ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ» (МГТУ ГА)

Кафедра прикладной математики

Н.И. Овсянникова

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА
И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебно-методическое пособие
по выполнению контрольного домашнего задания

для студентов I курса
направления 01.03.04
очной формы обучения

Москва
ИД Академии Жуковского
2020

УДК 512.6 + 514.1
ББК 6Ф6.5
О-34

Рецензент:
Лукацкий А.М. – д-р физ.-мат. наук, профессор

Овсянникова Н.И.
О-34 Линейная алгебра и аналитическая геометрия [Текст] : учебно-методическое пособие по выполнению контрольного домашнего задания / Н.И. Овсянникова. – М.: ИД Академии Жуковского, 2020. – 52 с.

Данное учебно-методическое пособие издается в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» по учебному плану для студентов I курса направления 01.03.04 очной формы обучения.

Рассмотрено и одобрено на заседаниях кафедры 20.01.2020 г. и методического совета 20.12.2019 г.

УДК 512.6 + 514.1
ББК 6Ф6.5

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1.1 Теоретические вопросы

1. Векторы. Линейные, операции над векторами.
2. Скалярное произведение, его свойства. Длина вектора. Угол между двумя векторами.
3. Определители, их свойства.
4. Векторное произведение. Свойства. Геометрический смысл.
5. Смешанное произведение, его свойства. Геометрический смысл. Необходимое и достаточное условие компланарности трех векторов.
6. Плоскость: Уравнение плоскости.
7. Расстояние от точки до плоскости.
8. Уравнения прямой в пространстве. Нахождение точки пересечения прямой и плоскости.

1.2 Теоретические упражнения

1. Пусть векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не коллинеарны и $\overrightarrow{AB}=\alpha\mathbf{a}/2$, $\overrightarrow{BC}=4(\beta\mathbf{a}-\mathbf{b})$, $\overrightarrow{CD}=-4\beta\mathbf{b}$, $\overrightarrow{DA}=\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}$. Найти α и β и доказать коллинеарность векторов $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{DA}$.
2. Разложить вектор $\mathbf{s}=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$ по трем некомпланарным векторам $\mathbf{m}=\mathbf{a}+\mathbf{b}-2\mathbf{c}$, $\mathbf{n}=\mathbf{a}-\mathbf{b}$, $\mathbf{p}=2\mathbf{b}+3\mathbf{c}$.
3. Найти угол между единичными векторами $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, если известно, что векторы $\mathbf{a}=\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{b}=5\mathbf{e}_1-4\mathbf{e}_2$ взаимно перпендикулярны.
4. Доказать компланарность векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ зная, что

$$[\mathbf{ab}]+[\mathbf{bc}]+[\mathbf{ca}]=0.$$

5. Доказать, что уравнение плоскости; проходящей через точки $(x_1,\quad y_1,\quad z_1)$ и $(x_2,\quad y_2,\quad z_2)$ перпендикулярно плоскости $Ax+By+Cz+D=0$, можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ A & B & C \end{vmatrix}=0.$$

6. Доказать, что уравнение плоскости, проходящей через пересекающиеся прямые

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \text{ и } \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$$

можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

7. Доказать, что уравнения прямой, проходящей через точку $(x_1, \quad y_1, \quad z_1)$ параллельно плоскостям $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ можно записать в виде

$$\frac{x-x_1}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y-y_1}{-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{z-z_1}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

8. Доказать, что необходимым и достаточным условием принадлежности двух прямых

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1} \text{ и } \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$$

одной плоскости является выполнение равенства

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

9. Доказать, что расстояние от точки A до прямой, проходящей через точку B и имеющей направляющий вектор $\mathbf{S}$, определяется формулой $d = \left|\left[\mathbf{S}, \quad \overrightarrow{AB}\right]\right| / |\mathbf{S}|.$

10. Даны две скрещивающиеся прямые, проходящие соответственно через точки $A(x_1, \quad y_1, \quad z_1)$ и $B(x_2, \quad y_2, \quad z_2)$. Их направляющие векторы $\mathbf{S}_1$ и $\mathbf{S}_2$ известны. Доказать, что расстояние между ними определяется формулой $d = \left|\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2\overrightarrow{AB}\right| / \left|[\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2]\right|.$

1.3 Расчетные задания

Задача 1. Написать разложение вектора $\mathbf{x}$ по векторам $\mathbf{p}, \quad \mathbf{q}, \quad \mathbf{r}$.

1.1. $\mathbf{x} = \{-2, \quad 4, \quad 7\}, \quad \mathbf{p} = \{0, \quad 1, \quad 2\}, \quad \mathbf{q} = \{1, \quad 0, \quad 1\}, \quad \mathbf{r} = \{-1, \quad 2, \quad 4\}.$

1.2. $\mathbf{x} = \{6, \quad 12, \quad -1\}, \quad \mathbf{p} = \{1, \quad 3, \quad 0\}, \quad \mathbf{q} = \{2, \quad -1, \quad 1\}, \quad \mathbf{r} = \{0, \quad -1, \quad 2\}.$

1.3. $\mathbf{x} = \{1, \quad -4, \quad 4\}, \quad \mathbf{p} = \{2, \quad 1, \quad -1\}, \quad \mathbf{q} = \{0, \quad 3, \quad 2\}, \quad \mathbf{r} = \{1, \quad -1, \quad 1\}.$

1.4. $\mathbf{x} = \{-9, \quad 5, \quad 5\}, \quad \mathbf{p} = \{4, \quad 1, \quad 1\}, \quad \mathbf{q} = \{2, \quad 0, \quad -3\}, \quad \mathbf{r} = \{-1, \quad 2, \quad 1\}.$

1.5. $\mathbf{x} = \{-5, \quad -5, \quad 5\}, \quad \mathbf{p} = \{-2, \quad 0, \quad 1\}, \quad \mathbf{q} = \{1, \quad 3, \quad -1\}, \quad \mathbf{r} = \{0, \quad 4, \quad 1\}.$

1.6. $\mathbf{x} = \{13, \quad 2, \quad 7\}, \quad \mathbf{p} = \{5, \quad 1, \quad 0\}, \quad \mathbf{q} = \{2, \quad -1, \quad 3\}, \quad \mathbf{r} = \{1, \quad 0, \quad -1\}.$

1.7. $\mathbf{x}=\{-19,\ -1,\ 7\}$, $\mathbf{p}=\{0,\ 1,\ 1\}$, $\mathbf{q}=\{-2,\ 0,\ 1\}$, $\mathbf{r}=\{3,\ 1,\ 0\}$.

1.8. $\mathbf{x}=\{3,\ -3,\ 4\}$, $\mathbf{p}=\{1,\ 0,\ 2\}$, $\mathbf{q}=\{0,\ 1,\ 1\}$, $\mathbf{r}=\{2,\ -1,\ 4\}$.

1.9. $\mathbf{x}=\{3,\ 3,\ -1\}$, $\mathbf{p}=\{3,\ 1,\ 0\}$, $\mathbf{q}=\{-1,\ 2,\ 1\}$, $\mathbf{r}=\{-1,\ 0,\ 2\}$.

1.10. $\mathbf{x}=\{-1,\ 7,\ -4\}$, $\mathbf{p}=\{-1,\ 2,\ 1\}$, $\mathbf{q}=\{2,\ 0,\ 3\}$, $\mathbf{r}=\{1,\ 1,\ -1\}$.

1.11. $\mathbf{x}=\{6,\ 5,\ -14\}$, $\mathbf{p}=\{1,\ 1,\ 4\}$, $\mathbf{q}=\{0,\ -3,\ 2\}$, $\mathbf{r}=\{2,\ 1,\ -1\}$.

1.12. $\mathbf{x}=\{6,\ -1,\ 7\}$, $\mathbf{p}=\{1,\ -2,\ 0\}$, $\mathbf{q}=\{-1,\ 1,\ 3\}$, $\mathbf{r}=\{1,\ 0,\ 4\}$.

1.13. $\mathbf{x}=\{5,\ 15,\ 0\}$, $\mathbf{p}=\{1,\ 0,\ 5\}$, $\mathbf{q}=\{-1,\ 3,\ 2\}$, $\mathbf{r}=\{0,\ -1,\ 1\}$.

1.14. $\mathbf{x}=\{2,\ -1,\ 11\}$, $\mathbf{p}=\{1,\ 1,\ 0\}$, $\mathbf{q}=\{0,\ 1,\ -2\}$, $\mathbf{r}=\{1,\ 0,\ 3\}$.

1.15. $\mathbf{x}=\{11,\ 5,\ -3\}$, $\mathbf{p}=\{1,\ 0,\ 2\}$, $\mathbf{q}=\{-1,\ 0,\ 1\}$, $\mathbf{r}=\{2,\ 5,\ -3\}$.

1.16. $\mathbf{x}=\{8,\ 0,\ 5\}$, $\mathbf{p}=\{2,\ 0,\ 1\}$, $\mathbf{q}=\{1,\ 1,\ 0\}$, $\mathbf{r}=\{4,\ 1,\ 2\}$.

1.17. $\mathbf{x}=\{3,\ 1,\ 8\}$, $\mathbf{p}=\{0,\ 1,\ 3\}$, $\mathbf{q}=\{1,\ 2,\ -1\}$, $\mathbf{r}=\{2,\ 0,\ -1\}$.

1.18. $\mathbf{x}=\{8,\ 1,\ 12\}$, $\mathbf{p}=\{1,\ 2,\ -1\}$, $\mathbf{q}=\{3,\ 0,\ 2\}$, $\mathbf{r}=\{-1,\ 1,\ 1\}$.

1.19. $\mathbf{x}=\{-9,\ -8,\ -3\}$, $\mathbf{p}=\{1,\ 4,\ 1\}$, $\mathbf{q}=\{-3,\ 2,\ 0\}$, $\mathbf{r}=\{1,\ -1,\ 2\}$.

1.20. $\mathbf{x}=\{-5,\ 9,\ -13\}$, $\mathbf{p}=\{0,\ 1,\ -2\}$, $\mathbf{q}=\{3,\ -1,\ 1\}$, $\mathbf{r}=\{4,\ 1,\ 0\}$.

1.21. $\mathbf{x}=\{-15,\ 5,\ 6\}$, $\mathbf{p}=\{0,\ 5,\ 1\}$, $\mathbf{q}=\{3,\ 2,\ -1\}$, $\mathbf{r}=\{-1,\ 1,\ 0\}$.

1.22. $\mathbf{x}=\{8,\ 9,\ 4\}$, $\mathbf{p}=\{1,\ 0,\ 1\}$, $\mathbf{q}=\{0,\ -2,\ 1\}$, $\mathbf{r}=\{1,\ 3,\ 0\}$.

1.23. $\mathbf{x}=\{23,\ -14,\ -30\}$, $\mathbf{p}=\{2,\ 1,\ 0\}$, $\mathbf{q}=\{1,\ -1,\ 0\}$, $\mathbf{r}=\{-3,\ 2,\ 5\}$.

1.24. $\mathbf{x}=\{3,\ 1,\ 3\}$, $\mathbf{p}=\{2,\ 1,\ 0\}$, $\mathbf{q}=\{1,\ 0,\ 1\}$, $\mathbf{r}=\{4,\ 2,\ 1\}$.

1.25. $\mathbf{x}=\{-1,\ 7,\ 0\}$, $\mathbf{p}=\{0,\ 3,\ 1\}$, $\mathbf{q}=\{1,\ -1,\ 2\}$, $\mathbf{r}=\{2,\ -1,\ 0\}$.

1.26. $\mathbf{x}=\{11,\ -1,\ 4\}$, $\mathbf{p}=\{1,\ -1,\ 2\}$, $\mathbf{q}=\{3,\ 2,\ 0\}$, $\mathbf{r}=\{-1,\ 1,\ 1\}$.

1.27. $\mathbf{x}=\{-13,\ 2,\ 18\}$, $\mathbf{p}=\{1,\ 1,\ 4\}$, $\mathbf{q}=\{-3,\ 0,\ 2\}$, $\mathbf{r}=\{1,\ 2,\ -1\}$.

1.28. $\mathbf{x}=\{0,\ -8,\ 9\}$, $\mathbf{p}=\{0,\ -2,\ 1\}$, $\mathbf{q}=\{3,\ 1,\ -1\}$, $\mathbf{r}=\{4,\ 0,\ 1\}$.

1.29. $\mathbf{x}=\{8,\ -7,\ -13\}$, $\mathbf{p}=\{0,\ 1,\ 5\}$, $\mathbf{q}=\{3,\ -1,\ 2\}$, $\mathbf{r}=\{-1,\ 0,\ 1\}$.

1.30. $\mathbf{x}=\{2,\ 7,\ 5\}$, $\mathbf{p}=\{1,\ 0,\ 1\}$, $\mathbf{q}=\{1,\ -2,\ 0\}$, $\mathbf{r}=\{0,\ 3,\ 1\}$.

1.31. $\mathbf{x}=\{15,\ -20,\ -1\}$, $\mathbf{p}=\{0,\ 2,\ 1\}$, $\mathbf{q}=\{0,\ 1,\ -1\}$, $\mathbf{r}=\{5,\ -3,\ 2\}$.

Задача 2. Коллинеарны ли векторы $\mathbf{c}_1$ и $\mathbf{c}_2$, построенные по векторам $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$?

2.1. $\mathbf{a}=\{1,\ -2,\ 3\}$, $\mathbf{b}=\{3,\ 0,\ -1\}$, $\mathbf{c}_1=2\mathbf{a}+4\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=3\mathbf{b}-\mathbf{a}$.

