ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА
(РОСАВИАЦИЯ)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ» (МГТУ ГА)

Кафедра аэродинамики, конструкций и прочности
летательных аппаратов

М.С. Кубланов

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ И ПРОЦЕССОВ

Учебно-методическое пособие
по изучению дисциплины,
выполнению лабораторных работ и домашних заданий

для студентов
IV курса направления 25.03.01
и III курса специальности 25.05.05
очной формы обучения

Москва
ИД Академии Жуковского
2021

УДК 004
ББК 517.8
К88

Рецензент:

Киселев М.А. – д-р техн. наук, профессор

Кубланов М.С.

К88 Моделирование систем и процессов [Текст] : учебно-методическое пособие по изучению дисциплины, выполнению лабораторных работ и домашних заданий / М.С. Кубланов. – М.: ИД Академии Жуковского, 2021. – 48 с.

Данное учебно-методическое пособие издается в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Моделирование систем и процессов» по учебному плану для студентов IV курса направления 25.03.01 и III курса специальности 25.05.05 очной формы обучения.

Рассмотрено и одобрено на заседаниях кафедры 20.01.2021 г. и методического совета специальности 25.05.05 – 26.01.2021 г., направления 25.03.01 – 26.01.2021 г.

УДК 004
ББК 517.8

СОДЕРЖАНИЕ

с.

1. УЧЕБНЫЙ ПЛАН ДИСЦИПЛИНЫ.. 3
2. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ДИСЦИПЛИНЕ.................................... 4
3. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА.. 6
4. ЭЛЕКТРОННЫЕ СРЕДСТВА ИНФОРМАЦИИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ. 7
5. ЭЛЕКТРОННЫЙ АДРЕС КАФЕДРЫ ДЛЯ КОНСУЛЬТАЦИЙ......... 7
6. УЧЕБНАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ…………………............... 7
7. ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ….. 18

7. Лабораторная работа № 1.. 18

7.1 Лабораторная работа № 2.. 25

7.2. Лабораторная работа № 3.. 29

8. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ... 29

8.1. Задача № 1... 30

8.2. Задача № 2... 38

8.3. Задача № 3... 44

1. УЧЕБНЫЙ ПЛАН ДИСЦИПЛИНЫ

Форма обучения очная .

	25.03.01		*25.05.05-М*	
Общий объем учебных часов на дисциплину	*108*	*час.*	*108*	*час.*
Семестр	*7*	*сем.*	*6*	*сем.*
Объем аудиторной нагрузки	*44*	*час.*	*50*	*час.*
Лекции	*28*	*час.*	*30*	*час.*
Лабораторные работы	*12*	*час.*	*12*	*час.*
Практическое занятие	*4*	*час.*	*8*	*час.*
Дифференцированный зачет	*7*	*сем.*	*6*	*сем.*
Экзамен				
Объем самостоятельной работы студента	*64*	*час.*	*58*	*час.*

2. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ДИСЦИПЛИНЕ

2.1. Предмет дисциплины

До середины XX века при решении прикладных задач приходилось (и это было допустимо) ограничиваться известными классическими примерами, допускающими простейшее, аналитическое представление с однозначным решением. Сегодняшний уровень развития техники требует более точного, более глубокого анализа, как реальности, так и создаваемых человеком систем. Широкая компьютеризация предоставляет такую возможность, однако, процедура получения качественных, достоверных результатов оказывается не столь испытанной, не столь очевидной и простой, как в случае однозначного аналитического решения.

Это потребовало объединения усилий прикладников и математиков в новом научном направлении – математическом моделировании, соединившем в себе, с одной стороны, грамотность описания изучаемого явления и постановки задачи исследований, а с другой стороны, строгость математических методов, обеспечивающих достоверность результатов. Возникла необходимость резко расширить круг инженерных и научных работников, обладающих серьезной математической подготовкой и достаточно высоким уровнем математической культуры.

Данный курс предназначен для формирования математической культуры применения математического моделирования, необходимой для обеспечения физически правильного отражения основных функций и поведения сложных "плохо организованных систем", занимающих в современной технике все большее место.

2.2. Цель и задачи дисциплины

2.2.1. Цель преподавания дисциплины

Целью освоения дисциплины является формирование у студентов знаний методических основ разработки и применения моделей процессов и систем в гражданской авиации.

2.2.2. Задачи изучения дисциплины

2.2.2.1. Знать:

– основные понятия теории моделирования;

– основные типы моделей процессов и систем;

– основные требования, предъявляемые к разработке математических моделей;

– способы построения математических моделей простейших систем и процессов в естествознании и технике;

2.2.2.2. Уметь:

– составлять математическое описание математических моделей;

– проводить вычислительный эксперимент на детерминированной математической модели;

– проводить вычислительный эксперимент на математической модели случайного процесса.

2.2.2.3. Владеть представлением:

– о классификации моделей;

– о методике разработки моделей в научных и инженерных исследованиях;

– о методике применения моделей в научных и инженерных исследованиях;

– о методах оценки адекватности моделей поведению изучаемого объекта;

– о математических методах, применяемых в моделировании;

– о задачах идентификации и оптимизации.

2.3. Перечень базовых (формирующих) дисциплин

Требования к входным знаниям студента, необходимым для изучения дисциплины:

– по дисциплине философия – знать роль науки в развитии цивилизации, соотношение науки и техники, объективной реальности и субъективного восприятия;

– по дисциплине высшая математика (математика)– знать и уметь применять методы следующих разделов: линейная алгебра, математический анализ, дифференциальные уравнения, теория вероятностей и математическая статистика;

– по дисциплине физика – знать фундаментальные физические законы, описывающие процессы и явления в природе и понимать их место;

– по дисциплине метрология, стандартизация и сертификация – знать международную систему единиц физических величин; физические основы и методы измерений, методы оценки погрешностей измерения;

– по дисциплине теоретическая механика (механика) – знать основные понятия и модели;

2.4. Перечень формируемых дисциплин

Дисциплины, для которых данная дисциплина является предшествующей:

– технологические процессы технического обслуживания ЛА;

– конструкция и прочность воздушных судов (самолетов, вертолетов);

– конструкция и прочность авиационных (вертолетных) двигателей;

– исследование операций и системный анализ;

– основы теории технической эксплуатации ЛА;

– дисциплины магистерской подготовки.

3. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

	А в т о р	Наименование, издательство, год издания
1	2	3
	Основная литература:	
1	Кубланов М.С.	Математическое моделирование. Методология и методы разработки математических моделей механических систем и процессов. Часть I. Издание четвертое: учебное пособие. – М.: МГТУ ГА, 2013. – 108 с.
2	Кубланов М.С.	Математическое моделирование. Методология и методы разработки математических моделей механических систем и процессов. Часть II. Издание четвертое: учебное пособие. – М.: МГТУ ГА, 2013. – 124 с.
	Учебно-методическая литература:	
3	Кубланов М.С.	Моделирование систем и процессов: Пособие по изучению дисциплины, выполнению лабораторных работ и домашних заданий для студентов IV курса направления 25.03.01 и III курса направления 25.05.05 дневного обучения. – М.: МГТУ ГА, 2021. – 48 с.
	Дополнительная литература	
4	Советов Б.Я., Яковлев С.Я.	Моделирование систем: Учебник для вузов. – М.: "Высшая школа", 1998. – 320 с.
5	Лебедев А.Н.	Моделирование в научно-технических исследованиях. – М.: Радио и связь, 1989. – 224 с.
6	Ибрагимов И.А. и др.	Моделирование систем: Учебное пособие. – Баку: Азинефтехим, 1989. – 83 с.
7	Дыхненко Л.М. и др.	Основы моделирования сложных систем: Учебное пособие для втузов. – Киев: Вища школа. 1981. – 359 с.
8	Корн Г., Корн Т.	Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – М.: Наука, 1973. – 832 с.
9	Годунов С.К., Рябенький В.С.	Разностные схемы (введение в теорию). – М.: Наука, 1973. – 400 с.
10	Добров Г.М. и др.	Экспертные оценки в научно-техническом прогнозировании. – Киев: Наукова Думка, 1974. – 160 с.
11	Барзилович Е.Ю.	Оптимально управляемые случайные процессы и их приложения (теоретические основы эксплуатации авиационных систем по состоянию). – Егорьевск: ЕАТК ГА, 1996. – 299 с.

4. ЭЛЕКТРОННЫЕ СРЕДСТВА ИНФОРМАЦИИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

База электронной информотеки МГТУ ГА – электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК), а также сайт кафедры АКПЛА akpla.ucoz.com – содержит всю информацию, необходимую для изучения дисциплины:

– учебное пособие;

– слайды для лекционного материала;

– пособие по изучению дисциплины.

5. ЭЛЕКТРОННЫЙ АДРЕС КАФЕДРЫ ДЛЯ КОНСУЛЬТАЦИЙ

akpla-study@yandex.ru

6. УЧЕБНАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Раздел 1. Общая теория моделирования

Тема 1.1. Введение

Реальность, познанное, абстракции, модель. Множественность моделей. "Хорошо" и "плохо" организованные системы. Законы и закономерности. Особенность сложных систем и процессов. Сходство объектов. Цели научных и инженерных исследований. Место моделирования в них.

Понятия оригинала и модели. Примеры моделей.

Методические указания к изучению раздела

Литература: [1] введение, § 1.1.

Центральные вопросы раздела: Понятия оригинала и модели.

Контрольные вопросы:

1. Модель и оригинал.
2. Что такое модель?
3. Что такое моделирование?

Тема 1.2. Понятие моделирования

Понятие моделирования. Процесс моделирования и необходимая последовательность этапов этого процесса. Причины, вынуждающие применять моделирование.

Два аспекта отношения модели к оригиналу. Классификация моделей по особенностям выражения свойств оригинала и особенности функционирования модели. Классификация моделей по основаниям для преобразования свойств модели в свойства оригинала. Пример: маятник.

Методические указания к изучению раздела

Литература: [1] § 1.1, 1.2.

Центральные вопросы раздела: Понятие моделирования. Два аспекта отношения модели к оригиналу.

Контрольные вопросы:

4. Для чего необходим этап постановки задачи в процессе моделирования?
5. На какие условия следует обратить внимание при выборе модели?
6. По каким аспектам классифицируются модели?
7. Что такое логические модели и как они подразделяются?
8. Что такое материальные модели и как они подразделяются?
9. Что такое условные модели?
10. Что такое аналогичные модели?
11. На чем основаны математические модели?

Тема 1.3. Математические модели и их виды

Математическое описание. Виды математического описания. Полнота математического описания. Отличие математической модели от ее математического описания. Состав математического описания моделей.

Виды математических моделей. Понятие имитационной (стохастической) математической модели. Особенности математического описания имитационных математических моделей. Основа разработки стохастических ММ – дисперсионные и регрессионные модели.

Методические указания к изучению раздела

Литература: [1] § 2.1.

Центральные вопросы раздела: Математическое описание. Состав математического описания и математической модели.

Контрольные вопросы:

12. Какие бывают виды математического описания?
13. Что входит в математическое описание?
14. Что входит в математическую модель помимо математического описания?
15. Отличие математического описания от математической модели.
16. Какие бывают виды математических моделей, определяемые их природой?
17. Особенности имитационной (стохастической) математической модели.

Тема 1.4. Подобная детерминированная модель

Понятие детерминированной математической модели. Пример разработки детерминированной математической модели. Пример: математическая модель разбега самолета Ан-2 при взлете.

Методические указания к изучению раздела

Литература: [1] § 2.1.

Центральные вопросы раздела: Математическое описание. Состав математического описания и математической модели.

Контрольные вопросы:

18. Особенности детерминированной математической модели.
19. Каково назначение элементов математической модели?
20. Какими свойствами должны обладать элементы математической модели?

