжим.

По индукции предположим выполнение неравенств $|\delta x_k^{m+1}| \leq |\delta x^m|, k = \overline{1, \iota - 1}$, тогда повторяя преобразование с i-м уравнением системы:

$$f'_{x_i}(x_1^{m+1}, x_2^{m+1}, \dots, x_i^m, \dots, x_n^m)$$
$$= f'_{x_i}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})$$
$$+ \sum_{j=1}^{i-1} f''_{x_i x_j}(\bar{x}) \delta x_j^{m+1} + \sum_{j=i}^{n} f''_{x_i x_j}(\bar{x}) \delta x_j^m + O(\alpha_1 |\delta x^m|^2)$$
$$= \sum_{j=1}^{i-1} f''_{x_i x_j}(\bar{x}) \delta x_j^{m+1} + \sum_{j=i}^{n} f''_{x_i x_j}(\bar{x}) \delta x_j^m + O(\alpha_1 |\delta x^m|^2)$$

$$\delta x_i^{m+1} - \delta x_i^m = - - \frac{f'_{x_i}(\overline{x_1} + \delta x_1^m, \dots, \overline{x_{\iota-1}} + \delta x_{i-1}^{m+1}, \overline{x_\iota} + \delta x_i^m \dots, \overline{x_n} + \delta x_n^m)}{f''_{x_i x_i}(\overline{x_1} + \delta x_1^m, \dots, \overline{x_{\iota-1}} + \delta x_{i-1}^{m+1}, \overline{x_\iota} + \delta x_i^m \dots, \overline{x_n} + \delta x_n^m)}$$
$$= - \frac{\sum_{j=1}^{i-1} f''_{x_i x_j}(\bar{x}) \delta x_j^{m+1} + \sum_{j=i}^{n} f''_{x_i x_j}(\bar{x}) \delta x_j^m + O(\alpha_1 |\delta x^m|^2)}{f''_{x_i x_i}(\overline{x_1} + \delta x_1^m, \dots, \overline{x_{\iota-1}} + \delta x_{i-1}^{m+1}, \overline{x_\iota} + \delta x_i^m \dots, \overline{x_n} + \delta x_n^m)}$$
$$= - \frac{\delta x_i^m}{1 + \frac{\sum_{j=1}^{i-1} f^{(3)}_{x_i x_i x_j}(\bar{x}) \delta x_j^{m+1} + \sum_{j=i+1}^{n} f^{(3)}_{x_i x_i x_j}(\bar{x}) \delta x_j^m}{f''_{x_i x_i}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})}}$$
$$+ O(\alpha |\delta x^m|^2) - \frac{\sum_{j=1}^{i-1} f''_{x_i x_j}(\bar{x}) \delta x_j^{m+1} + \sum_{j=i+1}^{i-1} f''_{x_i x_j}(\bar{x}) \delta x_j^m}{f''_{x_i x_i}(\overline{x_1} + \delta x_1^{m+1}, \dots, \overline{x_n} + \delta x_n^m)}$$
$$= -\delta x_i^m - \frac{\sum_{j=1}^{i-1} f''_{x_i x_j}(\bar{x}) \delta x_j^{m+1} + \sum_{j=i+1}^{i-1} f''_{x_i x_j}(\bar{x}) \delta x_j^m}{f''_{x_i x_i}(\overline{x_1} + \delta x_1^{m+1}, \dots, \overline{x_n} + \delta x_n^m)}$$
$$+ O(\alpha |\delta x^m|^2)$$

Сокращая промежуточные записи, получим:

$$\delta x_i^{m+1} - \delta x_i^m = -\delta x_i^m - \frac{\sum_{j=1}^{i-1} f''_{x_i x_j}(\bar{x}) \delta x_j^{m+1} + \sum_{j=i+1}^{i-1} f''_{x_i x_j}(\bar{x}) \delta x_j^m}{f''_{x_i x_i}(\overline{x_1} + \delta x_1^{m+1}, \dots, \overline{x_n} + \delta x_n^m)} + O(\alpha |\delta x^m|^2)$$

, или:

$$\delta x_i^{m+1} = - \frac{\sum_{j=1}^{i-1} f''_{x_i x_j}(\bar{x}) \delta x_j^{m+1} + \sum_{j=i+1}^{i-1} f''_{x_i x_j}(\bar{x}) \delta x_j^m}{f''_{x_i x_i}(\overline{x_1} + \delta x_1^{m+1}, \dots, \overline{x_n} + \delta x_n^m)} + O(\alpha |\delta x^m|^2) \qquad (*)$$

Обозначение последней формулы отличается от общей нумерации ввиду её важности. Учитывая индуктивное предположение $|\delta x_k^{m+1}| \leq |\delta x^m|, k = \overline{1, \iota - 1}$, получим:

$$\left|\delta x_i^{m+1}\right| \leq \frac{\sum_{j=1}^{i-1} \left|f''_{x_i x_j}(\bar{x})\right| \left|\delta x_j^{m+1}\right| + \sum_{j=i+1}^{n} \left|f''_{x_i x_j}(\bar{x})\right| \left|\delta x_j^m\right|}{\left|f''_{x_i x_i}(\overline{x_1} + \delta x_1^{m+1}, \dots, \overline{x_n} + \delta x_n^m)\right|} + O(|\delta x^m|^2)$$
$$\leq \frac{\sum_{j=1, j \neq i}^{n} \left|f''_{x_i x_j}(\bar{x})\right| \left|\delta x_j^m\right|}{f''_{x_i x_i}(\overline{x_1} + \delta x_1^{m+1}, \dots, \overline{x_n} + \delta x_n^m)} + O(|\delta x^m|^2)$$

$$\left|\delta x_i^{m+1}\right| \leq |\delta x^m| \frac{M_{1,i}}{M_{2,i}} = |\delta x^m| q_i \leq |\delta x^m| q < |\delta x^m| \qquad (8.2)$$

Индуктивно доказана справедливость $\left|\delta x_i^{m+1}\right| \leq |\delta x^m| q < |\delta x^m|, i = \overline{1, n}$,

поэтому
$|\delta x^{m+1}| = \max_{i=\overline{1,n}} |\delta x_i^{m+1}| \le |\delta x^m| q < |\delta x^m|.$
Таким образом, сходимость при выполнении условий теоремы доказана.

3) Оценим погрешность метода.

Пусть
$$|\delta x^{m+1}| \le |\delta x^m| q \le |\delta x^{m-1}| q^2 \le \cdots \le |\delta x^1| q^m \le |\delta x^0| q^{m+1} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0 \quad (9)$$
где $|\delta x^0| = \max_{i=\overline{1,n}} |\delta x^0| = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i^0 - \bar{x}_i|$ начальное приближение стационарной точки, начальная точка $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in A$.

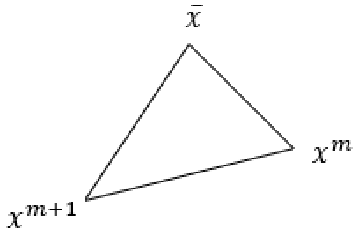


Рис.1

На практике известны не величины $|\delta x^{m+1}|$ и $|\delta x^m|$, а расстояния между последовательными итерациями x^m, x^{m+1} (рис.1). Из неравенства треугольника получим:
$|\delta x^m| = |x^{m+1} - x^m| = |x^{m+1} - \bar{x} - (x^m - \bar{x})| = |\delta x^{m+1} - \delta x^m| \le |\delta x^m| + |\delta x^{m+1}| \le (1+q)|\delta x^m|,$
учитывая неравенство $|\delta x^{m+1}| \le q|\delta x^m|$ и используя неравенство треугольника, получим после m итераций:
$$\begin{aligned}|x^m - \bar{x}| \le |x^m - x^{m+1}| + |x^{m+1} - x^{m+2}| + |x^{m+2} - x^{m+3}| + \cdots \\ + |x^{m+n} - x^{m+n+1}| + |x^{m+n+1} - \bar{x}| + \cdots = \\ = \sum_{i=m}^{\infty} |x^{i+1} - x^i| \le (1+q)|\delta x^m| + (1+q)|\delta x^{m+1}| \\ + (1+q)|\delta x^{m+2}| + \cdots = \\ = (1+q)(|\delta x^m| + |\delta x^{m+1}| + |\delta x^{m+2}| + \cdots) \le \\ \le (1+q)|\delta x^0| q^m \sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{(1+q)|\delta x^0| q^m}{1-q}.\end{aligned}$$
Поскольку $|\delta x^1| \le q|\delta x^0|$, запишем неравенство треугольника с избытком и с недостатком, получим:
$(1-q)|\delta x^0| \le |\delta x^0| - |\delta x^1| \le l_0 = |x^1 - x^0| \le |\delta x^0| + |\delta x^1| \le (1+q)|\delta x^0|.$
Окончательно оценка погрешности имеет вид:
$$|\delta x^m| = |x^m - \bar{x}| \le \frac{(1+q)|\delta x^0| q^m}{1-q} \le \frac{(1+q)q^m}{(1-q)^2} l_0. \quad (10)$$
Замечание 1 (необходимость). Условие 2) диагонального преобладания матрицы Гессе является также и необходимым условием сходимости.

Достаточно привести 1 пример с условием $q > 1$, в котором итерация (6) расходится:

$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_1x_2, f_{x_1}(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2, f_{x_2}(x_1, x_2) = 2x_2 + 3x_1$.

Стационарная точка $(\overline{x_1}, \overline{x_2}) = (0,0)$, $f_{x_1x_1}(\overline{x_1}, \overline{x_2}) = f_{x_1x_1}(\overline{x_1}, \overline{x_2}) = 2$, $f_{x_1x_2}(\overline{x_1}, \overline{x_2}) = f_{x_2x_1}(\overline{x_1}, \overline{x_2}) = 3,\ q = \frac{3}{2} > 1$.

Согласно (*):

$$\begin{cases} \delta x_1^{m+1} = -\frac{f_{x_1x_2}(\overline{x_1},\overline{x_2})\delta x_2^m}{f_{x_1x_1}(\overline{x_1}+\delta x_1^m,\overline{x_2}+\delta x_2^m)} + O(\alpha|\delta x^m|^2) = -\frac{3}{2}\delta x_2^m \\ \delta x_2^{m+1} = -\frac{f_{x_2x_1}(\overline{x_1},\overline{x_2})\delta x_1^m}{f_{x_2x_2}(\overline{x_1}+\delta x_1^m,\overline{x_2}+\delta x_2^m)} + O(\alpha|\delta x^m|^2) = -\frac{3}{2}\delta x_1^m \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \delta x_1^{m+1} = \frac{9}{4}\delta x_1^{m-1} + O(\alpha|\delta x^m|^2) \\ \delta x_2^{m+1} = \frac{9}{4}\delta x_2^{m-1} + O(\alpha|\delta x^m|^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} |\delta x_1^{m+1}| = \frac{9}{4}|\delta x_1^{m-1}| + O(|\delta x^m|^2) \\ |\delta x_2^{m+1}| = \frac{9}{4}|\delta x_2^{m-1}| + O(|\delta x^m|^2) \end{cases}, m = 2,4,6,\dots$$

$$\begin{cases} |\delta x_1^{m}| = \frac{9}{4}|\delta x_1^{m-2}| + O(|\delta x^{m-1}|^2) \\ |\delta x_1^{m}| = \frac{9}{4}|\delta x_1^{m-2}| + O(|\delta x^{m-1}|^2) \end{cases}, m = 2,4,6,\dots$$

Откуда видно, что во всех чётных и нечётных итерациях каждый раз удаляются от стационарной точки, т.е. итерация расходится.

Замечание 2. Формула (*) выполняется локально, т.е. условия Т.1 должны выполняться обязательно в окрестности стационарной точки. Так как условия Т.1 выполняются абсолютно во всей области $A \subset R^n$, то они выполнены и локально в точке $(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}) \in A$.

Замечание 3. Определение равномерной невырожденности матрицы приведено в [3]. Оно обеспечивает взаимно однозначное отображение окрестности стационарной точки и поля градиента (стационарная точка – особая точка поля градиента) в каждой итерации (6) – теорема об обратной функции [1]. Если итерация задаётся формулой $\delta x^{m+1} = A\delta x^m$ – аналогом формулы (*), где A линейный оператор, и A - сжимающее отображение, т.е. $|\delta x^{m+1}| \le q|\delta x^m| < |\delta x^m|$ (что обеспечивается условиями 2) и 3) Т.1), то по теореме о неподвижной точке в метрических пространствах [4] сжимающее отображение имеет единственное решение. Таким образом, единственность решения итерации (6) доказана.

Замечание 4. Сходимость (6) выполнена даже при разных значениях $\frac{M_{1,i}}{M_{2,i}} = q_i < 1, i = \overline{1,n}$. Если по всем переменным $i = \overline{1,n}$ в итерации (6) недиагональные элементы матрицы Гессе $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \equiv 0,\ j, i = \overline{1,n}, j \ne i$. В этом случае скорость сходимости (6) не линейная, а квадратичная.

В качестве экстремальной задачи, решённой численно, рассмотрим [1]:

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 + x_1 - 2x_3 \to extr$.

Запишем градиент и матрицу Гесса для функции $f(x_1, x_2, x_3)$:
$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 + 1, 2x_2 - x_1, 2x_3 - 2)$.

$H_{i,j}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$. Условия теоремы 1 выполнены:

$|H_{1,1}| = 2 > |H_{1,2}| + |H_{1,3}| = 1 + 0 = 1, M_{11} = 1, M_{21} = 2, q_1 = \frac{M_{11}}{M_{21}} = \frac{1}{2} < 1,$
$|H_{2,2}| = 2 > |H_{2,1}| + |H_{2,3}| = 1 + 0 = 1, M_{12} = 1, M_{22} = 2, q_2 = \frac{M_{12}}{M_{22}} = \frac{1}{2} < 1,$
$|H_{3,3}| = 2 > |H_{3,1}| + |H_{3,2}| = 0 + 0 = 0, M_{13} = 0, M_{23} = 2, q_3 = \frac{M_{13}}{M_{23}} = 0 < 1, q = max\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right\} = \frac{1}{2}$.

Запишем итерацию по формуле (6):

$$\begin{cases} x_1^{m+1} = x_1^m - \frac{(2x_1^m - x_2^m + 1)}{2}, \\ x_2^{m+1} = x_2^m - \frac{(2x_2^m - x_1^{m+1})}{2}, \\ x_3^{m+1} = x_3^m - \frac{(2x_3^m - 2)}{2} = 1 \end{cases}$$

Из (10) необходимое число итераций $N \geq \ln\left(\frac{|\delta x^m|}{|\delta x^0|}\left(\frac{1-q}{1+q}\right)\right) \Big/ \ln q = \ln\left(\frac{|\delta x^0|}{|\delta x^m|}\left(\frac{1+q}{1-q}\right)\right) \Big/ \ln 1/q$ (11)

$$N \geq \ln\left(\frac{|\delta x^m|}{l_0}\left(\frac{(1-q)^2}{1+q}\right)\right) \Big/ \ln q = \ln\left(\frac{l_0}{|\delta x^m|}\left(\frac{1+q}{(1-q)^2}\right)\right) \Big/ \ln 1/q \qquad (12)$$

Выберем $|\delta x^m| = 10^{-15}, |\delta x^0| = 10^2, N = \ln(10^{17} * 3) \big/ \ln 2 = 58$ итераций.

Глава 2. **Интерполяция функций и производных.**

Лекция 4. Постановка интерполяционной задачи. Интерполяционный многочлен Лагранжа.

Рассмотрим задачу интерполяции многочленами наименьшей степени n $P_n(x)$ функции $y(x)$ на произвольной сетке $\overline{\omega} = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}$, принимающей заданные узловые значения $\{y(a) = y_0,\ y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2, \ldots, y(x_n) = y_n\}$. Рассмотрим условия, при которых данная задача имеет единственное решение. Запишем задачу в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \cdots + a_{n-1}x_0^{n-1} + a_nx_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \cdots + a_{n-1}x_1^{n-1} + a_nx_1^n = y_1 \\ a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_{n-1}x_2^{n-1} + a_nx_2^n = y_2 \\ \dots \\ a_0 + a_1x_{n-1} + a_2x_{n-1}^2 + \cdots + a_{n-1}x_{n-1}^{n-1} + a_nx_{n-1}^n = y_{n-1} \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \cdots + a_{n-1}x_n^{n-1} + a_nx_n^n = y_n \end{cases} \quad (1)$$

Или в матричном виде:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \dots & x_{n-1}^{n-1} & x_{n-1}^n \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{vmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} \quad (2)$$

Система n линейных неоднородных уравнений с n неизвестными разрешима тогда и только тогда, когда $\det(A) \neq 0$, в этом случае $rang(A) = rang(\bar{A}) = n$ (ранги матрицы и расширенной матрицы системы совпадают). Обозначим $\det(A) = \Delta(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$ – Вандермонда определитель:

$$\Delta(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \dots & x_{n-1}^{n-1} & x_{n-1}^n \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 - x_0 & x_0^2 - x_0^2 & \dots & x_0^{n-1} - x_0^{n-1} & x_0^n - x_0^n \\ 1 & x_1 - x_0 & x_1^2 - x_1x_0 & \dots & x_1^{n-1} - x_1^{n-2}x_0 & x_1^n - x_1^{n-1}x_0 \\ 1 & x_2 - x_0 & x_2^2 - x_2x_0 & \dots & x_2^{n-1} - x_2^{n-2}x_0 & x_2^n - x_2^{n-1}x_0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n-1} - x_0 & x_{n-1}^2 - x_{n-1}x_0 & \dots & x_{n-1}^{n-1} - x_{n-1}^{n-2}x_0 & x_{n-1}^n - x_{n-1}^{n-1}x_0 \\ 1 & x_n - x_0 & x_n^2 - x_nx_0 & \dots & x_n^{n-1} - x_n^{n-2}x_0 & x_n^n - x_n^{n-1}x_0 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & x_1^2 - x_1x_0 & \dots & x_1^{n-1} - x_1^{n-2}x_0 & x_1^n - x_1^{n-1}x_0 \\ 1 & x_2 - x_0 & x_2^2 - x_2x_0 & \dots & x_2^{n-1} - x_2^{n-2}x_0 & x_2^n - x_2^{n-1}x_0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n-1} - x_0 & x_{n-1}^2 - x_{n-1}x_0 & \dots & x_{n-1}^{n-1} - x_{n-1}^{n-2}x_0 & x_{n-1}^n - x_{n-1}^{n-1}x_0 \\ 1 & x_n - x_0 & x_n^2 - x_nx_0 & \dots & x_n^{n-1} - x_n^{n-2}x_0 & x_n^n - x_n^{n-1}x_0 \end{vmatrix} =$$

$$(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)\dots(x_n - x_0) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \dots & x_{n-1}^{n-1} \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = (x_1 - x_0)(x_2 -$$

$x_0) \ldots (x_n - x_0)\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)$

$\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) = \cdots = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) \ldots (x_n - x_0)(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \ldots (x_n - x_1) \ldots (x_n - x_{n-1}) = \prod_{n \geq i > j \geq 0}^{n} (x_i - x_j)$ (3)

Таким образом, если все узлы интерполяции x_i и x_j попарно различны, то определитель Вандермонда не равен нулю, т.е. интерполяционная задача (1) имеет единственное решение.
Замечание:
Благодаря единственности решения интерполяционной задачи после приведения подобных слагаемых интерполяционный многочлен будет задан единственным образом, независимо от метода его построения (методом Лагранжа или методом Ньютона или ещё каким – то другим методом).

Интерполяционный многочлен Лагранжа.

Рассмотрим задачу интерполяции многочленами наименьшей степени $L_n(x)$ функции $y(x)$ на произвольной сетке $\overline{\omega} = \{a = x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}$, принимающей заданные узловые значения $\{y(a) = y_1, y(x_2) = y_2, \ldots, y(x_n) = y_n\}$. Данная задача имеет единственное решение.

Решение поставленной задачи для многочлена наименьшей степени $n - 1$, называемым интерполяционным многочленом Лагранжа, можно указать в явном виде:
$L_n(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \Phi_i(x)$; где координаты функции $\Phi_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} = \begin{cases} 1, x = x_i \\ 0, x = x_k \in \overline{\omega}(x_k \neq x_i) \end{cases}$ (1)
Действительно, если $x = x_i$ в произведении $\prod_{j=1, j \neq i}^{n} \frac{(x_i - x_j)}{(x_i - x_j)}$ $n - 1$ попарно одинаковых множителей в числителе и знаменателе дроби, т.е. $\Phi_i(x_i) = 1$. С другой стороны, $\Phi_i(x_k) = \prod_{j=1, j \neq i}^{n} \frac{(x_k - x_j)}{(x_i - x_j)} = 0$, так как $j \neq i$, но $k \in \{j = \overline{1, n}, j \neq i\}$ и $x_k - x_k = 0$ единственный множитель в числителе дроби $\prod_{j=1, j \neq i}^{n} \frac{(x_k - x_j)}{(x_i - x_j)}$ её обнуляющий.

При построении многочлена Лагранжа с помощью формул удобно (экономично) не исходное определение в виде формулы (1), а рекуррентная интерполяционная формула Лагранжа:
$L_1(x) = y_1, L_n(x) = L_{n-1}(x) + (y_n - L_{n-1}(x_n)) \frac{\omega_{n-1}(x)}{\omega_{n-1}(x_n)}$ (2)
Где: $\omega_n(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)$
Доказательство формулы (2) проведём по индукции:
1) Пусть формула (2) справедлива для всех многочленов степени не выше, чем k
$n = \overline{2, k}$, т.е.

$$L_n(x) = L_{n-1}(x) + \left(y_n - L_{n-1}(x_n)\right)\frac{\omega_{n-1}(x)}{\omega_{n-1}(x_n)}, L_n(x_i) = y_i, i = \overline{1,n}$$

2) $n = k+1,\ L_{k+1}(x) = L_k(x) + \left(y_{k+1} - L_k(x_{k+1})\right)\frac{\omega_k(x)}{\omega_k(x_{k+1})}$

$L_{k+1}(x_i) = L_k(x_i) + \left(y_{k+1} - L_k(x_{k+1})\right)\frac{\omega_k(x_i)}{\omega_k(x_{k+1})} = L_k(x_i) + \left(y_{k+1} - L_k(x_{k+1})\right)\frac{0}{\omega_k(x_{k+1})} = L_k(x_i) = y_i, i = \overline{1,k},$ по 1)

$L_{k+1}(x_{k+1}) = L_k(x_{k+1}) + \left(y_{k+1} - L_k(x_{k+1})\right)\frac{\omega_k(x_{k+1})}{\omega_k(x_{k+1})} = L_k(x_{k+1}) + \left(y_{k+1} - L_k(x_{k+1})\right) = y_{k+1}$

То есть справедливо $L_{k+1}(x_i) = y_i, i = \overline{1,k+1}$. Что и требовалось (по теореме единственности интерполяционной задачи).

Пример:

Построить интерполяционный многочлен Лагранжа при $n = 3$.