2.2. $\mathbf{a}=\{1,\ 0,\ 1\}$, $\mathbf{b}=\{-2,\ 3,\ 5\}$, $\mathbf{c}_1=\mathbf{a}+2\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=3\mathbf{a}-\mathbf{b}$.

2.3. $\mathbf{a}=\{-2,\ 4,\ 1\}$, $\mathbf{b}=\{1,\ -2,\ 7\}$, $\mathbf{c}_1=5\mathbf{a}+3\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=2\mathbf{a}-\mathbf{b}$.

2.4. $\mathbf{a}=\{1,\quad 2,\quad -3\}$, $\mathbf{b}=\{2,\quad -1,\quad -1\}$, $\mathbf{c}_1=4\mathbf{a}+3\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=8\mathbf{a}-\mathbf{b}$.

2.5. $\mathbf{a}=\{3,\quad 5,\quad 4\}$, $\mathbf{b}=\{5,\quad 9,\quad 7\}$, $\mathbf{c}_1=-2\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=3\mathbf{a}-2\mathbf{b}$.

2.6. $\mathbf{a}=\{1,\quad 4,\quad -2\}$, $\mathbf{b}=\{1,\quad 1,\quad -1\}$, $\mathbf{c}_1=\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=4\mathbf{a}+2\mathbf{b}$.

2.7. $\mathbf{a}=\{1,\quad -2,\quad 5\}$, $\mathbf{b}=\{3,\quad -1,\quad 0\}$, $\mathbf{c}_1=4\mathbf{a}-2\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=\mathbf{b}-2\mathbf{a}$.

2.8. $\mathbf{a}=\{3,\quad 4,\quad -1\}$, $\mathbf{b}=\{2,\quad -1,\quad 1\}$, $\mathbf{c}_1=6\mathbf{a}-3\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=\mathbf{b}-2\mathbf{a}$.

2.9. $\mathbf{a}=\{-2,\quad -3,\quad -2\}$, $\mathbf{b}=\{1,\quad 0,\quad 5\}$, $\mathbf{c}_1=3\mathbf{a}+9\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=-\mathbf{a}-3\mathbf{b}$.

2.10. $\mathbf{a}=\{-1,\quad 4,\quad 2\}$, $\mathbf{b}=\{3,\quad -2,\quad 6\}$, $\mathbf{c}_1=2\mathbf{a}-\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=3\mathbf{b}-6\mathbf{a}$.

2.11. $\mathbf{a}=\{5,\quad 0,\quad -1\}$, $\mathbf{b}=\{7,\quad 2,\quad 3\}$, $\mathbf{c}_1=2\mathbf{a}-\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=3\mathbf{b}-6\mathbf{a}$.

2.12. $\mathbf{a}=\{0,\quad 3,\quad -2\}$, $\mathbf{b}=\{1,\quad -2,\quad 1\}$, $\mathbf{c}_1=5\mathbf{a}-2\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=3\mathbf{a}+5\mathbf{b}$.

2.13. $\mathbf{a}=\{-2,\quad 7,\quad -1\}$, $\mathbf{b}=\{-3,\quad 5,\quad 2\}$, $\mathbf{c}_1=2\mathbf{a}+3\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=3\mathbf{a}+2\mathbf{b}$.

2.14. $\mathbf{a}=\{3,\quad 7,\quad 0\}$, $\mathbf{b}=\{1,\quad -3,\quad 4\}$, $\mathbf{c}_1=4\mathbf{a}-2\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=\mathbf{b}-2\mathbf{a}$.

2.15. $\mathbf{a}=\{-1,\quad 2,\quad -1\}$, $\mathbf{b}=\{2,\quad -7,\quad 1\}$, $\mathbf{c}_1=6\mathbf{a}-2\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=\mathbf{b}-3\mathbf{a}$.

2.16. $\mathbf{a}=\{7,\quad 9,\quad -2\}$, $\mathbf{b}=\{5,\quad 4,\quad 3\}$, $\mathbf{c}_1=4\mathbf{a}-\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=4\mathbf{b}-\mathbf{a}$.

2.17. $\mathbf{a}=\{5,\quad 0,\quad -2\}$, $\mathbf{b}=\{6,\quad 4,\quad 3\}$, $\mathbf{c}_1=5\mathbf{a}-3\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=6\mathbf{b}-10\mathbf{a}$.

2.18. $\mathbf{a}=\{8,\quad 3,\quad -1\}$, $\mathbf{b}=\{4,\quad 1,\quad 3\}$, $\mathbf{c}_1=2\mathbf{a}-\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=2\mathbf{b}-4\mathbf{a}$.

2.19. $\mathbf{a}=\{3,\quad -1,\quad 6\}$, $\mathbf{b}=\{5,\quad 7,\quad 10\}$, $\mathbf{c}_1=4\mathbf{a}-2\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=\mathbf{b}-2\mathbf{a}$.

2.20. $\mathbf{a}=\{1,\quad -2,\quad 4\}$, $\mathbf{b}=\{7,\quad 3,\quad 5\}$, $\mathbf{c}_1=6\mathbf{a}-3\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=\mathbf{b}-2\mathbf{a}$.

2.21. $\mathbf{a}=\{3,\quad 7,\quad 0\}$, $\mathbf{b}=\{4,\quad 6,\quad -1\}$, $\mathbf{c}_1=3\mathbf{a}+2\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=5\mathbf{a}-7\mathbf{b}$.

2.22. $\mathbf{a}=\{2,\quad -1,\quad 4\}$, $\mathbf{b}=\{3,\quad -7,\quad -6\}$, $\mathbf{c}_1=2\mathbf{a}-3\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=3\mathbf{a}-2\mathbf{b}$.

2.23. $\mathbf{a}=\{5,\quad -1,\quad -2\}$, $\mathbf{b}=\{6,\quad 0,\quad 7\}$, $\mathbf{c}_1=3\mathbf{a}-2\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=4\mathbf{b}-6\mathbf{a}$.

2.24. $\mathbf{a}=\{-9,\quad 5,\quad 3\}$, $\mathbf{b}=\{7,\quad 1,\quad -2\}$, $\mathbf{c}_1=2\mathbf{a}-\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=3\mathbf{a}+5\mathbf{b}$.

2.25. $\mathbf{a}=\{4,\quad 2,\quad 9\}$, $\mathbf{b}=\{0,\quad -1,\quad 3\}$, $\mathbf{c}_1=4\mathbf{b}-3\mathbf{a}$, $\mathbf{c}_2=4\mathbf{a}-3\mathbf{b}$.

2.26. $\mathbf{a}=\{2,\quad -1,\quad 6\}$, $\mathbf{b}=\{-1,\quad 3,\quad 8\}$, $\mathbf{c}_1=5\mathbf{a}-2\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=2\mathbf{a}-5\mathbf{b}$.

2.27. $\mathbf{a}=\{5,\quad 0,\quad 8\}$, $\mathbf{b}=\{-3,\quad 1,\quad 7\}$, $\mathbf{c}_1=3\mathbf{a}-4\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=12\mathbf{b}-9\mathbf{a}$.

2.28. $\mathbf{a}=\{-1,\quad 3,\quad 4\}$, $\mathbf{b}=\{2,\quad -1,\quad 0\}$, $\mathbf{c}_1=6\mathbf{a}-2\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=\mathbf{b}-3\mathbf{a}$.

2.29. $\mathbf{a}=\{4,\quad 2,\quad -7\}$, $\mathbf{b}=\{5,\quad 0,\quad -3\}$, $\mathbf{c}_1=\mathbf{a}-3\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=6\mathbf{b}-2\mathbf{a}$.

2.30. $\mathbf{a}=\{2,\quad 0,\quad -5\}$, $\mathbf{b}=\{1,\quad -3,\quad 4\}$, $\mathbf{c}_1=2\mathbf{a}-5\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=5\mathbf{a}-2\mathbf{b}$.

2.31. $\mathbf{a}=\{-1,\quad 2,\quad 8\}$, $\mathbf{b}=\{3,\quad 7,\quad -1\}$, $\mathbf{c}_1=4\mathbf{a}-3\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=9\mathbf{b}-12\mathbf{a}$.

Задача 3. Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{AC}}$.

3.1. $A(1,\ -2,\ 3),\ B(0,\ -1,\ 2),\ C(3,\ -4,\ 5)$.

3.2. $A(0,\ -3,\ 6),\ B(-12,\ -3,\ -3),\ C(-9,\ -3,\ -6)$.

3.3. $A(3,\ 3,\ -1),\ B(5,\ 5,\ -2),\ C(4,\ 1,\ 1)$.

3.4. $A(-1,\ 2,\ -3),\ B(3,\ 4,\ -6),\ C(1,\ 1,\ -1)$.

3.5. $A(-4,\ -2,\ 0),\ B(-1,\ -2,\ 4),\ C(3,\ -2,\ 1)$.

3.6. $A(5,\ 3,\ -1),\ B(5,\ 2,\ 0),\ C(6,\ 4,\ -1)$.

3.7. $A(-3,\ -7,\ -5),\ B(0,\ -1,\ -2),\ C(2,\ 3,\ 0)$.

3.8. $A(2,\ -4,\ 6),\ B(0,\ -2,\ 4),\ C(6,\ -8,\ 10)$.

3.9. $A(0,\ 1,\ -2),\ B(3,\ 1,\ 2),\ C(4,\ 1,\ 1)$.

3.10. $A(3,\ 3,\ -1),\ B(1,\ 5,\ -2),\ C(4,\ 1,\ 1)$.

3.11. $A(2,\ 1,\ -1),\ B(6,\ -1,\ -4),\ C(4,\ 2,\ 1)$.

3.12. $A(-1,\ -2,\ 1),\ B(-4,\ -2,\ 5),\ C(-8,\ -2,\ 2)$.

3.13. $A(6,\ 2,\ -3),\ B(6,\ 3,\ -2),\ C(7,\ 3,\ -3)$.

3.14. $A(0,\ 0,\ 4),\ B(-3,\ -6,\ 1),\ C(-5,\ -10,\ -1)$.

3.15. $A(2,\ -8,\ -1),\ B(4,\ -6,\ 0),\ C(-2,\ -5,\ -1)$.

3.16. $A(3,\ -6,\ 9),\ B(0,\ -3,\ 6),\ C(9,\ -12,\ 15)$.

3.17. $A(0,\ 2,\ -4),\ B(8,\ 2,\ 2),\ C(6,\ 2,\ 4)$.

3.18. $A(3,\ 3,\ -1),\ B(5,\ 1,\ -2),\ C(4,\ 1,\ 1)$.

3.19. $A(-4,\ 3,\ 0),\ B(0,\ 1,\ 3),\ C(-2,\ 4,\ -2)$.

3.20. $A(1,\ -1,\ 0),\ B(-2,\ -1,\ 4),\ C(8,\ -1,\ -1)$.

3.21. $A(7,\ 0,\ 2),\ B(7,\ 1,\ 3),\ C(8,\ -1,\ 2)$.

3.22. $A(2,\ 3,\ 2),\ B(-1,\ -3,\ -1),\ C(-3,\ -7,\ -3)$.

3.23. $A(2,\ 2,\ 7),\ B(0,\ 0,\ 6),\ C(-2,\ 5,\ 7)$.

3.24. $A(-1,\ 2,\ -3),\ B(0,\ 1,\ -2),\ C(-3,\ 4,\ -5)$.

3.25. $A(0,\ 3,\ -6),\ B(9,\ 3,\ 6),\ C(12,\ 3,\ 3)$.

3.26. $A(3,\ 3,\ -1),\ B(5,\ 1,\ -2),\ C(4,\ 1,\ -3)$.

3.27. $A(-2,\ 1,\ 1),\ B(2,\ 3,\ -2),\ C(0,\ 0,\ 3)$.

3.28. $A(1,\ 4,\ -1),\ B(-2,\ 4,\ -5),\ C(8,\ 4,\ 0)$.