Тема 1.5. Адекватность математических моделей

Вычислительный эксперимент. Достоверность результата. Понятие адекватности математических моделей механических систем и процессов, точность и непротиворечивость. Статистическая основа проверки адекватности. Необходимые данные для проверки адекватности. Факторы, которые необходимо учитывать при проверке адекватности. Пример ошибки при оценке адекватности. Точность и погрешность. Абсолютная и приведенная погрешности. Понятие грубой, случайной и систематической погрешности. Причины возникновения погрешности при математическом моделировании. Оценка погрешности математических операций.

Методические указания к изучению раздела

Литература: [1] § 2.2

Центральные вопросы раздела: Понятие вычислительного эксперимента. Понятие адекватности модели, точность и непротиворечивость. Статистическая основа проверки адекватности.

Контрольные вопросы:

21. Что такое вычислительный эксперимент?
22. Может ли вычислительный эксперимент включать в себя неоднократные расчеты?
23. Что такое достоверность результата вычислительного эксперимента?
24. Что такое адекватность математической модели?
25. Что надо сравнивать для оценки адекватности математической модели?
26. Чем определяется точность моделирования?
27. Что такое грубая, случайная и систематическая погрешности?
28. Причины погрешности математического моделирования.
29. Из-за чего появляется погрешность математической модели?
30. Как используется и интерпретируется доверительный интервал в качестве критерия точности моделирования?
31. Оценка погрешности основных арифметических действий.

Тема 1.6. Алгоритм оценки адекватности модели

Оценка адекватности математической модели как задача математической статистики. Статистический аппарат для оценки точности. Доверительные интервалы. Необходимость знания закона распределения рассогласования для построения доверительного интервала. Механизм выполнения требований по точности математической модели. Систематическая погрешность. Проверка критерия значимости гипотезы о равенстве нулю математического ожидания рассогласования. Статистический аппарат для оценки непротиворечивости. Проверка критерия согласия между наблюдаемым и нормальным законами распределения. Алгоритм проверки адекватности математической модели реальному поведению оригинала с помощью статистических критериев.

Методические указания к изучению раздела

Литература: [2] § 5.7

Центральные вопросы раздела: Статистическая основа оценки точности и непротиворечивости модели. Алгоритм оценки адекватности модели.

Контрольные вопросы:

32. Почему проверку адекватности необходимо проводить с применением математической статистики?
33. Какой математический аппарат используется для оценки адекватности математической модели?
34. Что необходимо иметь для оценки адекватности математической модели?
35. Что надо учитывать при оценке адекватности математической модели?
36. При решении проблемы адекватности математической модели следует расширять или сужать область ее применимости? Почему?
37. Может ли математическая модель считаться адекватной поведению оригинала, если рассогласование соответствующих параметров неслучайно?
38. Какой вывод о рассогласовании соответствующих параметров модели и оригинала можно сделать с помощью проверки статистической гипотезы о нормальном распределении рассогласования?
39. К какому значению статистического среднего случайной величины рассогласования соответствующих параметров модели и оригинала следует стремиться для улучшения степени адекватности?
40. Какую погрешность характеризует закон распределения с нулевым математическим ожиданием?
41. Какую оценку рассогласования соответствующих параметров модели и оригинала дает доверительный интервал для математического ожидания?
42. Нужно ли знать закон распределения рассогласования для оценки точности математической модели?
43. Нужно ли знать закон распределения рассогласования для оценки систематической погрешности математической модели?
44. Что необходимо проверить сначала: точность или непротиворечивость?

Тема 1.7. Понятие об обратных задачах. Алгоритм научных исследований с помощью моделирования

Задача идентификации при построении математической модели. Простейший пример задачи идентификации. Методы решения задач идентификации. Понятие об обратных задачах.

Строгость процесса математического моделирования. Алгоритм научных исследований с помощью математического моделирования. Процессы построения математической модели и ее идентификации.

Основные принципы моделирования механических систем и процессов.

Методические указания к изучению раздела

Литература: [1] § 2.3, 2.4, 2.5.

Центральные вопросы раздела: Понятие задачи идентификации. Обратные задачи. Строгость процесса математического моделирования. Процессы построения математической модели и ее идентификации.

Контрольные вопросы:

45. Что такое обратные задачи?
46. Что такое задача идентификации?
47. Для чего проводится идентификация математической модели?
48. В чем суть задачи идентификации математической модели?
49. Какой метод лежит в основе решения задачи идентификации?
50. Почему применение математического моделирования требует выполнения определенных этапов?
51. В чем состоит цель этапа изучения оригинала?
52. В чем состоит суть этапа феноменологического описания оригинала?
53. Какой этап необходим после составления математического описания?
54. Для чего проводится контрольный вычислительный эксперимент?
55. Что необходимо делать, если получена неудовлетворительная оценка адекватности?
56. Каким этапом завершается процесс построения математической модели?
57. Какой этап предшествует проведению эксперимента на построенной модели?
58. Чем завершается алгоритм научных исследований?
59. Для чего служат принципы математического моделирования?
60. Принцип адекватности математической модели.
61. Принцип гибкости, инвариантности и динамичности; чем он обеспечивается?
62. Принцип состоятельности результатов вычислительного эксперимента; чем он обеспечивается?
63. Принцип удобства исследователя; чем он обеспечивается?
64. Чем обеспечивается принцип планирования вычислительного эксперимента?
65. Суть принципа конкретизации условий и области применения разрабатываемой математической модели.
66. Принцип опережающей математической строгости и глубины феноменологического описания явления.

Раздел 2. Методы разработки моделей

Тема 2.1. Подобие и анализ размерностей

Сложные и простые математические модели. Построение математической модели как компромисс между простотой и адекватностью. Проблемы построения математических моделей. "Многокритериальность", "проклятие размерности". Проблема адекватности. Методы математического моделирования. Ранжирование, агрегирование. Теория катастроф. Методы последовательных приближений, проб и ошибок, перебора. Метод проверки гипотез.

Подобие. Понятие подобных объектов. Размерные величины, единицы измерения. Анализ размерностей как метод математического моделирования. Системы единиц измерения. Основные и производные единицы измерения. Степенной комплекс. П-теорема. Критерии подобия. Примеры применения П-теоремы для разработки детерминированных математических моделей.

Методические указания к изучению раздела

Литература: [1] § 3.1, 3.2.

Центральные вопросы раздела: Проблемы многокритериальности, большой размерности и адекватности. Основные характеристики методов математического моделирования. Понятие подобия объектов. Степенной комплекс. Критерий подобия.

Контрольные вопросы:

67. Какой компромисс необходим при построении математической модели?
68. Что понимается под многокритериальностью?
69. Что понимается под "проклятием размерности"?
70. С помощью каких методов решается проблема многокритериальности?
71. С помощью каких методов решается проблема "проклятия размерности"?
72. Краткая характеристика приема ранжирования.
73. Краткая характеристика приема агрегирования.
74. Краткая характеристика теории катастроф.
75. Общая характеристика метода последовательных приближений.
76. Метод проб и ошибок.
77. Метод перебора.
78. Характеристика метода проверки гипотез.
79. Понятие подобия объектов.
80. Какова особенность математических описаний подобных объектов?
81. Как связаны соответствующие переменные подобных объектов?
82. Что такое степенной комплекс?
83. Какое место в описании законов природы занимают степенные комплексы?
84. Что такое критерий подобия?
85. Каким образом безразмерный степенной комплекс помогает строить математическое описание?

86. С помощью уравнений какого вида определяется точный вид безразмерного степенного комплекса?
87. С точностью до какой величины может быть найдена функциональная зависимость при помощи ПИ-теоремы?
88. Какой факт лежит в основе уравнений для отыскания показателей степеней в степенном комплексе при помощи ПИ-теоремы?
89. Что такое размерные и безразмерные величины?
90. Как используется единица размерности в обозначении размерной величины?
91. Каковы свойства основных единиц измерения в системах единиц?
92. Что такое производные единицы измерения?
93. Основные механические единицы измерения в системе единиц СИ.

Тема 2.2. Методы экспертных оценок и теории графов

Методы экспертных оценок. Понятие о теории графов.

Методические указания к изучению раздела

Литература: [1] § 3.3, [2] § 8.2.

Центральные вопросы раздела: Назначение методов экспертных оценок. Структура графов.

Контрольные вопросы:

94. Для решения каких задач теории моделирования применяются методы экспертных оценок?
95. Какие виды оценок применяются в методах экспертных оценок?
96. Каким условиям должны удовлетворять аопросы экспертизы?
97. Какие виды графов существуют?
98. Какие существуют элементы графов?

Тема 2.3. Понятие о стохастических моделях

Понятие о теории массового обслуживания. Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло) как прием для имитации работы системы. Суть метода Монте-Карло. Случайное число. Единичный жребий и процедуры его реализации. Пример построения имитационной математической модели работы аэродрома. Возможность выявления новых свойств объекта при имитационном моделировании. Особенность математического описания имитационной модели и вопрос об адекватности.

Методические указания к изучению раздела

Литература: [1] § 3.4, 3.5.

Центральные вопросы раздела: Единичный жребий. Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло). Особенности имитационных моделей.

Контрольные вопросы:

99. Для построения каких моделей применяется метод статистических испытаний?

100. Какова суть метода статистических испытаний?
101. Что такое единичный жребий?
102. Какова методика розыгрыша единичного жребия?
103. С помощью какого приема в имитационных моделях воспроизводиться событие?
104. Позволяет ли имитационное моделирование воспроизводить процесс функционирования оригинала?
105. Можно ли с помощью имитационной модели выявить свойства оригинала, явно не участвовавшие в построении модели?
106. Необходима ли оценка адекватности имитационной модели и почему?
107. Из чего состоит математическое описание имитационных моделей?

Раздел 3. Математические методы в моделях

Тема 3.1. Понятие о вычислительных методах алгебры

Системы линейных алгебраических уравнений – методы исключения. Системы нелинейных алгебраических уравнений – итерационные методы. Понятие о рекуррентных формулах и процедуре отделения корней. Методы: секущих (хорд), деления отрезка пополам, золотого сечения, касательных (Ньютона). Методы интерполяции (кусочно-постоянная, линейная, квадратичная, полиномиальная, сплайновая, пример). Аппроксимация (сглаживание).

Методические указания к изучению раздела

Литература: [1] § 4.1.

Центральные вопросы раздела: Существование и единственность решения уравнений итерационными методами. Интерполяция. Аппроксимация.

Контрольные вопросы:

108. Для решения каких задач применяются итерационные методы?
109. Общая характеристика итерационных методов.
110. В каких методах применяется пошаговое уточнение искомого параметра?
111. Что такое рекуррентная формула для решения нелинейного уравнения?
112. Для чего служат условия сходимости итерационного метода?
113. Каким свойствам должна удовлетворять зависимость на исходном интервале для применимости методов деления отрезка пополам, секущих, золотого сечения?
114. Характеристика метода секущих.
115. Характеристика метода деления отрезка пополам.
116. Характеристика метода золотого сечения.
117. Характеристика метода касательных (Ньютона).
118. Для чего служат методы интерполяции функций?
119. Характеристика линейной интерполяции.
120. Характеристика полиномиальной интерполяции.
121. Характеристика сплайновой интерполяции.

122. Общий принцип методов аппроксимации.
123. В чем принципиальное различие между понятиями интерполяции и аппроксимации?

Тема 3.2. Понятие о вычислительных методах решения дифференциальных уравнений

Разностные схемы. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений (решения задачи Коши) – разностные методы: Эйлера, Адамса, "прогноз-коррекция", Рунге-Кутта. Порядок разностных методов. Понятие о возможности контроля погрешности и изменения шага интегрирования. Сравнение методов численного интегрирования дифференциальных уравнений.

Подходы к решению задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений второго и более высоких порядков.

Краевые задачи. Методы сеток – метод прогонки. Пример. Метод стрельбы (пристрелки).

Особенности разностных методов интегрирования дифференциальных уравнений с частными производными.

Методические указания к изучению раздела

Литература: [1] § 4.2.