$x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$

$y_1 = 3, y_2 = 2, y_3 = 5$

Воспользуемся формулой (2):

$L_1(x) = y_1 = 3, L_2(x) = L_1(x) + \left(y_2 - L_1(x_2)\right)\frac{\omega_1(x)}{\omega_1(x_2)} = 3 + (2-3)\frac{(x-(-1))}{0-(-1)} = 3 - (x+1) = 2 - x$

$L_3(x) = L_2(x) + \left(y_3 - L_2(x_3)\right)\frac{\omega_2(x)}{\omega_2(x_3)} = 2 - x + \left(5 - (2-1)\right)\frac{(x-(-1))(x-0)}{(1-(-1))(1-0)} = 2 - x + \frac{4(x+1)x}{2} = 2x^2 + x + 2$

Ответ: $L_3(x) = 2x^2 + x + 2$

В силу единственности решения интерполяционной задачи будем рассматривать интерполяционный многочлен Лагранжа $L_n(x)$ степени $n-1$ для интерполяции неизвестной функции $y(x)$.

Теорема 1. (формула невязки интерполяционного многочлена). Пусть функция $y(x) \in C^n(a,b)$, интерполируется сеткой $\overline{\omega} = \{a = x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}$ с узловыми значениями $y(x_i) = y_i$. Тогда $\exists \xi \in (a,b)$, что для невязки интерполяции справедлива формула:

$R_n(x) = L_n(x) - y(x) = \frac{y^{(n)}(\xi)}{n!}\omega_n(x)$, где: $\omega_n(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i), x \in (a,b)$.

Доказательство.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$\Delta_n(z) = L_n(x) - y(z) - A\omega_n(z)$ (3)

где A – пока произвольная константа. В силу постановки задачи интерполяции $L_n(x_i) = y(x_i)$ и $\omega_n(x_i) = 0,\ i = \overline{1,n}$. Тогда $\Delta_n(x_i) = y_i - y_i - A * 0 = 0,\ i = \overline{1,n}$.

Потребуем подбором константы A, чтобы число $x \in (a,b)$ было корнем вспомогательной функции:

$$\Delta_n(x) = L_n(x) - y(x) - A\omega_n(x) = 0 \quad (4)$$

Таким образом, функция $\Delta_n(z)$ имеет $n+1$ корень, обозначим её корни $x_i^0 = \{a = x_1, x_2, \dots, x_n = b, x\}, i = \overline{1, n+1}$. По построению $\Delta_n(z)$ и по условию теоремы $\Delta_n(z) \in C^{(n)}(a,b)$. По теореме Ролля между каждой парой $(x_i^0, x_{i+1}^0), i = \overline{1,n}$ соседних корней $\Delta_n(z)$ существует корень первой производной $\Delta_n'(x_i^1) = 0, x_i^1 \in (x_i^0, x_{i+1}^0), i = \overline{1,n}$. Следовательно, $x_i^1 \in (a,b), i = \overline{1,n}$. Повторяя рассуждения для второй производной найдутся $\Delta_n^{(2)}(x_i^2) = 0, x_i^2 \in (x_i^1, x_{i+1}^1), x_i^2 \in (a,b), i = \overline{1, n-1}$ ($n-1$ корень). Тогда, для производной порядка n найдётся ровно 1 корень $\Delta^{(n)}(x_i^n) = 0, x_1^n \in (a,b)$. Обозначим $\xi = x_1^n \in (a,b)$.

Дифференцируя формулу (3) непосредственно n раз, получим:

$$\Delta^{(n)}(\xi) = L^{(n)}(\xi) - y^{(n)}(\xi) - An! = 0 \Leftrightarrow$$

$$y^{(n)}(\xi) = An!, \qquad A = \frac{y^{(n)}(\xi)}{n!}, \qquad \xi \in (a,b)$$

Из формулы (4) получим

$$\Delta_n(x) = L_n(x) - y(x) - \frac{y^{(n)}(\xi)}{n!}\omega_n(x) = 0 \Leftrightarrow L_n(x) - y(x) = \frac{y^{(n)}(\xi)}{n!}\omega_n(x), \quad \xi, x \in (a,b) \tag{5}$$

Что и требовалось доказать. Отметим, что формула (5) абсолютно точна.

Норма Чебышева погрешности аппроксимации на равномерной сетке.

В силу формулы (5) имеем $|\Delta_n(x)| = |L_n(x) - y(x)| = \frac{|y^{(n)}(\xi)|}{n!}|\omega_n(x)|, \;\; \xi, x \in (a,b) \Rightarrow$

$$\|\Delta_n\|_C = \max_{x\in[a,b]}|\Delta_n(x)| = \max_{x\in[a,b]}|L_n(x) - y(x)| \le \frac{\max\limits_{\xi\in[a,b]}|y^{(n)}(\xi)|}{n!}\max_{x\in[a,b]}|\omega_n(x)| = \frac{\|y^{(n)}\|_C}{n!}\|\omega_n\|_C \tag{6}$$

Где введено обозначение $\left\|y^{(n)}\right\|_C$ – норма Чебышева функции $y^{(n)}(x), x \in [a,b]$. Из формулы (6) видно, что сложность задачи состоит в определении $\|\omega_n\|_C$.

Сделаем замену переменных и отобразим произвольный отрезок $[a,b]$ на канонический $[-1,1]$.

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}z, z \in [-1,1], x \in [a,b], -1 \leftrightarrow a, 1 \leftrightarrow b$$

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}z_i, z_i \in [-1,1], x_i \in [a,b], \;\; x - x_i = \frac{b-a}{2}(z - z_i), \;\; i = \overline{1,n}$$

$$\|\omega_n\|_C = \max_{x\in[a,b]}\left|\prod_{i=1}^n (x - x_i)\right| = \left(\frac{b-a}{2}\right)^n \max_{z\in[-1,1]}\left|\prod_{i=1}^n (z - z_i)\right| = \left(\frac{b-a}{2}\right)^n \max_{z\in[-1,1]}|\omega_n(z)| \tag{7}$$

Рассмотрим погрешность интерполяции на равномерной сетке, в которой соседние узлы находятся равном расстоянии. Первый случай – два

узла:
$z_1=-1, z_2=1, \omega_2(z)=(z-1)(z+1)=z^2-1, \frac{d\omega_2(z)}{dz}=0 \Leftrightarrow 2z=0, \max\limits_{z\in[-1,1]}|\omega_2(z)|=|\omega_2(0)|=|-1|=1$

Тогда с учётом (6), (7) получим

$$\|\Delta_2\|_{\mathrm{C}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \max_{x\in[-a,b]}\left|\frac{d^2y(x)}{dx^2}\right| 1=\frac{(b-a)^2}{8}\left\|y^{(2)}\right\|_C \qquad (8)$$

Второй случай – три равноотстоящих узла:
$z_1=-1, z_2=0, z_3=1, \omega_3(z)=z(z^2-1), \frac{d\omega_3(z)}{dz}=0 \Leftrightarrow \quad 2z^2+z^2-1=0 \Leftrightarrow z_{1,2}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\max\limits_{z\in[-1,1]}|\omega_3(z)|=\max\{|\omega_3(z_1)|,|\omega_3(z_2)|\}=\left|\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{3}-1\right)\right|=\frac{2}{3\sqrt{3}}$

Тогда с учётом (6), (7) получим

$$\|\Delta_3\|_{\mathrm{C}} \le \frac{1}{3!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^3 \max_{x\in[-a,b]}\left|\frac{d^3y(x)}{dx^3}\right| \frac{2}{3\sqrt{3}}=\frac{(b-a)^3}{72\sqrt{3}}\left\|y^{(3)}\right\|_C \qquad (9)$$

Третий случай – четыре равноотстоящих узла:
$z_1=-1, z_2=-\frac{1}{3}, z_3=\frac{1}{3}, z_4=1,$
$\omega_4(z)=\left(z^2-\frac{1}{9}\right)(z^2-1), \quad \frac{d\omega_4(z)}{dz}=0 \Leftrightarrow 2z\left(2z^2-\frac{10}{9}\right)=0 \Leftrightarrow \ z_1=0, z_{2,3}=\pm\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\max\limits_{z\in[-1,1]}|\omega_4(z)|=\max\{|\omega_4(z_1)|,|\omega_4(z_{2,3})|\}=\max\left\{\frac{1}{9},\frac{16}{81}\right\}=\frac{16}{81}$

Тогда с учётом (6), (7) получим

$$\|\Delta_4\|_{\mathrm{C}} \le \frac{1}{4!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^4 \max_{x\in[-a,b]}\left|\frac{d^4y(x)}{dx^4}\right| \frac{16}{81}=\frac{(b-a)^4}{1944}\left\|y^{(4)}\right\|_C \qquad (10)$$

Рассмотрим пример [1,3.14.1]. Функция $f(x)$ приближается интерполяционным многочленом Лагранжа по n равноотстоящим узлам. Найти наибольшее целое p в оценке погрешности вида $\varepsilon_n \le 10^{-p}$ для случая

1) $f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(\mathrm{x}\sin t)dt, \ \ x\in[0,1], a=0, b=1, n=3.$

В данном примере переменная x – параметр под знаком интеграла. Воспользуемся формулой (9)

$$\|\Delta_3\|_{\mathrm{C}} \le \frac{1}{3!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^3 \max_{x\in[-a,b]}\left|\frac{d^3f(x)}{dx^3}\right| \frac{2}{3\sqrt{3}}=\frac{(b-a)^3}{72\sqrt{3}}\left\|f^{(3)}\right\|_C=\frac{1}{72\sqrt{3}}\left\|f^{(3)}\right\|_C$$

$\frac{df}{dx}=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi -\sin(\mathrm{x}\sin t)\sin t\,dt, \ \frac{d^2f}{dx^2}=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi -\cos\,(\mathrm{x}\sin t)(\sin t)^2dt, 0\le\frac{d^3f}{dx^3}=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(\mathrm{x}\sin t)(\sin t)^3dt, \ 1\ge x\sin t\ge 0$

$0\le\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(\mathrm{x}\sin t)(\sin t)^3dt \ \le\frac{\sin 1}{\pi}\int_0^\pi \ (\sin t)^3dt=-\frac{\sin 1}{\pi}\int_0^\pi \ 1-(\cos t)^2d\cos t \ =-\frac{\sin 1}{\pi}\left(\cos t-\frac{(\cos t)^3}{3}\right)\Big|_0^\pi=\frac{4\sin 1}{3\pi},$

$\|\Delta_3\|_C \le \frac{1}{72\sqrt{3}}\left\|f^{(3)}\right\|_C = \frac{1}{72\sqrt{3}}\frac{4\sin 1}{3\pi} = \frac{\sin 1}{54\sqrt{3}\pi} \approx 0.0028 \le 10^{-p} \Longrightarrow p = 2.$

Отметим, что более грубая оценка приводит к тому же ответу:

$\left|\frac{d^3 f(x)}{dx^3}\right| = \left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(\mathrm{x}\sin t)(\sin t)^3 dt\right| \le 1, \|\Delta_3\|_C \le \frac{1}{72\sqrt{3}}\left\|f^{(3)}\right\|_C = \frac{1}{72\sqrt{3}} \approx 0.0080 \le 10^{-p} \Longrightarrow p = 2.$

<u>Лекция 5.</u> Интерполяционный многочлен Ньютона. Разделённые и конечные разности. Их свойства.

Рассмотрим произвольную неравномерную сетку $\overline{\omega} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, y(x_1) = y_i, i = \overline{1, n}$ – называются узловыми значениями функции $y(x)$.

<u>Определение 1.</u> Разделённой разностью нулевого порядка функции $y(x)$ в узле x_k называется узловое значение y_k (строится по единственному узлу x_k).

<u>Определение 2.</u> Разделённой разностью k нулевого порядка функции $y(x)$ по узлам $\{x_1, x_2, \dots, x_{k+1}\}$ называется отношение:

$y(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) = \frac{y(x_2, \dots, x_{k+1}) - y(x_1, x_2, \dots, x_k)}{x_{k+1} - x_k}$

Аппроксимация функции одним узлом будет: $y(x) = y(x_1)$ (1)

Рассмотрим разделённую разность первого порядка с одним фиксированным x_1 и одним произвольным узлом x $y(x_1, x) = \frac{y(x) - y(x_1)}{x - x_1}$, откуда

$$y(x) = y(x_1) + (x - x_1)y(x_1, x) \qquad (2)$$

Разделённая разность второго порядка с двумя фиксированными и произвольным узлом x_1, x_2, x: $y(x_1, x_2, x) = y(x_2, x_1, x) = \frac{-y(x_2, x_1) + y(x_1, x)}{x - x_2}$, здесь использовано свойство неизменности разделённой разности относительно перестановки любой пары аргументов

$$y(x_1, x) = \frac{y(x) - y(x_1)}{x - x_1} = y(x_2, x_1) + (x - x_2)y(x_1, x_2, x), \text{ откуда}$$

$$y(x) = y(x_1) + (x - x_1)y(x_1, x_2) + (x - x_1)(x - x_2)y(x_1, x_2, x) \qquad (3)$$

Сравнение формул (1), (2), (3) показывает, что приближённую формулу аппроксимации функции можно получить, отбросив последнее слагаемое с разделённой разностью (в (3) $y(x_1, x_2, x)$), содержащей свободную переменную x, что эквивалентно в предыдущем разложении переменную x заменить на следующий узел (в (2) x на x_2). Поэтому для исходной сетки $\overline{\omega} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ получим:

$y(x) \approx y(x_1) + (x - x_1)y(x_1, x_2) + (x - x_1)(x - x_2)y(x_1, x_2, x_3) + \dots + (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1})y(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (4)

Последняя формула носит имя Исаака Ньютона.

Свойства разделённых разностей.

1) Явная формула для разделённой разности:

$$y(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{y_i}{\prod_{j=1, j\ne i}^{n+1}(x_i - x_j)} \qquad (5)$$

Доказательство проведём по индукции.

i) $n = 1, y(x_1, x_2) = \frac{y_1}{x_2 - x_1} + \frac{y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ справедливо и следует из определения разделённой разности.

ii) Предположим справедливость формулы (5) для n произвольных узлов для разделённой разности порядка $n-1$, тогда для разделённой разности порядка n для $n+1$ узла $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$ по определению имеем:

$$y(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) = \frac{y(x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) - y(x_1, x_2, \dots, x_n)}{x_{n+1} - x_1} =$$

$$\frac{1}{x_{n+1} - x_1}\left(\sum_{i=2}^{n+1} \frac{y_i}{\prod_{j=2, j\neq i}^{n+1}(x_i - x_j)} - \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{\prod_{j=1, j\neq i}^{n}(x_i - x_j)}\right) =$$

$$\frac{1}{x_{n+1} - x_1}\left(\sum_{i=2}^{n+1} \frac{y_i}{\prod_{j=1, j\neq i}^{n}(x_i - x_{j+1})} - \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{\prod_{j=1, j\neq i}^{n}(x_i - x_j)}\right) =$$

$$\frac{1}{x_{n+1} - x_1}\left(\sum_{i=2}^{n} \frac{y_i(x_i - x_1 - (x_i - x_{n+1}))}{\prod_{j=1, j\neq i}^{n+1}(x_i - x_j)} + \frac{y_{n+1}}{\prod_{j=2, j\neq i}^{n}(x_{n+1} - x_j)} + \frac{y_1}{\prod_{j=1, j\neq i}^{n}(x_1 - x_j)}\right) =$$

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{y_i}{\prod_{j=1, j\neq i}^{n+1}(x_i - x_j)} + \frac{y_{n+1}}{\prod_{j=1, j\neq i}^{n+1}(x_{n+1} - x_j)} + \frac{y_1}{\prod_{j=1, j\neq i}^{n+1}(x_1 - x_j)} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{y_i}{\prod_{j=1, j\neq i}^{n+1}(x_i - x_j)}$$

Что и требовалось доказать.

2) Из формулы (5) следует инвариантность разделённой разности относительно замены любой пары аргументов с индексами k, l, которая использовалась при выводе формулы (3).

$$y(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_l, \dots, x_n, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{y_i}{\prod_{j=1, j\neq i}^{n+1}(x_i - x_j)} =$$

$$\sum_{i=1, i\neq k, i\neq l}^{n+1} \frac{y_i}{\prod_{j=1, j\neq i}^{n+1}(x_i - x_j)} + \frac{y_k}{\prod_{j=1, j\neq i}^{n+1}(x_k - x_j)} + \frac{y_l}{\prod_{j=1, j\neq i}^{n+1}(x_l - x_j)} =$$

$$\sum_{i=1, i\neq k, i\neq l}^{n+1} \frac{y_i}{\prod_{j=1, j\neq i}^{n+1}(x_i - x_j)} + \frac{y_l}{\prod_{j=1, j\neq i}^{n+1}(x_l - x_j)} + \frac{y_k}{\prod_{j=1, j\neq i}^{n+1}(x_k - x_j)} =$$

$$y(x_1, x_2, \dots, x_l, \dots, x_k, \dots, x_n, x_{n+1})$$

3) Из формулы (5) следует свойство линейности разделённой разности, действительно:

$$\alpha y_1(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) + \beta y_2(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) = (\text{по формуле (5)}) =$$

$$\alpha \sum_{i=1}^{n+1} \frac{y_{1i}}{\prod_{j=1, j\neq i}^{n+1}(x_i - x_j)} + \beta \sum_{i=1}^{n+1} \frac{y_{2i}}{\prod_{j=1, j\neq i}^{n+1}(x_i - x_j)} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\alpha y_{1i} + \beta y_{2i}}{\prod_{j=1, j\neq i}^{n+1}(x_i - x_j)} = (\alpha y_1 + \beta y_2)(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$$

Конечные разности. Связь с разделёнными разностями.

Определение. Конечной разностью первого порядка функции $f(x)$ в точке x (обозначение $\Delta f(x)$) называется разность $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$. Конечной разностью порядка n функции $f(x)$ в точке x (обозначение $\Delta^n f(x)$) называется разность $\Delta^n f(x) = \Delta(\Delta^{n-1} f(x))$.

Замечание. Как следует из определения, при постоянном шаге сетки h, конечную разность можно определить только на равномерной сетке, в отличие от разделённой разности.

Свойства конечных разностей.

1) Линейность $\Delta^n(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha \Delta^n f_1 + \beta \Delta^n f_2$.

Доказательство проведём по индукции. Для базы индукции $n = 1$, имеем

$\Delta(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha f_1(x+h) + \beta f_2(x+h) - \alpha f_1(x) - \beta f_2(x) = \alpha\big(f_1(x+h) -$

$f_1(x)\big) + \beta\big(f_2(x+h) - f_2(x)\big) = \alpha\Delta f_1 + \beta\Delta f_2$

Пусть для произвольного $\forall k = \overline{1, n-1}$: $\Delta^k(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha\Delta^k f_1 + \beta\Delta^k f_2$. Для $k = n$:

$\Delta^n(\alpha f_1 + \beta f_2) = \Delta^{n-1}\Delta(\alpha f_1 + \beta f_2) = \Delta^{n-1}(\alpha\Delta f_1 + \beta\Delta f_2) = \Delta^{n-1}\big(\alpha\overline{f_1} + \beta\overline{f_2}\big) = \alpha\Delta^{n-1}\overline{f_1} + \beta\Delta^{n-1}\overline{f_2} = \alpha\Delta^{n-1}\Delta f_1 + \beta\Delta^{n-1}\Delta f_2 = \alpha\Delta\Delta^{n-1} f_1 + \beta\Delta\Delta^{n-1} f_2 = \alpha\Delta^n f_1 + \beta\Delta^n f_2$. Доказано.

2) На равномерной сетке верно:

$\Delta^n f(x_1) = h^n n!\, f(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}), x_{i+1} = x_i + h, i = \overline{1, n}$. Доказательство проведём по индукции.

Для базы индукции $n = 1$, имеем

$\Delta f = h1!\, f(x_1, x_2) = h\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = h\frac{f(x_2) - f(x_1)}{h} = f(x_2) - f(x_1)$ – верно.

Пусть для произвольного $\forall k = \overline{1, n-1}$: $\Delta^k f = h^k k!\, f(x_1, x_2, \ldots, x_{k+1})$. Для $k = n$:

$k = \overline{1, n}$: $\Delta^n f(x_1) = \Delta\Delta^{n-1} f(x_1) = \Delta h^{n-1}(n-1)!\, f(x_1, \ldots, x_n) = h^{n-1}(n-1)!\Delta f(x_1, \ldots, x_n) = h^{n-1}(n-1)!\,\big(f(x_1 + h, \ldots, x_n + h) - f(x_1, \ldots, x_n)\big) = h^{n-1}(n-1)!\, nh\frac{\big(f(x_2, \ldots, x_{n+1}) - f(x_1, \ldots, x_n)\big)}{nh} = h^n n!\frac{\big(f(x_2, \ldots, x_{n+1}) - f(x_1, \ldots, x_n)\big)}{(x_{n+1} - x_1)} = h^n n!\, f(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1})$ – утверждение доказано.

Из последней формулы имеем $f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\Delta^{n-1} f(x_1)}{h^{n-1}(n-1)!}$

3) Полином Ньютона на равномерной сетке.

Учитывая свойство 2), получим

$y(x) = y(x_1) + (x - x_1)y(x_1, x_2) + (x - x_1)(x - x_2)y(x_1, x_2, x_3) + \cdots + (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1})y(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \cdots = y(x_1) + \frac{(x - x_1)}{h}\frac{\Delta y(x_1)}{1!} + \frac{(x - x_1)}{h}\frac{(x - x_2)}{h}\frac{\Delta^2 y(x_1)}{2!} + \cdots + \frac{(x - x_1)}{h}\frac{(x - x_2)}{h}\ldots\frac{(x - x_{n-1})}{h}\frac{\Delta^{n-1} y(x_1)}{(n-1)!} + \cdots = y(x_1) + \vartheta\Delta y(x_1) + \vartheta(\vartheta + 1)\frac{\Delta^2 y(x_1)}{2!} + \cdots + \vartheta(\vartheta + 1)(\vartheta + n - 2)\frac{\Delta^{n-1} y(x_1)}{(n-1)!} + \cdots, \vartheta = \frac{(x - x_1)}{h}$

В силу единственности решения интерполяционной задачи будем рассматривать интерполяционный многочлен Лагранжа $L_n(x)$ степени $n-1$ для интерполяции неизвестной функции $y(x)$.

Лекция 6. Интерполяционный многочлен Чебышева.

Определение. Свойства. Многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля.

1) Рекуррентное соотношение.

Интерполяционный многочлен Чебышева 1 рода (обозначение $T_n(x)$)

$$T_0(x) \equiv 1, T_1(x) = x, T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \quad (1)$$

Интерполяционный многочлен Чебышева 2 рода (обозначение $U_n(x)$)

$$U_0(x) \equiv 1, U_1(x) = 2x, U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x)$$

Пользуясь формулой (1), найдём несколько первых интерполяционных многочленов Чебышева

$T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1, T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 4x^3 - 3x, T_4(x) = 2xT_3(x) - T_2(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$

$U_2(x) = 2xU_1(x) - U_0(x) = 4x^2 - 1, U_3(x) = 2xU_2(x) - U_1(x) = 8x^3 - 4x, U_4(x) = 2xU_3(x) - U_2(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1$

В дальнейшем мы рассматриваем интерполяционный многочлен Чебышева 1 рода.

Из рекуррентной формулы (1) следует, что многочлены Чебышева 1 и 2 рода имеют степень равную n.