3.29. $A(0, \quad 1, \quad 0), \quad B(0, \quad 2, \quad 1), \quad C(1, \quad 2, \quad 0).$

3.30. $A(-4, \quad 0, \quad 4), \quad B(-1, \quad 6, \quad 7), \quad C(1, \quad 10, \quad 9).$

3.31. $A(-2, \quad 4, \quad -6), \quad B(0, \quad 2, \quad -4), \quad C(-6, \quad 8, \quad -10).$

Задача 4. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

4.1. $\mathbf{a}=\mathbf{p}+2\mathbf{q}, \ \mathbf{b}=3\mathbf{p}-\mathbf{q}; \ |\mathbf{p}|=1, \ |\mathbf{q}|=2, \ (\mathbf{p}\,\hat{}\,\mathbf{q})=\pi/6.$

4.2. $\mathbf{a}=3\mathbf{p}+\mathbf{q}, \ \mathbf{b}=\mathbf{p}-2\mathbf{q}; \ |\mathbf{p}|=4, \ |\mathbf{q}|=1, \ (\mathbf{p}\,\hat{}\,\mathbf{q})=\pi/4.$

4.3. $\mathbf{a}=\mathbf{p}-3\mathbf{q}, \ \mathbf{b}=\mathbf{p}+2\mathbf{q}; \ |\mathbf{p}|=1/5, \ |\mathbf{q}|=1, \ (\mathbf{p}\,\hat{}\,\mathbf{q})=\pi/2.$

4.4. $\mathbf{a}=3\mathbf{p}-2\mathbf{q}, \ \mathbf{b}=\mathbf{p}+5\mathbf{q}; \ |\mathbf{p}|=4, \ |\mathbf{q}|=1/2, \ (\mathbf{p}\,\hat{}\,\mathbf{q})=5\pi/6.$

4.5. $\mathbf{a}=\mathbf{p}-2\mathbf{q}, \ \mathbf{b}=2\mathbf{p}+\mathbf{q}; \ |\mathbf{p}|=2, \ |\mathbf{q}|=3, \ (\mathbf{p}\,\hat{}\,\mathbf{q})=3\pi/4.$

4.6. $\mathbf{a}=\mathbf{p}+3\mathbf{q}, \ \mathbf{b}=\mathbf{p}-2\mathbf{q}; \ |\mathbf{p}|=2, \ |\mathbf{q}|=3, \ (\mathbf{p}\,\hat{}\,\mathbf{q})=\pi/3.$

4.7. $\mathbf{a}=2\mathbf{p}-\mathbf{q}, \ \mathbf{b}=\mathbf{p}+3\mathbf{q}; \ |\mathbf{p}|=3, \ |\mathbf{q}|=2, \ (\mathbf{p}\,\hat{}\,\mathbf{q})=\pi/2.$

4.8. $\mathbf{a}=4\mathbf{p}+\mathbf{q}, \ \mathbf{b}=\mathbf{p}-\mathbf{q}; \ |\mathbf{p}|=7, \ |\mathbf{q}|=2, \ (\mathbf{p}\,\hat{}\,\mathbf{q})=\pi/4.$

4.9. $\mathbf{a}=\mathbf{p}-4\mathbf{q}, \ \mathbf{b}=3\mathbf{p}+\mathbf{q}; \ |\mathbf{p}|=1, \ |\mathbf{q}|=2, \ (\mathbf{p}\,\hat{}\,\mathbf{q})=\pi/6.$

4.10. $\mathbf{a}=\mathbf{p}+4\mathbf{q}, \ \mathbf{b}=2\mathbf{p}-\mathbf{q}; \ |\mathbf{p}|=7, \ |\mathbf{q}|=2, \ (\mathbf{p}\,\hat{}\,\mathbf{q})=\pi/3.$

4.11. $\mathbf{a}=3\mathbf{p}+2\mathbf{q}, \ \mathbf{b}=\mathbf{p}-\mathbf{q}; \ |\mathbf{p}|=10, \ |\mathbf{q}|=1, \ (\mathbf{p}\,\hat{}\,\mathbf{q})=\pi/2.$

4.12. $\mathbf{a}=4\mathbf{p}-\mathbf{q}, \ \mathbf{b}=\mathbf{p}+2\mathbf{q}; \ |\mathbf{p}|=5, \ |\mathbf{q}|=4, \ (\mathbf{p}\,\hat{}\,\mathbf{q})=\pi/4.$

4.13. $\mathbf{a}=2\mathbf{p}+3\mathbf{q}, \ \mathbf{b}=\mathbf{p}-2\mathbf{q}; \ |\mathbf{p}|=6, \ |\mathbf{q}|=7, \ (\mathbf{p}\,\hat{}\,\mathbf{q})=\pi/3.$

4.14. $\mathbf{a}=3\mathbf{p}-\mathbf{q}, \ \mathbf{b}=\mathbf{p}+2\mathbf{q}; \ |\mathbf{p}|=3, \ |\mathbf{q}|=4, \ (\mathbf{p}\,\hat{}\,\mathbf{q})=\pi/3.$

4.15. $\mathbf{a}=2\mathbf{p}+3\mathbf{q}, \ \mathbf{b}=\mathbf{p}-2\mathbf{q}; \ |\mathbf{p}|=2, \ |\mathbf{q}|=3, \ (\mathbf{p}\,\hat{}\,\mathbf{q})=\pi/4.$

4.16. $\mathbf{a}=2\mathbf{p}-3\mathbf{q}, \ \mathbf{b}=3\mathbf{p}+\mathbf{q}; \ |\mathbf{p}|=4, \ |\mathbf{q}|=1, \ (\mathbf{p}\,\hat{}\,\mathbf{q})=\pi/6.$

4.17. $\mathbf{a}=5\mathbf{p}+\mathbf{q}, \ \mathbf{b}=\mathbf{p}-3\mathbf{q}; \ |\mathbf{p}|=1, \ |\mathbf{q}|=2, \ (\mathbf{p}\,\hat{}\,\mathbf{q})=\pi/3.$

4.18. $\mathbf{a}=7\mathbf{p}-2\mathbf{q}, \ \mathbf{b}=\mathbf{p}+3\mathbf{q}; \ |\mathbf{p}|=1/2, \ |\mathbf{q}|=2, \ (\mathbf{p}\,\hat{}\,\mathbf{q})=\pi/2.$

4.19. $\mathbf{a}=6\mathbf{p}-\mathbf{q}, \ \mathbf{b}=\mathbf{p}+\mathbf{q}; \ |\mathbf{p}|=3, \ |\mathbf{q}|=4, \ (\mathbf{p}\,\hat{}\,\mathbf{q})=\pi/4.$

4.20. $\mathbf{a}=10\mathbf{p}+\mathbf{q}, \ \mathbf{b}=3\mathbf{p}-2\mathbf{q}; \ |\mathbf{p}|=4, \ |\mathbf{q}|=1, \ (\mathbf{p}\,\hat{}\,\mathbf{q})=\pi/6.$

4.21. $\mathbf{a}=6\mathbf{p}-\mathbf{q}, \ \mathbf{b}=\mathbf{p}+2\mathbf{q}; \ |\mathbf{p}|=8, \ |\mathbf{q}|=1/2, \ (\mathbf{p}\,\hat{}\,\mathbf{q})=\pi/3.$

4.22. $\mathbf{a} = 3\mathbf{p} + 4\mathbf{q}, \ \ \mathbf{b} = \mathbf{q} - \mathbf{p}; \ \ |\mathbf{p}| = 2{,}5, \ \ |\mathbf{q}| = 2, \ \ (\mathbf{p} \hat{} \mathbf{q}) = \pi/2.$

4.23. $\mathbf{a} = 7\mathbf{p} + \mathbf{q}, \ \ \mathbf{b} = \mathbf{p} - 3\mathbf{q}; \ \ |\mathbf{p}| = 3, \ \ |\mathbf{q}| = 1, \ \ (\mathbf{p} \hat{} \mathbf{q}) = 3\pi/4.$

4.24. $\mathbf{a} = \mathbf{p} + 3\mathbf{q}, \ \ \mathbf{b} = 3\mathbf{p} - \mathbf{q}; \ \ |\mathbf{p}| = 3, \ \ |\mathbf{q}| = 5, \ \ (\mathbf{p} \hat{} \mathbf{q}) = 2\pi/3.$

4.25. $\mathbf{a} = 3\mathbf{p} + \mathbf{q}, \ \ \mathbf{b} = \mathbf{p} - 3\mathbf{q}; \ \ |\mathbf{p}| = 7, \ \ |\mathbf{q}| = 2, \ \ (\mathbf{p} \hat{} \mathbf{q}) = \pi/4.$

4.26. $\mathbf{a} = 5\mathbf{p} - \mathbf{q}, \ \ \mathbf{b} = \mathbf{p} + \mathbf{q}; \ \ |\mathbf{p}| = 5, \ \ |\mathbf{q}| = 3, \ \ (\mathbf{p} \hat{} \mathbf{q}) = 5\pi/6.$

4.27. $\mathbf{a} = 3\mathbf{p} - 4\mathbf{q}, \ \ \mathbf{b} = \mathbf{p} + 3\mathbf{q}; \ \ |\mathbf{p}| = 2, \ \ |\mathbf{q}| = 3, \ \ (\mathbf{p} \hat{} \mathbf{q}) = \pi/4.$

4.28. $\mathbf{a} = 6\mathbf{p} - \mathbf{q}, \ \ \mathbf{b} = 5\mathbf{q} + \mathbf{p}; \ \ |\mathbf{p}| = 1/2, \ \ |\mathbf{q}| = 4, \ \ (\mathbf{p} \hat{} \mathbf{q}) = 5\pi/6.$

4.29. $\mathbf{a} = 2\mathbf{p} + 3\mathbf{q}, \ \ \mathbf{b} = \mathbf{p} - 2\mathbf{q}; \ \ |\mathbf{p}| = 2, \ \ |\mathbf{q}| = 1, \ \ (\mathbf{p} \hat{} \mathbf{q}) = \pi/3.$

4.30. $\mathbf{a} = 2\mathbf{p} - 3\mathbf{q}, \ \ \mathbf{b} = 5\mathbf{p} + \mathbf{q}; \ \ |\mathbf{p}| = 2, \ \ |\mathbf{q}| = 3, \ \ (\mathbf{p} \hat{} \mathbf{q}) = \pi/2.$

4.31. $\mathbf{a} = 3\mathbf{p} + 2\mathbf{q}, \ \ \mathbf{b} = 2\mathbf{p} - \mathbf{q}; \ \ |\mathbf{p}| = 4, \ \ |\mathbf{q}| = 3, \ \ (\mathbf{p} \hat{} \mathbf{q}) = 3\pi/4.$

Задача 5. Компланарны ли векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$?

5.1. $\mathbf{a} = \{2, \ 3, \ 1\}, \ \ \mathbf{b} = \{-1, \ 0, \ -1\}, \ \ \mathbf{c} = \{2, \ 2, \ 2\}.$

5.2. $\mathbf{a} = \{3, \ 2, \ 1\}, \ \ \mathbf{b} = \{2, \ 3, \ 4\}, \ \ \mathbf{c} = \{3, \ 1, \ -1\}.$

5.3. $\mathbf{a} = \{1, \ 5, \ 2\}, \ \ \mathbf{b} = \{-1, \ 1, \ -1\}, \ \ \mathbf{c} = \{1, \ 1, \ 1\}.$

5.4. $\mathbf{a} = \{1, \ -1, \ -3\}, \ \ \mathbf{b} = \{3, \ 2, \ 1\}, \ \ \mathbf{c} = \{2, \ 3, \ 4\}.$

5.5. $\mathbf{a} = \{3, \ 3, \ 1\}, \ \ \mathbf{b} = \{1, \ -2, \ 1\}, \ \ \mathbf{c} = \{1, \ 1, \ 1\}.$

5.6. $\mathbf{a} = \{3, \ 1, \ -1\}, \ \ \mathbf{b} = \{-2, \ -1, \ 0\}, \ \ \mathbf{c} = \{5, \ 2, \ -1\}.$

5.7. $\mathbf{a} = \{4, \ 3, \ 1\}, \ \ \mathbf{b} = \{1, \ -2, \ 1\}, \ \ \mathbf{c} = \{2, \ 2, \ 2\}.$

5.8. $\mathbf{a} = \{4, \ 3, \ 1\}, \ \ \mathbf{b} = \{6, \ 7, \ 4\}, \ \ \mathbf{c} = \{2, \ 0, \ -1\}.$

5.9. $\mathbf{a} = \{3, \ 2, \ 1\}, \ \ \mathbf{b} = \{1, \ -3, \ -7\}, \ \ \mathbf{c} = \{1, \ 2, \ 3\}.$

5.10. $\mathbf{a} = \{3, \ 7, \ 2\}, \ \ \mathbf{b} = \{-2, \ 0, \ -1\}, \ \ \mathbf{c} = \{2, \ 2, \ 1\}.$

5.11. $\mathbf{a} = \{1, \ -2, \ 6\}, \ \ \mathbf{b} = \{1, \ 0, \ 1\}, \ \ \mathbf{c} = \{2, \ -6, \ 17\}.$

5.12. $\mathbf{a} = \{6, \ 3, \ 4\}, \ \ \mathbf{b} = \{-1, \ -2, \ -1\}, \ \ \mathbf{c} = \{2, \ 1, \ 2\}.$

5.13. $\mathbf{a} = \{7, \ 3, \ 4\}, \ \ \mathbf{b} = \{-1, \ -2, \ -1\}, \ \ \mathbf{c} = \{4, \ 2, \ 4\}.$

5.14. $\mathbf{a} = \{2, \ 3, \ 2\}, \ \ \mathbf{b} = \{4, \ 7, \ 5\}, \ \ \mathbf{c} = \{2, \ 0, \ -1\}.$

5.15. $\mathbf{a} = \{5, \ 3, \ 4\}, \ \ \mathbf{b} = \{-1, \ 0, \ -1\}, \ \ \mathbf{c} = \{4, \ 2, \ 4\}.$

5.16. $\mathbf{a} = \{3, \ 10, \ 5\}, \ \ \mathbf{b} = \{-2, \ -2, \ -3\}, \ \ \mathbf{c} = \{2, \ 4, \ 3\}.$

5.17. $\mathbf{a}=\{-2,\quad -4,\quad -3\}$, $\mathbf{b}=\{4,\quad 3,\quad 1\}$, $\mathbf{c}=\{6,\quad 7,\quad 4\}$.

5.18. $\mathbf{a}=\{3,\quad 1,\quad -1\}$, $\mathbf{b}=\{1,\quad 0,\quad -1\}$, $\mathbf{c}=\{8,\quad 3,\quad -2\}$.

5.19. $\mathbf{a}=\{4,\quad 2,\quad 2\}$, $\mathbf{b}=\{-3,\quad -3,\quad -3\}$, $\mathbf{c}=\{2,\quad 1,\quad 2\}$.

5.20. $\mathbf{a}=\{4,\quad 1,\quad 2\}$, $\mathbf{b}=\{9,\quad 2,\quad 5\}$, $\mathbf{c}=\{1,\quad 1,\quad -1\}$.

5.21. $\mathbf{a}=\{5,\quad 3,\quad 4\}$, $\mathbf{b}=\{4,\quad 3,\quad 3\}$, $\mathbf{c}=\{9,\quad 5,\quad 8\}$.