Центральные вопросы раздела: Разностные схемы. Понятие о возможности контроля погрешности и изменения шага интегрирования.

Контрольные вопросы:

124. На чем основаны разностные методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений?
125. Какой вид дифференциальных уравнений решается методом Эйлера?
126. Чем определяется порядок разностных методов?
127. Основная идея метода Эйлера для решения задачи Коши.
128. Характеристика методов Рунге-Кутта.
129. Характеристика метода Адамса.
130. Характеристика методов "прогноза-коррекции".
131. Какие методы допускают оценку погрешности на шаге интегрирования?
132. Какие методы допускают изменение шага интегрирования в процессе вычислений?
133. С какой целью применяется изменение шага интегрирования в процессе вычислений?
134. Что такое краевая задача?
135. Какие методы применяются для решения краевых задач?
136. Краткая характеристика метода прогонки.
137. Краткая характеристика метода стрельбы.
138. На чем основываются методы интегрирования дифференциальных уравнений с частными производными?

Тема 3.3. Математические методы оптимизации

Уравнения связей, фазовые координаты, управления, критерий оптимальности (целевая функция). Общая формулировка задач оптимизации. Пример.

Задача линейного программирования. Описание симплекс-метода (формы записи и виды решений). Пример.

Задача нелинейного программирования. Классический подход. Пример. Методы решения задач нелинейного программирования для унимодального критерия оптимальности от одного переменного: методы деления отрезка пополам и золотого сечения. Общий случай задачи нелинейного программирования и градиентные методы.

Задача вариационного исчисления, "прямые" и "непрямые" методы.

Задача оптимального управления, Принцип максимума Л.С. Понтрягина и метод динамического программирования Р. Беллмана. Примеры.

Методические указания к изучению раздела

Литература: [1] § 4.5.

Центральные вопросы раздела: Критерий оптимальности. Задачи линейного и нелинейного программирования. Задачи вариационного исчисления и оптимального управления.

Контрольные вопросы:

139. Какие элементы могут входить в формулировку задачи оптимизации?
140. Для чего служит критерий оптимальности в задаче оптимизации?
141. Какому условию удовлетворяет оптимальное управление?
142. Каковы уравнения связей, ограничения и критерий оптимальности в задаче линейного программирования?
143. В какой части допустимой области лежит решение задачи линейного программирования?
144. Каким методом решаются задачи линейного программирования?
145. Характеристика симплекс-метода.
146. Каковы должны быть уравнения связей, ограничения и критерий оптимальности для того, чтобы задача оптимизации называлась задачей нелинейного программирования?
147. Какими методами решаются задачи нелинейного программирования?
148. Характеристика метода деления отрезка пополам.
149. Характеристика метода золотого сечения.
150. Краткая характеристика градиентных методов.
151. В каких частях допустимой области может располагаться решение задачи нелинейного программирования?
152. Каковы особенности задачи вариационного исчисления?
153. На каких математических условиях основаны "непрямые" методы решения задач вариационного исчисления?
154. На каком приеме основаны "прямые" методы решения задач вариационного исчисления?

155. Каковы особенности задачи оптимального управления?
156. Какими методами решаются задачи оптимального управления?
157. На каких математических условиях основывается решение задач оптимального управления с помощью принципа максимума?
158. На каких математических условиях основывается решение задач оптимального управления методом динамического программирования?

Тема 3.4. Приемы упрощения и контроля моделей

Упрощение феноменологического описания: установившееся движение, плоскопараллельное движение, осесимметрическое движение, автомодельное движение. Упрощение уравнений: переход к безразмерным величинам, приближенная замена переменных величин постоянными значениями, пренебрежение малыми членами. Пример. Линеаризация. Пример. Метод малого параметра (метод возмущений).

Методы вычисления как замена исходной задачи на упрощенную. Свойства методов вычисления. Устойчивость. Пример. Сходимость. Аппроксимация. Связь устойчивости и аппроксимации со сходимостью.

Контроль размерностей. Контроль основных законов природы. Контроль качественного поведения зависимостей. Контроль математической замкнутости. Проверка на контрольных примерах.

Методические указания к изучению раздела

Литература: [1] §§ 4.3, 4.4, 4.6.

Центральные вопросы раздела: Методы упрощения моделей. Методы упрощения уравнений. Свойства методов вычисления.

Контрольные вопросы:

159. Какие элементы математических моделей подвергаются упрощению?
160. Приемы упрощения феноменологического описания.
161. Характеристика установившегося движения.
162. Характеристика плоскопараллельного движения
163. Характеристика осесимметрического движения
164. Характеристика автомодельного движения.
165. Приемы упрощения уравнений.
166. Характеристика приема линеаризации.
167. Характеристика метода малого параметра (метода возмущений).
168. Для чего от методов вычисления требуют определенных свойств?
169. Характеристика свойства устойчивости решения.
170. Характеристика свойства устойчивости метода вычисления.
171. Характеристика свойства сходимости метода вычисления.
172. Характеристика свойства аппроксимации метода вычисления.
173. Связь устойчивости и аппроксимации со сходимостью.

7. ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ

Согласно рабочей программе дисциплины лабораторный практикум состоит из трех лабораторных работ, две из которых выполняютя на компьютерах студентами в индивидуальном порядке.

Программное обеспечение работает в диалоге – внимательно следуйте подсказкам на экране. В случае появления непонятных сообщений следует немедленно обратиться к преподавателю, ведущему занятия.

Ввести число – означает набрать с клавиатуры число в предписанном формате **И** нажать клавишу "Enter" ("Ввод").

НАЖАТЬ КЛАВИШУ – означает только ОДНО это действие.

В режиме просмотра текста или результатов листание осуществляется клавишами "PgUp" и "PgDn" или "↑" и "↓". Для окончания просмотра следует нажать клавишу "F10" или "Esc".

Все результаты выполнения лабораторной работы высвечиваются на экране, а также записываются в файл "labrez.dat", который можно просмотреть после выхода из расчетной части работы. Продолжение расчетов после выхода невозможно, поэтому ВСЮ ПРОГРАММУ расчетов надо выполнить за один вход в расчетную часть.

7.1. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

Оценка адекватности результатов вычислительного эксперимента поведению реального объекта

<u>Цель лабораторной работы</u>: оценка адекватности результатов вычислительного эксперимента поведению реального объекта с помощью оценки точности и непротиворечивости.

Теоретические основы

В теории математического моделирования под адекватностью результатов, полученных с помощью математической модели, понимают их соответствие поведению оригинала. Для выявления этого соответствия необходимо сравнивать отдельные параметры объекта, полученные в расчетах и зарегистрированные при наблюдении за оригиналом в одних и тех же условиях. Очевидно, что сравнивать следует лишь соответствующие друг другу параметры между собой и только в той области функционирования объекта, в которой предполагается его исследовать. Таким образом, необходимо исследовать величину рассогласования результатов контрольного вычислительного эксперимента с результатами натурного наблюдения в тех же условиях: $\Delta v = v_{модели} - V_{оригинала}$.

Если моделируется процесс или множество состояний системы, то величина рассогласования принимает множество значений. Поэтому возникает необходимость применения статистических методов.

Для получения этого множества значений рассогласования необходимо иметь:

- исчерпывающую информацию о поведении оригинала в конкретном случае;
- исчерпывающие данные результатов контрольного вычислительного эксперимента, воспроизводящего тот же случай поведения объекта;

а для оценки адекватности с точки зрения целей исследования необходимо иметь:

- критерии оценки адекватности.

Цели исследования бывают самыми разнообразными, поэтому возможен выбор различных критериев. Для технических систем и процессов наиболее важными факторами при оценке **АДЕКВАТНОСТИ** необходимо считать **ТОЧНОСТЬ** и **НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТЬ**.

Для большинства случаев исследований этих двух составляющих адекватности достаточно, поскольку в технике используются в основном подобные детерминированные математические модели, обладающие общим с оригиналом математическим описанием.

ТОЧНОСТЬ означает, что обобщенная характеристика рассогласования соответствующего параметра модели и оригинала должна быть не больше, чем заранее заданное значение приемлемой погрешности.

НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТЬ подразумевает идентичный характер изменения соответствующих параметров, т.е. идентичный вид основных свойств функциональных зависимостей на отдельных участках траектории, как-то: возрастание, убывание, экстремумы, выпуклость и т.п.

В математической статистике известно несколько объектов, которые могут характеризовать точность и непротиворечивость.

Как известно даже на бытовом уровне, для повышения ТОЧНОСТИ измерений проводят не одно измерение, а несколько. Это делается не из-за того, что какое-то из них может оказаться ошибочным, а из-за замечательного свойства дисперсии средней арифметической величины измерений: уменьшаться с ростом числа повторений опытов:

$$D_N = \frac{D}{N}, \qquad \text{или} \qquad \sigma_N = \frac{\sigma}{\sqrt{N}},$$

где D и σ – дисперсия и среднее квадратическое отклонение в одном опыте (измерении), D_N и σ_N – дисперсия и среднее квадратическое отклонение результата осреднения замеров по N опытам. Поэтому с помощью бóльшего числа опытов достигают меньшего РАССЕИВАНИЯ (среднего квадратического отклонения) данных, т.е. большей точности.

Поэтому для оценки точности математической модели по сравнению с данными наблюдения за оригиналом можно использовать величину среднего квадратического отклонения, статистическую оценку s которого можно получить непосредственно из результатов сравнения. Однако такая оценка страдает неполнотой, так как не учитывает, насколько часто встречаются большие и малые, положительные и отрицательные рассогласования. Величина статистического среднего рассогласований $\overline{\Delta v}$ страдает теми же недостатками, но может быть использована в качестве оценки СИСТЕМАТИЧЕСКОЙ погрешности.

Так как точность следует определять единой оценкой всего множества наблюдаемых значений случайной величины рассогласования результатов вычислительного эксперимента и "истинных" значений наблюдаемой величины, то в качестве такой оценки должно выступать m – математическое ожидание рассогласования. Какое истинное значение оно имеет, нам знать не дано, но его можно оценить с помощью ДОВЕРИТЕЛЬНОГО ИНТЕРВАЛА ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ РАССОГЛАСОВАНИЯ m оцениваемых параметров – этот подход дает возможность не только учесть все виды рассогласования, но и получить вероятностную характеристику точности. Так, например, может звучать вывод о точности в этом случае: с доверительной вероятностью 0,98 гарантируется рассогласование не более 0,3 м. Критерием оценки точности тогда является соблюдение этой пары значений, приемлемой с точки зрения целей исследования.

Поэтому наиболее полную оценку точности (вернее, погрешности) вычислительного эксперимента дает доверительный интервал для математического ожидания рассогласования: интервал, внутрь которого с заданной доверительной вероятностью попадает "истинное" значение m рассогласования:

$$\overline{\Delta v} - t(\gamma, N) \cdot \frac{s}{\sqrt{N}} < m < \overline{\Delta v} + t(\gamma, N) \cdot \frac{s}{\sqrt{N}},$$

$$\overline{\Delta v} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{r} N_i \Delta v_i, \qquad s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^{r} N_i \left(\Delta v_i - \overline{\Delta v}\right)^2};$$

где t(γ,N) определяется по распределению Стьюдента в случае нормального распределения рассогласования Δv при заданной доверительной вероятности γ и числе степеней свободы N; N_i – число попаданий в i-й интервал наблюдаемых рассогласований Δv; N – общее число наблюдаемых значений Δv. Центр этого доверительного интервала определяется значением средней статистической величины рассогласования $\overline{\Delta v}$. РАЗМЕР ДОВЕРИТЕЛЬНОГО ИНТЕРВАЛА ТЕМ МЕНЬШЕ, ЧЕМ МЕНЬШЕ ДОВЕРИТЕЛЬНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ γ, И ЧЕМ БОЛЬШЕ ЧИСЛО ОПЫТОВ N.