2) Тригонометрическая форма

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)), n \geq 0 \qquad (2)$$

Покажем эквивалентность формул (2) и (1). Действительно

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \Leftrightarrow \cos(n \arccos(x)) = \\ = 2x \cos\big((n-1) \arccos(x)\big) - \cos((n-2) \arccos(x))$$

$y = \arccos(x), \cos(ny) = 2 \cos y \cos((n-1)y) - \cos\big((n-2)y\big) \Leftrightarrow$
$\cos(ny) + \cos\big((n-2)y\big) = \cos\big((n-1)y + y\big) + \cos\big((n-1)y - y\big) = 2 \cos y \cos((n-1)y)$

Если $x \in [-1,1], y \in [0, \pi] \Longrightarrow |T_n(x)| = |\cos(n \arccos(x))| \leq 1$.

3) Разностное уравнение. Решение рекуррентного уравнения $T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$ ищем в виде $T_n(x) = C\lambda^n$. Тогда подставляя в (1), получим характеристическое уравнение

$$\lambda^2 = 2x\lambda - 1 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2x\lambda + 1 = 0, \lambda_{1,2} = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2-4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2-1}$$

$$T_n(x) = C_1(x - \sqrt{x^2-1})^n + C_2(x + \sqrt{x^2-1})^n$$

Последняя формула должна удовлетворять начальным условиям при $n = 0,1$

$$\begin{cases} T_0(x) = C_1(x - \sqrt{x^2-1})^0 + C_2(x + \sqrt{x^2-1})^0 = C_1 + C_2 = 1 \\ T_1(x) = C_1(x - \sqrt{x^2-1})^1 + C_2(x + \sqrt{x^2-1})^1 = x \Leftrightarrow (C_2 - C_1)\sqrt{x^2-1} = 0 \Leftrightarrow C_2 = \end{cases}$$

$$T_n(x) = \frac{1}{2}(x - \sqrt{x^2-1})^n + \frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2-1})^n \qquad (3)$$

4) Многочлены чётного порядка являются чётными функциями, а нечётного порядка нечётными функциями. Действительно

$T_{2k}(-x) = \frac{1}{2}\big((-x - \sqrt{x^2-1})^{2k} + (-x + \sqrt{x^2-1})^{2k}\big) = \frac{1}{2}\big((x + \sqrt{x^2-1})^{2k} + (x - \sqrt{x^2-1})^{2k}\big) = T_{2k}(x)$

$T_{2k+1}(-x) = \frac{1}{2}\big((-x - \sqrt{x^2-1})^{2k+1} + (-x + \sqrt{x^2-1})^{2k+1}\big) = \frac{1}{2}\Big(-\big(x + \sqrt{x^2-1}\big)^{2k+1} - (x - \sqrt{x^2-1})^{2k+1}\Big) = -T_{2k+1}(x)$

5) Коэффициент в $T_n(x)$ при старшем члене x^n равен $a_0 = 2^{n-1}$. Действительно

$n = 1, T_2(x) = 2x^2 - 1, a_0 = 2^{2-1} = 2$. Пусть старший коэффициент в $T_n(x)$ равен $a_0 = 2^{n-1}$

$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) = 2x(2^{n-1}x^n + \cdots) - (2^{n-2}x^{n-1} + \cdots) = 2^n x^{n+1} + P_{n-1}(x)$

Свойство доказано методом математической индукции.

6) Нули многочлена Чебышева

$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)) = 0, y = \arccos(x)\,, x = \cos y\,, \cos(ny) = 0 \Leftrightarrow$

$ny = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z,$

$y = \frac{\pi + 2\pi k}{2n}, k \in Z, x \in [-1,1], y \in [0,\pi] \Leftrightarrow$

$$y_k = \pi \frac{2k-1}{2n}, k = 1,2,\dots,n \Leftrightarrow x_k = \cos\left(\pi\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\right) \quad (4)$$

7) Точки экстремума многочлена Чебышева.

$|T_n(x)| = |\cos(n \arccos(x))| = 1, n \arccos(x_k) = \pi k,$

$0 \le \arccos(x_k) \le \frac{\pi k}{n}, x_k = \cos\left(\frac{\pi k}{n}\right), k = \overline{0,n} \quad T_n(x_k) = \cos(n \arccos(x_k)) =$

$$= \cos\left(n \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi k}{n}\right)\right)\right) = \cos(\pi k) = (-1)^k,\ k = \overline{0,n} \quad (5)$$

8) <u>Определение.</u> Приведенным многочленом Чебышева 1 рода называется многочлен

$\overline{T_n(x)} = T_n(x) 2^{1-n} = 2^{1-n} \cos(n \arccos(x)) = x^n + \cdots \Longrightarrow$

$$\overline{a_n} = 2^{1-n} a_n = 1, x \in [-1,1] \quad (6)$$

Старший коэффициент у приведенного многочлена Чебышева первого рода равен 1, как следует из свойства 5). Нули приведенного многочлена совпадают с нулями многочлена Чебышева

$x_k = \cos\left(\pi\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\right), k = \overline{1,n}.$

Точки экстремума

$\overline{T_n(x)} = 2^{1-n} \cos(n \arccos(x_k)) = 2^{1-n} \cos\left(n \arccos\left(\frac{\pi k}{n}\right)\right) = 2^{1-n} \cos(\pi k) = 2^{1-n}(-1)^k,\ k = \overline{0,n}$

9) Теорема (Чебышев). Среди всех многочленов степени n на отрезке [-1,1] со старшими коэффициентами равными единице наименее уклоняются от нуля (т.е. имеют минимальную равномерную норму) являются приведенные многочлены Чебышева 1 рода.

Доказательство. Проведём от противного. Требуется доказать, что

$$\min_{a_1,a_2,\dots,a_n}\left(\max_{x\in[-1,1]} |P_n(x)|\right) = \min_{a_1,a_2,\dots,a_n}\left(\max_{x\in[-1,1]} |x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n|\right) = \max_{x\in[-1,1]} \left|\overline{T_n(x)}\right| = 2^{1-n} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

Предположим, что существует многочлен $\overline{P_n(x)} = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ степени n со старшим коэффициентом равным единице на отрезке [-1,1] и нормой меньше, чем 2^{1-n}. $\left\|\overline{P_n(x)}\right\|_C < 2^{1-n}$. Но тогда и в точках экстремума приведенного многочлена Чебышева также выполнено неравенство $\left|\overline{P_n(x_k)}\right| \le \left\|\overline{P_n(x)}\right\|_C = \max_{x\in[-1,1]} |P_n(x_k)| < 2^{1-n} = \left|\overline{T_n(x_k)}\right|, x_k = \cos\left(\frac{\pi k}{n}\right),\ k = \overline{0,n}$. Рассмотрим разность двух многочленов $Q(x) = \overline{T_n(x)} - \overline{P_n(x)} = b_1 x^{n-1} + \cdots = P_{n-1}(x)$ представляющую собой многочлен степени $n-1$ по построению обоих многочленов с единичным старшим коэффициентом. Тогда

$Q(x_k) = \overline{T_n(x_k)} - \overline{P_n(x_k)},\ signQ(x_k) = sign\left(\overline{T_n(x_k)} - \overline{P_n(x_k)}\right) =$
$sign\left(\overline{T_n(x_k)}\right) = (-1)^k, k = \overline{0,n}.$

Многочлен $Q(x)$ как разность двух многочленов является непрерывной функцией, при изменении $x = -1, x = 1$ знак $Q(x)$ меняется с $+1$ $x_0 = 1$ до -1 $x_n = -1$ n раз, следовательно, по теореме Вейерштрасса $Q(x)$ имеет на интервале $(-1,1)$ n корней. Другими словами, $Q(x)$ это многочлен степени n. Полученное противоречие ($Q(x)$ не может иметь одновременно степень n и $n-1$) доказывает, что $\left\|\overline{P_n(x)}\right\|_C \geq \left\|\overline{T_n(x)}\right\|_C = 2^{1-n}$ приведенный многочлен Чебышева первого рода имеет наименьшую равномерную норму среди всех многочленов степени n и старшим коэффициентом равным 1 на отрезке $[-1,1]$ или наименее уклоняется от нуля. Доказательство завершено.

10) В качестве узлов сетки аппроксимационного многочлена Лагранжа можно выбрать корни многочлена Чебышева на отрезке $[a,b]$. Тогда разность искомой функции и многочлена Лагранжа в благоприятном случае представляет собой многочлен, наименее уклоняющийся от нуля. Проведём оценку погрешности аппроксимации в случае отрезков $[-1,1]$ и $[a,b]$. По формуле Лагранжа на сетке $\omega_{n+1} = \{z_1, \dots, z_n\}$ узла погрешность интерполяции равна

$$\Delta_n = \|y(x) - L_n(x)\|_C \leq \frac{\|y^{(n)}\|_C}{n!}\|\omega_n\|_C =$$

$$= \frac{\|y^{(n)}\|_C}{n!}\left\|\prod_{i=1}^{n}(z - z_i)\right\|_C, z, z_i \in [-1,1], i = \overline{1,n} \qquad (7)$$

$$\Delta_n = \|y(x) - L_n(x)\|_C \leq \frac{\|y^{(n)}\|_C}{n!}\|\omega_n\|_C =$$

$$= \frac{\|y^{(n)}\|_C}{n!}\left\|\prod_{i=1}^{n}(x - x_i)\right\|_C, x, x_i \in [a,b], i = \overline{1,n}$$

В общем случае для произвольного отрезка $[a,b]$ нужно сделать линейную замену переменных, взаимно однозначно отображающую отрезки в друг друга

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}z, z = -1 \leftrightarrow x = a, z = 1 \leftrightarrow x = b,$$

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}z_i, z_i \in [-1,1], x_i \in [a,b], i = \overline{1,n} \qquad (8)$$

$$x - x_i = \left(\frac{b-a}{2}\right)(z - z_i), z_i \in [-1,1], x_i \in [a,b], i = \overline{1,n}$$

$$\Delta_n = \|y(x) - L_n(x)\|_C \leq \frac{\|y^{(n)}\|_C}{n!}\left\|\prod_{i=1}^{n}(x - x_i)\right\|_C =$$

$$= \frac{\|y^{(n)}\|_C}{n!}\left\|\prod_{i=1}^{n}(z - z_i)\right\|_C\left(\frac{b-a}{2}\right)^n \leq \frac{\|y^{(n)}\|_C}{n!}2^{1-n}\left(\frac{b-a}{2}\right)^n = \frac{\|y^{(n)}\|_C}{n!}\frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}},$$

$$\prod_{i=1}^{n}(z - z_i) = z^n + Q_{n-1}(z),\ z_i = \cos\left(\pi\left(\frac{2i-1}{2n}\right)\right), i = \overline{1,n},$$

Используя формулу (8), получим координаты узлов Чебышева на произвольном отрезке

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}z_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\left(\pi\left(\frac{2i-1}{2n}\right)\right), i = \overline{1,n} \qquad (9)$$

Получим формулу приведенного многочлена Чебышева на произвольном отрезке $[a, b]$ с единичным старшим коэффициентом $z = \frac{2x-a-b}{b-a}$,

$T_n(z) = 2^{n-1}\overline{T_n(z)} = 2^{n-1}\overline{T_n\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right)}$,

$\overline{T_n(x)} = (x - x_1) \dots (x - x_n) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^n (z - z_1) \dots (z - z_n) =$

$= \left(\frac{b-a}{2}\right)^n \overline{T_n(z)} = \frac{(b-a)^n}{2^{n-1}2^n} T_n(z) = \frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}} T_n\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right)$ (10)

Рассмотрим пример [1, № 4.17]. Функция $f(x) = \sin(2x)$ приближается многочленом Лагранжа на отрезке [0,2] по чебышевским узлам $x_i = 1 + \cos\left(\pi\frac{2i-1}{12}\right), i = \overline{1,6}\ (n = 6)$. Найти наибольшее целое p в оценке погрешности вида $\varepsilon_0 \le \frac{1}{3}10^{-p}$.

Воспользуемся формулой

$\Delta_n = \|y(x) - L_n(x)\|_C \le \frac{\|y^{(n)}\|_C}{n!}\frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}}, n = 6, \left\|y^{(6)}\right\|_C = \|-2^6 \sin 2x\|_C = 2^6, a = 0, b = 2 \ge \frac{\pi}{2}$

$\Delta_6 \le \frac{\|y^{(6)}\|_C}{6!}\frac{(2-0)^6}{2^{2*6-1}} = \frac{2^{2*6}}{6!2^{2*6-1}} = \frac{2}{720} \le \frac{1}{3}10^{-p} \Leftrightarrow \frac{1}{120} \le \frac{1}{3}10^{-p} \Rightarrow p = 2$

<u>Лекция 7.</u> Интерполяция функций кубическими сплайнами. Метод прогонки.

Сплайн в переводе с английского означает гибкое лекало. На практике использовали металлическую линейку – сплайн при вычерчивании линий сложной кривизны, концы которой оставляли свободными. В МСС доказано, что свободное состояние сплайна является однородным ОДУ 4 порядка $y^{(4)}(x) = 0, x \in [a, b], y^{(2)}(a) = y^{(2)}(b) -$, последнее условие соответствует свободным (ненапряжённым) концам линейки. Решение ОДУ очевидно $y(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$.

Рассмотрим произвольную (неравномерную) сетку из $n + 1$ узлов $\overline{\omega} = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b\}$ с узловыми значениями интерполируемой функции $y(x_i) = y_i, i = \overline{0, n}$. На каждом интервале $x \in [x_{i-1}, x_i], i = \overline{1, n}$ строим кубический сплайн $y(x_i) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3, x \in [x_{i-1}, x_i], i = \overline{1, n}$.

Обозначим $h_i = x_i - x_{i-1}, i = \overline{1, n}$. Выполнены условия непрерывности:

1) $y_i(x_{i-1}) = a_i, i = \overline{1, n}, a_{n+1} = y_{n+1}(x_n = b) = y_n(x_n) =$
$= a_n + b_n h_n + c_n {h_n}^2 + d_n {h_n}^3 = y_n,$ (1)
$n + 1$ условий.

2) непрерывность функции в смежных узлах
$y_i(x_i) = a_i + b_i h_i + c_i {h_i}^2 + d_i {h_i}^3 = y_{i+1}(x_i) = a_{i+1}, i = \overline{1, n-1},$ (2)
$n - 1$ условий.

3) непрерывность первой производной в смежных узлах
$y_i'(x_i) = b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 = y_{i+1}'(x_i) = b_{i+1},, i = \overline{1, n-1},$ (3)
$n - 1$ условий.

4) непрерывность второй производной в смежных узлах

$y_i''(x_i) = 2c_i + 6d_ih_i = y_{i+1}''(x_i) = 2c_{i+1},, i = \overline{1, n-1},$ (4)
$n-1$ условий.

5) условия свободных концов линейки

$y_1''(x_0 = a) = 2c_1 = y_n''(x_n = b) = 2c_n + 6d_nh_n = 0 \Leftrightarrow$
$c_1 = 0, c_n = -3d_nh_n$
2 условия.

Всего $4n$ неизвестных коэффициентов и $4n = n + 1 + 3(n-1) + 2$ условий, т.е. система $4n$ линейных неоднородных уравнений.

Из формулы (4) выразим $d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}, i = \overline{1, n-1}, d_n = -\frac{c_n}{3h_n}$ (5)

Подставим (5) в (3) $h_i(c_i + c_{i+1}) = y_{i+1}'(x_i) = b_{i+1} - b_i,\ i = \overline{1, n-1}$ (6)

В (2) подставим $d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}$ и выразим

$b_i = \frac{a_{i+1} - a_i}{h_i} - c_ih_i - d_ih_i^2 = \frac{a_{i+1} - a_i}{h_i} - \frac{(2c_i + c_{i+1})h_i}{3} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{(2c_i + c_{i+1})h_i}{3}, i = \overline{1, n-1}$ (7)

$b_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{h_n} - \frac{(2c_n + c_{n+1})h_n}{3} = \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} - \frac{2c_nh_n}{3}$

В (7) формально заменим индекс $i \to i + 1$, получим

$b_{i+1} = \frac{a_{i+2} - a_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{(2c_{i+1} + c_{i+2})h_{i+1}}{3}$ (8)

(7) и (8) подставим в (6)

$h_i(c_i + c_{i+1}) = \frac{a_{i+2} - a_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{a_{i+1} - a_i}{h_i} + \frac{(2c_i + c_{i+1})h_i}{3} - \frac{(2c_{i+1} + c_{i+2})h_{i+1}}{3} \Leftrightarrow$

$\frac{h_ic_i + h_{i+1}c_{i+2} + 2c_{i+1}(h_i + h_{i+1})}{3} = \frac{a_{i+2} - a_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{a_{i+1} - a_i}{h_i} \Leftrightarrow$

$3\left(\frac{a_{i+2} - a_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{a_{i+1} - a_i}{h_i}\right) = h_ic_i + h_{i+1}c_{i+2} + 2c_{i+1}(h_i + h_{i+1})$

Понизим индекс на 1 в последнем уравнении, получим относительно неизвестных коэффициентов c_i, $i = \overline{2, n}$ трёх диагональную матрицу системы.

$3\left(\frac{a_{i+1} - a_i}{h_i} - \frac{a_i - a_{i-1}}{h_{i-1}}\right) = h_{i-1}c_{i-1} + h_ic_{i+1} + 2c_i(h_i + h_{i-1})$ (9)

и имеет смысл лишь при $i = \overline{2, n}$.

$3\left(\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{y_{i-1} - y_{i-2}}{h_{i-1}}\right) = h_{i-1}c_{i-1} + h_ic_{i+1} + 2c_i(h_i + h_{i-1}), i = \overline{2, n}$

$c_1 = c_{n+1} = 0$

$y_i(x_{i-1}) = a_i, i = \overline{1, n+1},$ (10)

Уравнения (5), (9), (7), (10) решают поставленную задачу. Уравнение (9) решается методом прогонки. Для кубического сплайна справедливо

Утверждение (экстремальные свойства кубического сплайна). Рассмотрим функционал среди дважды дифференцируемых функций и дважды гладких составных сплайнов

$I(u) = \int_a^b \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx\ , I(u - S_3) = \int_a^b \left(\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{d^2S_3}{dx^2}\right)^2 dx \geq 0,$

$\frac{d^2S_3}{dx^2}(a) = \frac{d^2S_3}{dx^2}(b) = 0.$

$S_3(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$
Составим разность
$I(u - S_3) - I(u) + I(S_3) = \int_a^b \left(\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2S_3}{dx^2}\right)^2 - 2\frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^2S_3}{dx^2} - \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2S_3}{dx^2}\right)^2\right)dx = 2\int_a^b \left(\left(\frac{d^2S_3}{dx^2}\right)^2 - \frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^2S_3}{dx^2}\right)dx = 2K, K = \int_a^b \frac{d^2S_3}{dx^2}\left(\frac{d^2S_3}{dx^2} - \frac{d^2u}{dx^2}\right)dx = \frac{d^2S_3}{dx^2}\left(\frac{d^2S_3}{dx^2} - \frac{d^2u}{dx^2}\right)\Big|_a^b - \int_a^b \frac{d^3S_3}{dx^3}\left(\frac{dS_3}{dx} - \frac{du}{dx}\right)dx = \frac{d^3S_3}{dx^3}(S_3 - u)\Big|_a^b + \int_a^b \frac{d^4S_3}{dx^4}(S_3 - u)dx = -12D * 0 + 0 = 0$ так как $S_3(a) = u(a), S_3(b) = u(b)$ – любая интерполяционная функция проходит через заданные узловые значения, а четвёртая производная от кубического сплайна равна нулю. В итоге получим $I(u - S_3) - I(u) + I(S_3) = 0 \Leftrightarrow I(u) - I(S_3) = I(u - S_3) \geq 0 \Leftrightarrow I(u) \geq I(S_3)$, т.е. среди всех возможных интерполяционных функций именно кубический сплайн доставляет минимум функционалу $I(u) =$
$= \int_a^b \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx$. Для составного сплайна после суммирования
$I(u - S_3) - I(u) + I(S_3) = \sum_{i=1}^{n}\left(I(u_i - S_{3i}) - I(u_i) + I(S_{3i})\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d^2S_{3i}}{dx^2}\left(\frac{d^2S_{3i}}{dx^2} - \frac{d^2u_i}{dx^2}\right)\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} = \frac{d^2S_{3i}}{dx^2}\left(\frac{d^2S_{3i}}{dx^2} - \frac{d^2u_i}{dx^2}\right)\Big|_a^{x_1} + \frac{d^2S_{3i}}{dx^2}\left(\frac{d^2S_{3i}}{dx^2} - \frac{d^2u_i}{dx^2}\right)\Big|_{x_1}^{x_2} + \dots + \frac{d^2S_{3i}}{dx^2}\left(\frac{d^2S_{3i}}{dx^2} - \frac{d^2u_i}{dx^2}\right)\Big|_{x_{n-2}}^{x_{n-1}} + \frac{d^2S_{3i}}{dx^2}\left(\frac{d^2S_{3i}}{dx^2} - \frac{d^2u_i}{dx^2}\right)\Big|_{x_{n-1}}^{b} = \frac{d^2S_{3i}}{dx^2}\left(\frac{d^2S_{3n}}{dx^2} - \frac{d^2u_n}{dx^2}\right)(b) - \frac{d^2S_{31}}{dx^2}\left(\frac{d^2S_{31}}{dx^2} - \frac{d^2u_1}{dx^2}\right)(a) = 0 - 0 = 0$
в силу непрерывности второй производной функции и сплайна в $\mathrm{n} - 1$ смежных точках. Т.е. экстремальное свойство выполняется и для составного сплайна.

Метод прогонки
Решается уравнение вида
$A_k x_{k-1} - C_k x_k + B_k x_{k+1} = F_k, k = \overline{1, n-1}$ (11)
Предположим, что на границах справедливы формулы
$x_0 = \lambda_0 x_1 + \nu_0, x_n = \lambda_n x_{n-1} + \nu_n$ (12)
И справедлива итерационная формула решающая (11)
$x_k = \lambda_k x_{k+1} + \nu_k, k = \overline{0, n-1}$ (13)
Из (13) получим $x_{k-1} = \lambda_{k-1} x_k + \nu_{k-1}$, которое подставим в (11), имеем
$A_k(\lambda_{k-1} x_k + \nu_{k-1}) - C_k x_k + B_k x_{k+1} = F_k$, откуда
$x_k = \frac{-B_k x_{k+1}}{A_k \lambda_{k-1} - C_k} + \frac{F_k - A_k \nu_{k-1}}{A_k \lambda_{k-1} - C_k},\ k = \overline{1, n-1}$
Т.е. $\lambda_k = \frac{B_k}{C_k - A_k \lambda_{k-1}}, \nu_k = \frac{F_k - A_k \nu_{k-1}}{A_k \lambda_{k-1} - C_k} = \frac{A_k \nu_{k-1} - F_k}{C_k - A_k \lambda_{k-1}}, k = \overline{1, n-1}$ (14)
формулы прогонки вперёд, где λ_0, ν_0 определяются формулой (12) (из начальных условий).
По формуле (13)и (12), $x_{n-1} = \lambda_{n-1} x_n + \nu_{n-1}, x_n = \lambda_n x_{n-1} + \nu_n \Leftrightarrow x_n = \lambda_n(\lambda_{n-1} x_n + \nu_{n-1}) + \nu_n$
Откуда $x_n = \frac{\lambda_n \nu_{n-1} + \nu_n}{1 - \lambda_{n-1}\lambda_n}, \lambda_n, \nu_n$ определяют из начальных условий (12)

$x_k = \lambda_k x_{k+1} + \nu_k, k = \overline{0, n-1}$ (15)
Формулы (15) называются прогонкой назад. Запишем условие (по Самарскому А.А.) устойчивости численной схемы (11).
$|C_k| \geq |A_k| + |B_k| \geq |A_k| > 0, |\lambda_0| < 1, |\lambda_n| \leq 1$ (16)
Из (9) и (12) получим $\lambda_0 = \lambda_n = 0, \nu_0 = \nu_n = 0$
Рассмотрим пример интерполяции функции с равномерной сеткой
$y_k = \cos(ih), i = \overline{0, n}, h = \frac{(b-a)}{n}, b = 2\pi, a = 0, n = 100,$
$h = h_i = h_{i-1} = 0.01.$
Из (9) получим
$y_i + y_{i-2} - 2y_{i-1} = \frac{h^2}{3}(c_{i-1} + c_{i+1} + 4c_i) \Leftrightarrow c_{i-1} + c_{i+1} + 4c_i =$
$= \frac{3}{h^2}(y_i + y_{i-2} - 2y_{i-1}), i = \overline{2, n}$ (17)
$c_1 = c_{n+1} = 0$
Прогонка вперёд $A_i = B_i = 1, C_i = -4,$
$F_i = \frac{3}{h^2}\big(\cos(ih) + \cos\big((i-2)h\big) - 2\cos\big((i-1)h\big)\big),\ i = \overline{2, n}.$

Отметим, что (16) условие монотонности численной схемы (её устойчивости) выполнено $4 > 1 + 1 = 2, 0 < 1.$
Используем формулы вперёд
$\lambda_i = \frac{B_i}{C_i - A_i\lambda_{i-1}}, \nu_i = \frac{A_i\nu_{i-1} - F_i}{C_i - A_i\lambda_{i-1}}, i = \overline{2, n}, \lambda_1 = \nu_1 = 0, \lambda_{n+1} = \nu_{n+1} = 0$
$x_{n+1} = \frac{\lambda_{n+1}\nu_{n+1} + \nu_n}{1 - \lambda_n\lambda_{n+1}} = c_{n+1} = 0, x_1 = c_1 = 0, x(i) = c(i), i = \overline{1, n+1}$

Глава 3. Интерполяция интегралов. Квадратурные интегральные формулы.