5.22. $\mathbf{a}=\{3,\quad 4,\quad 2\}$, $\mathbf{b}=\{1,\quad 1,\quad 0\}$, $\mathbf{c}=\{8,\quad 11,\quad 6\}$.

5.23. $\mathbf{a}=\{4,\quad -1,\quad -6\}$, $\mathbf{b}=\{1,\quad -3,\quad -7\}$, $\mathbf{c}=\{2,\quad -1,\quad -4\}$.

5.24. $\mathbf{a}=\{3,\quad 1,\quad 0\}$, $\mathbf{b}=\{-5,\quad -4,\quad -5\}$, $\mathbf{c}=\{4,\quad 2,\quad 4\}$.

5.25. $\mathbf{a}=\{3,\quad 0,\quad 3\}$, $\mathbf{b}=\{8,\quad 1,\quad 6\}$, $\mathbf{c}=\{1,\quad 1,\quad -1\}$.

5.26. $\mathbf{a}=\{1,\quad -1,\quad 4\}$, $\mathbf{b}=\{1,\quad 0,\quad 3\}$, $\mathbf{c}=\{1,\quad -3,\quad 8\}$.

5.27. $\mathbf{a}=\{6,\quad 3,\quad 4\}$, $\mathbf{b}=\{-1,\quad -2,\quad -1\}$, $\mathbf{c}=\{2,\quad 1,\quad 2\}$.

5.28. $\mathbf{a}=\{4,\quad 1,\quad 1\}$, $\mathbf{b}=\{-9,\quad -4,\quad -9\}$, $\mathbf{c}=\{6,\quad 2,\quad 6\}$.

5.29. $\mathbf{a}=\{-3,\quad 3,\quad 3\}$, $\mathbf{b}=\{-4,\quad 7,\quad 6\}$, $\mathbf{c}=\{3,\quad 0,\quad -1\}$.

5.30. $\mathbf{a}=\{-7,\quad 10,\quad -5\}$, $\mathbf{b}=\{0,\quad -2,\quad -1\}$, $\mathbf{c}=\{-2,\quad 4,\quad -1\}$.

5.31. $\mathbf{a}=\{7,\quad 4,\quad 6\}$, $\mathbf{b}=\{2,\quad 1,\quad 1\}$, $\mathbf{c}=\{19,\quad 11,\quad 17\}$.

Задача 6. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

6.1. $A_1(1,\quad 3,\quad 6)$, $A_2(2,\quad 2,\quad 1)$, $A_3(-1,\quad 0,\quad 1)$, $A_4(-4,\quad 6,\quad -3)$.

6.2. $A_1(-4,\quad 2,\quad 6)$, $A_2(2,\quad -3,\quad 0)$, $A_3(-10,\quad 5,\quad 8)$, $A_4(-5,\quad 2,\quad -4)$.

6.3. $A_1(7,\quad 2,\quad 4)$, $A_2(7,\quad -1,\quad -2)$, $A_3(3,\quad 3,\quad 1)$, $A_4(-4,\quad 2,\quad 1)$.

6.4. $A_1(2,\quad 1,\quad 4)$, $A_2(-1,\quad 5,\quad -2)$, $A_3(-7,\quad -3,\quad 2)$, $A_4(-6,\quad -3,\quad 6)$.

6.5. $A_1(-1,\quad -5,\quad 2)$, $A_2(-6,\quad 0,\quad -3)$, $A_3(3,\quad 6,\quad -3)$, $A_4(-10,\quad 6,\quad 7)$.

6.6. $A_1(0,\quad -1,\quad -1)$, $A_2(-2,\quad 3,\quad 5)$, $A_3(1,\quad -5,\quad -9)$, $A_4(-1,\quad -6,\quad 3)$.

6.7. $A_1(5,\quad 2,\quad 0)$, $A_2(2,\quad 5,\quad 0)$, $A_3(1,\quad 2,\quad 4)$, $A_4(-1,\quad 1,\quad 1)$.

6.8. $A_1(2,\quad -1,\quad -2)$, $A_2(1,\quad 2,\quad 1)$, $A_3(5,\quad 0,\quad -6)$, $A_4(-10,\quad 9,\quad -7)$.

6.9. $A_1(-2,\quad 0,\quad -4)$, $A_2(-1,\quad 7,\quad 1)$, $A_3(4,\quad -8,\quad -4)$, $A_4(1,\quad -4,\quad 6)$.

6.10. $A_1(14,\quad 4,\quad 5)$, $A_2(-5,\quad -3,\quad 2)$, $A_3(-2,\quad -6,\quad -3)$, $A_4(-2,\quad 2,\quad -1)$.

6.11. $A_1(1,\quad 2,\quad 0)$, $A_2(3,\quad 0,\quad -3)$, $A_3(5,\quad 2,\quad 6)$, $A_4(8,\quad 4,\quad -9)$.

6.12. $A_1(2,\quad -1,\quad 2)$, $A_2(1,\quad 2,\quad -1)$, $A_3(3,\quad 2,\quad 1)$, $A_4(-4,\quad 2,\quad 5)$.

6.13. $A_1(1,\ \ 1,\ \ 2)$, $A_2(-1,\ \ 1,\ \ 3)$, $A_3(2,\ \ -2,\ \ 4)$, $A_4(-1,\ \ 0,\ \ -2)$.
6.14. $A_1(2,\ \ 3,\ \ 1)$, $A_2(4,\ \ 1,\ \ -2)$, $A_3(6,\ \ 3,\ \ 7)$, $A_4(7,\ \ 5,\ \ -3)$.
6.15. $A_1(1,\ \ 1,\ \ -1)$, $A_2(2,\ \ 3,\ \ 1)$, $A_3(3,\ \ 2,\ \ 1)$, $A_4(5,\ \ 9,\ \ -8)$.
6.16. $A_1(1,\ \ 5,\ \ -7)$, $A_2(-3,\ \ 6,\ \ 3)$, $A_3(-2,\ \ 7,\ \ 3)$, $A_4(-4,\ \ 8,\ \ -12)$.
6.17. $A_1(-3,\ \ 4,\ \ -7)$, $A_2(1,\ \ 5,\ \ -4)$, $A_3(-5,\ \ -2,\ \ 0)$, $A_4(2,\ \ 5,\ \ 4)$.
6.18. $A_1(-1,\ \ 2,\ \ -3)$, $A_2(4,\ \ -1,\ \ 0)$, $A_3(2,\ \ 1,\ \ -2)$, $A_4(3,\ \ 4,\ \ 5)$.
6.19. $A_1(4,\ \ -1,\ \ 3)$, $A_2(-2,\ \ 1,\ \ 0)$, $A_3(0,\ \ -5,\ \ 1)$, $A_4(3,\ \ 2,\ \ -6)$.
6.20. $A_1(1,\ \ -1,\ \ 1)$, $A_2(-2,\ \ 0,\ \ 3)$, $A_3(2,\ \ 1,\ \ -1)$, $A_4(2,\ \ -2,\ \ -4)$.
6.21. $A_1(1,\ \ 2,\ \ 0)$, $A_2(1,\ \ -1,\ \ 2)$, $A_3(0,\ \ 1,\ \ -1)$, $A_4(-3,\ \ 0,\ \ 1)$.
6.22. $A_1(1,\ \ 0,\ \ 2)$, $A_2(1,\ \ 2,\ \ -1)$, $A_3(2,\ \ -2,\ \ 1)$, $A_4(2,\ \ 1,\ \ 0)$.
6.23. $A_1(1,\ \ 2,\ \ -3)$, $A_2(1,\ \ 0,\ \ 1)$, $A_3(-2,\ \ -1,\ \ 6)$, $A_4(0,\ \ -5,\ \ -4)$.
6.24. $A_1(3,\ \ 10,\ \ -1)$, $A_2(-2,\ \ 3,\ \ -5)$, $A_3(-6,\ \ 0,\ \ -3)$, $A_4(1,\ \ -1,\ \ 2)$.
6.25. $A_1(-1,\ \ 2,\ \ 4)$, $A_2(-1,\ \ -2,\ \ -4)$, $A_3(3,\ \ 0,\ \ -1)$, $A_4(7,\ \ -3,\ \ 1)$.
6.26. $A_1(0,\ \ -3,\ \ 1)$, $A_2(-4,\ \ 1,\ \ 2)$, $A_3(2,\ \ -1,\ \ 5)$, $A_4(3,\ \ 1,\ \ -4)$.
6.27. $A_1(1,\ \ 3,\ \ 0)$, $A_2(4,\ \ -1,\ \ 2)$, $A_3(3,\ \ 0,\ \ 1)$, $A_4(-4,\ \ 3,\ \ 5)$.
6.28. $A_1(-2,\ \ -1,\ \ -1)$, $A_2(0,\ \ 3,\ \ 2)$, $A_3(3,\ \ 1,\ \ -4)$, $A_4(-4,\ \ 7,\ \ 3)$.
6.29. $A_1(-3,\ \ -5,\ \ 6)$, $A_2(2,\ \ 1,\ \ -4)$, $A_3(0,\ \ -3,\ \ -1)$, $A_4(-5,\ \ 2,\ \ -8)$.
6.30. $A_1(2,\ \ -4,\ \ -3)$, $A_2(5,\ \ -6,\ \ 0)$, $A_3(-1,\ \ 3,\ \ -3)$, $A_4(-10,\ \ -8,\ \ 7)$.
6.31. $A_1(1,\ \ -1,\ \ 2)$, $A_2(2,\ \ 1,\ \ 2)$, $A_3(1,\ \ 1,\ \ 4)$, $A_4(6,\ \ -3,\ \ 8)$.

Задача 7. Найти расстояние от точки M_0 до плоскости, проходящей через точки M_1, M_2, M_3.

7.1. $M_1(-3,\ \ 4,\ \ -7)$, $M_2(1,\ \ 5,\ \ -4)$, $M_3(-5,\ \ -2,\ \ 0)$, $M_0(-12,\ \ 7,\ \ -1)$.
7.2. $M_1(-1,\ \ 2,\ \ -3)$, $M_2(4,\ \ -1,\ \ 0)$, $M_3(2,\ \ 1,\ \ -2)$, $M_0(1,\ \ -6,\ \ -5)$.
7.3. $M_1(-3,\ \ -1,\ \ 1)$, $M_2(-9,\ \ 1,\ \ -2)$, $M_3(3,\ \ -5,\ \ 4)$, $M_0(-7,\ \ 0,\ \ -1)$.
7.4. $M_1(1,\ \ -1,\ \ 1)$, $M_2(-2,\ \ 0,\ \ 3)$, $M_3(2,\ \ 1,\ \ -1)$, $M_0(-2,\ \ 4,\ \ 2)$.
7.5. $M_1(1,\ \ 2,\ \ 0)$, $M_2(1,\ \ -1,\ \ 2)$, $M_3(0,\ \ 1,\ \ -1)$, $M_0(2,\ \ -1,\ \ 4)$.
7.6. $M_1(1,\ \ 0,\ \ 2)$, $M_2(1,\ \ 2,\ \ -1)$, $M_3(2,\ \ -2,\ \ 1)$, $M_0(-5,\ \ -9,\ \ 1)$.
7.7. $M_1(1,\ \ 2,\ \ -3)$, $M_2(1,\ \ 0,\ \ 1)$, $M_3(-2,\ \ -1,\ \ 6)$, $M_0(3,\ \ -2,\ \ -9)$.
7.8. $M_1(3,\ \ 10,\ \ -1)$, $M_2(-2,\ \ 3,\ \ -5)$, $M_3(-6,\ \ 0,\ \ -3)$, $M_0(-6,\ \ 7,\ \ -10)$.

7.9. $M_1(-1,\ \ 2,\ \ 4)$, $M_2(-1,\ \ -2,\ \ -4)$, $M_3(3,\ \ 0,\ \ -1)$, $M_0(-2,\ \ 3,\ \ 5)$.

7.10. $M_1(0,\ \ -3,\ \ 1)$, $M_2(-4,\ \ 1,\ \ 2)$, $M_3(2,\ \ -1,\ \ 5)$, $M_0(-3,\ \ 4,\ \ -5)$.

7.11. $M_1(1,\ \ 3,\ \ 0)$, $M_2(4,\ \ -1,\ \ 2)$, $M_3(3,\ \ 0,\ \ 1)$, $M_0(4,\ \ 3,\ \ 0)$.

7.12. $M_1(-2,\ \ -1,\ \ -1)$, $M_2(0,\ \ 3,\ \ 2)$, $M_3(3,\ \ 1,\ \ -4)$, $M_0(-21,\ \ 20,\ \ -16)$.

7.13. $M_1(-3,\ \ -5,\ \ 6)$, $M_2(2,\ \ 1,\ \ -4)$, $M_3(0,\ \ -3,\ \ -1)$, $M_0(3,\ \ 6,\ \ 68)$.

7.14. $M_1(2,\ \ -4,\ \ -3)$, $M_2(5,\ \ -6,\ \ 0)$, $M_3(-1,\ \ 3,\ \ -3)$, $M_0(2,\ \ -10,\ \ 8)$.

7.15. $M_1(1,\ \ -1,\ \ 2)$, $M_2(2,\ \ 1,\ \ 2)$, $M_3(1,\ \ 1,\ \ 4)$, $M_0(-3,\ \ 2,\ \ 7)$.

7.16. $M_1(1,\ \ 3,\ \ 6)$, $M_2(2,\ \ 2,\ \ 1)$, $M_3(-1,\ \ 0,\ \ 1)$, $M_0(5,\ \ -4,\ \ 5)$.

7.17. $M_1(-4,\ \ 2,\ \ 6)$, $M_2(2,\ \ -3,\ \ 0)$, $M_3(-10,\ \ 5,\ \ 8)$, $M_0(-12,\ \ 1,\ \ 8)$.