Естественно, при планировании вычислительного эксперимента следует стремиться к тому, чтобы такая оценка погрешности (т.е. доверительный интервал) не выходила за границы требуемой с точки зрения целей исследования погрешности ±δ, чего можно добиться разумным увеличением числа опытов и уменьшением доверительной вероятности. Иными словами, следует стремиться к тому, чтобы доверительный интервал целиком укладывался внутри допустимой погрешности (от –δ до +δ).

Если такого условия не удается выполнить на данной серии опытов, то следует или увеличить число опытов N, или уменьшить доверительную вероятность γ. Однако последнее значительно слабее влияет на результат, тем более, что значения доверительной вероятности $\gamma < 0{,}7$ применять не желательно, так как это означает, что почти треть значений рассогласований будет выходить за границы доверительного интервала (и будет трудно уследить за поведением исследуемого параметра).

Единственным практическим недостатком такой оценки может быть лишь необходимость знать закон распределения исследуемого рассогласования.

СИСТЕМАТИЧЕСКАЯ погрешность свидетельствует о закономерности рассогласования между моделью и оригиналом и не позволяет пользоваться моделью. Для оценки систематической погрешности, как указано выше, можно исследовать величину статистического среднего рассогласований $\overline{\Delta v}$. Для этого тоже необходимо знать закон распределения рассогласования. Наличие существенной систематической ошибки, подчиняющейся нормальному закону распределения, проверяется с помощью критерия Стьюдента, по которому сравниваются две величины:

$$t = \frac{\overline{\Delta v}}{s}\sqrt{N} \quad \text{и} \quad t_{\text{крит.}}(1-\alpha, N-1).$$

Здесь $t_{\text{крит.}}(1-\alpha, N-1)$ определяется по таблице распределения Стьюдента при уровне значимости α (допустимой вероятности совершить ошибку первого рода: отвергнуть верную гипотезу) с $N-1$ степенями свободы.

Если $|t| < t_{\text{крит.}}$, то систематическая ошибка НЕЗНАЧИМА, т.е. несущественна и МОЖЕТ БЫТЬ ПРИНЯТА НУЛЕВОЙ. В случае противоположного неравенства: $|t| > t_{\text{крит.}}$ – систематическая ошибка ЗНАЧИМА, т.е. не может считаться нулевой.

НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТЬ со статистической точки зрения может означать незначимость каждого отдельного значения рассогласования по сравнению с общим ходом отображаемой зависимости, иными словами, неподверженность рассогласования каким-либо закономерностям, непринципиальность – случайность. Последний термин и служит идеологической основой для построения критерия оценки непротиворечивости. Как известно, нормальный закон распределения характерен для случайной ошибки измерений. Поэтому достаточно проверить статистическую гипотезу о подчиненности рассогласования данных эксперимента и реального поведения объекта НОРМАЛЬНОМУ ЗАКОНУ распределения с нулевым математическим ожиданием $m = 0$ (как у простой ошибки измерений без систематической погрешности). По критерию Пирсона χ^2 для этого сравниваются две величины:

$$\chi^2_{\text{наблюдаемое}} = \sum_{i=1}^{r}\frac{(N_i - Np_i)^2}{Np_i} \quad \text{и} \quad \chi^2_{\text{крит.}}(\alpha, n),$$

где p_i – вероятность попадания в i-й интервал нормально распределенной случайной величины с математическим ожиданием $m = 0$ и среднеквадратическим отклонением $\sigma = s$), а $\chi^2_{крит.}(\alpha, n)$ определяется по таблице распределения χ^2 при уровне значимости α (допустимой вероятности совершить ошибку первого рода: отвергнуть верную гипотезу) с $n = r–2$ степенями свободы.

Если $\chi^2_{наблюдаемое} < \chi^2_{крит.}(\alpha, n)$, то различие статистического и гипотетического (нормального) законов распределения НЕЗНАЧИМО. Т.е. при заданном уровне значимости α гипотезу о поведении рассогласования между экспериментом и "истиной", как случайной ошибки измерений, можно принять и можно считать результаты вычислительного эксперимента НЕ ПРОТИВОРЕЧАЩИМИ реальности. В случае противоположного неравенства: $\chi^2_{наблюдаемое} > \chi^2_{крит.}(\alpha, n)$ расхождение ЗНАЧИМО (не может считаться случайным) и гипотезу следует отвергнуть, т.е. результаты вычислительного эксперимента противоречат реальному поведению объекта.

Только в том случае, когда выполнены условия И требуемой ТОЧНОСТИ, И НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТИ, можно считать результаты вычислительного эксперимента АДЕКВАТНЫМИ реальности с доверительной вероятностью γ и уровнем значимости α в эксперименте из N опытов.

Условия точности и непротиворечивости можно проверить с помощью статистических критериев по следующему алгоритму, предварительно задав допустимую погрешность $\Delta v_{доп}$, уровни значимости и доверительную вероятность, исходя из целей исследования. В данной лабораторной работе за $\Delta v_{доп}$ принимается значение около 0,1, что соответствует 10 % относительной погрешности. Уровни значимости и доверительную вероятность в лабораторной работе следует подбирать. В этом алгоритме строго соблюдается последовательность проверки статистических критериев, каждый следующий из которых опирается на вывод предыдущего. Действительно: для построения доверительного интервала и проверки гипотезы о нулевой систематической ошибке необходимо быть уверенным, что рассогласование подчиняется нормальному закону распределения, что может быть проверено по критерию Пирсона в начале алгоритма.

Алгоритм:

1► Выбирается один из параметров объекта, для которого есть результаты наблюдения $\{V_k\}$ в N точках, и соответствующий параметр $\{v_k\}$, полученный в контрольном вычислительном эксперименте в тех же условиях в тех же точках.

Вычисляются разности $\Delta v_k = v_k – V_k$.

Вся область значений Δv разбивается на r интервалов таким образом, чтобы в каждый из них попало не менее пяти значений Δv_k.

Производится расчет количества попадания Δv_k в каждый i-й ($1 \le i \le r$) интервал – частот N_i.

Определяются статистические оценки параметров распределения случайной величины Δv: выборочное среднее $\overline{\Delta v}$ и несмещенная оценка дисперсии s^2.

Этот пункт алгоритма выполняется компьютером без участия студента при запуске расчетной части программного обеспечения.

2► Для проверки **НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТИ**, т.е. подчиненности рассогласования нормальному закону распределения, применяется критерий согласия Пирсона χ^2. Уровень значимости α достаточно проверить только для двух крайних (рекомендуемых компьютером) значений. Если $\chi^2_{набл} < \chi^2_{крит}(\alpha; r-2)$, то распределение Δv незначимо отличается от нормального, т.е. результаты вычислительного эксперимента можно считать НЕ ПРОТИВОРЕЧАЩИМИ реальному поведению оригинала. Если $\chi^2_{набл} > \chi^2_{крит}(\alpha; r-2)$, то значимое отличие распределения Δv от нормального свидетельствует о ПРОТИВОРЕЧИИ результатов вычислительного эксперимента реальному поведению оригинала и исследования адекватности следует прекратить.

3► Для оценки **СИСТЕМАТИЧЕСКОЙ ОШИБКИ** проверяется гипотеза о равенстве нулю математического ожидания ($m = 0$) рассогласования Δv с помощью критерия Фишера. Уровень значимости α достаточно проверить только для двух крайних (рекомендуемых компьютером) значений. Если $|t| > t(1 - \alpha_m; N - 1)$, то дальнейшие исследования адекватности нужно прекратить, так как это означает существование систематической погрешности между результатами вычислительного эксперимента и реальным поведением оригинала. Если $|t| < t(1 - \alpha_m; N - 1)$, то систематическая погрешность отсутствует и можно продолжать исследования.

Замечание. Вывод об отсутствии систематической ошибки ($a = 0$) лишь **подтверждает** возможность исследования непротиворечивости в п. 2, а противоположный вывод – опровергает, т.е. делает его ничтожным.

4► Для оценки **ТОЧНОСТИ** математической модели строится доверительный интервал для математического ожидания рассогласования при заданной доверительной вероятности γ. Если наиболее удаленный от нуля конец доверительного интервала не выходит по модулю за допустимую погрешность $\Delta v_{доп} = 0{,}1$, то математическую модель можно считать достаточно точной по отношению к оригиналу. Для выполнения этого условия следует подобрать выгодное (наибольшее) значение доверительной вероятности от 0,7 до 0,999.

5► Если по п. 2 можно считать математическую модель не противоречащей оригиналу, а по п. 4 и достаточно точной, то результаты расчетов адекватны реальному поведению оригинала.

Программное обеспечение

Лабораторная работа № 1 выполняется с помощью имитатора результатов вычислительного эксперимента на математической модели. Он позволяет сымитировать "точные значения реального объекта" и данные "неточного вычислительного эксперимента" на модели, а также:

– определить выборочные характеристики рассогласования (среднего выборочного и выборочную оценку среднеквадратического отклонения);

– проверить гипотезу о нормальном законе распределения рассогласования результатов вычислительного эксперимента с поведением реального объекта с помощью статистического критерия согласия Пирсона;

– проверить гипотезу о равенстве нулю математического ожидания рассогласования результатов вычислительного эксперимента с поведением реального объекта с помощью статистического критерия Стьюдента;

– построить доверительный интервал для математического ожидания рассогласования (погрешности).

Порядок выполнения работы

1) Получить выборочные оценки параметров распределения рассогласования между моделью и оригиналом по данным 120 опытов (результат появляется на экране монитора сразу после входа в режим выполнения расчетов лабораторной работы).

2) Исходя из требуемой обоснованной последовательности действий, провести весь алгоритм оценки адекватности с помощью статистических критериев.

3) Если какие-то результаты проверки критериев Вас не удовлетворяют, повторить исследования с другими значениями уровней значимости, доверительной вероятности или допустимой погрешности. Следует учесть, что необходимость уменьшения доверительной вероятности вплоть до 0,7 свидетельствует о недопустимо низком качестве вычислительного эксперимента. Естественно, следует стремиться к как можно большему значению доверительной вероятности при соблюдении требуемой погрешности.

4) Основываясь на данных проверки статистических гипотез, сформулировать выводы о наличии систематической погрешности математической модели, о ее непротиворечивости и точности, а также в целом об адекватности математической модели реальному поведению оригинала.

<u>Форма отчетности</u>: значения основных точечных характеристик распределения рассогласования, итоговые выбранные значения уровней значимости, доверительной вероятности и допустимой погрешности, результаты проверки статистических гипотез, доверительный интервал для рассогласования, выводы о наличии систематической погрешности математической модели, о ее непротиворечивости и точности, а также в целом об адекватности математической модели реальному поведению оригинала.

7.2. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

Идентификация математической модели разбега самолета Ан-2 при взлете

Цель лабораторной работы: разработка плана и проведение контрольного вычислительного эксперимента для идентификации одного недостающего числового параметра в математическом описании модели.

Теоретические основы

Адекватность математической модели – это соответствие результатов вычислительного эксперимента поведению реального объекта в одних и тех же условиях. Если удовлетворительного с точки зрения задач исследования соответствия не наблюдается, то приходится проводить специальный **контрольный вычислительный эксперимент** по поэтапному подбору и коррекции параметров математической модели – подбору некоторых (неизвестных или неточно известных) входных данных математического описания по известным выходным результатам известного реального случая поведения объекта. Это и есть задача **идентификации**.

Чаще всего математические модели реальных объектов содержат в своем математическом описании нетривиальный вычислительный процесс, который не удается обратить. Это значит, что невозможно построить вычислительный процесс в обратном направлении с тем, чтобы определять входные параметры по известным выходным. Поэтому задача идентификации относится к классу обратных задач и решается в основном методами последовательных приближений.