Лекция 8. Метод неопределённых коэффициентов. Формулы Котесса – Ньютона.

Интегральной квадратурной формулой называется формула замены определённого интеграла линейным оператором относительно интегрируемой функции:
$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n C_i f(x_i) + R(f), \quad (1)$$
где $x \in [a, b], C_i, i = \overline{1, n}$ – веса квадратурной формулы, $x_i, i = \overline{1, n}$ – узлы квадратурной формулы, $R(f)$ – остаток (погрешность) квадратурной формулы. В силу линейности операций интеграла и суммы относительно функции $f(x)$ их разность, остаток $R(f)$, также является линейным оператором
$$R(f) = \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^n C_i f(x_i)$$
Задача построения квадратурной формулы заключается в таком подборе весовых коэффициентов C_i (а в случае квадратурных формул Гаусса и узлов

x_i), чтобы максимально уменьшить норму невязки в каком – либо функциональном пространстве.

В методе неопределённых коэффициентов требуют равенства нулю нормы невязки для всех полиномов, начиная со степени $n = 0,1,2,\dots$ (в силу линейности остатка достаточно потребовать отсутствие невязки для мономов вида $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$).

Наиболее употребляемые нормы в численных методах:

$\|R\|_C = \max\limits_{x\in[a,b]}\left|R\big(f(x)\big)\right|$ – норма Чебышева в пространстве равномерно – непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций,

$\|R\|_{L_2} = \left(\int_a^b R^2\big(f(x)\big)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$ – норма в пространстве функций $L_2[a, b]$ интегрируемых с квадратом.

В методе неопределённых коэффициентов требуют равенства нулю невязки для всех полиномов, начиная со степени $n = 0,1,2,\dots$ (в силу линейности остатка достаточно потребовать отсутствие невязки для мономов вида $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$). Получаем систему n линейных уравнений относительно

$C_i, i = \overline{1,n}, R(1) = 0, R(x) = 0, R(x^2) = 0, \dots, R(x^{n-1}) = 0$ (2)

Для простоты квадратурные формулы строим на отрезке $[-1,1]$, затем переходим к произвольному отрезку $[a, b]$ с помощью замены переменных:

$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}z, z \in [-1,1] \Leftrightarrow$

$x \in [a, b], dx = dz\frac{(b-a)}{2}, \int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{2}\int_{-1}^{1} f\big(x(z)\big)dz.$

Наиболее употребительные квадратурные формулы:

1) Формула центральных прямоугольников (по одному узлу $n = 1$)

$\int_{-1}^{1} f(z)dz = Cf(0)$, в силу условий (2) получаем 1 уравнение:

$f(z) \equiv 1,$

$\int_{-1}^{1} f(z)dz = \int_{-1}^{1} dz = 2 = C * 1 \Leftrightarrow \int_{-1}^{1} f(z)dz = 2f(0) \Leftrightarrow \int_a^b f(x)dx = (b - a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ (3)

Построим составную формулу по системе равноотстоящих узлов $x_i, i = \overline{1,n}$ – с шагом $\frac{b-a}{n} = h = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}, i = \overline{1, n-1}$:

$\int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right)\right) = \frac{(b-a)}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} f\left(a + h\left(i - \frac{1}{2}\right)\right)\right)$ (4)

Для оценки погрешности центральной формулы прямоугольников разложим $f(x)$ в ряд Тейлора с центром в середине отрезка

$c = \frac{a+b}{2}, y = x - c, dy = dx, x\Big|_a^b \Leftrightarrow y\Big|_{-(b-a)/2}^{(b-a)/2}$:

$f(x) = f(c) + (x - c)f'(c) + \frac{(x-c)^2}{2}f''(c) + \frac{(x-c)^3}{6}f^{(3)}(c) +$

$+ \frac{(x-c)^4}{24}f^{(4)}(c) + O((x - c)^5)$

$\int_a^b f(x)dx = \int_{-(b-a)/2}^{(b-a)/2} \Bigg(f(c) + yf'(c) + \frac{(y)^2}{2} f''(c) + \frac{(y)^3}{6} f^{(3)}(c) +$

$\frac{(y)^4}{24} f^{(4)}(c) + O((y)^5) \Bigg) dy = f(c)y + \frac{(y)^2}{2} f'(c) + \frac{(y)^3}{6} f''(c) + \frac{(y)^4}{24} f^{(3)}(c) +$

$\frac{(y)^5}{120} f^{(4)}(c) + O((y)^6) \Big|_{-(b-a)/2}^{(b-a)/2} = (b-a)f(c) + \frac{(b-a)^3}{24} f''(c) +$

$\frac{(b-a)^5}{1920} f^{(4)}(c) + O\left(\frac{(b-a)^6}{64}\right)$ (5)

Сравнивая формулы (3) и (5), видно, что

$|R(f)| = \frac{(b-a)^3}{24} |f''(c)| + O((b-a)^5) = \frac{h^3}{24} |f''(c)| + O(h^5)$ (6)

Для составной формулы (4) получим оценку погрешности

$|R(f)| \le n \left(\frac{h^3}{24} |f''(c)| + O(h^5) \right) = \frac{(b-a)^3}{24n^2} M + O(h^4) = O(h^2)$, где $M = \max\limits_{x \in [a,b]} |f''(c)|$, т.е. составная формула (4) имеет второй порядок аппроксимации $O(h^2)$.

2) Формула трапеций (по 2 узлам $\mathrm{n} = 2$):

$\int_{-1}^1 f(z)dz = C_1 f(-1) + C_2 f(1)$ в силу условий (2) получаем 2 уравнения:

$f(z) \equiv 1, \int_{-1}^1 f(z)dz = \int_{-1}^1 dz = 2 = C_1 + C_2$

$f(z) = z, \int_{-1}^1 f(z)dz = \int_{-1}^1 zdz = 0 = -1 * C_1 + 1 * C_2 \Leftrightarrow C_1 = C_2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\int_{-1}^1 f(z)dz = \frac{f(-1)+f(1)}{2}$

$\int_a^b f(x)dx = \left(\frac{b-a}{2}\right)(f(a) + f(b)) = \frac{h}{2}(f(a) + f(b))$ (7)

соответствует формуле площади трапеции.

Шаблон для составной формулы трапеций

$\frac{(1,2,\ldots,2,1)}{2} = \left(\frac{1}{2}, 1, \ldots, 1, \frac{1}{2}\right)$

Составная формула трапеций

$\int_a^b f(x)dx = h\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(a + h * i)\right)$ (8)

Оценим погрешность формулы (7), разлагая функцию $f(x)$ в ряд Тейлора с центром $x = c$ в точках $x = a$ и $x = b$:

$x = a, y = (x-a) \Big|_0^{b-a} = (x-a) \Big|_0^h$

$f\binom{b}{a} = \left(f(c) + yf'(c) + \frac{(y)^2}{2} f''(c) + \frac{(y)^3}{6} f^{(3)}(c) \right) \begin{pmatrix} \frac{h}{2} \\ -\frac{h}{2} \end{pmatrix} + O(h^4)$, откуда

$\frac{h}{2}\big(f(a) + f(b)\big) = \frac{h}{2}\left(2f(c) + \frac{(h)^2}{4} f''(c) + O(h^3) \right) =$

$= hf(c) + \frac{(h)^3}{8} f''(c) + O(h^4)$

Из формулы (5) имеем

$hf(c) = \int_a^b f(x)dx - \frac{(b-a)^3}{24} f''(c) + O(h^5), R(f) = \int_a^b f(x)dx - \frac{h}{2}\big(f(a) + f(b)\big) = hf(c) + \frac{(h)^3}{24} f''(c) - \left(hf(c) + \frac{(h)^3}{8} f''(c) + O(h^4)\right) = -\frac{(h)^3}{12} f''(c) + O(h^4) \Rightarrow |R(f)| = \frac{h^3}{12}|f''(c)| + O(h^4)$ (9)

Для погрешности составной формулы имеем

$$|R(f)| \le n\left(\frac{h^3}{12}\max_{x\in[a,b]}|f''(c)| + O(h^4)\right) = \frac{(b-a)h^2}{12}\max_{x\in[a,b]}|f''(c)| + O(h^3)$$

откуда формула трапеций имеет второй порядок аппроксимации $O(h^2)$.

3) Формула Симпсона (по 3 узлам $n = 3$).

$\int_{-1}^1 f(z)dz = C_1 f(-1) + C_2 f(0) + C_3 f(1)$

$f(z) \equiv 1, \int_{-1}^1 f(z)dz = \int_{-1}^1 dz = 2 = C_1 + C_2 + C_3$

$f(z) = z, \int_{-1}^1 f(z)dz = \int_{-1}^1 zdz = 0 = -1 * C_1 + 0 * C_2 + 1 * C_3 \iff C_1 = C_3$

$f(z) = z^2, \int_{-1}^1 f(z)dz = \int_{-1}^1 z^2 dz = \frac{2}{3} = 1 * C_1 + 0 * C_2 + 1 * C_3 \iff C_1 = C_3 = \frac{1}{3}, C_2 = \frac{4}{3}$

$\int_{-1}^1 f(z)dz = \frac{1}{3}\big(f(-1) + 4f(0) + f(1)\big) \iff$

$$\int_a^b f(x)dx = \left(\frac{b-a}{2}\right)\frac{\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)}{3} =$$

$$= \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) \qquad (10)$$

Шаблон для составной формулы Симпсона: $\frac{(1,4,2,4,2,\ldots,2,4,1)}{3}$ (используется чётное число интервалов $n = 2k$). Получаем составную формулу Симпсона из (10):

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4\sum_{i=1}^k f\big(a + h(2i-1)\big) + 2\sum_{i=1}^{k-1} f\big(a + h(2i)\big) + f(b)\right) = \frac{(b-a)}{3n}\left(f(a) + 4\sum_{i=1}^k f\big(a + h(2i-1)\big) + 2\sum_{i=1}^{k-1} f\big(a + h(2i)\big) + f(b)\right)$$
(11)

Оценим погрешность формулы (10), учтём $b - a = 2h$:

$$\int_{c-h}^{c+h} f(x)dx = 2hf(c) + \frac{h^3}{3} f''(c) + \frac{(b-a)^5}{1920} f^{(4)}(c) =$$

$$= 2hf(c) + \frac{h^3}{3} f''(c) + O(h^5)$$

$\frac{f(c-h)+f(c+h)-2f(c)}{h^2} = f''(c) + \frac{h^2}{12} f^{(4)}(c) + O(h^4)$, из последних двух формул получим:

$$\int_{c-h}^{c+h} f(x)dx = 2hf(c) + \frac{h^3}{3}\left(\frac{f(c-h)+f(c+h)-2f(c)}{h^2} - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(c) + O(h^4)\right) + \frac{h^5}{60} f^{(4)}(c) + O(h^5)$$

$$\int_{c-h}^{c+h} f(x)dx = \frac{h}{3}\big(f(c-h) + f(c+h) + 4f(c)\big) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(c) + o(h^5)$$

$R(f) = \int_{c-h}^{c+h} f(x)dx - \frac{h}{3}\big(f(c-h) + f(c+h) + 4f(c)\big)$

$R(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(c) + O(h^5)$

Погрешность составной формулы $\left(k = \frac{n}{2} = \frac{b-a}{2h}\right)$:

$|R(f)| \le k\left(\frac{h^5}{90} \max_{x\in[a,b]} \left|f^{(4)}(c)\right| + O(h^5)\right) =$

$= \frac{b-a}{2h}\left(\frac{h^5}{90} \max_{x\in[a,b]} \left|f^{(4)}(c)\right| + O(h^5)\right) = h^4\left(\frac{b-a}{180}\right) \max_{x\in[a,b]} \left|f^{(4)}(c)\right| + O(h^4)$

Т.е. порядок погрешности составной формулы равен 4.

<u>Лекция 9.</u> *Квадратурные формулы Гаусса*

Среди всех квадратурных интегральных формул особое место занимают квадратурные формулы Гаусса. При одном и том же объеме алгебраических преобразований с помощью них можно получить квадратуры точные для многочленов степени $2n-1$, по сравнению другими методами (точные для многочленов степени n).

Рассмотрим задачу: при заданном числе узлов n построить для вычисления интегралов вида $I(f) = \int_a^b p(x)f(x)dx$ с весовой функцией $p(x)$ всюду положительной квадратурную формулу Гаусса $S_n(f) = \sum_{i=1}^{n} C_i f(x_i)$ точную для многочленов максимально высокой степени.

В данной постановке имеется $2n$ неизвестных – весовые коэффициенты $C_i, i = \overline{1,n}$ и узлы квадратуры $x_i, i = \overline{1,n}$. Используя $2n$ условий, можно попытаться построить квадратуру точную для многочленов степени $2n-1$. Построить квадратуру точную для многочленов более высокой степени $2n$ уже невозможно. Например, для многочлена [1].

$P_{2n}(x) = (x-x_1)^2(x-x_2)^2 \dots (x-x_n)^2,$

$0 = S_n(P_{2n}) \ne \int_a^b \int_a^b p(x)P_{2n}(x)dx > 0$

Важную роль при построении квадратурных формул Гаусса имеют многочлены, ортогональные на отрезке $[a,b]$ с весом $p(x) > 0$. Эти многочлены получают, например, ортогонализацией системе координатных функций $\{1, x, x^2, \dots, x^k, \dots\}$ при скалярном произведении

$$(f,g) = \int_a^b p(x)\, f(x)g(x)dx$$

Пусть на отрезке $[a,b]$ задана система ортогональных многочленов с весом $p(x)$: $\{1, \psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_k(x), \dots\}$. Тогда многочлен $\psi_k(x)$ степени k ортогонален с весом $p(x)$ произвольному многочлену низшей степени $P_l(x)$ при $l = 0,1,2,\dots,k-1$. Действительно, $P_l(x)$ можно единственным образом представить в виде $P_l(x) = \sum_{i=0}^{l} C_i\psi_i(x)$. И при $k \ne l$

$$(\psi_k, P_l) = \int_a^b p(x)\,\psi_k(x)\left(\sum_{i=0}^{l} C_i\psi_i(x)\right)dx =$$

$$= \sum_{i=0}^{l} C_i\left(\int_a^b p(x)\,\psi_k(x)\,\psi_i(x)\right)dx = 0$$

При решении задач используют следующие системы ортогональных многочленов:

1) Лежандра $(\Omega = [-1,1], p(x) \equiv 1)$,

2) Чебышева первого рода $\left(\Omega = [-1,1], p(x) = 1/\sqrt{1-x^2}\right)$,

3) Лаггера $(\Omega = (0,\infty), p(x) = e^{-x})$,

4) Эрмита $\left(\Omega = (-\infty,\infty), p(x) = e^{-x^2}\right)$.

При построении квадратур основной является следующая

<u>Теорема.</u> Пусть $x_1, \dots, x_n$ нули ортогонального на $[a,b]$ многочлена с весом $p(x) > 0$ многочлена $\psi_n(x)$ степени n и $S_n(f)$ – интерполяционная квадратура, построенная по этим узлам. Тогда $S_n(f)$ будет точна для многочленов степени $2n-1$.

<u>Пример 1</u>. Построить квадратурную формулу Гаусса с одним узлом для вычисления интеграла:

$$I(f) = \int_0^1 xf(x)dx$$

Построим квадратурную формулу с одним узлом $S_1(f) = Cf(x)$. Неизвестные величины – вес C и узел x. Для их определения необходимо всего два уравнения, можно решить задачу методом неопределенных коэффициентов:

1) Для функции требуем равенства интеграла $I(f)$ и квадратуры $S_1(f)$ для всех многочленов степени 0

$$I(1) = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2} = Cf(x) = C$$

2) Аналогично, для функции $f(x) = x$, $I(x) = \int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3} = \frac{1}{2}Cx \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$. Найденные величины подставляем в квадратуру.

Ответ: $I(f) = \int_0^1 xf(x)dx = \frac{1}{2}f\left(\frac{2}{3}\right)$ квадратура точна для всех многочленов не выше первой степени.

<u>Пример 2</u>. Доказать, что ортогональный многочлен степени n с весом $p(x) > 0$ на отрезке $[a,b]$ имеет ровно n различных корней на этом отрезке.

Решение: Доказательство проведём от противного. Пусть число корней ортогонального многочлена $\psi_n(x)$ равно $r < n$. Обозначим $R_r(x) = \prod_{i=1}^{r}(x - x_i)$.

Тогда $\psi_n(x) = P_{n-r}(x)\prod_{i=1}^{r}(x - x_i)$, где многочлен $P_{n-r}(x)$ не имеет корней на $[a,b]$. Тогда многочлен $Q_{n+r}(x) = \psi_n(x)R_r(x) = P_{n-r}(x)\prod_{i=1}^{r}(x - x_i)^2$ не меняет знака на $[a,b]$. Но:

$\left(R_r(x), \psi_n(x)\right) = \int_a^b p(x)\, P_{n-r}(x) \prod_{i=1}^{r} (x - x_i)^2\, dx \neq 0 \;(p(x) > 0)$

Другими словами, ортогональный многочлен $\psi_n(x)$ не ортогонален произвольному многочлену низшей степени $R_r(x), (r < n)$ на $[a, b]$. Что противоречит определению ортогонального многочлена.

Пример 3. Методом ортогонализации построить ортогональный многочлен третьей степени $\psi_3(x) = x^3 + \cdots$ на промежутке $(\Omega = (0, \infty), p(x) = e^{-x})$.

Решение: так как в скалярном произведении ортогональных полиномов $\left(\psi_n(x), \psi_m(x)\right) = \int_a^b p(x)\, \psi_n(x)\psi_m(x)dx = 0$ каждый из них определен с точностью до постоянного множителя, то положим старший коэффициент во всех ортогональных полиномах равным единице.

Возьмем по частям вспомогательный интеграл

$$\int_a^b e^{-x}x^n dx = -\int_0^\infty \frac{de^{-x}}{dx} x^n dx = -e^{-x}x^n \Big|_0^\infty + \int_0^\infty n\, e^{-x}x^{n-1}dx =$$
$$n\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx = \cdots = n! \int_0^\infty e^{-x}dx = -n!\, e^{-x}\Big|_0^\infty = n!$$

Пользуясь ортогональностью многочлена всем ортогональным многочленам низшей степени, получим условия

$$\psi_0(x) \equiv 1, \psi_1(x) = x + a \colon \left(\psi_0(x), \psi_1(x)\right) = 0 \Leftrightarrow \int_0^\infty e^{-x}(x + a)dx = 1 + a = 0, a = -1, \psi_1(x) = x - 1, \psi_2(x) = x^2 + bx + c,$$

$$\psi_2(x)\colon \begin{cases} 0 \equiv (\psi_0, \psi_2) = \int_0^\infty e^{-x}(x^2 + bx + c)dx = 2 + b + c = 0 \\ 0 \equiv (\psi_1, \psi_2) = \int_0^\infty e^{-x}(x^2 + bx + c)(x - 1)dx = 6 + 2b + c = 0 \end{cases}$$

Решая полученную систему уравнений $\begin{cases} 2 + b + c = 0 \\ 6 + 2b + c = 0 \end{cases}$, находим

$b = -4, c = 2, \psi_2(x) = x^2 - 4x + 2$

Наконец, для многочлена

$$\psi_3(x) = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3, \psi_3(x)\colon \begin{cases} 0 = (\psi_3, \psi_0) \\ 0 = (\psi_3, \psi_1) \\ 0 = (\psi_3, \psi_2) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\psi_3(x)\colon$$
$$\begin{cases} 0 = \int_0^\infty e^{-x}\,(x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3)dx = 6 + 2a_1 + a_2 + a_3 \\ 0 = \int_0^\infty e^{-x}\,(x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3)(x - 1)dx = 24 + 6a_1 + 2a_2 + a_3 \\ 0 = \int_0^\infty e^{-x}\,(x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3)(x^2 - 4x + 2)dx = 120 + 24a_1 + 6a_2 + 2a_3 \end{cases}$$

Здесь каждый нижележащий интеграл вычисляется с учетом всех вышележащих интегралов в системе.

Из последней системы уравнений

$$\begin{cases} 6 + 2a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ 24 + 6a_1 + 2a_2 + a_3 = 0 \\ 120 + 24a_1 + 6a_2 + 2a_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$a_1 = -9, a_2 = 18, a_3 = -6$

$\psi_3(x) = x^3 - 9x^2 + 18x - 6$

Запишем ответ: $\psi_0(x) \equiv 1, \psi_1(x) = x - 1, \psi_2(x) = x^2 - 4x + 2,$

$\psi_3(x) = x^3 - 9x^2 + 18x - 6$

Пример 4. Построить квадратуру Гаусса с двумя узлами для вычисления интеграла:

$$I(f) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\, f(x) dx$$

Решение: согласно указанному алгоритму, строим ортогональный многочлен второй степени на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ с весом $\mathrm{p}(x) = \cos(x)$

$P_0(x) \equiv 1$

Составим таблицу вспомогательных интегралов

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\, x dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\, x^3 dx = 0$

в силу нечетности подынтегральной функции и симметричности пределов подстановки в пределах интегрирования $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$.