7.18. $M_1(7,\ \ 2,\ \ 4)$, $M_2(7,\ \ -1,\ \ -2)$, $M_3(-5,\ \ -2,\ \ -1)$, $M_0(10,\ \ 1,\ \ 8)$.

7.19. $M_1(2,\ \ 1,\ \ 4)$, $M_2(3,\ \ 5,\ \ -2)$, $M_3(-7,\ \ -3,\ \ 2)$, $M_0(-3,\ \ 1,\ \ 8)$.

7.20. $M_1(-1,\ \ -5,\ \ 2)$, $M_2(-6,\ \ 0,\ \ -3)$, $M_3(3,\ \ 6,\ \ -3)$, $M_0(10,\ \ -8,\ \ -7)$.

7.21. $M_1(0,\ \ -1,\ \ -1)$, $M_2(-2,\ \ 3,\ \ 5)$, $M_3(1,\ \ -5,\ \ -9)$, $M_0(-4,\ \ -13,\ \ 6)$.

7.22. $M_1(5,\ \ 2,\ \ 0)$, $M_2(2,\ \ 5,\ \ 0)$, $M_3(1,\ \ 2,\ \ 4)$, $M_0(-3,\ \ -6,\ \ -8)$.

7.23. $M_1(2,\ \ -1,\ \ -2)$, $M_2(1,\ \ 2,\ \ 1)$, $M_3(5,\ \ 0,\ \ -6)$, $M_0(14,\ \ -3,\ \ 7)$.

7.24. $M_1(-2,\ \ 0,\ \ -4)$, $M_2(-1,\ \ 7,\ \ 1)$, $M_3(4,\ \ -8,\ \ -4)$, $M_0(-6,\ \ 5,\ \ 5)$.

7.25. $M_1(14,\ \ 4,\ \ 5)$, $M_2(-5,\ \ -3,\ \ 2)$, $M_3(-2,\ \ -6,\ \ -3)$, $M_0(-1,\ \ -8,\ \ 7)$.

7.26. $M_1(1,\ \ 2,\ \ 0)$, $M_2(3,\ \ 0,\ \ -3)$, $M_3(5,\ \ 2,\ \ 6)$, $M_0(-13,\ \ -8,\ \ 16)$.

7.27. $M_1(2,\ \ -1,\ \ 2)$, $M_2(1,\ \ 2,\ \ -1)$, $M_3(3,\ \ 2,\ \ 1)$, $M_0(-5,\ \ 3,\ \ 7)$.

7.28. $M_1(1,\ \ 1,\ \ 2)$, $M_2(-1,\ \ 1,\ \ 3)$, $M_3(2,\ \ -2,\ \ 4)$, $M_0(2,\ \ 3,\ \ 8)$.

7.29. $M_1(2,\ \ 3,\ \ 1)$, $M_2(4,\ \ 1,\ \ -2)$, $M_3(6,\ \ 3,\ \ 7)$, $M_0(-5,\ \ -4,\ \ 8)$.

7.30. $M_1(1,\ \ 1,\ \ -1)$, $M_2(2,\ \ 3,\ \ 1)$, $M_3(3,\ \ 2,\ \ 1)$, $M_0(-3,\ \ -7,\ \ 6)$.

7.31. $M_1(1,\ \ 5,\ \ -7)$, $M_2(-3,\ \ 6,\ \ 3)$, $M_3(-2,\ \ 7,\ \ 3)$, $M_0(1,\ \ -1,\ \ 2)$.

Задача 8. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору $\overrightarrow{BC}$.

8.1. $A(1,\ \ 0,\ \ -2)$, $B(2,\ \ -1,\ \ 3)$, $C(0,\ \ -3,\ \ 2)$.

8.2. $A(-1,\ \ 3,\ \ 4)$, $B(-1,\ \ 5,\ \ 0)$, $C(2,\ \ 6,\ \ 1)$.

8.3. $A(4,\ \ -2,\ \ 0)$, $B(1,\ \ -1,\ \ -5)$, $C(-2,\ \ 1,\ \ -3)$.

8.4. $A(-8,\ \ 0,\ \ 7)$, $B(-3,\ \ 2,\ \ 4)$, $C(-1,\ \ 4,\ \ 5)$.

8.5. $A(7,\quad -5,\quad 1),\quad B(5,\quad -1,\quad -3),\quad C(3,\quad 0,\quad -4).$

8.6. $A(-3,\quad 5,\quad -2),\quad B(-4,\quad 0,\quad 3),\quad C(-3,\quad 2,\quad 5).$

8.7. $A(1,\quad -1,\quad 8),\quad B(-4,\quad -3,\quad 10),\quad C(-1,\quad -1,\quad 7).$

8.8. $A(-2,\quad 0,\quad -5),\quad B(2,\quad 7,\quad -3),\quad C(1,\quad 10,\quad -1).$

8.9. $A(1,\quad 9,\quad -4),\quad B(5,\quad 7,\quad 1),\quad C(3,\quad 5,\quad 0).$

8.10. $A(-7,\quad 0,\quad 3),\quad B(1,\quad -5,\quad -4),\quad C(2,\quad -3,\quad 0).$

8.11. $A(0,\quad -3,\quad 5),\quad B(-7,\quad 2,\quad 6),\quad C(-3,\quad 2,\quad 4).$

8.12. $A(5,\quad -1,\quad 2),\quad B(2,\quad -4,\quad 3),\quad C(4,\quad -1,\quad 3).$

8.13. $A(-3,\quad 7,\quad 2),\quad B(3,\quad 5,\quad 1),\quad C(4,\quad 5,\quad 3).$

8.14. $A(0,\quad -2,\quad 8),\quad B(4,\quad 3,\quad 2),\quad C(1,\quad 4,\quad 3).$

8.15. $A(1,\quad -1,\quad 5),\quad B(0,\quad 7,\quad 8),\quad C(-1,\quad 3,\quad 8).$

8.16. $A(-10,\quad 0,\quad 9),\quad B(12,\quad 4,\quad 11),\quad C(8,\quad 5,\quad 15).$

8.17. $A(3,\quad -3,\quad -6),\quad B(1,\quad 9,\quad -5),\quad C(6,\quad 6,\quad -4).$

8.18. $A(2,\quad 1,\quad 7),\quad B(9,\quad 0,\quad 2),\quad C(9,\quad 2,\quad 3).$

8.19. $A(-7,\quad 1,\quad -4),\quad B(8,\quad 11,\quad -3),\quad C(9,\quad 9,\quad -1).$

8.20. $A(1,\quad 0,\quad -6),\quad B(-7,\quad 2,\quad 1),\quad C(-9,\quad 6,\quad 1).$

8.21. $A(-3,\quad 1,\quad 0),\quad B(6,\quad 3,\quad 3),\quad C(9,\quad 4,\quad -2).$

8.22. $A(-4,\quad -2,\quad 5),\quad B(3,\quad -3,\quad -7),\quad C(9,\quad 3,\quad -7).$

8.23. $A(0,\quad -8,\quad 10),\quad B(-5,\quad 5,\quad 7),\quad C(-8,\quad 0,\quad 4).$

8.24. $A(1,\quad -5,\quad -2),\quad B(6,\quad -2,\quad 1),\quad C(2,\quad -2,\quad -2).$

8.25. $A(0,\quad 7,\quad -9),\quad B(-1,\quad 8,\quad -11),\quad C(-4,\quad 3,\quad -12).$

8.26. $A(-3,\quad -1,\quad 7),\quad B(0,\quad 2,\quad -6),\quad C(2,\quad 3,\quad -5).$

8.27. $A(5,\quad 3,\quad -1),\quad B(0,\quad 0,\quad -3),\quad C(5,\quad -1,\quad 0).$

8.28. $A(-1,\quad 2,\quad -2),\quad B(13,\quad 14,\quad 1),\quad C(14,\quad 15,\quad 2).$

8.29. $A(7,\quad -5,\quad 0),\quad B(8,\quad 3,\quad -1),\quad C(8,\quad 5,\quad 1).$

8.30. $A(-3,\quad 6,\quad 4),\quad B(8,\quad -3,\quad 5),\quad C(10,\quad -3,\quad 7).$

8.31. $A(2,\quad 5,\quad -3),\quad B(7,\quad 8,\quad -1),\quad C(9,\quad 7,\quad 4).$

Задача 9. Найти угол между плоскостями.

9.1. $x-3y+5=0,\quad 2x-y+5z-16=0.$

9.2. $x-3y+z-1=0, \quad x+z-1=0.$
9.3. $4x-5y+3z-1=0, \quad x-4y-z+9=0.$
9.4. $3x-y+2z+15=0, \quad 5x+9y-3z-1=0.$
9.5. $6x+2y-4z+17=0, \quad 9x+3y-6z-4=0.$
9.6. $x-y\sqrt{2}+z-1=0, \quad x+y\sqrt{2}-z+3=0.$
9.7. $3y-z=0, \quad 2y+z=0.$
9.8. $6x+3y-2z=0, \quad x+2y+6z-12=0.$
9.9. $x+2y+2z-3=0, \quad 16x+12y-15z-1=0.$
9.10. $2x-y+5z+16=0, \quad x+2y+3z+8=0.$
9.11. $2x+2y+z-1=0, \quad x+z-1=0.$
9.12. $3x+y+z-4=0, \quad y+z+5=0.$
9.13. $3x-2y-2z-16=0, \quad x+y-3z-7=0.$
9.14. $2x+2y+z+9=0, \quad x-y+3z-1=0.$
9.15. $x+2y+2z-3=0, \quad 2x-y+2z+5=0.$
9.16. $3x+2y-3z-1=0, \quad x+y+z-7=0.$
9.17. $x-3y-2z-8=0, \quad x+y-z+3=0.$
9.18. $3x-2y+3z+23=0, \quad y+z+5=0.$
9.19. $x+y+3z-7=0, \quad y+z-1=0.$
9.20. $x-2y+2z+17=0, \quad x-2y-1=0.$
9.21. $x+2y-1=0, \quad x+y+6=0.$
9.22. $2x-z+5=0, \quad 2x+3y-7=0.$
9.23. $5x+3y+z-18=0, \quad 2y+z-9=0.$
9.24. $4x+3z-2=0, \quad x+2y+2z+5=0.$
9.25. $x+4y-z+1=0, \quad 2x+y+4z-3=0.$
9.26. $2y+z-9=0, \quad x-y+2z-1=0.$
9.27. $2x-6y+14z-1=0, \quad 5x-15y+35z-3=0.$
9.28. $x-y+7z-1=0, \quad 2x-2y-5=0.$
9.29. $3x-y-5=0, \quad 2x+y-3=0.$
9.30. $x+y+z\sqrt{2}-3=0, \quad x-y+z\sqrt{2}-1=0.$
9.31. $x+2y-2z-7=0, \quad x+y-35=0.$

Задача 10. Найти координаты точки A, равноудаленной от точек B и C.

10.1. $A(0, \quad 0, \quad z), \quad B(5, \quad 1, \quad 0), \quad C(0, \quad 2, \quad 3).$
10.2. $A(0, \quad 0, \quad z), \quad B(3, \quad 3, \quad 1), \quad C(4, \quad 1, \quad 2).$
10.3. $A(0, \quad 0, \quad z), \quad B(3, \quad 1, \quad 3), \quad C(1, \quad 4, \quad 2).$

10.4. $A(0,\ 0,\ z)$, $B(-1,\ -1,\ -6)$, $C(2,\ 3,\ 5)$.

10.5. $A(0,\ 0,\ z)$, $B(-13,\ 4,\ 6)$, $C(10,\ -9,\ 5)$.

10.6. $A(0,\ 0,\ z)$, $B(-5,\ -5,\ 6)$, $C(-7,\ 6,\ 2)$.

10.7. $A(0,\ 0,\ z)$, $B(-18,\ 1,\ 0)$, $C(15,\ -10,\ 2)$.

10.8. $A(0,\ 0,\ z)$, $B(10,\ 0,\ -2)$, $C(9,\ -2,\ 1)$.

10.9. $A(0,\ 0,\ z)$, $B(-6,\ 7,\ 5)$, $C(8,\ -4,\ 3)$.

10.10. $A(0,\ 0,\ z)$, $B(6,\ -7,\ 1)$, $C(-1,\ 2,\ 5)$.

10.11. $A(0,\ 0,\ z)$, $B(7,\ 0,\ -15)$, $C(2,\ 10,\ -12)$.

10.12. $A(0,\ y,\ 0)$, $B(3,\ 0,\ 3)$, $C(0,\ 2,\ 4)$.

10.13. $A(0,\ y,\ 0)$, $B(1,\ 6,\ 4)$, $C(5,\ 7,\ 1)$.

10.14. $A(0,\ y,\ 0)$, $B(-2,\ 8,\ 10)$, $C(6,\ 11,\ -2)$.

10.15. $A(0,\ y,\ 0)$, $B(-2,\ -4,\ 6)$, $C(7,\ 2,\ 5)$.

10.16. $A(0,\ y,\ 0)$, $B(2,\ 2,\ 4)$, $C(0,\ 4,\ 2)$.

10.17. $A(0,\ y,\ 0)$, $B(0,\ -4,\ 1)$, $C(1,\ -3,\ 5)$.

10.18. $A(0,\ y,\ 0)$, $B(0,\ 5,\ -9)$, $C(-1,\ 0,\ 5)$.

10.19. $A(0,\ y,\ 0)$, $B(-2,\ 4,\ -6)$, $C(8,\ 5,\ 1)$.

10.20. $A(0,\ y,\ 0)$, $B(7,\ 3,\ -4)$, $C(1,\ 5,\ 7)$.