Для безусловности получения результата решения задачи идентификации необходимо строгое применение методов последовательных приближений, представление о физической сути процесса и о влиянии идентифицируемого (подбираемого) параметра на выходной параметр. Нарушение этих строгостей чаще всего приводит не к решению поставленной задачи, а к случайному попаданию в благоприятную лишь на первый взгляд ситуацию (например, 2¾ землекопа) или к бесконечному вычислительному процессу. Даже в более благоприятном случае нельзя рассчитывать на то, что такая ситуация повторится когда-либо еще. Если же применять известные математические методы, то можно опереться на доказанность их сходимости к решению именно поставленной задачи. Достаточно лишь проверить условия применимости выбранного метода, опираясь на представление о физической сути процесса.

Для идентификации одного входного скалярного параметра по известному значению выходного скалярного параметра в данной лабораторной работе предлагается воспользоваться методами деления отрезка пополам и секущих (хорд) – простейшими итерационными методами.

Для упомянутых итерационных методов сформулированы строгие математические условия применимости и доказана сходимость к решению уравнения. Произвольное искажение методов или "перебор" не гарантируют получение результата идентификации и в математическом моделировании недопустимы.

Итерационные методы применяются для отыскания действительного решения x нелинейного алгебраического уравнения f(x)=g. Но такое решение можно найти только в том случае, если оно существует и единственно. Отсюда вытекают условия применимости указанных методов последовательных приближений, заключающиеся в требованиях теоремы о монотонной на отрезке функции: всякая **монотонная** на отрезке функция принимает любое свое промежуточное значение (между крайними) в одной единственной точке внутри отрезка. В этом случае необходимо лишь показать монотонность на этом отрезке исследуемой зависимости, а также убедиться, что на концах этого отрезка $x^{[0]}$ и $x^{[1]}$ функция принимает значения по обе стороны от необходимого g (т.е. на одном конце $f(x) > g$, а на другом $f(x) < g$).

Выбор такого отрезка, на котором обязательно выполняются условия существования и единственности решения называется **отделением корней**. Указанные условия можно выполнить, опираясь на физические свойства функциио монотонной на отрезке функции или на постоянство знака производной от этой функции.

В итоге процедуры отделения корней получается, что положение решения уравнения известно с точностью до длины выбранного отрезка. Остается построить итерационный процесс таким образом, чтобы на каждой итерации уменьшать отрезок, на котором находится решение.

С этой целью уравнение преобразуется к виду $x = \varphi(x)$, и далее строится процесс последовательных приближений ("пошаговое уточнение") по итерационной формуле: $x^{[i+1]} = \varphi(x^{[i]})$, т.е. по найденному на [i]-й итерации приближенному значению решения вычисляется [i+1]-я итерация. Такой процесс продолжается до тех пор, пока не будут выполнены условия обеспечения требуемой точности.

Рассмотрим способы решения задачи идентификации единственного числового параметра математической модели разбега самолета Ан-2. В этом случае удобно представить вычисляемое значение дистанции разбега в виде функции от искомого параметра: f(x). Тогда задача идентификации представится, как задача отыскания такого значения x, которое обеспечивает известное (например, из летных испытаний) значение дистанции разбега $g = f(x)$.

Первым этапом решения обратной задачи является **ПРОЦЕДУРА ОТДЕЛЕНИЯ КОРНЕЙ**. Для зависимости дистанции разбега от идентифицируемого параметра достаточно из физических или математических соображений обосновать ее монотонность. Но кроме этого необходимо подобрать такой отрезок значений идентифицируемого параметра, на концах которого функция (дистанция разбега) приобретает значения: одно больше, чем требуется, другое меньше, чем требуется.

Далее в лабораторной работе требуется сравнить ход решения задачи идентификации двумя методами (методом деления отрезка пополам и методом секущих), обеспечивающим отыскание единственного решения за конечное число итераций.

Если студент хочет провести решение задачи идентификации каким-то своим способом (в дополнение к требуемым), то он должен доказать, что этот способ тоже обеспечивает отыскание единственного решения за конечное число итераций.

Метод деления отрезка пополам (рис 1): использует итерационное уравнение в виде:

$$x^{[i+1]} = \frac{1}{2}\left(x^{[i]} + x^{[i-1]}\right)$$

и **ПРИМЕНЯЕТСЯ ТОЛЬКО В ТОЙ ОБЛАСТИ ИЗМЕНЕНИЯ x, ГДЕ БЕЗУСЛОВНО СУЩЕСТВУЕТ ЕДИНСТВЕННЫЙ КОРЕНЬ ИСКОМОГО УРАВНЕНИЯ.**

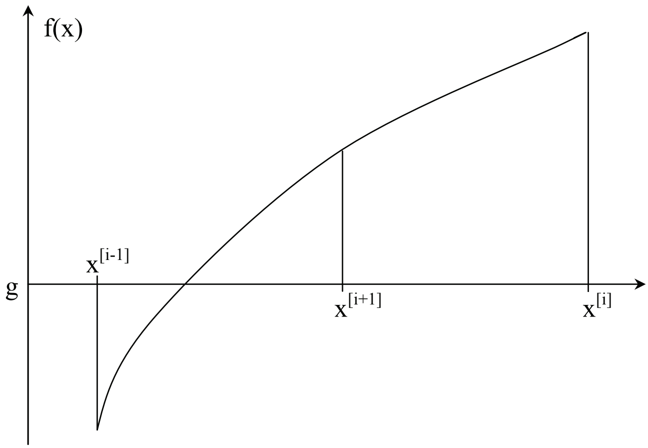

Рис. 1.

На каждом шаге итераций метода деления отрезка пополам очередное приближение аргумента $x^{[i+1]}$ вычисляется по вышеуказанному итерационному уравнению (в центре отрезка), затем с помощью математической модели вычисляется значение $f(x^{[i+1]})$ и выбирается та часть отрезка, на которой опять выполняются все условия применимости метода (рис. 1). Так как функция монотонна на всем отрезке, то она монотонна и на его части, поэтому достаточно выбрать тот (вдвое меньший) отрезок, где на одном конце $f(x) > g$, а на другом $f(x) < g$. Так как очередное приближение аргумента всегда лежит между концами отрезка текущей итерации, то после каждой итерации новый отрезок всегда меньше старого, и область возможного расположения корня постепенно сужается – стягивается в точку. Итерации завершают, когда будет выполнено условие заданной точности: по аргументу $\left|x^{[i+1]} - x^{[i]}\right| < \varepsilon$ или по функции $\left|f\left(x^{[i+1]}\right) - g\right| < \delta$.

Этот экономный метод, как видно из формулы, не использует значения функции для определения очередного приближения; и даже при выборе части интервала для следующего шага использует не столько значения функции, сколько лишь ее знаки.

<u>Метод секущих</u> (метод хорд): **ПРИМЕНЯЕТСЯ, ПРОВОДИТСЯ И ЗАВЕРШАЕТСЯ АНАЛОГИЧНО МЕТОДУ ДЕЛЕНИЯ ОТРЕЗКА ПОПОЛАМ**, но имеет другую итерационную формулу для отыскания очередного приближения, основанную на пропорции для подобных треугольников (рис. 2):

$$x^{[i+1]} = x^{[i]} - \frac{x^{[i]} - x^{[i-1]}}{f(x^{[i]}) - f(x^{[i-1]})} \cdot \left\{f(x^{[i]}) - g\right\}$$

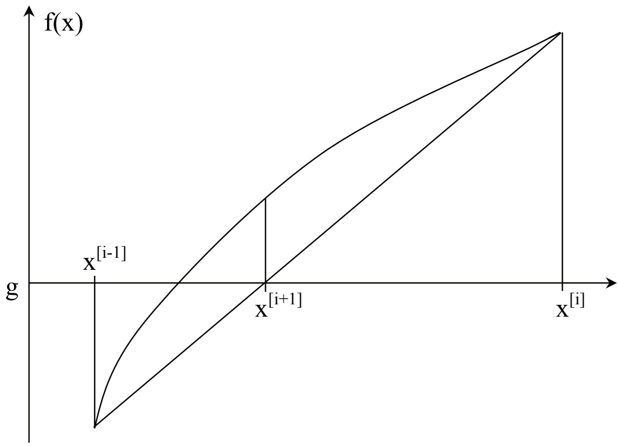

Рис. 2.

Этот метод использует дополнительную информацию о значениях функции в точках последовательных приближений, поэтому он априорно сходится быстрее, чем метод деления отрезка пополам. Однако эта скорость сходимости существенно зависит от выбора исходного приближения.

Программное обеспечение

Лабораторная работа № 2 выполняется с помощью учебной математической модели разбега самолета Ан-2 при взлете. Она позволяет рассчитывать дистанцию разбега при полностью заданном комплекте входных параметров математического описания.

Порядок выполнения работы

Комплект входных параметров, "истинное" значение дистанции разбега и указание недостающего (идентифицируемого) параметра приведены в таблице вариантов к домашнему заданию № 1 (раздел 9.1). В ней номер варианта выбирается по последним двум цифрам зачетной книжки студента, а идентифицируемый параметр, значение которого необходимо уточнить – подчеркнут.

Задавая полный комплект входных данных своего варианта с варьируемыми значениями идентифицируемого параметра (согласно применяемому методу последовательных приближений), необходимо добиться полного совпадения (до последней цифры) полученного расчетного значения дистанции разбега с заданным в варианте "истинным" ее значением, т.е. $|f(x^{[i+1]} – g| < 0,5$.

1) Провести процедуру отделения корней.

2) Провести идентификацию значения недостающего параметра методом деления отрезка пополам.

3) Провести идентификацию значения недостающего параметра методом секущих (методом хорд), начиная с того же исходного отрезка, что и в методе деления отрезка пополам.

4) Сравнить объем вычислительных экспериментов по п. 2 и п. 3.

5) Сформулировать вывод.

Форма отчетности: описание и обоснование плана контрольного вычислительного эксперимента с приведением результатов вычислений всех приближений (указать для каждого приближения значение идентифицируемого параметра и соответствующее ему значение дистанции разбега); вывод.

7.3. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

Собеседование по выполненной контрольной работе

Цель лабораторной работы: Собеседование по заранее выполненной и проверенной преподавателем контрольной работе и допуск к сдаче зачета на ЭВМ.

Отдельная отчетность не требуется.

8. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ

Номер выполняемого варианта определяется по двум последним цифрам шифра (номера зачетной книжки) студента.

8.1. ЗАДАЧА № 1

Раздел 1. Общая теория моделирования
Тема 1.4. Подобная детерминированная модель

Типовая задача. Разработка математической модели для определения скорости отрыва, времени и дистанции разбега самолета Ан-2 по горизонтальной взлетно-посадочной полосе (ВПП) в стандартных атмосферных условиях без возмущений.

Указание: проработать теоретический материал [1] § 2.1.

Замечание. В этом разделе приводится детальное изложение с объяснением последовательности действий всей ПРОЦЕДУРЫ разработки математической модели. Контрольное задание этого не требует, а предлагает студенту лишь ЗАПОЛНИТЬ СООТВЕТСТВУЮЩИЕ РАЗДЕЛЫ математической модели продуманными ВЫПИСКАМИ (исчерпывающими, но без лишних элементов) из предлагаемого материала.

В качестве феноменологического описания разрабатываемой модели используем сведения из аэродинамики и динамики полета самолетов с вспомогательной хвостовой стойкой шасси и с винтовым двигателем.

Разбег такого самолета вплоть до момента отрыва от ВПП производится при постоянном (стояночном) угле атаки α, который однозначно определяет значения основных аэродинамических коэффициентов: c_{xa} – коэффициента лобового сопротивления и c_{ya} – коэффициента аэродинамической подъемной силы. С их помощью можно определить соответствующие составляющие аэродинамической силы, действующей на самолет. Для этого достаточно умножить их на S – площадь крыла самолета и на $q = \dfrac{\rho V^2}{2}$ – скоростной напор, где ρ – плотность атмосферы, V – воздушная скорость движения:

$$X_a = c_{xa} \cdot \frac{\rho V^2}{2} S$$

– сила лобового сопротивления (по направлению набегающего потока) и

$$Y_a = c_{ya} \cdot \frac{\rho V^2}{2} S$$

– аэродинамическая подъемная сила (перпендикулярная X_a и направленная вверх).