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\, dx = \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2$

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\, x^2 dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d \sin x}{dx} x^2 dx =$

$= \sin(x)\, x^2 \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2x\ \sin(x)\, dx = \frac{\pi^2}{2} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d \cos x}{dx} 2x dx =$

$= \frac{\pi^2}{2} + 2x\ \cos(x) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\, dx = \frac{\pi^2}{2} - 4$

$P_1(x) = x + a$:

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\, P_0(x) P_1(x) dx = 0 \Leftrightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\, (x + a) dx =$

$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a \cos(x)\, dx = 2a = 0$

Откуда

$a = 0, P_1(x) = x, P_2(x) = x^2 + bx + c$:

$$\begin{cases} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\, P_0(x) P_1(x) dx = 0 \Leftrightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\, (x^2 + bx + c) dx = 0 \\ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\, P_1(x) P_2(x) dx = 0 \Leftrightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\, (x^2 + bx + c) x dx = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{\pi^2}{2} - 4 + 2c = 0 \\ b\left(\frac{\pi^2}{2} - 4\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow c = -\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{2} - 4\right), b = 0$$

Тогда $P_2(x) = x^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{2} - 4\right), P_2(x) = 0.$

Легко находим корни ортогонального многочлена

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{2} - 4\right)} = \pm\sqrt{\left(\frac{\pi^2}{4} - 2\right)}$$

Переходим ко второму действию алгоритма

$I(f) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\, f(x)dx = C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2)$

$C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) = C_1 f\left(-\sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 2}\right) + C_2 f\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 2}\right)$

Где весовые коэффициенты C_1, C_2 находим методом неопределенных коэффициентов.

Требуем точного равенства $I(f) = S_2(f)$ для всех многочленов нулевой и первой степени

$f(x) \equiv 1, \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\, dx = 2 = C_1 + C_2$

$f(x) = x, \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\, x dx = 0 = C_1\left(-\sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 2}\right) + C_2\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 2}\right)$

Откуда $C_1 = C_2 = 1$. Запишем

Ответ: $I(f) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\, f(x)dx = f\left(-\sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 2}\right) + f\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 2}\right)$

По теореме Гаусса полученная квадратура точна для всех многочленов степени не выше $2n - 1$.

<u>Пример 5</u>. Квадратурная формула

$S_3(f) = \frac{\pi}{3}\left(f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + f(0) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

применяется для вычисления интеграла $I(f) = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

Показать, что она точна для всех многочленов пятой степени.

Решение: Пользуясь таблицей, приведенной в параграфе для ортогональных многочленов Чебышева первого рода $\left(\Omega = [-1,1], p(x) = 1/\sqrt{1 - x^2}\right)$ можем построить многочлен Чебышева первого рода третей степени рекуррентно (так как именно они ортогональны на отрезке $[-1,1]$ с указанной весовой функцией:

$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), T_0(x) \equiv 1, T_1(x) = x, T_2(x) = 2x^2 - 1, T_3(x) = 4x^3 - 2x - x = 4x^3 - 3x$.

Или с точностью до множителя при старшей степени

$\psi_3(x) = x^3 - \frac{3}{4}x$

Найдем корни $\psi_3(x)$:

$$\psi_3(x) = x^3 - \frac{3}{4}x = 0 \Leftrightarrow x\left(x^2 - \frac{3}{4}\right) = 0, x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, x_2 = 0, x_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

В соответствии с теоремой Гаусса

$I(f) = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) + C_3 f(x_3) =$

$= C_1 f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + C_2 f(0) + C_3 f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Неизвестные веса C_1, C_2, C_3 находим методом неопределенных коэффициентов. Потребуем точности квадратурной формулы для всех многочленов степени не выше двух:

$f(x) \equiv 1, I(f) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x \Big|_{-1}^{1} = \pi = C_1 + C_2 + C_3$

$f(x) = x, I(f) = \int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0 = \frac{\sqrt{3}}{2}(C_3 - C_1)$

в силу нечетности подынтегральной функции в симметричных подстановках -1 и 1.

$f(x) = x^2, I(f) = \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^{1} \frac{-1+1+x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx + \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2} = \frac{3}{4}(C_1 + C_2)$

В первом интеграле обозначим

$x = \cos y, dx = -\sin y dy, \sqrt{1-x^2} = \sin y,\ x \Big|_{-1}^{1} \to y \Big|_{\pi}^{0},$

$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx = -\int_{-\pi}^{0} (\sin y)^2\, dy = \int_{0}^{\pi} \frac{1-\cos 2y}{2} dy =$

$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\sin 2y \Big|_{0}^{\pi} = \frac{\pi}{2}$

Решаем систему уравнений

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = \pi \\ C_3 - C_1 = 0 \\ \frac{3}{4}(C_1 + C_2) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow C_1 = C_3 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow C_2 = \frac{\pi}{3}$$

Запишем ответ: $I(f) = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{3}\left(f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + f(0) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

По теореме Гаусса данная квадратура точна для всех многочленов степени $2n - 1 = 5$.

<u>Пример 6</u>. Построить квадратурную формулу с двумя узлами для вычисления интегралов

$I(f) = \int_{0}^{\infty} e^{-x} f(x) dx = C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2)$

Решение: замечаем, что весовая функция в данном случае равна $p(x) = e^{-x}$ на области $\Omega = (0, \infty)$, что соответствует ортогональным полиномам Эрмита. Согласно примеру 3, для многочлена второй степени с двумя корнями на интервале $x \in (0, \infty)$,

$\psi_2(x) = x^2 - 4x + 2$

Находим корни квадратного трехчлена

$\psi_2(x) = x^2 - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 2, x_1 = 2 + \sqrt{2}, x_2 = 2 - \sqrt{2}$

Тогда

$I(f) = \int_{0}^{\infty} e^{-x} f(x) dx = C_1 f(2 - \sqrt{2}) + C_2 f(2 + \sqrt{2})$

Переходим к определению весовых коэффициентов (методом неопределённых коэффициентов) C_1, C_2:

Для $f(x) \equiv 1$ получим $I(f) = \int_{0}^{\infty} e^{-x} f(x) dx = 1 = C_1 + C_2$

Для $f(x) = x$ получим
$I(f) = \int_0^\infty e^{-x} f(x)dx = 1 = (2-\sqrt{2})C_1 + (2+\sqrt{2})C_2$
Решаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ (2-\sqrt{2})C_1 + (2+\sqrt{2})C_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow C_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}, C_2 = \frac{-1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$$

ответ:

$$I(f) = \int_0^\infty e^{-x} f(x)dx = \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right) f(2-\sqrt{2}) + \left(\frac{-1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right) f(2+\sqrt{2}).$$

По теореме Гаусса квадратурная формула точна для всех многочленов степени не выше 3.

Глава 4. Дифференциальные уравнения.

Лекция 10. Задача Коши.

Рассмотрим ОДУ первого порядка с непрерывной правой частью по переменным x, y – задачу Коши:

$$\begin{cases} \dot{y} = \frac{dy(x)}{dx} = f(x,y) \\ y(a) = y_a, x \in [a,b] \end{cases} \qquad (1)$$

Откуда $dy = dx \cdot f(x,y), dy = y(x+dx) - y(x) = dx \cdot f(x,y) \Leftrightarrow y(x+dx) = y(x) + dx \cdot f(x,y)$

Являются распространёнными следующие методы численного решения ОДУ с равномерным шагом:

1) Метод Эйлера ($dx = h$ – шаг итерации):

$$y(x+dx) = y(x) + hf(x,y), \qquad (2)$$

Разложим в ряд Тейлора функцию $y(x+h)$ с центром в точке x:

$$y(x+h) = y(x) + hy' + \frac{h^2}{2}y'' + O(h^3)$$

Учитывая постановку задачи (1) $y' = f(x,y), y'' = f'(x,y), \dots, y^{(n)} = f^{(n-1)}(x,y)$ получим

$$y(x+h) = y(x) + hf(x,y) + \frac{h^2}{2}f'(x,y) + O(h^3) \qquad (3)$$

Формулы (2) и (3) отличаются друг от друга на величину $\frac{h^2}{2}f'(x,y) + O(h^3)$. После n шагов интегрирования получим разность между точным решением и приближением методом ломаных Эйлера

$$|y^2(b) - y^1(b)| \le n\left(\frac{h^2}{2}\max_{x\in[a,b]}|f'(x,y)| + O(h^3)\right) =$$

$$= \frac{(b-a)\left(\frac{h^2}{2}\max_{x\in[a,b]}|f'(x,y)| + O(h^3)\right)}{h} = \frac{(b-a)h}{2} + O(h^2),$$ т.е. формула Эйлера имеет первый порядок аппроксимации.

2) Формула Рунге – Кутты 2 – го порядка

$$y(x+h) = y(x) + hf\left(x + \frac{h}{2}, y\left(x + \frac{h}{2}\right)\right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{y(x+h)-y(x)}{h}=f\left(x+\frac{h}{2},y\left(x+\frac{h}{2}\right)\right) \qquad (4)$$

Разложим все функции в ряд Тейлора с центром точке $x+\frac{h}{2}$

$$\left\{\begin{matrix} y(x+h) \\ y(x) \end{matrix}\right. = y\left(x+\frac{h}{2}\right) \pm \frac{h}{2}y'\left(x+\frac{h}{2}\right)+\frac{h^2}{8}y''\left(x+\frac{h}{2}\right) \pm \frac{h^3}{48}y^{(3)}\left(x+\frac{h}{2}\right) \qquad (5)$$

Левая часть формулы (4), используя (5) и в силу формулы (1):

$$\frac{y(x+h)-y(x)}{h}=y'\left(x+\frac{h}{2}\right)+\frac{h^2}{24}y^{(3)}\left(x+\frac{h}{2}\right)+O(h^4)=$$
$$= f\left(x+\frac{h}{2},y\left(x+\frac{h}{2}\right)\right)+\frac{h^2}{24}y^{(3)}\left(x+\frac{h}{2}\right)+O(h^4) \qquad (6)$$

Формула Рунге – Кутты 2 – го порядка (4) отличается от более точной формулы (6)

$y(x+h)=y(x)+hf\left(x+\frac{h}{2},y\left(x+\frac{h}{2}\right)\right)+\frac{h^3}{24}y^{(3)}\left(x+\frac{h}{2}\right)+O(h^5)$ на величину $\frac{h^3}{24}y^{(3)}\left(x+\frac{h}{2}\right)+O(h^5)=\frac{h^3}{24}f''\left(x+\frac{h}{2},\ y\left(x+\frac{h}{2}\right)\right)+O(h^5)$.

После n шагов интегрирования получим разность между точным решением и приближением Рунге – Кутты 2 – го порядка

$$|y^2(b)-y^1(b)|\le n\left(\frac{h^3}{24}\max_{x\in[a,b]}|f''(x,y)|+O(h^5)\right)=$$

$= \frac{(b-a)\left(\frac{h^3}{24}\max_{x\in[a,b]}|f''(x,y)|+O(h^5)\right)}{h}=\frac{(b-a)h^2}{24}\max_{x\in[a,b]}|f''(x,y)|+O(h^4)$, т.е. имеет второй порядок аппроксимации.

3) Метод Рунге – Кутты 4 – го порядка:

$y(x+h)=y(x)+h\left(\frac{k_1+2k_2+2k_3+k_4}{6}\right)$,

$k_1=f(x,y), k_2=f\left(x+\frac{h}{2},y+\frac{h}{2}k_1\right), k_3=f\left(x+\frac{h}{2},y+\frac{h}{2}k_2\right)$,

$k_4=f(x+h,y+hk_3)$ – система данных формул даёт четвёртый порядок аппроксимации.

<u>Лекция 11.</u> Аппроксимация задачи Коши для ОДУ 1 порядка. Погрешность аппроксимации.

Рассмотрим задачу Коши для ОДУ 1 порядка относительно неизвестной функции $u(x)$

$$\begin{cases} \frac{du(x)}{dx}= \\ = f(x,u), x\in[x_0,x_1], u(x)\in C^1[x_0,x_1], f(x,u)\in C([x_0,x_1]\times[c,d]), \\ u(x_0)=u_0,\ \ f'_u(x,u)\in C([x_0,x_1]\times[c,d]) \end{cases} \qquad (1)$$

Известно, что при условиях в задаче (1) её решение единственно. Сопоставим задаче (1) разностную задачу (2) на равномерной сетке с шагом h с левым шаблоном, в котором используются $n+1$ узлов левее центрального u_k:

$$\begin{cases} \frac{1}{h}\sum_{i=0}^{n} u_{k-i}a_{k-i} = \sum_{i=0}^{n} f_{k-i}b_{k-i}\,, k \geq n \\ x_{k-i} = x_0 + (k-i)h, u(x_0) = u_0, u_{k-1} = u(x_{k-1}) \end{cases} \qquad (2)$$

В системе уравнений (2) a_{k-i}, b_{k-i} суть квадратурные коэффициенты. Точность аппроксимации начальных условий не вызывает сомнений. Поэтому проведём аппроксимацию первого уравнения, разлагая в ряд узловые значения u_{k-i}, f_{k-i} относительно
центрального узла x_k:

$u_{k-i} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-ih)^l}{l!}\frac{d^l u_k}{dx^l}, f_{k-i} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-ih)^l}{l!}\frac{d^l f_k}{dx^l}$, подставим разложения в первое уравнение (2)

$\frac{1}{h}\sum_{i=0}^{n} a_{k-i}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-ih)^l}{l!}\frac{d^l u_k}{dx^l} = \sum_{i=0}^{n} b_{k-i}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-ih)^l}{l!}\frac{d^l f_k}{dx^l}, k \geq n,$ преобразуем последнее равенство

$$\frac{1}{h}\sum_{l=0}^{\infty} h^l \frac{d^l u_k}{dx^l}\sum_{i=0}^{n} \frac{(-i)^l}{l!}a_{k-i} = \sum_{l=0}^{\infty} h^{l-1} \frac{d^l u_k}{dx^l}\sum_{i=0}^{n} \frac{(-i)^l}{l!}a_{k-i} =$$
$$= \sum_{l=0}^{\infty} h^l \frac{d^l f_k}{dx^l}\sum_{i=0}^{n} \frac{(-i)^l}{l!}b_{k-i}, k \geq n$$

Проектируя первое уравнение (1) на каждый узел, получим

$$\frac{d^l u_k}{dx^l} = \frac{d^{l-1} f_k}{dx^{l-1}},\ \sum_{l=0}^{\infty} h^{l-1} \frac{d^l u_k}{dx^l}\sum_{i=0}^{n} \frac{(-i)^l}{l!}a_{k-i} =$$
$$= \sum_{l=0}^{\infty} h^l \frac{d^l f_k}{dx^l}\sum_{i=0}^{n} \frac{(-i)^l}{l!}b_{k-i}, k \geq n$$

В правой части последней формулы сделаем подстановку

$$l\Big|_0^{\infty} = p\Big|_1^{\infty} - 1$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} h^{l-1} \frac{d^{l-1} f_k}{dx^{l-1}}\sum_{i=0}^{n} \frac{(-i)^l}{l!}a_{k-i} = \sum_{p=1}^{\infty} h^{p-1} \frac{d^{p-1} f_k}{dx^{p-1}}\sum_{i=0}^{n} \frac{(-i)^{p-1}}{(p-1)!}b_{k-i} =$$
$$= (p = l) = \sum_{l=1}^{\infty} h^{l-1} \frac{d^{l-1} f_k}{dx^{l-1}}\sum_{i=0}^{n} \frac{(-i)^{l-1}}{(l-1)!}b_{k-i} \qquad (3)$$

В последней формуле необходимо сгруппировать слагаемые при одинаковой степени h, и прежде всего при слагаемых с h^{-1}, h^0 – необходимые условия аппроксимации.

$$h^{-1}: h^{-1} \frac{d^{-1} f_k}{dx^{-1}}\sum_{i=0}^{n} \frac{(-i)^0}{0!}a_{k-i} = \frac{u_k}{h}\sum_{i=0}^{n} a_{k-i} \xrightarrow[h\to 0]{} 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} a_{k-i} = 0 \qquad (3.1)$$

иначе, в пределе при $h \to 0$ в каждом узле получаем разрыв второго рода.

$$h^0: h^0 \frac{d^0 f_k}{dx^0}\sum_{i=0}^{n} \frac{(-i)^1}{1!}a_{k-i} = -\frac{du_k}{dx}\sum_{i=0}^{n} a_{k-i}i \xrightarrow[h\to 0]{} \frac{du_k}{dx}\sum_{i=0}^{n} \frac{b_{k-i}}{0!} \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} a_{k-i}i = -\sum_{i=0}^{n} b_{k-i}, \qquad (3.2)$$

иначе, в пределе при $h \to 0$ в каждом узле получаем разрыв первого рода. Для произвольной степени h запишем разность слагаемых в формуле (3):

$$\Delta E_l = h^{l-1} \frac{d^l u_k}{dx^l}\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{(-i)^l}{l!}a_{k-i} - \sum_{i=0}^{n} \frac{(-i)^{l-1}}{(l-1)!}b_{k-i}\right) =$$
$$= h^{l-1} \frac{d^l u_k}{dx^l}(-1)^l \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{(i)^l}{l!}a_{k-i} + \frac{(i)^{l-1}}{(l-1)!}b_{k-i}\right) \qquad (4)$$

Формула (4) представляет собой невязку разностного аналога задачи Коши (2) степени h^{l-1} для левого шаблона.

<u>Определение 1.</u> Говорят, что численная задача (2) аппроксимирует

аналитическую задачу (1) с порядком p, если выполнены необходимые условия (3) и $\Delta E_l = 0, l = \overline{2, p}, \Delta E_{p+1} \neq 0$.

Получим формулу аппроксимации для правого шаблона, используя формулу аппроксимации для левого шаблона, формально меняя $i \to -i$, получим:

$\Delta E_l = h^{l-1} \frac{d^l u_k}{dx^l} (-1)^l \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{(-i)^l}{l!} a_{k+i} + \frac{(-i)^{l-1}}{(l-1)!} b_{k+i} \right) =$

$= h^{l-1} \frac{d^l u_k}{dx^l} (-1)^l \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{(i)^l}{l!} a_{k+i} - \frac{(i)^{l-1}}{(l-1)!} b_{k+i} \right)$ (5)

Вообще говоря, в формулах (4), (5) с учётом остаточного члена ряда Тейлора в виде Лагранжа производная $\frac{d^l u_k}{dx^l} = \frac{d^{p+1} u(\xi)}{dx^{p+1}}, l = p + 1$ берётся не в $k-$м узле, а в точке $\xi \in [x_k, x_{k-n}]$.

Рассмотрим однородное разностное уравнение

$$\frac{1}{h} \sum_{i=0}^{n} u_{k-i} a_{k-i} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} u_{k-i} a_{k-i} = 0$$

Решение которого ищем в виде $u_{k-i} = C \lambda^{k-i}$, следовательно, получим характеристическое уравнение

$\sum_{i=0}^{n} a_{k-i} \lambda^{n-i} = 0$ (6)

решением которого является n комплексных корней $\lambda_j, j = \overline{1, n}$.

Определение. Говорят, что разностная схема (2) α – устойчива, если все комплексные корни характеристического уравнения (6) не превосходят по модулю 1 $|\lambda_j| \leq 1, j = \overline{1, n}$. Причём, на единичной окружности допускается расположение корней кратности один.

Корректность определения можно обосновать исходя из ограниченности решения

$|u_{k-i}| = |C| |\lambda|^i (i \to \infty) \leq M < \infty \Leftrightarrow |\lambda| \leq 1$.

Рассмотрим примеры решения задачи Коши с левым и правым шаблоном (4), (5).

<u>Пример</u> 1. Найти главный член аппроксимации на решении и исследовать устойчивость разностной схемы:

$\frac{y_{k+4} - y_k}{4h} = \frac{2f_{k+1} - f_{k+2} + 2f_{k+3}}{3}$. Применяем правый шаблон (5).

Запишем коэффициенты $a_k = -\frac{1}{4}, a_{k+4} = \frac{1}{4}, b_{k+1} = \frac{2}{3}, b_{k+2} = -\frac{1}{3}, b_{k+3} = \frac{2}{3}$, используем правый шаблон – формула (5), проверим необходимые условия:

$\sum_{i=0}^{4} a_{k+i} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0$.

$\sum_{i=0}^{4} a_{k+i} i = \sum_{i=0}^{4} b_{k+i} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} 0 + \frac{1}{4} 4 = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \right) = 1$ – тождество. Далее по (5) имеем:

$\Delta E_2 = h^1 \frac{d^2 u_k}{dx^2} \sum_{i=0}^{4} \left(\frac{(i)^2}{2!} a_{k+i} - \frac{(i)^1}{(2-1)!} b_{k+i} \right) =$

$= h \frac{d^2 u_k}{dx^2} \left(\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4} 0^2 + \frac{1}{4} 4^2 \right) - \left(\frac{2}{3} 1 - \frac{1}{3} 2 + \frac{2}{3} 3 \right) \right) = 0$

$\Delta E_3 = h^2 \frac{d^3 u_k}{dx^3} \sum_{i=0}^{4} \left(\frac{(i)^3}{3!} a_{k+i} - \frac{(i)^2}{(3-1)!} b_{k+i} \right) =$

$= h^2 \frac{d^3 u_k}{dx^3}\left(\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{4}0^3 + \frac{1}{4}4^3\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}1^2 - \frac{1}{3}2^2 + \frac{2}{3}3^2\right)\right) =$

$= h^2 \frac{d^3 u_k}{dx^3}\left(\frac{16}{6} - \frac{1}{2}\left(\frac{16}{3}\right)\right) = 0$

$\Delta E_4 = h^3 \frac{d^4 u_k}{dx^4} \sum_{i=0}^{4}\left(\frac{(i)^4}{4!} a_{k+i} - \frac{(i)^3}{(4-1)!} b_{k+i}\right) =$

$= h^3 \frac{d^4 u_k}{dx^4}\left(\frac{1}{24}\left(-\frac{1}{4}0^4 + \frac{1}{4}4^4\right) - \frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}1^3 - \frac{1}{3}2^3 + \frac{2}{3}3^3\right)\right) =$

$= h^3 \frac{d^4 u_k}{dx^4}\left(\frac{64}{24} - \frac{1}{6}\left(\frac{48}{3}\right)\right) = h^3 \frac{d^4 u_k}{dx^4}\left(\frac{8}{3} - \frac{8}{3}\right) = 0$

$\Delta E_5 = h^4 \frac{d^5 u_k}{dx^5} \sum_{i=0}^{4}\left(\frac{(i)^5}{5!} a_{k+i} - \frac{(i)^4}{(5-1)!} b_{k+i}\right) =$

$= h^4 \frac{d^5 u_k}{dx^5}\left(\frac{1}{120}\left(-\frac{1}{4}0^5 + \frac{1}{4}4^5\right) - \frac{1}{24}\left(\frac{2}{3}1^4 - \frac{1}{3}2^4 + \frac{2}{3}3^4\right)\right) =$

$= h^4 \frac{d^5 u_k}{dx^5}\left(\frac{256}{120} - \frac{1}{24}\left(\frac{148}{3}\right)\right) = h^4 \frac{d^5 u_k}{dx^5}\left(\frac{32}{15} - \frac{37}{18}\right) =$

$= h^4 \frac{d^5 u_k}{dx^5}\left(\frac{21}{15*18}\right) = \frac{7}{90} h^4 \frac{d^5 u_k}{dx^5}(\xi)$

Определим α – устойчивость схемы $\lambda^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2,3,4} = \pm 1, \pm i$. Кратность каждого корня на единичной окружности равна единице и, согласно определению, схема α – устойчива.

<u>Пример 2.</u>

Найти главный член аппроксимации на решении и исследовать устойчивость разностной схемы.