10.21. $A(0,\ y,\ 0)$, $B(0,\ -2,\ 4)$, $C(-4,\ 0,\ 4)$.

10.22. $A(x,\ 0,\ 0)$, $B(0,\ 1,\ 3)$, $C(2,\ 0,\ 4)$.

10.23. $A(x,\ 0,\ 0)$, $B(4,\ 0,\ 5)$, $C(5,\ 4,\ 2)$.

10.24. $A(x,\ 0,\ 0)$, $B(8,\ 1,\ -7)$, $C(10,\ -2,\ 1)$.

10.25. $A(x,\ 0,\ 0)$, $B(3,\ 5,\ 6)$, $C(1,\ 2,\ 3)$.

10.26. $A(x,\ 0,\ 0)$, $B(4,\ 5,\ -2)$, $C(2,\ 3,\ 4)$.

10.27. $A(x,\ 0,\ 0)$, $B(-2,\ 0,\ 6)$, $C(0,\ -2,\ -4)$.

10.28. $A(x,\ 0,\ 0)$, $B(1,\ 5,\ 9)$, $C(3,\ 7,\ 11)$.

10.29. $A(x,\ 0,\ 0)$, $B(4,\ 6,\ 8)$, $C(2,\ 4,\ 6)$.

10.30. $A(x,\ 0,\ 0)$, $B(1,\ 2,\ 3)$, $C(2,\ 6,\ 10)$.

10.31. $A(x,\ 0,\ 0)$, $B(-2,\ -4,\ -6)$, $C(-1,\ -2,\ -3)$.

Задача 11. Пусть k – коэффициент преобразования подобия с центром в начале координат. Верно ли, что точка A принадлежит образу плоскости α ?

11.1. $A(1,\quad 2,\quad -1),\quad \alpha:\ 2x+3y+z-1=0,\ \ k=2.$

11.2. $A(2,\quad 1,\quad 2),\quad \alpha:\ x-2y+z+1=0,\ \ k=-2.$

11.3. $A(-1,\quad 1,\quad 1),\quad \alpha:\ 3x-y+2z+4=0,\ \ k=1/2.$

11.4. $A(-2,\quad 4,\quad 1),\quad \alpha:\ 3x+y+2z+2=0,\ \ k=3.$

11.5. $A(1,\quad 1/3,\quad -2),\quad \alpha:\ x-3y+z+6=0,\ \ k=1/3.$

11.6. $A(1/2,\quad 1/3,\quad 1),\quad \alpha:\ 2x-3y+3z-2=0,\ \ k=1{,}5.$

11.7. $A(2,\quad 0,\quad -1),\quad \alpha:\ x-3y+5z-1=0,\ \ k=-1.$

11.8. $A(1,\quad -2,\quad 1),\quad \alpha:\ 5x+y-z+6=0,\ \ k=2/3.$

11.9. $A(2,\quad -5,\quad 4),\quad \alpha:\ 5x+2y-z+3=0,\ \ k=4/3.$

11.10. $A(2,\quad -3,\quad 1),\quad \alpha:\ x+y-2z+2=0,\ \ k=5/2.$

11.11. $A(-2,\quad 3,\quad -3),\quad \alpha:\ 3x+2y-z-2=0,\ \ k=3/2.$

11.12. $A(1/4,\quad 1/3,\quad 1),\quad \alpha:\ 4x-3y+5z-10=0,\ \ k=1/2.$

11.13. $A(0,\quad 1,\quad -1),\quad \alpha:\ 6x-5y+3z-4=0,\ \ k=-3/4.$

11.14. $A(2,\quad 3,\quad -2),\quad \alpha:\ 3x-2y+4z-6=0,\ \ k=-4/3.$

11.15. $A(-2,\quad -1,\quad 1),\quad \alpha:\ x-2y+6z-10=0,\ \ k=3/5.$

11.16. $A(5,\quad 0,\quad -1),\quad \alpha:\ 2x-y+3z-1=0,\ \ k=3.$

11.17. $A(1,\quad 1,\quad 1),\quad \alpha:\ 7x-6y+z-5=0,\ \ k=-2.$

11.18. $A(1/3,\quad 1,\quad 1),\quad \alpha:\ 3x-y+5z-6=0,\ \ k=5/6.$

11.19. $A(2,\quad 5,\quad 1),\quad \alpha:\ 5x-2y+z-3=0,\ \ k=1/3.$

11.20. $A(-1,\quad 2,\quad 3),\quad \alpha:\ x-3y+z+2=0,\ \ k=2{,}5.$

11.21. $A(4,\quad 3,\quad 1),\quad \alpha:\ 3x-4y+5z-6=0,\ \ k=5/6.$

11.22. $A(3,\quad 5,\quad 2),\quad \alpha:\ 5x-3y+z-4=0,\ \ k=1/2.$

11.23. $A(4,\quad 0,\quad -3),\quad \alpha:\ 7x-y+3z-1=0,\ \ k=3.$

11.24. $A(-1,\quad 1,\quad -2),\quad \alpha:\ 4x-y+3z-6=0,\ \ k=-5/3.$

11.25. $A(2,\quad -5,\quad -1),\quad \alpha:\ 5x+2y-3z-9=0,\ \ k=1/3.$

11.26. $A(-3,\quad -2,\quad 4),\quad \alpha:\ 2x-3y+z-5=0,\ \ k=-4/5.$

11.27. $A(5,\quad 0,\quad -6),\quad \alpha:\ 6x-y-z+7=0,\ \ k=2/7.$

11.28. $A(1,\quad 2,\quad 2),\quad \alpha:\ 3x-z+5=0,\ \ k=-1/5.$

11.29. $A(3,\quad 2,\quad 4),\quad \alpha:\ 2x-3y+z-6=0,\ \ k=2/3.$

11.30. $A(7,\quad 0,\quad -1),\quad \alpha:\ x-y-z-1=0,\ \ k=4.$

11.31. $A(0,\quad 3,\quad -1),\quad \alpha:\ 2x-y+3z-1=0,\ \ k=2.$

Задача 12. Написать канонические уравнения прямой.

12.1. $2x+y+z-2=0,\quad 2x-y-3z+6=0.$
12.2. $x-3y+2z+2=0,\quad x+3y+z+14=0.$
12.3. $x-2y+z-4=0,\quad 2x+2y-z-8=0.$
12.4. $x+y+z-2=0,\quad x-y-2z+2=0.$
12.5. $2x+3y+z+6=0,\quad x-3y-2z+3=0.$
12.6. $3x+y-z-6=0,\quad 3x-y+2z=0.$
12.7. $x+5y+2z+11=0,\quad x-y-z-1=0.$
12.8. $3x+4y-2z+1=0,\quad 2x-4y+3z+4=0.$
12.9. $5x+y-3z+4=0,\quad x-y+2z+2=0.$
12.10. $x-y-z-2=0,\quad x-2y+z+4=0.$
12.11. $4x+y-3z+2=0,\quad 2x-y+z-8=0.$
12.12. $3x+3y-2z-1=0,\quad 2x-3y+z+6=0.$
12.13. $6x-7y-4z-2=0,\quad x+7y-z-5=0.$
12.14. $8x-y-3z-1=0,\quad x+y+z+10=0.$
12.15. $6x-5y-4z+8=0,\quad 6x+5y+3z+4=0.$
12.16. $x+5y-z-5=0,\quad 2x-5y+2z+5=0.$
12.17. $2x-3y+z+6=0,\quad x-3y-2z+3=0.$
12.18. $5x+y+2z+4=0,\quad x-y-3z+2=0.$
12.19. $4x+y+z+2=0,\quad 2x-y-3z-8=0.$
12.20. $2x+y-3z-2=0,\quad 2x-y+z+6=0.$
12.21. $x+y-2z-2=0,\quad x-y+z+2=0.$
12.22. $x+5y-z+11=0,\quad x-y+2z-1=0.$
12.23. $x-y+z-2=0,\quad x-2y-z+4=0.$
12.24. $6x-7y-z-2=0,\quad x+7y-4z-5=0.$
12.25. $x+5y+2z-5=0,\quad 2x-5y-z+5=0.$
12.26. $x-3y+z+2=0,\quad x+3y+2z+14=0.$
12.27. $2x+3y-2z+6=0,\quad x-3y+z+3=0.$
12.28. $3x+4y+3z+1=0,\quad 2x-4y-2z+4=0.$
12.29. $3x+3y+z-1=0,\quad 2x-3y-2z+6=0.$
12.30. $6x-5y+3z+8=0,\quad 6x+5y-4z+4=0.$
12.31. $2x-3y-2z+6=0,\quad x-3y+z+3=0.$

Задача 13. Найти точку пересечения прямой и плоскости.

13.1. $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z+1}{4}, \quad x+2y+3z-14=0.$

13.2. $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-3}{-4}=\dfrac{z+1}{5}, \quad x+2y-5z+20=0.$

13.3. $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+5}{4}=\dfrac{z-1}{2}, \quad x-3y+7z-24=0.$

13.4. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z+3}{2}, \quad 2x-y+4z=0.$

13.5. $\dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-2}{0}, \quad 3x+y-5z-12=0.$

13.6. $\dfrac{x+1}{-3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-3}{-2}, \quad x+3y-5z+9=0.$

13.7. $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{-1}, \quad x-2y+5z+17=0.$

13.8. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-4}{1}, \quad x-2y+4z-19=0.$

13.9. $\dfrac{x+2}{-1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+4}{-1}, \quad 2x-y+3z+23=0.$

13.10. $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z+3}{0}, \quad 2x-3y-5z-7=0.$

13.11. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+2}{3}, \quad 4x+2y-z-11=0.$

13.12. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{0}=\dfrac{z-1}{-1}, \quad 3x-2y-4z-8=0.$

13.13. $\dfrac{x+2}{-1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+3}{2}, \quad x+2y-z-2=0.$

13.14. $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-2}{-5}=\dfrac{z+2}{3}, \quad 5x-y+4z+3=0.$

13.15. $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-4}{3}, \quad x+3y+5z-42=0.$

13.16. $\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y-4}{5}=\dfrac{z-4}{2}, \quad 7x+y+4z-47=0.$

13.17. $\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{5}, \quad 2x+3y+7z-52=0.$

13.18. $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+3}{2}, \quad 3x+4y+7z-16=0.$

13.19. $\frac{x-5}{-2}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+4}{-1}, \quad 2x-5y+4z+24=0.$

13.20. $\frac{x-1}{8}=\frac{y-8}{-5}=\frac{z+5}{12}, \quad x-2y-3z+18=0.$

13.21. $\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+5}{0}, \quad x+7y+3z+11=0.$

13.22. $\frac{x-5}{-1}=\frac{y+3}{5}=\frac{z-1}{2}, \quad 3x+7y-5z-11=0.$

13.23. $\frac{x-1}{7}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-6}{-1}, \quad 4x+y-6z-5=0.$

13.24. $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-8}{0}, \quad 5x+9y+4z-25=0.$

13.25. $\frac{x+1}{-2}=\frac{y}{0}=\frac{z+1}{3}, \quad x+4y+13z-23=0.$

13.26. $\frac{x-1}{6}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{3}, \quad 3x-2y+5z-3=0.$

13.27. $\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+3}{-2}, \quad 3x-y+4z=0.$

13.28. $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-5}=\frac{z-3}{-2}, \quad x+2y-5z+16=0.$

13.29. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z+2}{-2}, \quad 3x-7y-2z+7=0.$

13.30. $\frac{x+3}{0}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+5}{11}, \quad 5x+7y+9z-32=0.$

13.31. $\frac{x-7}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{-2}, \quad 2x+y+7z-3=0.$

Задача 14. Найти точку M', симметричную точке M относительно прямой (для вариантов 1 – 15) или плоскости (для вариантов 16 – 31).