Из теории авиационных двигателей известно, что при разбеге самолета следует учитывать зависимость силы тяги P двигателя от скорости движения. В первом приближении для винтовых двигателей можно принять эту зависимость в виде:

$$P = P_0 \cdot (1 - aV - bV^2),$$

где P_0 – взлетная тяга двигателя при нулевой скорости и при заданном положении РУД (рукоятки управления двигателем), a и b – коэффициенты, получаемые эмпирически. Здесь и далее будем полагать, что направление вектора тяги P совпадает с направлением движения самолета.

Используем знания динамики полета и составим уравнения движения самолета в вертикальной плоскости. Поскольку в вертикальном направлении во время разбега вплоть до скорости отрыва не происходит заметного движения, то соответствующее уравнение движения вырождается в уравнение баланса сил: вниз действует сила тяжести mg, вверх – аэродинамическая подъемная сила Y_a и сила N реакции ВПП. Таким образом, уравнение принимает вид:

$$mg = Y_a + N.$$

Из этого уравнения можно определить скорость самолета в момент отрыва от ВПП $V_{отр}$, т.е. в момент обращения N в нуль: $mg = c_{ya} \cdot \frac{\rho V_{отр}^2}{2} S$, откуда окончательно можно вычислить:

$$V_{отр} = \sqrt{\frac{2mg}{c_{ya} \rho S}}.$$

Составим уравнение движения самолета в продольном направлении. В этом направлении сила тяги двигателя P разгоняет самолет, а сила лобового сопротивления X_a и сила сопротивления трения качения колес шасси по ВПП $F = f \cdot N = f \cdot (mg - Y_a)$ – стремятся его затормозить. Тогда по второму закону Ньютона:

$$m \cdot \frac{dV}{dt} = P - X_a - F \cdot$$

Для отыскания дистанции разбега $L_{разб}$ понадобится еще одно известное кинематическое уравнение:

$$V = \frac{dL}{dt}.$$

Таким образом, выписаны все соотношения, представляющие физическую взаимосвязь элементов и параметров объекта (законы движения, **функциональные соотношения**, функции), входящие в математическое описание модели. Однако, это еще не все математическое описание и не вся модель. Необходимо разработать методы вычисления требуемых от модели величин, которые можно было бы реализовать аналитически или с помощью ЭВМ. Для этого исследуем подробнее структуру полученных дифференциальных уравнений с точки зрения определения времени $T_{разб}$ и дистанции разбега $L_{разб}$. Из уравнения движения в продольном направлении следует:

$$m \cdot \frac{dV}{dt} = P - X_a - F = P_0(1 - aV - bV^2) - c_{xa} \cdot \frac{\rho V^2}{2} S - fmg + fc_{ya} \cdot \frac{\rho V^2}{2} S,$$

или $$\frac{dV}{dt} = \frac{P_0}{m}(1 - aV - bV^2) - fg - \frac{\rho V^2}{2m} S(c_{xa} - fc_{ya}) = A + BV + CV^2,$$

где $$A = \frac{P_0}{m} - fg; \quad B = -\frac{P_0}{m} a; \quad C = -\frac{P_0}{m} b - \frac{\rho S}{2m}(c_{xa} - fc_{ya}),$$

т.е. дифференциальное уравнение разрешимо в квадратурах аналитически, как уравнение с разделяющимися переменными:

$$dt = \frac{dV}{A + BV + CV^2},$$

откуда: $$T_{разб} = \int\limits_0^{V_{отр}} \frac{dV}{A + BV + CV^2} =$$

$$= \left. \begin{cases} \frac{1}{B}(\ln|A + BV|) & \text{при} \quad C = 0, \\ \frac{-2}{B + 2CV} & \text{при} \quad C \neq 0 \quad \text{и} \quad B^2 = 4AC, \\ \frac{1}{\sqrt{B^2 - 4AC}} \ln\left|\frac{2CV + B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2CV + B + \sqrt{B^2 - 4AC}}\right| & \text{при} \quad C \neq 0 \quad \text{и} \quad B^2 > 4AC, \\ \frac{2}{\sqrt{4AC - B^2}} \operatorname{arctg}\left|\frac{2CV + B}{\sqrt{4AC - B^2}}\right| & \text{при} \quad C \neq 0 \quad \text{и} \quad B^2 < 4AC. \end{cases} \right|_0^{V_{отр}} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{B}(\ln|A + BV_{отр}|) - \frac{1}{B}\ln|A| & \text{при} \quad C = 0, \\ \frac{-2}{B + 2CV_{отр}} + \frac{2}{B} & \text{при} \quad C \neq 0 \quad \text{и} \quad B^2 = 4AC, \\ \frac{1}{\sqrt{B^2 - 4AC}}\left(\ln\left|\frac{2CV_{отр} + B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2CV_{отр} + B + \sqrt{B^2 - 4AC}}\right| - \ln\left|\frac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}\right|\right) & \text{при} \quad C \neq 0 \quad \text{и} \quad B^2 > 4AC, \\ \frac{2}{\sqrt{4AC - B^2}}\left(\operatorname{arctg}\left|\frac{2CV_{отр} + B}{\sqrt{4AC - B^2}}\right| - \operatorname{arctg}\left|\frac{B}{\sqrt{4AC - B^2}}\right|\right) & \text{при} \quad C \neq 0 \quad \text{и} \quad B^2 < 4AC. \end{cases}$$

Из кинематического дифференциального уравнения в силу полученного выражения для dt следует:

$$dL = Vdt = \frac{VdV}{A + BV + CV^2},$$

откуда: $$L_{разб} = \int\limits_0^{V_{отр}} \frac{VdV}{A + BV + CV^2} =$$

$$
=\left\{\begin{array}{ll}
\left(\frac{V}{B}-\frac{A}{B^2}\ln\left|A+BV\right|\right)\Bigg|_0^{V_{отр}} & \text{при}\quad C=0,\\
\frac{1}{2C}\ln\left|A+BV+CV^2\right|\Bigg|_0^{V_{отр}}-\frac{B}{2C}\int\limits_0^{V_{отр}}\frac{dV}{A+BV+CV^2} & \text{при}\quad C\neq 0.
\end{array}\right\}=
$$

$$
=\left\{\begin{array}{ll}
\frac{1}{B}\left(V_{отр}-AT_{разб}\right) & \text{при}\quad C=0,\\
\frac{1}{2C}\left(\ln\left|A+BV_{отр}+CV_{отр}^2\right|-\ln\left|A\right|-BT_{разб}\right) & \text{при}\quad C\neq 0.
\end{array}\right.
$$

На этом завершается описание **методов вычисления** требуемых величин $V_{отр}$, $T_{разб}$ и $L_{разб}$. Вместе с предыдущими соотношениями они составляют сердцевину математического описания модели для заданной цели.

Для завершения математического описания к функциональным взаимосвязям и методам вычисления следует добавить числовые и функциональные **данные** параметров объекта, которые позволят вычислить требуемые величины:

– плотность воздуха ρ = 1,225 кг/м ;

– коэффициент трения качения колес шасси по ВПП f = 0,035;

– массу самолета m = 5250 кг;

– площадь крыла S = 71,5 м ;

– аэродинамические коэффициенты: c_{xa} = 0,3; c_{ya} = 1,5;

– взлетную тягу двигателя в стандартных атмосферных условиях при нулевой скорости P_0 = 2000 кгс;

– коэффициенты зависимости тяги от скорости: a = 0,002 с/м, b = 0,0002 $с^2/м^2$;

– **и начальные условия** для интегрирования дифференциальных уравнений: при $t = 0$: $V = 0$, $L = 0$, которые уже использованы для записи определенных интегралов.

Как нетрудно видеть, полнота математического описания модели позволяет произвести расчеты и получить значения требуемых величин в заданных условиях.

Кроме математического описания в математическую модель входит описание всех **допущений**, использованных в процессе ее построения (в том числе и из дисциплин аэродинамики, динамики полета ЛА и т.п., а также предположения и допущения, сделанные по тексту в процессе выбора функциональных соотношений и разработки методов вычисления), и **алгоритмы перевода** исходных и выходных данных с модели на оригинал и обратно (в данном простом примере этот перевод осуществляется с коэффициентами подобия равными единице, т.е. непосредственно, если не считать правила округления в пределах точности измерений).

Условие задачи контрольной работы

Напоминание: Требуется лишь ЗАПОЛНИТЬ СООТВЕТСТВУЮЩИЕ РАЗДЕЛЫ математической модели (обозначенные ниже •) продуманными

ВЫПИСКАМИ (исчерпывающими, но без лишних элементов) из предложенного выше материала – все содержание предыдущих страниц переписывать не надо.

1) Требуется составить основные элементы математической модели для определения скорости отрыва, времени и дистанции разбега самолета Ан-2 по горизонтальной взлетно-посадочной полосе (ВПП) в стандартных атмосферных условиях без возмущений:

– выписать все необходимые составляющие математического описания модели:

- числовые данные математической модели,
- функциональные соотношения, на которых основана модель,
- методы вычисления требуемых параметров;

– перечислить лежащие в основе математической модели:

- основные допущения и предположения (кроме ссылок на использованные дисциплины привести не менее 4 конкретных предположений, использованных в вышеприведенном тексте при разработке математического описания),
- способы перевода исходных и выходных данных с оригинала на модель и обратно.

2) Решить задачу идентификации указанного в варианте параметра по известному значению дистанции разбега – эта часть задания выполняется двумя методами на лабораторной работе № 2 – привести полный протокол последовательности действий, выполненных на лабораторной работе № 2, и вывод о сравнении примененных методов.

При защите основное внимание уделяется понятию математического описания, его составу, условиям применимости методов решения задачи идентификации.

Общие данные для всех вариантов:

– плотность воздуха $\rho = 1{,}225$ кг/м^3;

– площадь крыла $S = 71{,}5$ м^2;

– коэффициенты зависимости тяги от скорости: $a = 0{,}002$ с/м, $b = 0{,}0002$ с^2/м^2.