$\frac{y_k + 4y_{k-1} - 5y_{k-2}}{6h} = \frac{2f_{k-1} + f_{k-2}}{3}$. Применяем левый шаблон (4).

Запишем коэффициенты $a_k = \frac{1}{6}, a_{k-1} = \frac{4}{6}, a_{k-2} = -\frac{5}{6}, b_{k-1} = \frac{2}{3}, b_{k-2} = \frac{1}{3}$, используем левый шаблон – формула (4), проверим необходимые условия: $\sum_{i=0}^{2} a_{k-i} = \frac{1}{6} + \frac{4}{6} - \frac{5}{6} = 0$.

$\sum_{i=0}^{2} a_{k-i} i = -\sum_{i=0}^{2} b_{k-i} \Leftrightarrow \frac{1}{6}0^1 + \frac{4}{6}1^1 - \frac{5}{2}2^1 = -1 = -\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) = -1$ – тождество. Далее по (4) имеем:

$\Delta E_2 = h^1 \frac{d^2 u_k}{dx^2} \sum_{i=0}^{2}\left(\frac{(i)^2}{2!} a_{k-i} + \frac{(i)^1}{(2-1)!} b_{k-i}\right) =$

$= h \frac{d^2 u_k}{dx^2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}0^2 + \frac{4}{6}1^2 - \frac{5}{6}2^2\right) + \left(\frac{2}{3}1 + \frac{1}{3}2\right)\right) = 0$

$\Delta E_3 = h^2 \frac{d^3 u_k}{dx^3} \sum_{i=0}^{2}\left(\frac{(i)^3}{3!} a_{k-i} + \frac{(i)^2}{(3-1)!} b_{k-i}\right) =$

$= h^2 \frac{d^3 u_k}{dx^3}\left(\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}0^3 + \frac{4}{6}1^3 - \frac{5}{6}2^3\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}1^2 + \frac{1}{3}2^2\right)\right) =$

$= h^2 \frac{d^3 u_k}{dx^3}(-1 + 1) = 0$

$\Delta E_4 = h^3 \frac{d^4 u_k}{dx^4} \sum_{i=0}^{2}\left(\frac{(i)^4}{4!} a_{k-i} + \frac{(i)^3}{(4-1)!} b_{k-i}\right) =$

$= h^3 \frac{d^4 u_k}{dx^4}\left(\frac{1}{24}\left(\frac{1}{6}0^4 + \frac{4}{6}1^4 - \frac{5}{6}2^4\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}1^3 + \frac{1}{3}2^3\right)\right) =$

$= h^3 \frac{d^4 u_k}{dx^4}\left(-\frac{19}{36} + \frac{10}{18}\right) = \frac{1}{36} h^3 \frac{d^4 u_k}{dx^4}(\xi)$

Определим α – устойчивость схемы $\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-4\pm 6}{2} = 1, -5.$ Схема α – неустойчива.

Пример выполнения лабораторной работы №1 «Решение нелинейного уравнения функции одной переменной»

Решить нелинейное уравнение $f(x) = 0$ методами:

1. Половинного деления.
2. Хорд.
3. Касательных.
4. Секущих.
5. Простой итерации.

Рассмотрим пример:

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 10, a = 3, b = 4.$

А также для метода простой итерации:

$x - 1{,}2\cos\frac{x}{3} = 0.$

Метод половинного деления:

Метод половинного деления состоит в разделении отрезка $[a, b]$ пополам точкой $c = \frac{a+b}{\mathbf{2}}$. Если $f(c) \neq 0$ (что практически наиболее вероятно), то возможны два случая: либо $f(x)$ меняет знак на отрезке $[a, c]$; либо на отрезке $[c, b]$.

Выбирая в каждом случае тот из отрезков, на котором функция меняет знак, и, продолжая процесс половинного деления дальше, можно дойти до сколь угодно малого отрезка, содержащего корень уравнения.

Рассмотренный метод можно использовать как метод решения уравнения с заданной точностью. Действительно, если на каком-то этапе процесса получим отрезок $[c, c']$, содержащий корень, то, приняв приближенно $x = \frac{c+c'}{2}$, получим ошибку, не превышающую значения $\varepsilon = \frac{c-c'}{2}$.

Метод хорд:

Предположим, что на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$f(b)f''(b) > 0.$$

Последовательные приближения точного корня вычисляются по формулам:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)} \cdot (b - x_n) \\ x_0 = a \end{cases}.$$

Если условие не выполняется, а имеет место неравенство

$$f(a)f''(a) > 0,$$

то последовательные приближения вычисляются по формулам:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f(a) - f(x_n)} \cdot (a - x_n) \\ x_0 = b \end{cases}.$$

Метод касательных:

По методу касательных вычисления проводятся по формулам:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ x_0 = a \end{cases}.$$

При выполнении условия используются расчетные формулы:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ x_0 = b \end{cases}.$$

Оценка погрешности метода хорд и метода касательных может быть вычислена по формуле:

$|x^* - x_n| \le \frac{|f(x_n)|}{m_1}$, где $m_1 \le \min\limits_{[a,b]} |f'(x)|$, $x^* -$ точный корень, а x_n – приближенный корень уравнения

Метод секущих:

Метод секущих получается из метода касательных заменой $f'(x^k)$ разностным приближением:

$$f'(x^k) \approx \frac{f(x^k) - f(x^{k-1})}{(x^k - x^{k-1})}.$$

В результате получим формулу итерационного процесса:

$$x^{k+1} = x^k - \frac{x^k - x^{k-1}}{f(x^k) - f(x^{k-1})} f(x^k), k = 1,2, \ldots$$

Метод простой итерации:

Для использования этого метода исходное нелинейное уравнение записывается в виде $x = f(x)$.

Пусть известно начальное приближение корня $x = x_0$.

Подставляя это значение в правую часть уравнения получаем новое приближение: $c_1 = f(c_0)$. Подставляя каждый раз новое значение корня в правую часть уравнения, получаем последовательность значений:

$$x_{n+1} = f(x_n), n = 1,2, \ldots$$

Итерационный процесс прекращается, если результаты двух последовательных итераций близки $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$.

Достаточным условием сходимости метода простой итерации является условие $0 < |f'(x)| < 1$ на множестве действительных чисел.

Достаточным условием сходимости метода простой итерации на отрезке $[a, b]$ является условие $0 < |f'(x)| < 1, f(x_n) \in [a, b]$.

Для более точной оценки погрешности используются формулы:

$$|x^* - x_n| \le \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} |x_1 - x_0|$$

$$|x^* - x_n| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}|x_n - x_{n-1}|$$

где $\alpha = \max(|f'(x)|)$, на множестве $[a, b]$.

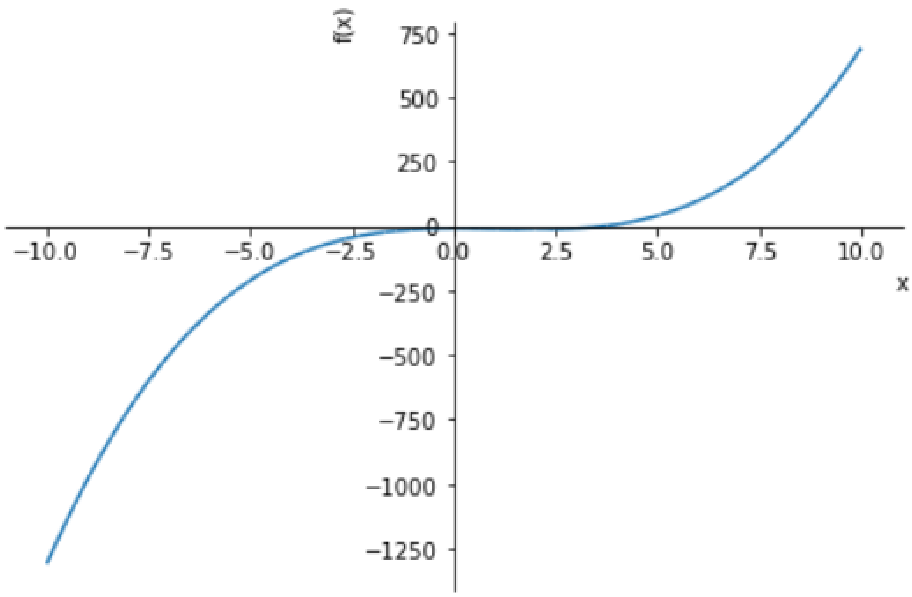
Среда реализации алгоритмов

Алгоритмы реализованы на языке программирования Python 3 с использованием библиотек SymPy и NumPy в среде разработки Jupyter Notebook.

Результат выполнения лабораторной работы

1. Построение графика функции с помощью функции plot из библиотеки matplotlib

```
from matplotlib import *
plot(x**3 - 3*x**2 - 10)
```



2. Реализация метода половинного деления

```
a = 3
b = 4
while (abs (b - a) > eps):
   c = (a + b) / 2
   if ((f(c) < 0 and f(a) < 0) or (f(c) > 0 and f(a) > 0)):
      a = c
   else:
      b = c
print ("корень f(x) = ", f(x), " : %.4f"%((a + b) / 2))
```

```
корень f(x) = x**3 – 3*x**2 – 10 : 3.7219
```

3. Реализация метода хорд

```
eps = 0.001
a = 3
b = 4
while (abs (b - a) > eps):
    c = a - ( (f(a) / (f(b) - f(a)) ) * (b - a))
    if (f(a)*f(c)) <= 0:
        b = c
    else:
        a = c
    if not (f(c) > eps):
        break
print ("корень f(x) = ", f(x), " : %.4f"%b)

корень f(x) = x**3 – 3*x**2 – 10 : 3.7219
```

4. Реализация метода касательных

```
a = 3
b = 4
h = 0.001
while (abs (b - a) > eps):
    c = b - ((f(b) * h) / (f(b + h)- f(b)))
    a = b
    b = c
print ("корень f(x) = ", f(x), " : %.4f"%b)

корень f(x) = x**3 – 3*x**2 – 10 : 3.7219
```

5. Реализация метода секущих

```
eps = 0.001
a = 3
b = 4
while (abs (b - a) > eps):
    c = b - (f(b)*(a - b)) / (f(a) - f(b))
    a = b
    b = c
print ("корень f(x) = ", f(x), " : %.4f"%b)
```

корень f(x) = x**3 – 3*x**2 – 10 : 3.7219

6. Реализация метода простой итерации

```
def f(x):
    func = log(x) - 6 + 2*x
    return (func)
dx = lambdify(x,diff(f(x)))
eps = 0.001
x0 = 1.7
x1 = f(x0)
while 1:
    x1 = f(x0)
    delta = abs(x1 - x0)
    x0 = x1
    if delta <my eps:
        break
print ("корень f(x) = ", f(x), " : %.4f"%x1)
```

корень f(x) = x – 1.2*cos(x/3) : -4.7113

* Для метода простой итерации заданием на Лабораторную работу предусмотрена другая функция, что так же отражено в реализации метода.

Пример выполнения лабораторной работы №2 «Решение систем линейных алгебраических уравнений и систем нелинейных уравнений»

Задание 1:

1) Решить заданную систему уравнений методом Гаусса с выбором главного элемента.

2) Вычислить для матрицы A обратную матрицу A^{-1}, используя метод Гаусса. Матрица A задается системой уравнений $Ax = b$:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$$

Задания 2: Дана система линейных уравнений $Ax = b$.

1) Привести систему линейных уравнений к итерационному виду.

2) Исследовать итерационную последовательность на сходимость.

3) Найти решение системы линейных уравнений методом простой итерации с точностью до $\varepsilon = 0.00001$.

4) Найти решение системы линейных уравнений методом Зейделя с точностью до $\varepsilon = 0.00001$.

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 34{,}25 & 4{,}21 & 4{,}12 \\ 1{,}12 & 41{,}49 & 1{,}52 \\ 2{,}54 & 4{,}85 & 30{,}92 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 10{,}41 \\ 20{,}43 \\ 12{,}34 \end{pmatrix}.$$

Задание 3: Решить систему уравнений с помощью метода Ньютона. Результаты получить с пятью верными знаками. Начальные приближения найти графически.

Пример:

$tg(xy + 0{,}3) = x^2; 0{,}7x^2 + 2y^2 = 1.$

Метод Гаусса:

Система из n линейных уравнений с n неизвестными вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

имеет единственное решение при условии: $\Delta_A \neq 0$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$ матрица коэффициентов a_{ij} системы.

К точным методам относится метод Гаусса с выбором главного элемента. Среди элементов a_{ij} матрицы A выберем наибольший по модулю, называемый главным элементом. Пусть им будет элемент a_{pq}. Строка с номером p, содержащая главный элемент, называется главной строкой. Далее вычисляем множители: $m_i = \frac{a_{iq}}{a_{p\,q}}$ для всех $i \neq p$. Затем преобразуем матрицу следующим образом: из каждой неглавной строки вычитаем почленно главную строку, умноженную на m_i. В результате получим матрицу, у которой все элементы q-го столбца, за исключением a_{pq}, равны нулю. Отбрасываем этот столбец и главную строку и получаем новую матрицу A_1 с меньшим на единицу числом строк и столбцов. Над матрицей A_1 повторяем аналогичные операции, после чего получаем матрицу A_2 и т. д.

Такие преобразования продолжаем до тех пор, пока не получим матрицу, содержащую одну строку, которую считаем тоже главной. Затем объединяем все главные строки, начиная с последней. После некоторой перестановки они образуют треугольную матрицу, эквивалентную исходной. На этом заканчивается этап вычислений, называемый прямым ходом. Решив систему с полученной треугольной матрицей коэффициентов, найдём последовательно значения неизвестных x_i $(i = 1,2, \dots, n)$. Этот этап вычислений называется обратным ходом.

Смысл выбора главного элемента состоит в том, чтобы сделать достаточно малым число m_i и тем самым уменьшить погрешность вычислений.

Вычисление обратной матрицы для системы линейных уравнений.

Пусть дана невырожденная матрица $A = (a_{ij})$, где $(i, j = 1,2, \dots, n)$. Для нахождения элементов обратной матрицы $A^{-1} = (x_{ij})$, где $(i, j = 1,2, \dots, n)$ воспользуемся основным соотношением: $A \cdot A^{-1} = E$, где E – единичная матрица.

Перемножая матрицы A и A^{-1}и используя равенство их матрице E, получим n систем линейных уравнений вида:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_{kj} = \delta_{ij} \ (i = 1, 2, \dots, n;\ j \text{ – фиксировано}), \text{ где } \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

Полученные n систем линейных уравнений имеют одну и ту же матрицу A и различные столбцы свободных членов. Эти системы можно решать методом Гаусса. В результате решения систем получаем единичную матрицу A.

Метод простой итерации:

Метод простой итерации даёт возможность получить последовательность приближённых значений, сходящуюся к точному решению системы.
Преобразуем систему к нормальному виду:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j + \beta_i, \qquad (i = 1,2, \dots,\ n).$$

Правая часть системы определяет отображение:

$$F: y_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j + \beta_i \qquad (i = 1,2, \dots,\ n),$$

преобразующее точку $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, n -мерного метрического пространства в точку $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ того же пространства.

Выбрав начальную точку $x^{(0)} = (x_1^{(0)},\ x_2^{(0)}, \dots,\ x_n^{(0)})$, можно построить итерационную последовательность точек n - мерного пространства: $x^{(0)}, \quad x^{(1)} = F(x^{(0)}), \dots, \quad x^{(n+1)} = F(x^{(n)}) \dots$.

Для исследования сходимости таких последовательностей используется принцип сжимающих отображений, который состоит в следующем. Если F – сжимающее отображение, определённое в полном метрическом пространстве с метрикой $\rho(x, y)$, то существует единственная неподвижная точка x^*, такая, что $x^* = F(x^*)$. При этом итерационная последовательность, $\{x_n\}$, полученная с помощью отображения F с любым начальным членом $x^{(0)}$, сходится к x^*.

Оценка расстояния между неподвижной точкой x^*отображения F и приближением $x^{(k)}$ даётся формулами:

$$\rho(x^*,\ x^{(k)}) \le \frac{\alpha^k}{1 - \alpha} \rho(x^{(0)},\ x^{(1)}),$$

$$\rho(x^*,\ x^{(k)}) \le \frac{\alpha}{1 - \alpha} \rho(x^{(k-1)},\ x^{(k)}),$$

где α – множитель, определяемый достаточными условиями сжимаемости отображения F. Значение множителя α, определяется выбором метрики, в которой проверяется сходимость последовательности значений x_i.
Рассмотрим достаточные условия сходимости итерационной последовательности $\{x_n\}$. Практически, для применения метода итерации систему линейных уравнений удобно "погрузить" в одну из трёх следующих

метрик:

$$a)\quad \rho_1(x,\ y) = \max_{1\le i\le n} |x_i - y_i|;$$

$$b)\quad \rho_2(x,\ y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|\,;$$

$$c)\quad \rho_3(x,\ y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Для того, чтобы отображение F, заданное в метрическом пространстве, было сжимающим, достаточно выполнение одного из следующих условий:
а) в пространстве с метрикой ρ_1: $\alpha_1 = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{i,j}| < 1$, т. е. максимальная из сумм модулей коэффициентов в правой части системы, взятых по строкам, должна быть меньше единицы.
б) в пространстве с метрикой ρ_2: $\alpha_2 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{i,j}| < 1$, т. е. максимальная из сумм модулей коэффициентов в правой части системы, взятых по столбцам, должна быть меньше единицы.
в) в пространстве с метрикой ρ_3: $\alpha_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j}^2} < 1$, т. е. сумма квадратов при неизвестных в правой части системы должна быть меньше единицы.

Метод Зейделя:

Метод Зейделя является модификацией метода простой итерации.
Вычисление $x^{(k+1)}$ проводится по следующим формулам:

$$x_1^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j} x_j^{(k)} + \beta_1,$$

$$x_2^{(k+1)} = \alpha_{21} x_1^{(k+1)} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_{2j} x_j^{(k)} + \beta_2,$$

....

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^{n} \alpha_{ij} x_j^{(k)} + \beta_i,$$

....

$$x_n^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{nj} x_j^{(k+1)} + \alpha_{nn} x_n^{(k)} + \beta_n.$$

Достаточные условия сходимости итерационной последовательности приближенных решений системы и оценка погрешности проводятся по тем же формулам, что и в методе простой итерации.

Метод Ньютона:

Пусть дана система: $\begin{cases} F(x,y)=0 \\ G(x,y)=0 \end{cases}$

Согласно методу Ньютона, последовательные приближения вычисляются по формулам:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{\Delta_x^{(n)}}{J(x_n,y_n)},\ y_{n+1}=y_n-\frac{\Delta_y^{(n)}}{J(x_n,y_n)},$$

где $\Delta_x^{(n)}=\begin{vmatrix} F(x_n,y_n) & F_y'(x_n,y_n) \\ G(x_n,y_n) & G_y'(x_n,y_n) \end{vmatrix},\Delta_y^{(n)}=\begin{vmatrix} F_x'(x_n,y_n) & F(x_n,y_n) \\ G_x'(x_n,y_n) & G(x_n,y_n) \end{vmatrix},$

$$J(x_n,y_n)=\begin{vmatrix} F_x'(x_n,y_n) & F_y'(x_n,y_n) \\ G_x'(x_n,y_n) & G_y'(x_n,y_n) \end{vmatrix}\neq 0.$$

Начальные приближения x_0, y_0 определяются приближенно (например, графически). Метод Ньютона эффективен только при достаточной близости начального приближения к решению системы.

Среда реализации алгоритмов

Алгоритмы реализованы на языке программирования Python 3 с использованием библиотек SymPy и NumPy в среде разработки Jupyter Notebook.

Результат выполнения лабораторной работы

1. Реализация метода Гаусса для решения СЛАУ

```
# Метод Гаусса
import numpy as np
# Матрица коэффициентов перед x
A = [
    [3.0, 2.0, 1.0],
    [2.0, 3.0, 1.0],
    [2.0, 1.0, 3.0]
]
lenA = len(A[0])
# Матрица правых частей СЛАУ
B = [5.0, 1.0, 11.0]
# Единичная матрица для поиска обратной
E = [
    [1.0, 0.0, 0.0],
    [0.0, 1.0, 0.0],
    [0.0, 0.0, 1.0]
]
# Поиск главного элемента, его строки и столбца
def find_general(A, lenA):
    maximum = 0
    for i in range(lenA):
        for j in range (lenA):
            if abs(A[i][j]) > maximum:
```

```
                maximum = abs(A[i][j])
                max_i = i
                max_j = j
    return max_i, max_j

# Определение Mi для последующего вычитания
def Mi_find(A, p, q, lenA):
    M = []
    for i in range(lenA):
        M.append(A[i][q] / A[p][q])
    return M

# Вычитание из строки
def subtraction_strings(A, B, M, p, lenA):
    Ap = A[p][:]
    for i in range(lenA):
        for j in range(lenA):
            A[i][j] = A[i][j] - Ap[j] * M[i]
        B[i] = B[i] - B[i] * M[i]
    return A, B

# Удаление главной строки и столбца
def restruct_matrix(A, B, p, q):
    for row in A:
        del row[q]
    del A[p]
    del B[p]
    return A, B

# Прямой ход
def forward_go(A, B, lenA):
    triangle_matrix = []
    A_inv = np.linalg.inv(A)
    new_right_matrix = []
    n = lenA - 1
    for i in range(n):
        p, q = find_general(A, lenA)
        triangle_matrix.append(list(A[p]))
        new_right_matrix.append(B[p])
        M = Mi_find(A, p, q, lenA)
        A, B = subtraction_strings(A, B, M, p, lenA)
        A, B = restruct_matrix(A, B, p, q)
        lenA -= 1
    triangle_matrix.append(list(A[0]))
```

```
    new_right_matrix.append(B[0])
    return triangle_matrix, new_right_matrix, A_inv

# Обратный ход
def backward_go(A, B, lenA):
    x = []
    x.append(B[lenA-1]/A[lenA-1][0])
    k = lenA - 2
    for i in reversed(range (lenA - 1)):
        x1 = 0
        l = 1
        lenI = len(A[i])
        for j in reversed(range(lenI-1)):
            B[k] -= A[i][j + 1] * x[j]
        x.append(B[k]/A[k][0])
        k -= 1
    return x
A, B, A_inv = forward_go(A, B, lenA)
print("Корни СЛАУ методом Гаусса")
x = backward_go(A, B, lenA)
for i in range(len(x)):
    print("x", (i + 1), " = %.4f"%x[i], sep = '')
print("Обратная матрица")
print(A_inv)
```

```
Корни СЛАУ методом Гаусса
x1 = 0.1667
x2 = -9.8333
x3 = 4.8333
Обратная матрица:
[ [ 0.66666667 -0.41666667 -0.08333333]
  [-0.33333333  0.58333333 -0.08333333]
  [-0.33333333  0.08333333  0.41666667] ]
```