14.1. $M(0, \quad -3, \quad -2), \quad \frac{x-1}{1}=\frac{y+1{,}5}{-1}=\frac{z}{1}.$

14.2. $M(2,\quad -1,\quad 1)$, $\quad \dfrac{x-4{,}5}{1}=\dfrac{y+3}{-0{,}5}=\dfrac{z-2}{1}.$

14.3. $M(1,\quad 1,\quad 1)$, $\quad \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1{,}5}{-2}=\dfrac{z-1}{1}.$

14.4. $M(1,\quad 2,\quad 3)$, $\quad \dfrac{x-0{,}5}{0}=\dfrac{y+1{,}5}{-1}=\dfrac{z-1{,}5}{1}.$

14.5. $M(1,\quad 0,\quad -1)$, $\quad \dfrac{x-3{,}5}{2}=\dfrac{y-1{,}5}{2}=\dfrac{z}{0}.$

14.6. $M(2,\quad 1,\quad 0)$, $\quad \dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y+1{,}5}{-1}=\dfrac{z+0{,}5}{1}.$

14.7. $M(-2,\quad -3,\quad 0)$, $\quad \dfrac{x+0{,}5}{1}=\dfrac{y+1{,}5}{0}=\dfrac{z-0{,}5}{1}.$

14.8. $M(-1,\quad 0,\quad -1)$, $\quad \dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-1{,}5}{0}=\dfrac{z-2}{1}.$

14.9. $M(0,\quad 2,\quad 1)$, $\quad \dfrac{x-1{,}5}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-2}{1}.$

14.10. $M(3,\quad -3,\quad -1)$, $\quad \dfrac{x-6}{5}=\dfrac{y-3{,}5}{4}=\dfrac{z+0{,}5}{0}.$

14.11. $M(3,\quad 3,\quad 3)$, $\quad \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1{,}5}{0}=\dfrac{z-3}{1}.$

14.12. $M(-1,\quad 2,\quad 0)$, $\quad \dfrac{x+0{,}5}{1}=\dfrac{y+0{,}7}{-0{,}2}=\dfrac{z-2}{2}.$

14.13. $M(2,\quad -2,\quad -3)$, $\quad \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+0{,}5}{0}=\dfrac{z+1{,}5}{0}.$

14.14. $M(-1,\quad 0,\quad 1)$, $\quad \dfrac{x+0{,}5}{0}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z-4}{2}.$

14.15. $M(0,\quad -3,\quad -2)$, $\quad \dfrac{x-0{,}5}{0}=\dfrac{y+1{,}5}{-1}=\dfrac{z-1{,}5}{1}.$

14.16. $M(1,\quad 0,\quad 1)$, $\quad 4x+6y+4z-25=0.$

14.17. $M(-1,\quad 0,\quad -1)$, $\quad 2x+6y-2z+11=0.$

14.18. $M(0,\quad 2,\quad 1)$, $\quad 2x+4y-3=0.$

14.19. $M(2,\quad 1,\quad 0)$, $\quad y+z+2=0.$

14.20. $M(-1,\quad 2,\quad 0)$, $\quad 4x-5y-z-7=0.$

14.21. $M(2,\quad -1,\quad 1)$, $\quad x-y+2z-2=0.$

14.22. $M(1,\quad 1,\quad 1),\quad x+4y+3z+5=0.$

14.23. $M(1,\quad 2,\quad 3),\quad 2x+10y+10z-1=0.$

14.24. $M(0,\quad -3,\quad -2),\quad 2x+10y+10z-1=0.$

14.25. $M(1,\quad 0,\quad -1),\quad 2y+4z-1=0.$

14.26. $M(3,\quad -3,\quad -1),\quad 2x-4y-4z-13=0.$

14.27. $M(-2,\quad -3,\quad 0),\quad x+5y+4=0.$

14.28. $M(2,\quad -2,\quad -3),\quad y+z+2=0.$

14.29. $M(-1,\quad 0,\quad 1),\quad 2x+4y-3=0.$

14.30. $M(3,\quad 3,\quad 3),\quad 8x+6y+8z-25=0.$

14.31. $M(-2,\quad 0,\quad 3),\quad 2x-2y+10z+1=0.$

2. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

2.1 Теоретические вопросы

1. Линейное пространство. Базис. Координаты.
2. Преобразование координат вектора при переходе к новому базису.
3. Линейный оператор. Матрица оператора.
4. Преобразование матрицы оператора при переходе к новому базису.
5. Действия над линейными операторами.
6. Собственные векторы и собственные значения.
7. Евклидово пространство. Неравенство Коши-Буняковского.
8. Сопряженные и самосопряженные операторы. Их матрицы.
9. Ортогональное преобразование; свойства; матрица.
10. Квадратичные формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования.

2.2 Теоретические упражнения

1. Найти какой-нибудь базис и размерность подпространства L пространства R_3, если L задано уравнением $x_1-2x_2+x_3=0$.

2. Доказать, что все симметрические матрицы третьего порядка образуют линейное подпространство всех квадратных матриц третьего порядка. Найти базис и размерность этого подпространства.

3. Найти координаты многочлена $P_3(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ в базисе $1,\ (x-1),\ (x-1)^2,\ (x-1)^3$.

4. Линейный оператор A в базисе $(\mathrm{e}_1,\quad \mathrm{e}_2,\quad \mathrm{e}_3)$ имеет матрицу

$$\begin{Bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{Bmatrix}$$

Найти матрицу этого же оператора в базисе $\left(\mathrm{e}_1, \quad \mathrm{e}_1+\mathrm{e}_2, \quad \mathrm{e}_1+\mathrm{e}_2+\mathrm{e}_3\right)$.

5. Найти ядро и область значений оператора дифференцирования в пространстве многочленов, степени которых меньше или равны трем.

6. Пусть $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ — собственные векторы оператора A, относящиеся к различным собственным значениям. Доказать, что вектор $\mathbf{z}=\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y},\ \alpha\neq 0,\ \beta\neq 0$ не является собственным вектором оператора A .

7. Пусть $x=\{x_1, \quad x_2, \quad x_3\}$, $Ax=\{\alpha_1 x_1, \quad \alpha_2 x_2, \quad \alpha_3 x_3\}$. Будет ли оператор A самосопряженным?

8. Доказать, что если матрица оператора A — симметрическая в некотором базисе, то она является симметрической в любом базисе (базисы — ортонормированные).

2.3 Расчетные задания

Задача 1. Образует ли линейное пространство заданное множество, в котором определены сумма любых двух элементов a и b и произведение любого элемента a на любое число α?

1.1. Множество всех векторов трехмерного пространства, координаты которых – целые числа;
сумма $a+b$, произведение $\alpha\cdot a$.
1.2. Множество всех векторов, лежащих на одной оси;
сумма $a+b$, произведение $\alpha\cdot a$.
1.3. Множество всех векторов на плоскости, каждый из которых лежит на одной из осей;
сумма $a+b$, произведение $\alpha\cdot a$.
1.4. Множество всех векторов трехмерного пространства;
сумма $a+b$, произведение $\alpha\cdot a$.
1.5. Множество всех векторов, лежащих на одной оси;
сумма $a+b$, произведение $\alpha\cdot|a|$.
1.6. Множество всех векторов, являющихся линейными комбинациями векторов x, y, z;
сумма $a+b$, произведение $\alpha\cdot a$.
1.7. Множество всех функций $a=f(t)$, $b=g(t)$, принимающих положительные значения;
сумма $f(t)\cdot g(t)$, произведение $f^{\alpha}(t)$.

1.8. Множество всех непрерывных функций $a = f(t)$, $b = g(t)$, заданных на $[0,\quad 1]$;
сумма $f(t) + g(t)$, произведение $\alpha \cdot f(t)$.
1.9. Множество всех четных функций $a = f(t)$, $b = g(t)$, заданных на $[-1,\quad +1]$;
сумма $f(t) \cdot g(t)$, произведение $f^{\alpha}(t)$.
1.10. Множество всех нечетных функций $a = f(t)$, $b = g(t)$, заданных на $[-1,\quad +1]$;
сумма $f(t) + g(t)$, произведение $\alpha \cdot f(t)$.
1.11. Множество всех линейных функций $a = f(x_1,\, x_2)$, $b = g(x_1,\, x_2)$;
сумма $f(x_1, x_2) + g(x_1, x_2)$, произведение $\alpha \cdot f(x_1,\, x_2)$.
1.12. Множество всех многочленов третьей степени от переменной x;
сумма $a + b$, произведение $\alpha \cdot a$.
1.13. Множество всех многочленов степени, меньшей или равной трем от переменных x, y;
сумма $a + b$, произведение $\alpha \cdot a$.
1.14. Множество всех упорядоченных наборов из n чисел

$$a = \{x_1,\quad x_2,\quad \ldots,\quad x_n\},\qquad b = \{y_1,\quad y_2,\quad \ldots,\quad y_n\};$$

сумма $\{x_1 + y_1,\quad x_2 + y_2,\quad \ldots,\quad x_n + y_n\}$, произведение $\{\alpha x_1,\quad \alpha x_2,\quad \ldots,\quad \alpha x_n\}$.
1.15. Множество всех упорядоченных наборов из n чисел
$a = \{x_1,\quad x_2,\quad \ldots,\quad x_n\}$, $b = \{y_1,\quad y_2,\quad \ldots,\quad y_n\}$;
сумма $\{x_1 y_1,\quad x_2 y_2,\quad \ldots,\quad x_n y_n\}$, произведение $\{\alpha x_1,\quad \alpha x_2,\quad \ldots,\quad \alpha x_n\}$.
1.16. Множество всех сходящихся последовательностей $a = \{u_n\}$, $b = \{\upsilon_n\}$;
сумма $\{u_n + \upsilon_n\}$, произведение $\{\alpha u_n\}$.
1.17. Множество всех многочленов от одной переменной степени меньшей или равной n; сумма $a + b$, произведение $\alpha \cdot a$.
1.18. Множество всех многочленов от одной переменной степени n;
сумма $a + b$, произведение $\alpha \cdot a$.
1.19. Множество всех диагональных матриц
$a = \|a_{ik}\|$, $b = \|b_{ik}\|$, $i,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$; сумма $\|a_{ik} + b_{ik}\|$, произведение $\|\alpha a_{ik}\|$.
1.20. Множество всех невырожденных матриц
$a = \|a_{ik}\|$, $b = \|b_{ik}\|$, $i,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$; сумма $\|a_{ik}\| \cdot \|b_{ik}\|$, произведение $\|\alpha a_{ik}\|$.
1.21. Множество всех квадратных матриц

$a=\|a_{ik}\|, \quad b=\|b_{ik}\|, \quad i,\ k=1,\ 2,\ ...,\ n$; сумма $\|a_{ik}+b_{ik}\|$, произведение $\|\alpha a_{ik}\|$.

1.22. Множество всех диагональных матриц $a=\|a_{ik}\|, \quad b=\|b_{ik}\|$ размера $n\times n$; сумма $\|a_{ik}\|\cdot\|b_{ik}\|$, произведение $\|\alpha a_{ik}\|$.

1.23. Множество всех квадратных матриц
$a=\|a_{ik}\|, \quad b=\|b_{ik}\|, \quad i=1,\ 2,\ ...,\ m; \quad k=1,\ 2,\ ...,\ n$;
сумма $\|a_{ik}+b_{ik}\|$, произведение $\|\alpha a_{ik}\|$.

1.24. Множество всех симметричных матриц
$a=\|a_{ik}\| \ (a_{ik}=a_{ki}), \quad b=\|b_{ik}\| \ (b_{ik}=b_{ki}), \quad i,\ k=1,\ 2,\ ...,\ n$;
сумма $\|a_{ik}+b_{ik}\|$, произведение $\|\alpha a_{ik}\|$.

1.25. Множество всех целых чисел; сумма $a+b$, произведение $[\alpha\cdot a]$.

1.26. Множество всех действительных чисел; сумма $a+b$, произведение $\alpha\cdot a$.

1.27. Множество всех положительных чисел; сумма $a\cdot b$, произведение a^{α}.

1.28.Множество всех отрицательных чисел; сумма $-|a|\cdot|b|$, произведение $-|a|^{\alpha}$.

1.29. Множество всех действительных чисел; сумма $a\cdot b$, произведение $\alpha\cdot a$.

1.30. Множество всех дифференцируемых функций $a=f(t)$, $b=g(t)$; сумма $f(t)+g(t)$, произведение $\alpha\cdot f(t)$.

1.31. Множество всех дифференцируемых функций $a=f(t)$, $b=g(t)$; сумма $f(t)\cdot g(t)$, произведение $\alpha\cdot f(t)$.

Задача 2. Исследовать на линейную зависимость систему векторов.

2.1. $\mathbf{a}=\{1, \quad 4, \quad 6\}, \quad \mathbf{b}=\{1, \quad -1, \quad 1\}, \quad \mathbf{c}=\{1, \quad 1, \quad 3\}$.

2.2. $\sin\mathbf{x}, \quad \cos\mathbf{x}, \quad \operatorname{tg}\mathbf{x}$ на $(-\pi/2,\ \pi/2)$.

2.3. $\mathbf{a}=\{2, \quad -3, \quad 1\}, \quad \mathbf{b}=\{3, \quad -1, \quad 5\}, \quad \mathbf{c}=\{1, \quad -4, \quad 3\}$.

2.4. $2, \quad \sin\mathbf{x}, \quad \sin^2\mathbf{x}, \quad \cos^2\mathbf{x}$ на $(-\infty,\ +\infty)$.

2.5. $\mathbf{a}=\{5, \quad 4, \quad 3\}, \quad \mathbf{b}=\{3, \quad 3, \quad 2\}, \quad \mathbf{c}=\{8, \quad 1, \quad 3\}$.

2.6. $1, \quad \mathbf{x}, \quad \sin\mathbf{x}$ на $(-\infty,\ +\infty)$.

2.7. $\mathbf{a}=\{1, \quad 1, \quad 1\}, \quad \mathbf{b}=\{0, \quad 1, \quad 1\}, \quad \mathbf{c}=\{0, \quad 0, \quad 1\}$.

2.8. $e^{\mathbf{x}}, \quad e^{2\mathbf{x}}, \quad e^{3\mathbf{x}}$ на $(-\infty,\ +\infty)$.

2.9. $\mathbf{a}=\{1, \quad -1, \quad 2\}, \quad \mathbf{b}=\{-1, \quad 1, \quad -1\}, \quad \mathbf{c}=\{2, \quad -1, \quad 1\}$.

2.10. $\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}^2, \quad (1+\mathbf{x})^2$ на $(-\infty,\ +\infty)$.

2.11. $\mathbf{a}=\{1, \quad 2, \quad 3\}, \quad \mathbf{b}=\{4, \quad 5, \quad 6\}, \quad \mathbf{c}=\{7, \quad 8, \quad 9\}$.

2.12. $1,\ \mathbf{x},\ \mathbf{x}^2,\ (1+\mathbf{x})^2$ на $(-\infty,\ +\infty)$.

2.13. $\mathbf{a}=\{1,\ 1,\ 1\},\ \ \mathbf{b}=\{1,\ 2,\ 3\},\ \ \mathbf{c}=\{1,\ 3,\ 6\}$.

2.14. $\cos\mathbf{x},\ \sin\mathbf{x},\ \sin 2\mathbf{x}$ на $(-\pi/2,\ \pi/2)$.

2.15. $\mathbf{a}=\{3,\ 4,\ -5\},\ \ \mathbf{b}=\{8,\ 7,\ -2\},\ \ \mathbf{c}=\{2,\ -1,\ -8\}$.