Индивидуальные данные вариантов
(подчеркнут параметр, который необходимо идентифицировать – уточнить):

N вар.	m кг	f	c_{xa}	c_{ya}	P_o кгс	$L_{разб}$ м
1	<u>4500</u>	0, 020	0, 25	1,30	1500	203
2	4625	0, 020	<u>0, 30</u>	1,30	2000	166
3	5000	0, 020	0, 25	1,30	<u>2000</u>	236
4	4125	0, 035	0, 25	1,30	<u>1500</u>	223

N вар.	m кг	f	c_{xa}	c_{ya}	P_o кгс	$L_{разб}$ м
5	5000	0, 020	0, 35	1,70	1500	401
6	5000	0, 035	0, 25	1,30	1500	342
7	5250	0, 035	0, 25	1,50	2000	232
8	5000	0, 020	0, 30	1,70	1800	187
9	4500	0, 050	0, 25	1,30	1800	170
10	4750	0, 050	0, 25	1,30	1500	373
11	5125	0, 050	0, 25	1,30	2000	245
12	5500	0, 050	0, 20	1,30	1400	700
13	4500	0, 020	0, 25	1,50	1400	154
14	4500	0, 020	0, 25	1,70	2000	115
15	5000	0, 020	0, 25	1,50	1500	232
16	5250	0, 020	0, 30	1,50	1400	381
17	4000	0, 035	0, 25	1,50	1500	155
18	4375	0, 035	0, 25	1,70	2000	115
19	5000	0, 035	0, 25	1,50	1800	163
20	5125	0, 035	0, 20	1,50	1300	472
21	5500	0, 035	0, 25	1,50	1500	213
22	4250	0, 050	0, 25	1,50	1500	121
23	4000	0, 050	0, 25	1,50	1500	210
24	5000	0, 050	0, 20	1,50	2000	168
25	4500	0, 050	0, 25	1,50	1900	218
26	4000	0, 020	0, 25	1,70	1500	75
27	4375	0, 020	0, 25	1,30	1500	140
28	4750	0, 020	0, 35	1,70	1400	188
29	4500	0, 020	0, 25	1,70	1900	146
30	5500	0, 020	0, 25	1,70	1500	188
31	4250	0, 035	0, 25	1,70	2000	139
32	5000	0, 035	0, 25	1,70	1900	114
33	5000	0, 035	0, 35	1,70	2000	131
34	5000	0, 035	0, 25	1,70	1500	252
35	4125	0, 050	0, 35	1,70	1300	152
36	4500	0, 050	0, 25	1,70	1500	119

N вар.	m кг	f	c_{xa}	c_{ya}	P_o кгс	$L_{разб}$ м
37	4875	0, 050	0, 25	1,30	1500	189
38	4500	0, 050	0, 25	1,70	2000	151
39	4250	0, 020	0, 30	1,30	2000	157
40	4625	0, 020	0, 20	1,30	1500	424
41	5000	0, 020	0, 30	1,70	2000	226
42	5375	0, 020	0, 30	1,30	1500	349
43	5000	0, 035	0, 30	1,30	1500	230
44	4500	0, 035	0, 20	1,30	2000	166
45	4875	0, 035	0, 30	1,30	1500	253
46	4500	0, 035	0, 30	1,30	2000	290
47	4000	0, 050	0, 20	1,30	1400	228
48	4375	0, 050	0, 30	1,70	2000	167
49	4000	0, 050	0, 30	1,30	1800	263
50	5500	0, 050	0, 30	1,30	1500	473
51	4125	0, 020	0, 30	1,30	1300	230
52	4500	0, 020	0, 20	1,50	2000	135
53	4500	0, 020	0, 30	1,50	1500	285
54	5250	0, 020	0, 30	1,50	1500	213
55	4000	0, 035	0, 30	1,30	2000	97
56	5000	0, 035	0, 30	1,50	1500	199
57	4750	0, 035	0, 30	1,30	1400	301
58	5125	0, 035	0, 30	1,50	1500	211
59	4500	0, 035	0, 35	1,30	2000	156
60	4250	0, 050	0, 25	1,50	1400	224
61	4000	0, 050	0, 30	1,50	1900	157
62	5000	0, 050	0, 30	1,50	1500	214
63	4500	0, 050	0, 30	1,50	1500	499
64	5000	0, 020	0, 30	1,70	1300	162
65	4375	0, 020	0, 20	1,70	2000	95
66	4750	0, 020	0, 30	1,30	2000	122
67	5125	0, 020	0, 30	1,70	2000	345
68	5250	0, 020	0, 35	1,70	1400	276

N вар.	m кг	f	c_{xa}	c_{ya}	P_o кгс	$L_{разб}$ м
69	5000	0, 035	0, 30	1,70	1500	142
70	4750	0, 035	0, 30	1,70	1500	123
71	5000	0, 035	0, 25	1,70	2000	145
72	4500	0, 035	0, 30	1,70	1900	188
73	4125	0, 050	0, 30	1,30	1400	156
74	5000	0, 050	0, 30	1,70	1900	119
75	4875	0, 050	0, 30	1,70	1500	141
76	4500	0, 050	0, 30	1,70	1400	338
77	4125	0, 020	0, 20	1,30	1400	398
78	5000	0, 020	0, 35	1,30	1900	212
79	4875	0, 020	0, 35	1,70	2000	221
80	5250	0, 020	0, 35	1,30	1500	433
81	5000	0, 035	0, 35	1,30	1800	230
82	5125	0, 035	0, 35	1,30	1500	426
83	4250	0, 050	0, 35	1,70	1500	341
84	4625	0, 050	0, 25	1,30	2000	245
85	4500	0, 020	0, 35	1,30	1900	443
86	4000	0, 020	0, 35	1,50	2000	217
87	4375	0, 020	0, 35	1,30	1900	131
88	4750	0, 020	0, 20	1,50	1800	213
89	4250	0, 035	0, 35	1,50	1500	142
90	5500	0, 035	0, 35	1,50	1500	316
91	5000	0, 035	0, 35	1,50	1500	205
92	5375	0, 035	0, 20	1,50	1900	287
93	4500	0, 035	0, 35	1,50	2000	279
94	4125	0, 050	0, 35	1,50	2000	209
95	4500	0, 050	0, 35	1,70	2000	139
96	4000	0, 050	0, 35	1,50	1900	211
97	4250	0, 020	0, 35	1,70	2000	172
98	4625	0, 020	0, 35	1,30	2000	125
99	4000	0, 050	0, 30	1,30	1300	254
100	5000	0, 025	0, 30	1,60	1800	143

8.2. ЗАДАЧА № 2

Раздел 2. Методы разработки моделей
Тема 2.1. Подобие и анализ размерностей

Типовая задача. Составление функциональной зависимости с помощью пи-теоремы.

Указание: проработать теоретический материал [1] § 3.2.

Анализ размерностей является мощным средством для построения математических описаний моделей природных объектов, соотношения между параметрами которых по тем или иным причинам не известны. Принципиальная возможность этого основывается на том факте, что все основные законы природы описываются степенными комплексами:

$$\Pi = x_1^{y_1} \cdot x_2^{y_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{y_n}$$

– произведениями n физических параметров x_i с некоторыми числовыми показателями степени y_i.

В СИ приняты следующие основные единицы размерности величин: длина – м, масса – кг, время – с, сила тока – А, температура – °К, количество вещества – моль, сила света – кд. А размерности других величин, таких, например, как сила, выражается через эти основные единицы размерности в виде: $Н = кг \cdot м/с^2 = кг^1 \cdot м^1 \cdot с^{-2}$.

Одно из следствий "**пи-теоремы**" (по названию греческой буквы П – "пи"): из параметров, характерных (определяющих) для исследуемого природного явления, всегда можно составить не менее одного безразмерного степенного комплекса (размерность которого равна 1).

В теории математического моделирования применение пи-теоремы позволяет составить математическое описание нового явления. С помощью определенного по пи-теореме степенного комплекса можно найти вид характерной функциональной зависимости с точностью до числового (безразмерного) коэффициента. По завершении разработки полного математического описания данного явления недостающие числовые коэффициенты могут быть найдены эмпирически (из опыта) в процессе решения задачи идентификации.

Пример составления зависимости с помощью пи-теоремы.

В условиях невесомости (при этом ускорение силы тяжести несущественно) рассматривается шар диаметром d в вязкой жидкости. Для очень медленного равномерного движения шара в жидкости (при этом плотность жидкости и масса шара не существенны) требуется определить зависимость силы сопротивления W от существенных параметров явления.

Из условия задачи следует, что масса шара, ускорение силы тяжести и плотность жидкости не являются для данного процесса существенными параметрами. Составим список других физических параметров, которые могут претендовать на существенные. Вязкость жидкости характеризуется коэффициентом динамической вязкости μ, который в СИ имеет размерность [кг/(м·с)]. Существенно влияние диаметра шара d и скорости движения V. Возможно влияние и температуры T. Таким образом, выявлены следующие параметры, которые могут быть существенными для определения W в исследуемом явлении: d, μ, V, T. Их размерности, выраженные через основные единицы измерений: [d] = м, [μ] = кг/(м·с), [V] = м/с, [T] = °K, а размерность силы [W] = кг·м/с^2.

Найдем вид возможных степенных комплексов П, которые согласно пи-теореме должны быть безразмерными: [П] = 1, т.е. такие показатели степеней y_i при существенных физических параметрах задачи, которые составляют безразмерное произведение:

$$\Pi = d^{y_1} \cdot \mu^{y_2} \cdot V^{y_3} \cdot W^{y_4} \cdot T^{y_5}.$$

Из приведенных размерностей следует:

$$\begin{aligned}[\Pi] = 1 = [d]^{y_1} \cdot [\mu]^{y_2} \cdot [V]^{y_3} \cdot [W]^{y_4} \cdot [T]^{y_5} = \\ = \text{м}^{y_1}\text{кг}^{y_2}\text{м}^{-y_2}\text{с}^{-y_2}\text{м}^{y_3}\text{с}^{-y_3}\text{кг}^{y_4}\text{м}^{y_4}\text{с}^{-2y_4}(°K)^{y_5} = \\ = \text{м}^{y_1-y_2+y_3+y_4} \cdot \text{кг}^{y_2+y_4} \cdot \text{с}^{-y_2-y_3-2y_4} \cdot (°K)^{y_5}.\end{aligned}$$

Поскольку м, с, кг и °K – основные единицы измерений в СИ, т.е. имеют независимые размерности (не сокращаются друг с другом), то для обращения в единицу всего этого выражения суммы показателей степеней при каждой из них должны независимо обращаться в нуль:

$$\left.\begin{array}{lllll}(\text{м}): & y_1 - y_2 + y_3 + & y_4 & & = 0 \\ (\text{кг}): & \quad y_2 & + \; y_4 & & = 0 \\ (\text{с}): & \quad - y_2 - y_3 - & 2y_4 & & = 0 \\ (°K) & & & y_5 & = 0\end{array}\right\}.$$

Далее из (кг) следует: $y_2 = -y_4$, затем из (с): $y_3 = -y_4$, а из (м): $y_1 = -y_4$. Итак:

$$\Pi = \left(d^{-1} \cdot \mu^{-1} \cdot V^{-1} \cdot W^{1} \cdot T^{0}\right)^{y_4}.$$

Отсюда ввиду произвольности y_4 и безразмерности П вытекает функциональная зависимость:

$$\frac{W}{\mu d V} = k \text{ или } W = k\mu d V,$$

где k – безразмерное число.

Таким образом, искомая зависимость силы сопротивления вязкой жидкости при медленном движении шара в невесомости имеет вид: W = kμdV.

Условие задачи контрольной работы

Требуется с помощью пи-теоремы составить вид функциональной зависимости для математического описания модели следующего природного явления. В атмосфере происходит некоторое взрывное воздействие. Для контрольной точки, находящейся на расстоянии R от взрыва, требуется выявить вид функциональной зависимости характеристики ударной волны от характеристики взрывного воздействия, расстояния R, температуры T и еще одного параметра атмосферы, ВЫБИРАЕМОГО СТУДЕНТОМ произвольно.

Примечание 1. Ударная волна в контрольной точке в различных вариантах характеризуется одной из следующих величин (их размерности СТУДЕНТ ОПРЕДЕЛЯЕТ САМОСТОЯТЕЛЬНО): t – время прихода ударной волны; Δp – интенсивность ударной волны (разность давлений перед и после волны); V – скорость прохождения ударной волны.

Примечание 2 (общие сведения, не использующиеся при решении). В таблице вариантов заданий взрывное воздействие характеризуется одной из следующих величин: W – энергия; N – мощность; J – импульс силы; F – сила; m – изменение массы; q – скорость изменения массы; w – плотность энергии; n – плотность мощности; i – плотность импульса; f – плотность силы; β – изменение плотности массы; τ – скорость изменения плотности массы.

Примечание 3. Обратить внимание, что заданием требуется получение функциональной зависимости для характеристики ударной волны, поэтому не все возможные критерии подобия необходимо рассматривать. Приветствуется логическое обоснование выбора нужных случаев, а также физическая интерпретация полученного результата.

При защите основное внимание уделяется понятиям степенного комплекса и критерия подобия, сути П-теоремы, обоснованию системы уравнений и выбора рассмотренных вариантов решения.