2. Реализация методов простой итерации и метода Зейделя

```
# Метод простой итерации
from sympy import *
from math import *
A = [
    [24.41, 4.21,  4.12],
    [1.12,  41.49, 1.52],
    [2.54,  4.85, 30.92]
]
```

```
B = [30.24, 40.95, 42.81]
eps = 0.00001
# Проверка на сходимость
for i in range(len(B)):
    s = 0
    for j in range(len(B)):
        if j != i:
            s += A[i][j]
    if s > A[i][i]:
        print("Условие сходимости не выполняется")
        input()
print("Условие сходимости выполняется")
# Приведение к итерационому виду
for i in range(len(B)):
    for j in range(len(B)):
        if j != i:
            A[i][j] = A[i][j] / A[i][i]
            B[i] = B[i] / A[i][i]
x1, x2, x3 = var('x1,x2,x3')
fx = [0,0,0]
fx[0] = - A[0][1]*x2 - A[0][2]*x3 + B[0]
fx[1] = - A[1][0]*x1 - A[1][2]*x3 + B[1]
fx[2] = - A[2][0]*x1 - A[2][1]*x2 + B[2]
print("Система в итерационном виде")
for i in range(len(fx)):
    print("x", i + 1, " = ", fx[i], sep = '')
print()

#Решение методом простой итерации
x = [0, 0, 0]
ro = 1
count = 0
while ro >= eps :
    ex_x = list(x)
    x = [
        fx[0].subs([(x2,ex_x[1]), (x3, ex_x[2])]),
        fx[1].subs([(x1,ex_x[0]), (x3, ex_x[2])]),
        fx[2].subs([(x2,ex_x[1]), (x1, ex_x[0])])
    ]
    cof = [
        abs(A[0][1]) + abs(A[0][2]) + abs(B[0]),
        abs(A[0][1]) + abs(A[0][2]) + abs(B[0]),
        abs(A[0][1]) + abs(A[0][2]) + abs(B[0]),
    ]
```

```
    ro = max(cof) / (1 - max(cof)) * sqrt((x[0] - ex_x[0])**2 + (x[1] - ex_x[1])**2
+ (x[2] - ex_x[2])**2)
    count += 1
print("Корни СЛАУ методом простой итерации")
for i in range(len(fx)):
    print("x", i + 1, " = %.6f"%x[i], sep = '')
print("Число итераций: ", count)
print()

x = [0, 0, 0]
ro = 1
count = 0
# Решение методом Зейделя
while ro >= eps :
    ex_x = list(x)
    x[0] = fx[0].subs([(x2,ex_x[1]), (x3, ex_x[2])])
    x[1] = fx[1].subs([(x1,   x[0]), (x3, ex_x[2])])
    x[2] = fx[2].subs([(x2,   x[1]), (x1,    x[0])])
    cof = [
        abs(A[0][1]) + abs(A[0][2]) + abs(B[0]),
        abs(A[0][1]) + abs(A[0][2]) + abs(B[0]),
        abs(A[0][1]) + abs(A[0][2]) + abs(B[0]),
    ]
    ro = max(cof) / (1 - max(cof)) * sqrt((x[0] - ex_x[0])**2 + (x[1] - ex_x[1])**2
+ (x[2] - ex_x[2])**2)
    count += 1
print("Корни СЛАУ методом Зейделя")
for i in range(len(fx)):
    print("x", i + 1, " = %.6f"%x[i], sep = '')
print("Число итераций: ", count)
```

```
Условие сходимости выполняется
Система в итерационном виде
x1 = -0.172470299057763*x2 – 0.168783285538714*x3 + 0.0507511897747094
x2 = -0.0269944564955411*x1 – 0.0366353338153772*x3 +
0.0237884988097908
x3 = -0.0821474773609314*x1 – 0.156856403622251*x2 +
0.0447781613946771

Корни СЛАУ методом простой итерации
x1 = 0.040646
x2 = 0.021295
x3 = 0.038098
Число итераций: 6
```

Корни СЛАУ методом Зейделя
x1 = 0.040648
x2 = 0.021295
x3 = 0.038099
Число итераций: 4

3. Реализация метода Ньютона для решения СЛАУ

Метод Ньютона (начальные приближения найдены граффические)
$x_0 = 1, y_0 = 0.5$

```
x, y = var("x,y")
import sympy as smp
import numpy as np
from numpy import linalg
Fxy = smp.tan(x*y + 0.3) - x**2
Gxy = 0.7*x**2 + 2*y**2 - 1
dxFxy = smp.diff(Fxy, x)
dyFxy = smp.diff(Fxy, y)
dxGxy = smp.diff(Gxy, x)
dyGxy = smp.diff(Gxy, y)
xn = 1
yn = 0.5
count = 0
while True:
    MatrixX = np.array([[Fxy.subs([(x, xn), (y, yn)]), dyFxy.subs([(x, xn), (y,
yn)])],
                        [Gxy.subs([(x, xn), (y, yn)]), dyGxy.subs([(x, xn), (y, yn)])]])
    MatrixX = MatrixX.astype(float)
    deltaX = linalg.det(MatrixX)
    MatrixY = np.array([[dxFxy.subs([(x, xn), (y, yn)]), Fxy.subs([(x, xn), (y,
yn)])],
                        [dxGxy.subs([(x, xn), (y, yn)]), Gxy.subs([(x, xn), (y, yn)])]])
    MatrixY = MatrixY.astype(float)
    deltaY = linalg.det(MatrixY)
    MatrixJ = np.array([[dxFxy.subs([(x, xn), (y, yn)]), dyFxy.subs([(x, xn), (y,
yn)])],
                        [dxGxy.subs([(x, xn), (y, yn)]), dyGxy.subs([(x, xn), (y, yn)])]])
    MatrixJ = MatrixJ.astype(float)
    J = linalg.det(MatrixJ)
    xn = xn - deltaX / J
    yn = yn - deltaY / J
    count += 1
```

```
    if (deltaX/J < eps) and (deltaY/J < eps):
        break
print("Корни СЛАУ методом Ньютона")
print("x"," = %.6f"%xn, sep = '')
print("y"," = %.6f"%yn, sep = '')
print("Число итераций: ", count)
```

Корни СЛАУ методом Ньютона
x = 0.929996
y = 0.444171
Число итераций: 4

Пример выполнения лабораторной работы №3 «Аппроксимация функций. Интерполяционные многочлены. Сплайны»

Задание 1. Интерполирование по многочлену Лагранжа. Схема Эйткена.

1) Функция $y = f(x)$ задана таблицей (смотри пример). Составить по таблице интерполяционный многочлен Лагранжа. Вычислить значение функции в заданной точке x. Оценить погрешность полученного результата.

Пример: $y = \sin x\,, x = 1{,}64$.

x_k	1,60	1,70	1,80	1,90
y_k	0,99957	0,99166	0,9738	0,9463

2) Функция $y = f(x)$ задана таблицей: $x^* = 1.143$.

x_k	1, 00	1,08	1,20	1,27	1,31	1,38
y_k	1,17520	1,30254	1,50946	1,21730	1,22361	1,23470

Пользуясь интерполяционной схемой Эйткена, вычислить с точностью до 10^{-5} значение $f(x^*)$.

Задание 2. Первый и второй интерполяционные многочлены Ньютона.

1) Пользуясь первой интерполяционной формулой Ньютона второй степени, найти значение функции $f(x)$ для заданного x. Оценить погрешность полученного результата.

2) Пользуясь второй интерполяционной формулой Ньютона второй степени, найти значение функции $f(x)$ для заданного x. Оценить погрешность полученного результата. Функция $f(x)$ задана таблицей значений, которая представлена в вариантах заданий к лабораторной работе.

Пример: 1) $x = 1.53$; 2) $x = 1.82$.

x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
1,50	0,51183	1,70	0,4894	1,90	0,46678
1,55	0,50642	1,75	0,48376	1,95	0,4611
1,60	0,50064	1,80	0,47811	2,00	0,4554
1,65	0,49503	1,85	0,47245		

Задание 3. Интерполяция сплайнами

1. Составить сплайн, заданный интерполяционной таблицей.
2. Проверить практическое совпадение значений «соседних» выражений

сплайна в узловых точках, а также совпадение их со значениями функции в узлах интерполяции.

Пример:

x	-4	-2	1	2
$f(x)$	-2	-1	0	2

Многочлен Лагранжа:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x - x_0)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)}.$$

Оценка погрешности формулы Лагранжа:

$|R_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|(x - x_0)\cdot(x - x_1)\dots(x - x_n)|$,

где $M_{n+1} = \max\limits_{[x_0,x_n]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|$

Если надо вычислить не общее выражение $L_n(x)$, а лишь его значение на конкретном x и при этом значения функции даны в достаточно большом количестве узлов, то можно использовать интерполяционную схему Эйткена.

Согласно данной схеме последовательно вычисляются многочлены:

$$L_{i,i+1}(x) = \frac{1}{x_{i+1} - x_i}\begin{vmatrix} y_i & x_i - x \\ y_{i+1} & x_{i+1} - x\end{vmatrix},$$

$$L_{i,i+1,i+2}(x) = \frac{1}{x_{i+2} - x_{i+1}}\begin{vmatrix} L_{i,i+1} & x_i - x \\ L_{i+1,i+2} & x_{i+2} - x\end{vmatrix},$$

$$L_{i,i+1,i+2,i+3}(x) = \frac{1}{x_{i+3} - x_{i+2}}\begin{vmatrix} L_{i,i+1,i+2} & x_i - x \\ L_{i+1,i+2,i+3} & x_{i+3} - x\end{vmatrix}, \text{ и т.д.}$$

Интерполяционный многочлен n-й степени, принимающий в точках x_i значения y_i $(i = 0,1,2,\dots,n)$, запишется следующим образом:

$$L_{012\dots n}(x) = \frac{1}{x_n - x_0}\begin{vmatrix} L_{012\dots(n-1)}(x) & x_0 - x \\ L_{12\dots n}(x) & x_n - x\end{vmatrix}.$$

Вычисления по схеме Эйткена удобно расположить в таблице 4.1.

Таблица 4.1

Интерполяционная схема Эйткена

x_i	y_i	$x_i - x$	$L_{i-1,j}$	$L_{i-2,i-1,j}$	$L_{i-3,i-2,i-1,j}$	…
x_0	y_0	$x_0 - x$				
x_1	y_1	$x_1 - x$	$L_{01}(x)$			
x_2	y_2	$x_2 - x$	$L_{12}(x)$	$L_{012}(x)$		
x_3	y_3	$x_3 - x$	$L_{23}(x)$	$L_{123}(x)$	$L_{0123}(x)$	…
x_4	y_4	$x_4 - x$	$L_{34}(x)$	$L_{234}(x)$	$L_{1234}(x)$	…

Первый интерполяционный многочлен Ньютона:

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!\cdot h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\cdot h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!\cdot h^n}(x - x_0)\dots(x - x_{n-1})$$

$|R_n(x)| \approx \left|\frac{\Delta^{n+1}y}{(n+1)} t(t-1)\dots(t-n)\right|$, где $\Delta^{n+1}y = \max\limits_{0\le m\ \le n} |\Delta^{n+1}y_m|$.

Второй интерполяционный многочлен Ньютона:

$$\bar{P}_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!\cdot h}(x-x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!\cdot h^2}(x-x_n)(x-x_{n-1}) + \cdots$$
$$+ \frac{\Delta^n y_0}{n!\cdot h^n}(x-x_n)(x-x_{n-1})\dots(x-x_1).$$

$|\bar{R}_n(x)| \le |t(t+1)\dots(t+n)| \frac{\Delta^{n+1}y}{(n+1)!}$, где $\Delta^{n+1}y = \max\limits_{0\le m\ \le n} |\Delta^{n+1}y_m|$.

Сплайны:

$$S(x) = a_i + b_i(x-x_{i-1}) + c_i(x-x_{i-1})^2 + d_i(x-x_{i-1})^3,$$

где a_i, b_i, c_i, d_i – неизвестные коэффициенты (всего их $4n$).

Используя совпадение значений $S(x)$ в узлах с табличными значениями функции f, получаем следующие уравнения:

$S(x_{i-1}) = y_{i-1} = a_{i,}$

$S(x_i) = y_i = a_{i,} + b_i h_i + c_i {h_i}^2 + d_i {h_i}^3$.

Число этих уравнений – $2n$. Для получения дополнительных уравнений используем непрерывность $S'(x)$ и $S''(x)$ в узлах интерполяции интервала (x_0, x_n).

Получаем следующие уранения:

$b_{i+1} = b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2$,

$c_{i+1} = c_i + 3d_i h_i \ (i = 1,2,\dots,n-1)$.

Для получения еще двух уравнений используем условие – равенство нулю второй производной $S''(x)$ в точках x_0, x_n:

$c_1 = 0, c_n + 3d_n h_n = 0$.

Исключив a_i из полученных выше уравнений, получаем систему, содержащую $3n$ неизвестных

$b_i h_i - c_i h_i^2 - d_i h_i^3 = y_i - y_{i-1} \ (i = 1,2,\dots,n)$,

$b_{i+1} - b_i - 2c_i h_i - 3d_i h_i^2 = 0 \ (i = 1,2,\dots,n-1)$,

$c_{i+1} - c_i - 3d_i h_i = 0 \ (i = 1,2,\dots,n-1)$,

$c_1 = 0$,

$c_n + 3d_n h_n = 0$.

Среда реализации алгоритмов

Алгоритмы реализованы на языке программирования Python 3.8 с использованием библиотек SymPy и math в среде разработки Jupyter Notebook.

Результат выполнения лабораторной работы

1. Интерполяция многочленом Лагранжа

```
from sympy import *
from math import *
import sympy

x = var("x")
```

```
f = sympy.sin(x)
print("Task 1")
x0 = 1.64
xi = [1.60, 1.70, 1.80, 1.90]
yi = [0.99957, 0.99166, 0.9738, 0.9463]
n = len(xi)
Ln = 0
for i in range(n):
    mult_x = 1
    mult_xi = 1
    for j in range(n):
        if i != j:
            mult_x = mult_x * (x - xi[j])
            mult_xi = mult_xi * (xi[i] - xi[j])
    Ln += yi[i] * mult_x / mult_xi
Lx0 = Ln.subs(x, x0)
print("Ln(x) = ", Ln)
print("Ln(1.64) = %.5f"% Lx0)
fx0 = f.subs(x, x0)
print("f(x) = ", f)
print("f(1.64) = %.5f"% fx0)

dif_f_n_plus_1 = diff(f, x, n + 1)
list_dif_in_xi = []
for i in range(n):
    list_dif_in_xi.append(abs(dif_f_n_plus_1.subs(x, xi[i])))
M_n_plus_1 = max(list_dif_in_xi)
Rn = M_n_plus_1 * abs(mult_x * (x - xi[n-1]))
Rx0 = Rn.subs(x, x0)
print("Rn(x) = ", Rn)
print("Rn(1.64) = %.5f"% Rx0)
if abs(fx0 - Lx0) <= Rx0:
    print("Calculation is OK")
else:
    print("Error is too much")

eps = 10**(-5)
x = 1.143
xi = [1.00,    1.08,    1.20,    1.27,    1.31,    1.38]
yi = [1.17520, 1.30254,  1.150946, 1.21730, 1.22361, 1.23470]
n = len(xi)
print()
print("Task 2")
k = 1
```

```
L_ex = yi
delta = 1
while delta > eps:
    if k == n:
        print("It's impossible to calculate with this accuracy and input data")
        print("Last f(x) was: %.5f"% L_ex[0], " with accuracy %.5f"% delta)
        break
    L = []
    for i in range(n - k):
        L.append(1 / (xi[i + 1] - xi[i]) * (L_ex[i] * (xi[i + 1] - x) - (L_ex[i + 1] *
(xi[i] - x))))
    delta = abs(L[0] - L_ex[0])
    L_ex = list(L)
    k += 1
```

Task 1
Ln(x) = -166.595*(x - 1.9)*(x - 1.8)*(x - 1.7) + 495.83*(x - 1.9)*(x - 1.8)*(x - 1.6) - 486.9*(x - 1.9)*(x - 1.7)*(x - 1.6) + 157.716666666667*(x - 1.8)*(x - 1.7)*(x - 1.6)
Ln(1.64)=0.99762
f(x)=sin(x)
f(1.64)=0.99761
Rn(x) = 0/323289566863503*Abs((x-1.9)*(x-1.8)*(x-1.7)*(x-1.6))
Rn(1.64)=0.00003
Calculation is OK

Task 2
It’s impossible to calculate with this accuracy and input data
Last f(x) was: 0.96290 with accuracy 0.01421

2. Интерполяция многочленами Ньютона

```
print("Task 1")
x = [1.50, 1.55, 1.60, 1.65, 1.70, 1.75, 1.80, 1.85, 1.90, 1.95, 2.00]
y = [0.51183, 0.50642, 0.50064, 0.49503, 0.4894, 0.48376, 0.47811, 0.47245,
0.46678, 0.4611, 0.4554]
h = 0.05
n = len(x)
x0 = 1.53
delta_y = [y]
for i in range(1, n):
    a = []
    for j in range (n - i):
        a.append(delta_y[i - 1][j + 1] - delta_y[i - 1][j])
```

```
    delta_y.append(a)
Pn = delta_y[0][0]
mult = 1
for i in range(1, n):
    mult = mult * (x0 - x[i - 1])
    Pn += delta_y[i][0] / (factorial(i) * h**(i)) * mult
t = (x0 - x[0]) / h
print("Pn = %.5f"% Pn)
Rn = delta_y[n-1][0]/n
for i in range(n):
    Rn = abs(Rn * (t - i))
print("Rn = %.5f"% Rn)
print()
print("Task 2")
x0 = 1.82
Pn = delta_y[0][n - 1]
mult = 1
for i in range(1, n):
    mult = mult * (x0 - x[i - 1])
    Pn += delta_y[i][n - 1 - i] / (factorial(i) * h**(i)) * mult
print("Pn = %.5f"% Pn)
t = (x0 - x[n-1]) / h
Rn = delta_y[n-1][0]/factorial(n)
for i in range(n):
    Rn = abs(Rn * (t - i))
print("Rn = %.5f"% Rn)
```

```
Task 1
Pn = 0.50879
Rn = 0.00229

Task 2
Pn = 0.41798
Rn = 0.00021
```

3. Интерполяция сплайнами

```
x=[-4, -2, 1, 2]
y=[-2, -1, 0, 2]
n=len(x)

h=[ x[i]-x[i-1] for i in range(1,n)]
h1=[ x[i+1]-x[i] for i in range (n-1)]
```

```
a=[h[i] for i in range(1,n-2)]
c=[2.*(h[i]+h[i+1]) for i in range(n-2)]
b=[h[i] for i in range(2,n-1)]
f=[6.*((y[i+1]-y[i])/h[i]-(y[i]-y[i-1])/h[i-1]) for i in range(1,n-1)]

A=[0.]
B=[0.]
for m in range(len(a)):
    B.append((f[m]-a[m]*B[-1])/(a[m]*A[-1]+c[m]))
    A.append(-1.*b[m]/(A[-1]*a[m]+c[m]))

C=[(f[-1]-a[-1]*B[-1])/(c[-1]+a[-1]*A[-1])]
for k in range (2,len(A)+1):
    C.insert(0,A[-k]*C[-1]+B[-k])
C.insert(0,0.)
C.append(0.)
k3=[]
k2=[]
k1=[]
for j in range(1,len(C)):
    k3.append((C[j]-C[j-1])/h[j-1])
    k2.append((0.5*h[j-1]*C[j-1])-((1./6.)*((h[j-1])**2.)*k3[j-1])+((y[j]-y[j-1])/h[j-1]))
    k1.append(y[j-1])

xi = list(x)
x = var("x")

for i in range(0, n-1):
    S = k1[i] + k2[i] * (x - xi[i]) + C[i] * (x - xi[i])**2 + k3[i] * (x - xi[i])**3
    print("S", i + 1, " = ", S, sep = "")
```

S1 = 0.5*x
S2 = -0.335497835497836*x + 0.445887445887446*(x + 2)**3-1.67099567099567
S3 = 2.89177489177489*x – 1.33766233766234*(x - 1)**3 + 1.33766233766234*(x - 1)**2 – 2.89177489177489

Пример выполнения лабораторной работы №4 «Численное интегрирование по формуле трапеций и формуле Симпсона. Вычисление интегралов методом Монте-Карло»

Задание 1:

1) Вычислить интеграл по формуле трапеции; число частичных отрезков $n = 10$. Оценить абсолютную погрешность по формуле

$|r| \leq \frac{(b-a)^3}{12 \cdot n^2} \cdot M_2, \quad M_2 = max\left|f''(x)\right|, \quad x \in [a, b].$

2) Вычислить интеграл по формуле Симпсона при $n = 16$ (S_{16}) и при $n = 8$ (S_8). Оценить погрешность по формуле $r \leq \frac{|S_8 - S_{16}|}{15}$.

Пример:

1) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2x^2+1.3}}$;
2) $\int_{0.2}^1 \frac{tg\, x^2}{x^2+1} dx$.

Задание 2:

1. Вычислить определенный интеграл, заданный на отрезке $[a, b]$ методом Монте-Карло.
2. Вычислить двойные интегралы $\iint_\sigma dxdy$, $\iint_\sigma f(x,y)dxdy$ методом Монте-Карло. Область σ - замкнутая область на плоскости, представленная треугольником, заданным координатами вершин A, B, C.

Пример:

1) $\int_{1.6}^{2.4} \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$,
2) $A(0;8), B(6;4), C(3;0), f(x,y) = y^2 + 2xy$.

Формула трапеций:

$$\int_a^b f(x)dx = h \cdot \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + \frac{y_n}{2}\right).$$

Оценка погрешности метода трапеции:

$|R_n| \leq M \cdot \frac{(b-a) \cdot h^2}{12}$, где $M = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$.

Формула Симпсона:

$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left((y_0 + y_{2m}) + 2(y_0 + \cdots + y_{2m-2}) + 4(y_1 + y_3 + y_{2m-1})\right)$

Оценка погрешности формулы Симпсона:

$|R_n| \leq M \cdot \frac{(b-a) \cdot h^4}{180}$, где $M = \max_{a \leq x \leq b} \left|f^{(4)}(x)\right|$.

Метод Монте-Карло:

В основе оценки искомого значения интеграла I лежит известное соотношение: $I = y^* \cdot \sigma$, где y^* – значение подынтегральной функции в некоторой «средней» точке области интегрирования, а σ – (многомерный) объем области интергирования. При этом предполагается, что подынтегральная функция (обозначим ее f) непрерывна в области интегрирования. Выберем в этой области n случайных точек M_i. При достаточно большом n приближенно можно считать:

$$y^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(M_i).$$

Точность оценки значения интеграла методом Монте-Карло пропорциональна корню квадратному из числа случайных испытаний и не зависит от кратности интеграла. Именно поэтому применение метода целесообразно для вычисления интегралов высокой кратности. Рассмотрим применение метода для простейшего случая интеграла:

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

$I = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$, где $x_i(i = 1,2, \dots, n)$ – случайные точки, лежащие в интервале $[a, b]$. Для получения таких точек на основе последовательности случайных точек x_i, равномерно распределенных в интервале [0,1], достаточно выполнить преобразование: $x_i' = a + (b - a)x_i$.

Среда реализации алгоритмов

Алгоритмы реализованы на языке программирования Python 3.8 с использованием библиотек SymPy и math в среде разработки Jupyter Notebook.