Таблица вариантов заданий

№ вар.	характеристика ударной волны	характеристика взрыва, размерность	
1	t	W	Дж
2	Δp	W	Дж
3	V	W	Дж
4	t	N	Вт
5	Δp	N	Вт
6	V	N	Вт
7	t	J	Н·с

№ вар.	характеристика ударной волны	характеристика взрыва, размерность	
8	Δp	J	Н·с
9	V	J	Н·с
10	t	F	Н
11	Δp	F	Н
12	V	F	Н
13	t	m	Па·м·с^2
14	Δp	m	Па·м·с^2
15	V	m	Па·м·с^2
16	t	q	Па·м·с
17	Δp	q	Па·м·с
18	V	q	Па·м·с
19	t	w	Дж/м^3
20	Δp	w	Дж/м^3
21	V	w	Дж/м^3
22	t	n	Вт/м^3
23	Δp	n	Вт/м^3
24	V	n	Вт/м^3
25	t	i	Н·с/м^3
26	Δp	i	Н·с/м^3
27	V	i	Н·с/м^3
28	t	f	Н/м^3
29	Δp	f	Н/м^3
30	V	f	Н/м^3
31	t	β	Па·с^2/м^2
32	Δp	β	Па·с^2/м^2
33	V	β	Па·с^2/м^2
34	t	τ	Па·с/м^2
35	Δp	τ	Па·с/м^2

№ вар.	характеристика ударной волны	характеристика взрыва, размерность	
36	V	τ	Па·с/м^2
37	t	W	Дж/м
38	Δp	W	Дж/м
39	V	W	Дж/м
40	t	N	Вт/м
41	Δp	N	Вт/м
42	V	N	Вт/м
43	t	J	Н·с/м
44	Δp	J	Н·с/м
45	V	J	Н·с/м
46	t	F	Н/м
47	Δp	F	Н/м
48	V	F	Н/м
49	t	m	Па·с^2
50	Δp	m	Па·с^2
51	V	m	Па·с^2
52	t	q	Па·с
53	Δp	q	Па·с
54	V	q	Па·с
55	t	w	Дж/м^4
56	Δp	w	Дж/м^4
57	V	w	Дж/м^4
58	t	n	Вт/м^4
59	Δp	n	Вт/м^4
60	V	n	Вт/м^4
61	t	i	Н·с/м^4
62	Δp	i	Н·с/м^4
63	V	i	Н·с/м^4

№ вар.	характеристика ударной волны	характеристика взрыва, размерность	
64	t	f	Н/м^4
65	Δp	f	Н/м^4
66	V	f	Н/м^4
67	t	β	Па·с^2/м^3
68	Δp	β	Па·с^2/м^3
69	V	β	Па·с^2/м^3
70	t	τ	Па·с/м^3
71	Δp	τ	Па·с/м^3
72	V	τ	Па·с/м^3
73	t	W	Дж/м^2
74	Δp	W	Дж/м^2
75	V	W	Дж/м^2
76	t	N	Вт/м^2
77	Δp	N	Вт/м^2
78	V	N	Вт/м^2
79	t	J	Н·с/м^2
80	Δp	J	Н·с/м^2
81	V	J	Н·с/м^2
82	t	F	Н/м^2
83	Δp	F	Н/м^2
84	V	F	Н/м^2
85	t	m	Па·с^2/м
86	Δp	m	Па·с^2/м
87	V	m	Па·с^2/м
88	t	q	Па·с/м
89	Δp	q	Па·с/м
90	V	q	Па·с/м
91	t	w	Дж/м^5

92	Δp	w	Дж/м^5
93	V	w	Дж/м^5
94	t	n	Вт/м^5
95	Δp	n	Вт/м^5
96	V	n	Вт/м^5
97	t	i	Н·с/м^5
98	Δp	i	Н·с/м^5
99	V	i	Н·с/м^5
100	t	f	Н/м^5

8.3. ЗАДАЧА № 3

Раздел 2. Методы разработки моделей
Тема 2.3. Понятие о стохастических моделях

Типовая задача. Имитация случайного процесса.

Указание: проработать теоретический материал [1] § 3.5.

Построение имитационных математических моделей необходимо в тех случаях, когда для математического описания недостаточно аналитического вида зависимостей, поскольку явление подвержено влиянию случайных факторов. В этом случае используются математические описания случайных величин, т.е. законы их распределения. (Законом распределения случайной величины в теории вероятностей называется функциональная зависимость

$$P = P(\xi \le x) = F(x),$$

где x – значение из диапазона реализации случайной величины ξ, P – вероятность того, что очередная реализация случайной величины ξ окажется не превосходящей значения x. Законы распределения находят из статистической обработки результатов наблюдения за процессом).

Случайная величина имитируется с помощью датчика случайных чисел. В ЭВМ датчик случайных чисел – это специальная программа, при каждом обращении к которой получается случайное число, заключенное между 0 и 1. (Его можно получить и без ЭВМ с помощью таблицы случайных чисел). Так как вероятность появления события определяется тоже величиной, заключенной между 0 и 1, то их отождествляют. Далее, пользуясь законами распределения требуемых случайных величин рассматриваемого процесса, определяют их имитационные значения. Многократным повторением такой процедуры имитируется весь случайный процесс так, как он МОГ БЫ произойти на самом деле. Описанный метод имитационного моделирования носит название метода статистических испытаний (метода Монте-Карло).

Пример имитации случайного процесса.

Требуется сымитировать работу аэродрома методом Монте-Карло. Найти время, за которое совершат посадку и освободят ВПП 10 самолетов. Выделить интервалы времени, в течение которых ВПП свободна более 5 минут, т.е. когда вылетающий самолет может произвести взлет. Выделить номера самолетов, которым будет отказано в посадке по причине занятости ВПП.

Интервалы времени между очередными подлетами самолетов к ВПП $\Delta t_С$ – случайная величина. Время, в течение которого ВПП занята совершающим посадку самолетом, $\Delta t_З$ – тоже случайная величина. Статистической обработкой результатов наблюдения за этими процессами получены интегральные функции распределения:

$\Delta t_С$, мин	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$F_1(\Delta t_С)$	0	0,02	0,02	0,23	0,40	0,56	0,71	0,83	0,92	0,97	1

$\Delta t_З$, мин	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
$F_2(\Delta t_З)$	0	0,01	0,02	0,05	0,19	0,40	0,67	0,85	0,96	0,99	1

При реализации метода Монте-Карло предлагается использовать следующую последовательность случайных чисел:
0,31 0,91 0,06 0,49 0,01 0,08 0,91 0,05 0,45 0,86 0,54 0,79 0,94 0,90 0,75 0,85 0,08 0,39 0,99 0,23.

Для имитации работы аэродрома методом Монте-Карло построим расчетную таблицу вычисления моментов подлета самолетов $t_С$ и моментов освобождения ВПП $t_З$. Для определения момента освобождения ВПП каждым самолетом $t_З$ следует к моменту его подлета $t_С$ прибавить время занятости ВПП $\Delta t_З$, определенное по таблице функции распределения $F_2(\Delta t_З)$ с помощью очередного случайного числа. Момент подлета очередного самолета определится с помощью прибавления к $t_С$ предыдущего самолета интервала времени подлета очередного $\Delta t_С$, определенного по таблице распределения $F_1(\Delta t_С)$ с помощью очередного случайного числа. В том случае, если на каком-то шаге $t_С$ очередного самолета окажется меньше $t_З$ предыдущего (очередной самолет подлетел раньше, чем освободилась ВПП), этот подлетевший самолет не получает разрешения на посадку (ему предписывается уход на второй круг). Если на каком-то шаге время подлета очередного самолета окажется $t_С > t_З + 5$ (очередной самолет подлетает к аэродрому таким образом, что свободная ВПП ему понадобится не ранее, чем через 5 минут), то можно произвести взлет вылетающего самолета.

Расчетная таблица имитационного моделирования

Подлет самолета			Освобождение ВПП		
F_1	Δt_C	t_C	F_2	$\Delta t_З$	$t_З$
0,31	3,5	3,5	0,91	1,5	5,0
0,06	2,2	5,7	0,49	1,1	6,8
0,01	0,5	6,2	*– посадка запрещена*		
0,08	2,3	8,5	0,91	1,5	10,0
0,05	2,1	10,6	0,45	1,0	11,6
0,86	7,3	17,9	0,54	1,1	19,0
0,79	6,7	24,6	0,94	1,6	26,2
0,90	7,8	32,4	0,75	1,3	33,7
0,85	7,2	39,6	0,08	0,6	40,2
0,39	3,9	43,5	0,99	1,8	45,3

Вывод по результатам имитации:

1) 10 самолетов будут приняты диспетчером посадки за 45,3 минуты.

2) 4 интервала времени, когда ВПП свободна более 5 минут, позволяют произвести взлет вылетающих самолетов в следующие периоды времени (в минутах): с 11,6 по 17,9; с 19,0 по 24,6; с 26,2 по 32,4; с 33,7 по 39,6.

3) Третий самолет, подлетевший на 6,2 минуте, не получил разрешения на посадку, т.к. ВПП оказалась занятой предыдущим самолетом до 6,8 минуты.

Условие задачи контрольной работы

Требуется сымитировать работу аэродрома методом Монте-Карло. Найти время, за которое совершат посадку и освободят ВПП 10 самолетов. Выделить интервалы времени, в течение которых ВПП свободна более 5 минут, т.е. когда вылетающий самолет может произвести взлет. Выделить номера самолетов, которым будет отказано в посадке по причине занятости ВПП.

Интервалы времени между очередными подлетами самолетов к ВПП Δt_C – случайная величина. Время, в течение которого ВПП занята совершающим посадку самолетом, $\Delta t_З$ – тоже случайная величина. Статистической обработкой результатов наблюдения за этими процессами получены интегральные функции распределения:

Δt_C, мин	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$F_1(\Delta t_C)$	0	0,02	0,02	0,23	0,40	0,56	0,71	0,83	0,92	0,97	1

$\Delta t_З$, мин	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
$F_2(\Delta t_З)$	0	0,01	0,02	0,05	0,19	0,40	0,67	0,85	0,96	0,99	1

При реализации метода Монте-Карло следует использовать последовательность случайных чисел, ЧИТАЕМУЮ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО ПО СТРОКАМ из следующей таблицы, НАЧИНАЯ С МЕСТА ПЕРЕСЕЧЕНИЯ строки с номером предпоследней цифры зачетной книжки студента и столбца с номером последней цифры. (В таблице для примера выделено первое случайное число для 48-го варианта). Для получения случайного числа следует каждую пару цифр использовать в качестве двух десятичных знаков после нуля целых.

Таблица для формирования последовательности случайных чисел

		последняя цифра зачетки									
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**0**
предпоследняя цифра зачетки	**0**	94	96	37	43	14	33	90	79	99	69
	1	59	31	55	23	09	93	34	22	14	35
	2	82	41	97	44	19	83	34	85	78	37
	3	44	51	82	05	89	33	64	03	38	58
	4	14	58	66	38	28	24	47	$\boxed{02}$	61	19
	5	17	98	21	00	74	05	88	18	03	62
	6	10	75	06	27	90	19	24	60	67	11
	7	69	12	39	40	81	73	02	12	53	54
	8	25	16	51	99	81	01	03	41	32	29
	9	18	30	50	40	39	30	66	89	95	37
		62	14	64	98	06	08	59	62	82	15
		23	94	79	03	68	49	67	73	85	

При защите основное внимание уделяется понятию имитационной (стохастической) математической модели, составу ее математического описания, методу статистических испытаний (методу Монте-Карло) и соотношению полученных результатов с оригиналом.

М.С. Кубланов

Моделирование систем и процессов

Учебно-методическое пособие

В авторской редакции

Подписано в печать 24.05.2021 г.
Формат 60x84/16 Печ. л. 3 Усл. печ. л. 2,79
Заказ № 734/0330-УМП06 Тираж 70 экз.

Московский государственный технический университет ГА
125993, Москва, Кронштадтский бульвар, д. 20

Издательский дом Академии имени Н. Е. Жуковского
125167, Москва, 8-го Марта 4-я ул., д. 6А
Тел.: (495) 973-45-68
E-mail: zakaz@itsbook.ru