Результат выполнения лабораторной работы

1. Метод трапеции и формула Симпсона

```
from sympy import *
import sympy
from math import *



n = 10
x1 = 1
x2 = 2
h = (x2 - x1) / n
xi = []
yi = []
x = var("x")
f = 1 / (2 * x**2 + 1.3)**(1/2)
for i in range(n + 1):
    xi.append(x1 + h * i)
    yi.append(f.subs(x, xi[i]))
summ = 0
for i in range(n + 1):
    if i == 0 or i == n:
        summ += yi[i] / 2
    else:
        summ += yi[i]
integ = h * summ
print("Task 1")
print("integral 1 = %.5f"%integ)
f2 = diff(f, x, 2)
maxim = Dichotomy (x1, x2, f2)
```

```
r = (x2 - x1)**3 / (12 * n**2) * maxim
print("Error = %.5f"%r)
x1 = 0.2
x2 = 1
xi = []
yi = []
h = (x2 - x1) / n
f = sympy.tan(x)**2 / (x**2 + 1)
for i in range(n + 1):
    xi.append(x1 + h * i)
    yi.append(f.subs(x, xi[i]))
summ = 0
for i in range(n + 1):
    if i == 0 or i == n:
        summ += yi[i] / 2
    else:
        summ += yi[i]
integ = h * summ
print("integral 2 = %.5f"%integ)
f2 = diff(f, x, 2)
maxim = Dichotomy (x1, x2, f2)
r = (x2 - x1)**3 / (12 * n**2) * maxim
print("Error = %.5f"%r)


print()
print("Task 2")
f = 1 / (2 * x**2 + 1.3)**(1/2)
n = 16
x1 = 1
x2 = 2
h = (x2 - x1) / n
xi = []
yi = []
x = var("x")
for i in range(n + 1):
    xi.append(x1 + h * i)
    yi.append(f.subs(x, xi[i]))
m = n // 2
summ = [yi[0]+ yi[2*m], 0, 0]
for i in range(2 * m - 2):
    summ[1] += yi[i]
for i in range(1, 2 * m - 1):
    if i%2 != 0:
```

```
        summ[2] += yi[i]
int1 = h/3 * sum(summ) * 2
print("integral 1 with 16 sections = %.5f"%int1)

n = 8
x1 = 1
x2 = 2
h = (x2 - x1) / n
xi = []
yi = []
x = var("x")
for i in range(n + 1):
    xi.append(x1 + h * i)
    yi.append(f.subs(x, xi[i]))
m = n // 2
summ = [yi[0]+ yi[2*m], 0, 0]
for i in range(2 * m - 2):
    summ[1] += yi[i]
for i in range(1, 2 * m - 1):
    if i%2 != 0:
        summ[2] += yi[i]
int2 = h/3 * sum(summ) * 2
print("integral 1 with 8 section = %.5f"%int2)

r = abs(int2 - int1) / 15
print("Error = %.5f"%r)
```

Task 1
Integral 1 = 0.42336
Error = 0.00023
Integral 2 = 0.34398
Error = 0.00806

Task 2
Integral 1 with 16 sections = 0.42192
Integral 1 with 8 sections = 0.41734
Error = 0.00030

2. Метод Монте-Карло

```
import random
f = x / (x**2 + 1)**(1/2)
n = 1000
```

```
x1 = 1.6
x2 = 2.4
h = (x2 - x1)/n
xi = []
xin = []
yi = []
summ = 0
for i in range(n + 1):
    xin.append(random.uniform(x1, x2))
for i in range(n + 1):
    xi.append(xin[i] * (x2 - x1) + x1)
    yi.append(f.subs(x, xi[i]))
    summ += yi[i]
int1 = (x2 - x1)/n * summ
print("Task 1")
print("integral = %.5f"%int1)
def point_ok(point, a, b ,c):
    check1 = (a[0] - point[0])*(b[1] - a[1]) - (b[0] - a[0]) * (a[1] - point[1])
    check2 = (b[0] - point[0])*(c[1] - b[1]) - (c[0] - b[0]) * (b[1] - point[1])
    check3 = (c[0] - point[0])*(a[1] - c[1]) - (a[0] - c[0]) * (c[1] - point[1])
    if ((check1 > 0) and (check2 > 0) and (check3 > 0)) or ((check1 < 0) and
(check2 < 0) and (check3 < 0)):
        return True
    else:
        return False
a = [0, 8]
b = [6, 4]
c = [3, 0]
S =abs(1/2 * ((a[0] - c[0]) * (b[1] - c[1]) - (b[0] - c[0]) * (a[1] - c[1])))
x, y = var("x, y")
f = 0 * x1 + 0 * x2 + 1
k = 0
for i in range(n):
    point = [random.uniform(0, 6),random.uniform(0, 8)]
    if point_ok(point, a, b, c):
        #summ += f.subs([(x, point[0]), (y, point[1])])
        k+=1
int1 = S/k
print()
print("Task 2")
print("integral = %.5f"%int1)
f = y**2 + 2*x*y
k = 0
summ = 0
```

```
n = 1000
for i in range(n):
    point = [random.uniform(0, 6),random.uniform(0, 8)]
    if point_ok(point, a, b, c):
        summ += f.subs([(x, point[0]), (y, point[1])])
        k+=1
int1 = S/k * summ
print()
print("Task 3")
print("integral = %.5f"%int1)
```

```
Task 1
integral = 0.76404

Task 2
integral = 0.04852

Task 3
integral = 741.31872
```

Практические занятия.
Численное дифференцирование

1) Найти значение производной функции $y = f(x)$, заданной на отрезке $[a, b]$ с помощью многочлена Лагранжа $(n = 4)$ в точке $x = m$. Сравнить полученный результат с точным значением производной в точке, используя непосредственное дифференцирование функции.

Пример решения:

$f(x) = ln\left(\frac{x}{2}\right), a = 4.5, b = 10, m = 5{,}03, n = 4$

$$h = \frac{x_n - x_0}{n} = \frac{10 - 4.5}{4} = 1.375$$

$$q = \frac{m - x_0}{h} = \frac{5.03 - 4.5}{1.375} = 0.38545$$

x_i	$y_i = f(x_i) = ln\left(\frac{x_i}{2}\right)$
4.5	0.81093
5.875	1.07756
7.25	1.28785
8.625	1.46152
10	1.60944

$$y(x) \approx {L_n}'(x) = \frac{1}{h}\sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(-1)^{n-i}}{i!\,(n-i)!}\frac{d}{dq}\left(\frac{q^{n+1}}{q-i}\right)$$

$${L_n}'(x=m) = \frac{1}{h}[y_0 \frac{(-1)^4}{0!\,4!}\frac{d}{dq}\{(q-1)(q-2)(q-3)(q-4)\} +$$
$$+y_1 \frac{(-1)^3}{1!\,3!}\frac{d}{dq}\{(q-0)(q-2)(q-3)(q-4)\}$$
$$+ y_2 \frac{(-1)^2}{2!\,2!}\frac{d}{dq}\{(q-0)(q-1)(q-3)(q-4)\} +$$
$$+y_3 \frac{(-1)^1}{3!\,1!}\frac{d}{dq}\{(q-0)(q-1)(q-2)(q-4)\}$$
$$+ y_4 \frac{(-1)^0}{4!\,0!}\frac{d}{dq}\{(q-0)(q-1)(q-2)(q-3)\}] =$$
$$= \frac{1}{1.375}[0.81093 * \frac{1}{24}\frac{d}{dq}\{q^4 - 10q^3 - 18q^2 + 27q + 36\} -$$
$$-1.07756 * \frac{1}{6}\frac{d}{dq}\{q^4 - 9q^3 + 26q^2 - 24q\} + 1.28785$$
$$* \frac{1}{4}\frac{d}{dq}\{q^4 - 8q^3 + 19q^2 - 12q\} -$$
$$-1.46152 * \frac{1}{6}\frac{d}{dq}\{q^4 - 7q^3 + 14q^2 - 8q\} + 1.60944$$
$$* \frac{1}{24}\frac{d}{dq}\{q^4 - 6q^3 + 11q^2 - 6q\}] =$$
$$= \frac{1}{1.375}[0.03379 * \{4q^3 - 30q^2 - 36q + 27\} - 0.17959$$
$$* \{4q^3 - 27q^2 + 52q - 24\} +$$
$$+0.32196 * \{4q^3 - 24q^2 + 38q - 12\} - 0.24359 * \{4q^3 - 21q^2 + 28q - 8\} +$$
$$+0.06706 * \{4q^3 - 18q^2 + 22q - 6\}] =$$
$$= \frac{1}{1.375}[0{,}30059 - (-1.38984) + (-0{,}22201) - (0.02395) + 0.00233]$$
$$= 1.05222$$
$${L_n}'(m) = 1.05222$$
$$f'(x) = \frac{1}{x};\ f'(x=m) = \frac{1}{5{,}03} = 0.19881$$

Абсолютная погрешность:

$$\Delta = |f'(m) - {L_n}'(m)| = |0.19881 - 1.05222| = 0.85341$$

Относительная погрешность:

$$\delta = \frac{\Delta}{f'(m)} = \frac{0.85341}{0.19881} = 4.29259$$

2) Найти значение производной функции $y = f(x)$, заданной на отрезке $[a, b]$ с помощью многочлена Ньютона $(n = 5)$ в точке $x = a$. Оценить погрешность.

Решение:

$$f(x) = ln\left(\frac{x}{2}\right), a = 4.5, b = 10, n = 5$$

$$h = \frac{x_n - x_0}{n} = \frac{10 - 4.5}{5} = 1.1$$

$$q = \frac{b - a}{h} = \frac{10 - 4.5}{1.1} = 5$$

x_i	$y_i = ln\left(\frac{x_i}{2}\right)$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
4,5	0,81093	0,218689	-0,03935	0,01202	-0,00479	0,00225
5,6	1,02962	0,179341	-0,02732	0,00724	-0,00254	
6,7	1,20896	0,152016	-0,02009	0,00469		
7,8	1,36098	0,131928	-0,01539			
8,9	1,49290	0,116534				
10	1,60944					

Таблица 1.2

$$f'(x = a) = \frac{1}{h}[\Delta y_0 + \frac{2q - 1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{3q^2 - 6q + 2}{6}\Delta^3 y_0 + \frac{2q^3 - 9q^2 + 11q - 3}{12}\Delta^4 y_0 + \frac{5q^4 - 40q^3 + 105q^2 - 100q + 24}{120}\Delta^5 y_0]$$

$$= \frac{1}{1.1}[0{,}218689 + \frac{2 * 5 - 1}{2} * (-0{,}03935) + \frac{3 * 5^2 - 6 * 5 + 2}{6} * 0{,}01202 + \frac{2 * 5^3 - 9 * 5^2 + 11 * 5 - 3}{12} * (-0{,}00479) + \frac{5 * 5^4 - 40 * 5^3 + 105 * 5^2 - 100 * 5 + 24}{120} * 0{,}00225] = 1{,}12778$$

$$f'(x) = \frac{1}{x};\ f'(x = a) = \frac{1}{4{,}5} = 0.22222$$

Абсолютная погрешность:

$$\Delta = |f'(a) - L'(a)| = |0.22222 - 1{,}12778| = 0{,}90556$$

Относительная погрешность:

$$\delta = \frac{\Delta}{f'(m)} = \frac{0{,}90556}{0.22222} = 4{,}07506$$

Приближенные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений

Задание: составить решение задачи Коши для ОДУ 1-го порядка

1) усовершенствованным методом ломаных
2) методом Эйлера-Коши на отрезке [0.2,1.2] с шагом 0.1 при начальном значении $y(0.2) = 0.25. \varepsilon = 0.0001$.
№1. $y' = 0.133(x^2 + \sin 2x) + 0.872y$.
№2. $y' = 0.215(x^2 + \cos 1.5x) + 1.283y$.
№3. $y' = 0.158(x^2 + \sin 0.8x) + 1.164y$.
№4. $y' = 0.173(x^2 + \cos 0.7x) + 0.754y$.
№5. $y' = 0.221(x^2 + \sin 1.2x) + 0.452y$.
№6. $y' = 0.163(x^2 + \cos 0.4x) + 0.635y$.
№7. $y' = 0.218(x^2 + \sin 1.6x) + 0.718y$.
№8. $y' = 0.145(x^2 + \cos 0.5x) + 0.842y$.
№9. $y' = 0.213(x^2 + \sin 1.8x) + 0.368y$.
№10. $y' = 0.127(x^2 + \cos 0.6x) + 0.573y$.
№11. $y' = 0.232(x^2 + \sin 1.4x) + 1.453y$.
№12. $y' = 0.417(x^2 + \cos 0.8x) + 0.972y$.
№13. $y' = 0.324(x^2 + \sin 1.5x) + 1.612y$.
№14. $y' = 0.263(x^2 + \cos 1.2x) + 0.453y$.
№15. $y' = 0.372(x^2 + \sin 0.7x) + 0.758y$.
№16. $y' = 0.343(x^2 + \cos 0.4x) + 1.315y$.
№17. $y' = 0.276(x^2 + \sin 1.6x) + 0.988y$.
№18. $y' = 0.173(x^2 + \cos 0.6x) + 1.534y$.
№19. $y' = 0.258(x^2 + \sin 0.4x) + 0.724y$.
№20. $y' = 0.317(x^2 + \cos 1.4x) + 1.344y$.
№21. $y' = 0.166(x^2 + \sin 1.1x) + 0.883y$.
№22. $y' = 0.215(x^2 + \cos 0.9x) + 1.213y$.
№23. $y' = 0.188(x^2 + \sin 1.5x) + 0.885y$.

Задание: используя метод Эйлера с уточнением, составить таблицу приближенных значений интеграла ДУ $y' = f(x, y)$, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0$ на отрезке $[a, b]$, с шагом $h = 0.1$. $\varepsilon = 0.0001$.
№1. $y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{5}}, y_0(1.8) = 2.6, x\epsilon[1.8,2.8]$.
№2. $y' = x + \cos\frac{y}{3}, y_0(1.6) = 4.6, x\epsilon[1.6,2.6]$.
№3. $y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{10}}, y_0(0.6) = 0.8, x\epsilon[0.6,1.6]$.
№4. $y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{7}}, y_0(0.5) = 0.6, x\epsilon[0.5,1.5]$.
№5. $y' = x + \cos\frac{y}{\pi}, y_0(1.7) = 5.3, x\epsilon[1.7,2.7]$.
№6. $y' = x + \cos\frac{y}{2.25}, y_0(1.4) = 2.2, x\epsilon[1.4,2.4]$.
№7. $y' = x + \cos\frac{y}{e}, y_0(1.4) = 2.5, x\epsilon[1.4,2.4]$.
№8. $y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{2}}, y_0(0.8) = 1.4, x\epsilon[0.8,1.8]$.
№9. $y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{3}}, y_0(1.2) = 2.1, x\epsilon[1.2,2.2]$.

№10. $y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{11}}, y_0(2.1) = 2.5, x\epsilon[2.1,3.1]$.
№11. $y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{5}}, y_0(1.8) = 2.6, x\epsilon[1.8,2.8]$.
№12. $y' = x + \sin\frac{y}{3}, y_0(1.6) = 4.6, x\epsilon[1.6,2.6]$.
№13. $y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{10}}, y_0(0.6) = 0.8, x\epsilon[0.6,1.6]$.
№14. $y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{7}}, y_0(0.5) = 0.6, x\epsilon[0.5,1.5]$.
№15. $y' = x + \sin\frac{y}{\pi}, y_0(1.7) = 5.3, x\epsilon[1.7,2.7]$.
№16. $y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{2.8}}, y_0(1.4) = 2.2, x\epsilon[1.4,2.4]$.
№17. $y' = x + \sin\frac{y}{e}, y_0(1.4) = 2.5, x\epsilon[1.4,2.4]$.
№18. $y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{2}}, y_0(0.8) = 1.3, x\epsilon[0.8,1.8]$.
№19. $y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{3}}, y_0(1.1) = 1.5, x\epsilon[1.1,2.1]$.
№20. $y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{11}}, y_0(0.6) = 1.2, x\epsilon[0.6,1.6]$.
№21. $y' = x + \sin\frac{y}{1.25}, y_0(0.5) = 1.8, x\epsilon[0.5,1.5]$.
№22. $y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{15}}, y_0(0.2) = 1.1, x\epsilon[0.2,1.2]$.
№23. $y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{1.3}}, y_0(0.1) = 0.8, x\epsilon[0.1,1.1]$.

Задание: используя метод Адамса со вторыми разностями , составить таблицу приближенных значений интеграла ДУ $y' = f(x, y)$, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0$ на отрезке $[0,1]$, с шагом $h = 0.1. \varepsilon = 0.0001$. Начальный отрезок определить методом Рунге-Кутты.
№1. $y' = 1 + 0.2y\sin x - y^2, y(0) = 0$.
№2. $y' = \cos(x + y) + 0.5(x - y), y(0) = 0$.
№3. $y' = \frac{\cos x}{x+1} - 0.5y^2, y(0) = 0$.
№4. $y' = (1 - y^2)\cos x + 0.6y, y(0) = 0$.
№5. $y' = 1 + 0.4y\sin x - 1.5y^2, y(0) = 0$.
№6. $y' = \frac{\cos y}{x+2} + 0.3y^2, y(0) = 0$.
№7. $y' = \cos(1.5x + y) + (x - y), y(0) = 0$.
№8. $y' = 1 - \sin(x + y) + \frac{0.5y}{x+2}, y(0) = 0$.
№9. $y' = \frac{\cos x}{1.5+x} + 0.1y^2, y(0) = 0$.
№10. $y' = 0.6\sin x - 1.25y^2 + 1, y(0) = 0$.
№11. $y' = \cos(2x + y) + 1.5(x - y), y(0) = 0$.
№12. $y' = 1 - \frac{0.1y}{x+2} - \sin(2x + y), y(0) = 0$.
№13. $y' = \frac{\cos y}{1.25+x} - 0.1y^2, y(0) = 0$.
№14. $y' = 1 + 0.8y\sin x - 2y^2, y(0) = 0$.
№15. $y' = \cos(1.5x + y) + 1.5(x - y), y(0) = 0$.
№16. $y' = 1 - \sin(2x + y) + \frac{0.3y}{x+2}, y(0) = 0$.

№17. $y' = \frac{\cos y}{1.75+x} - 0.5y^2, y(0) = 0.$
№18. $y' = 1 + (1-x)\sin y - (2+x)y, y(0) = 0.$
№19. $y' = (0.8 - y^2)\cos x + 0.3y, y(0) = 0.$
№20. $y' = 1 + 2.2\sin x + 1.5y^2, y(0) = 0.$
№21. $y' = \cos(x+y) + 0.75(x-y), y(0) = 0.$
№22. $y' = 1 - \sin(1.25x + y) + \frac{0.5y}{x+2}, y(0) = 0.$
№23. $y' = \frac{\cos y}{x+2} - 0.3y^2, y(0) = 0.$

Задание: используя метод Милна со вторыми разностями , составить таблицу приближенных значений интеграла ДУ $y' = f(x,y)$, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0$ на отрезке [0,1], с шагом $h = 0.1. \varepsilon = 0.0001$. Начальный отрезок определить методом Рунге-Кутты.
№1. $y' = x + y^2, y(0) = 0.5.$
№2. $y' = 2x + 0.1y^2, y(0) = 0.2.$
№3. $y' = 2x + y^2, y(0) = 0.3.$
№4. $y' = x^2 + xy, y(0) = 0.2.$
№5. $y' = 0.2x + y^2, y(0) = 0.1.$
№6. $y' = x^2 + 2y, y(0) = 0.4.$
№7. $y' = x^2 + 2y, y(0) = 0.1.$
№8. $y' = xy + y^2, y(0) = 0.6.$
№9. $y' = x^2 + y^2, y(0) = 0.7.$
№10. $y' = x^2 + 0.2y^2, y(0) = 0.2.$
№11. $y' = 0.3x + y^2, y(0) = 0.4.$
№12. $y' = 0.1x + 0.2y^2, y(0) = 0.3.$
№13. $y' = x + 0.3y^2, y(0) = 0.3.$
№14. $y' = 2x^2 + xy, y(0) = 0.5.$
№15. $y' = 0.1x^2 + 2xy, y(0) = 0.8.$
№16. $y' = x^2 + 0.2xy, y(0) = 0.6.$
№17. $y' = 3x^2 + 0.1xy, y(0) = 0.2.$
№18. $y' = x^2 + 3xy, y(0) = 0.3.$
№19. $y' = x^2 + 0.1y^2, y(0) = 0.7.$
№20. $y' = 2x^2 + 3y^2, y(0) = 0.2.$
№21. $y' = 0.2x^2 + y^2, y(0) = 0.8.$
№22. $y' = 0.3x^2 + 0.1y^2, y(0) = 0.3.$

Численное решение дифференциальных уравнений 2-го порядка
Задание: решить ОДУ 2-го порядка путем сведения его к системе ОДУ 1-го порядка.
№1. $2xy'' = y', x > 0, y(1) = 4, y'(1) = 3.$
№2. $y'' = 4\cos 2x$, $y(0) = 0, y'(0) = 0.$
№3. $y'' - 4y' + 4y = 0, y(0) = 3, y'(0) = -1.$
№4. $y'' + 4y' + 29y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 15.$

№5. $y'' - 2y' + y = 0, y(0) = 4, y'(0) = 2.$
№6. $9y'' + y = 0, y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2, y'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0.$
№7. $y'' - 2y' + 10y = 0, y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0, y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = e^{\frac{\pi}{6}}.$
№8. $y'' + 3y' = 0, y(0) = 1, y'(0) = 2.$
№9. $y'' + 5y' + 6y = 0, y(0) = 1, y'(0) = -6.$
№10. $y'' - 5y' + 4y = 0, y(0) = 5, y'(0) = 8.$
№11. $y'' + 3y' + 2y = 0, y(0) = 1, y'(0) = -1.$
№12. $y'' + 4y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 2.$
№13. $y'' + 2y' = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$
№14. $2y'' = 3y^2, y(-2) = 1, y'(-2) = -1$
№15. $y''(x^2 + 1) = 2xy', y(0) = 1, y'(0) = 3$
№16. $xy'' + x(y')^2 - y' = 0, y(2) = 2, y'(2) = 1$
№17. $y'' = \frac{y'}{x} + \frac{x^2}{y'}, y(2) = 0, y'(2) = 4$
№18. $yy'' = (y')^2 - (y')^3, y(1) = 1, y'(1) = -1.$
№19. $y^3 y' = -1, y(1) = 1, y'(1) = 0.$
№20. $y^4 - y^3 y'' = 1, y(0) = \sqrt{2}, y'(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$
№21. $y'' = e^{2y}, y(0) = 0, y'(0) = 1.$
№22. $2(y')^2 = y''(y - 1), y(1) = 2, y'(1) = 1.$
№23. $y'' = xy' + y + 1, y(0) = 1, y'(0) = 0.$
№24. $2yy'' = (y')^2 - 1, y(0) = 1, y'(0) = 2.$

Решить систему ОДУ методом Рунге -Кутты на единичном отрезке с шагом $h = 0.1$ и с шагом $h = 0.05$. Сделать оценку погрешности.

Список литературы

1. Н.С. Бахвалов, А.В. Лапин, Е.В. Чижонков. Численные методы в задачах и упражнениях: учебное пособие. – М.:БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. – 240 с.
2. Э.М. Галеев, В.М. Тихомиров. Краткий курс теории экстремальных задач. – Изд. – во Московского Университета, 1989. – 204с.
3. Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. Численные методы. – 7-е изд.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. – 636 с. – (Классический университетский учебник).
4. Р.П. Федоренко. Введение в вычислительную физику: Учебное пособие для вузов. – Долгопрудный: Издательский дом ―Интеллект‖, 2008. – 504с.
5. А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин Элементы теории функции и функционального анализа. – М.: 1989. – 450 с.