2.16. $e^{\mathbf{x}},\ e^{-\mathbf{x}},\ e^{2\mathbf{x}}$ на $(-\infty,\ +\infty)$.

2.17. $\mathbf{a}=\{3,\ 2,\ -4\},\ \ \mathbf{b}=\{4,\ 1,\ -2\},\ \ \mathbf{c}=\{5,\ 2,\ -3\}$.

2.18. $1+\mathbf{x}+\mathbf{x}^2,\ 1+2\mathbf{x}+\mathbf{x}^2,\ 1+3\mathbf{x}+\mathbf{x}^2$ на $(-\infty,\ +\infty)$.

2.19. $\mathbf{a}=\{0,\ 1,\ 1\},\ \ \mathbf{b}=\{1,\ 0,\ 1\},\ \ \mathbf{c}=\{1,\ 1,\ 0\}$.

2.20. $1,\ e^{\mathbf{x}},\ \mathrm{sh}\mathbf{x}$ на $(-\infty,\ +\infty)$.

2.21. $\mathbf{a}=\{5,\ -6,\ 1\},\ \ \mathbf{b}=\{3,\ -5,\ -2\},\ \ \mathbf{c}=\{2,\ -1,\ 3\}$.

2.22. $1/x,\ \mathbf{x},\ 1$ на $(0,\ 1)$.

2.23. $\mathbf{a}=\{7,\ 1,\ -3\},\ \ \mathbf{b}=\{2,\ 2,\ -4\},\ \ \mathbf{c}=\{3,\ -3,\ 5\}$.

2.24. $1,\ \mathrm{tg}\,\mathbf{x},\ \mathrm{ctg}\,\mathbf{x}$ на $(0,\ \pi/2)$.

2.25. $\mathbf{a}=\{1,\ 2,\ 3\},\ \ \mathbf{b}=\{6,\ 5,\ 9\},\ \ \mathbf{c}=\{7,\ 8,\ 9\}$.

2.26. $\mathbf{x},\ 1+\mathbf{x},\ (1+\mathbf{x})^2$ на $(-\infty,\ +\infty)$.

2.27. $\mathbf{a}=\{2,\ 1,\ 0\},\ \ \mathbf{b}=\{-5,\ 0,\ 3\},\ \ \mathbf{c}=\{3,\ 4,\ 3\}$.

2.28. $e^{\mathbf{x}},\ \mathbf{x}e^{\mathbf{x}},\ \mathbf{x}^2 e^{\mathbf{x}}$ на $(-\infty,\ +\infty)$.

2.29. $\mathbf{a}=\{2,\ 0,\ 2\},\ \ \mathbf{b}=\{1,\ -1,\ 0\},\ \ \mathbf{c}=\{0,\ -1,\ -2\}$.

2.30. $e^{\mathbf{x}},\ \mathrm{sh}\,\mathbf{x},\ \mathrm{ch}\,\mathbf{x}$ на $(-\infty,\ +\infty)$.

2.31. $\mathbf{a}=\{-2,\ 1,\ 5\},\ \ \mathbf{b}=\{4,\ -3,\ 0\},\ \ \mathbf{c}=\{0,\ -1,\ 10\}$.

Задача 3. Найти какой-нибудь базис и определить размерность линейного пространства решений системы.

3.1. $$\begin{cases} 3x_1+x_2-8x_3+2x_4+x_5=0, \\ 2x_1-2x_2-3x_3-7x_4+2x_5=0, \\ x_1+11x_2-12x_3+34x_4-5x_5=0. \end{cases}$$

3.2. $$\begin{cases} 7x_1+2x_2-x_3-2x_4+2x_5=0, \\ x_1-3x_2+x_3-x_4-x_5=0, \\ 2x_1+5x_2+2x_3+x_4+x_5=0. \end{cases}$$

3.3. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 10x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - 12x_3 - 4x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$

3.4. $\begin{cases} 6x_1 - 9x_2 + 21x_3 - 3x_4 - 12x_5 = 0, \\ -4x_1 + 6x_2 - 14x_3 + 2x_4 + 8x_5 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 - x_4 - 4x_5 = 0. \end{cases}$

3.5. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 10x_2 - 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 0, \\ 4x_1 + 19x_2 - 4x_3 - 5x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

3.6. $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 2x_2 \qquad - 2x_4 - 6x_5 = 0. \end{cases}$

3.7. $\begin{cases} 12x_1 - x_2 + 7x_3 + 11x_4 - x_5 = 0, \\ 24x_1 - 2x_2 + 14x_3 + 22x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

3.8. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 6x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

3.9. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 16x_2 - 6x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0. \end{cases}$

3.10. $\begin{cases} \frac{3}{2}x_1 + \frac{5}{4}x_2 + \frac{5}{7}x_3 + x_4 = 0, \\ \frac{3}{5}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{2}{7}x_3 + \frac{2}{5}x_4 = 0, \\ \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{6}x_2 + \frac{2}{21}x_3 + \frac{2}{15}x_4 = 0. \end{cases}$

3.11. $\begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$

3.12. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 12x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 10x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 \qquad\quad + 2x_4 \qquad\quad = 0. \end{cases}$

3.13. $\begin{cases} 7x_1 - 14x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 7x_5 = 0, \\ 5x_1 - 10x_2 + x_3 + 5x_4 - 13x_5 = 0. \end{cases}$

3.14. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 3x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

3.15. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

3.16. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$

3.17. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 10x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 10x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 30x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases}$

3.18. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 7x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 - 7x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$

3.19. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$

3.20. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$

3.21. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 9x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$

3.22. $\begin{cases} 5x_1+2x_2-x_3+3x_4+4x_5=0, \\ 3x_1+x_2-2x_3+3x_4+5x_5=0, \\ 6x_1+3x_2-2x_3+4x_4+7x_5=0. \end{cases}$

3.23. $\begin{cases} 3x_1+2x_2-2x_3-x_4+4x_5=0, \\ 7x_1+5x_2-3x_3-2x_4+x_5=0, \\ x_1+x_2+x_3 \qquad\qquad -7x_5=0. \end{cases}$

3.24. $\begin{cases} 6x_1+3x_2-2x_3+4x_4+7x_5=0, \\ 7x_1+4x_2-3x_3+2x_4+4x_5=0, \\ x_1+x_2-x_3-2x_4-3x_5=0. \end{cases}$

3.25. $\begin{cases} 3x_1-5x_2+2x_3+4x_4=0, \\ 7x_1-4x_2+x_3+3x_4=0, \\ 5x_1+7x_2-4x_3-6x_4=0. \end{cases}$

3.26. $\begin{cases} x_1+x_2+3x_3-2x_4+3x_5=0, \\ 2x_1+2x_2+4x_3-x_4+3x_5=0, \\ x_1+x_2+5x_3-5x_4+6x_5=0. \end{cases}$

3.27. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4+x_5=0, \\ x_1+2x_2+7x_3-4x_4+x_5=0, \\ x_1+2x_2+11x_3-6x_4+x_5=0. \end{cases}$

3.28. $\begin{cases} 6x_1+3x_2+2x_3+3x_4+4x_5=0, \\ 4x_1+2x_2+x_3+2x_4+3x_5=0, \\ 2x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0. \end{cases}$

3.29. $\begin{cases} 3x_1+2x_2+4x_3+x_4+2x_5=0, \\ 3x_1+2x_2-2x_3+x_4 \qquad =0, \\ 3x_1+2x_2+16x_3+x_4+6x_5=0. \end{cases}$

3.30. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+2x_4+x_5=0, \\ x_1-2x_2-3x_3+x_4-x_5=0, \\ 2x_1-x_2-2x_3+3x_4 \quad =0. \end{cases}$

3.31. $\begin{cases} x_1-x_2+x_3-2x_4+x_5=0, \\ x_1+x_2-2x_3-x_4+2x_5=0, \\ x_1-3x_2+4x_3-3x_4 \quad =0. \end{cases}$

Задача 4. Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\left(\mathbf{e}_1', \quad \mathbf{e}_2', \quad \mathbf{e}_3'\right)$, если он задан в базисе $\left(\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_3\right)$.

4.1. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$
$\mathbf{x} = \{6, \quad -1, \quad 3\}.$

4.2. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = (3/2)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$
$\mathbf{x} = \{1, \quad 2, \quad 4\}.$

4.3. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = (4/3)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$
$\mathbf{x} = \{1, \quad 3, \quad 6\}.$

4.4. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + (3/2)\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = 3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$
$\mathbf{x} = \{2, \quad 4, \quad 1\}.$

4.5. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + (4/3)\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = 4\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$
$\mathbf{x} = \{6, \quad 3, \quad 1\}.$

4.6. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = (5/4)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$
$\mathbf{x} = \{1, \quad 4, \quad 8\}.$

4.7. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + (5/4)\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = 5\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$
$\mathbf{x} = \{8, \quad 4, \quad 1\}.$

4.8. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 6\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = (6/5)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$
$\mathbf{x} = \{2, \quad 5, \quad 10\}.$

4.9. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + (6/5)\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = 6\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$
$\mathbf{x} = \{10, \quad 5, \quad 1\}.$

4.10. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 7\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = (7/6)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$
$\mathbf{x} = \{1, \quad 6, \quad 12\}.$

4.11. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + (7/6)\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = 7\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$
$\mathbf{x} = \{-12, \quad 6, \quad 1\}.$

4.12. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 8\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = (8/7)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$
$\mathbf{x} = \{-1, \quad 7, \quad 14\}.$

4.13. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = (1/2)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$

$\mathbf{x} = \{-3, \quad 2, \quad 4\}.$

4.14. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + (1/2)\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = -\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$

$\mathbf{x} = \{2, \quad 4, \quad 3\}.$

4.15. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = (2/3)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$

$\mathbf{x} = \{2, \quad 6, \quad -3\}.$

4.16. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + (2/3)\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = -2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$

$\mathbf{x} = \{12, \quad 3, \quad -1\}.$

4.17. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = (3/4)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$

$\mathbf{x} = \{1, \quad -4, \quad 8\}.$

4.18. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = (3/4)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$

$\mathbf{x} = \{1, \quad 4, \quad -8\}.$

4.19. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 4\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = (4/5)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$

$\mathbf{x} = \{7, \quad -5, \quad 10\}.$

4.20. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + (4/5)\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = -4\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$

$\mathbf{x} = \{5, \quad -5, \quad -4\}.$

4.21. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 5\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = (5/6)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$

$\mathbf{x} = \{1, \quad -6, \quad 6\}.$

4.22. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + (5/6)\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = -5\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$

$\mathbf{x} = \{6, \quad 6, \quad 2\}.$

4.23. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 6\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = (6/7)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$

$\mathbf{x} = \{1, \quad 7, \quad -7\}.$

4.24. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + (6/7)\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = -6\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$

$\mathbf{x} = \{7, \quad 7, \quad 2\}.$

4.25. $\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 7\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = (7/8)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$

$\mathbf{x} = \{3, \quad -8, \quad 8\}.$

4.26. $\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 8\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = (8/9)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$

$\mathbf{x} = \{1, \quad -9, \quad 9\}.$

4.27. $\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + (8/9)\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = -8\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$

$\mathbf{x} = \{9, \quad 9, \quad 2\}.$

4.28. $\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 9\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = (9/10)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$

$\mathbf{x} = \{3, \quad -10, \quad 10\}.$

4.29. $\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + (9/10)\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = -9\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$

$\mathbf{x} = \{10, \quad 10, \quad 7\}.$

4.30. $\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 10\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = (10/9)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$

$\mathbf{x} = \{1, \quad 9, \quad 18\}.$

4.31. $\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 11\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = (11/10)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$

$\mathbf{x} = \{1, \quad 10, \quad 10\}.$

Задача 5. Пусть $x = (x_1, \quad x_2, \quad x_3)$. Являются ли линейными следующие преобразования:

5.1.
$$Ax = (6x_1 - 5x_2 - 4x_3, \quad -3x_1 - 2x_2 - x_3, \quad x_2 + 2x_3),$$
$$Bx = (6 - 5x_2 - 4x_3, \quad 3x_1 - 2x_2 - x_3, \quad x_2 + 2),$$
$$Cx = (x_3^4, \quad 3x_1 - 2x_2 - x_3, \quad x_2 + 2x_3).$$

5.2.
$$Ax = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3, \quad 2x_1 - x_2, \quad x_2 + 2),$$
$$Bx = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3, \quad 0, \quad x_2^4 + 2x_3),$$
$$Cx = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3, \quad 2x_1 - x_2, \quad x_2 + 2x_3).$$

$$A x = \left(4x_1 - 3x_2 - 2x_3,\quad x_1,\quad x_1 + 2x_2^4 + 3x_3\right),$$

5.3. $$B x = \left(4x_1 - 3x_2 - 2x_3,\quad x_1,\quad x_1 + 2x_2 + 3x_3\right),$$

$$C x = \left(4x_1 - 3x_2 - 2x_3,\quad x_1,\quad x_1 + 2x_2 + 3\right).$$

$$A x = \left(3x_1 + 2x_2 + x_3,\quad x_3,\quad 2x_1 - 3x_2 - 4x_3\right),$$

5.4. $$B x = \left(3x_1 + 2x_2 + x_3,\quad 1,\quad 2x_1 - 3x_2 - 4\right),$$

$$C x = \left(3x_1 + 2x_2 + x_3,\quad x_3,\quad 2x_1^4 - 3x_2 - 4x_3\right).$$

$$A x = \left(x_1,\quad x_1 - 2x_2 - 3,\quad 4x_1 - 5x_2 - 6\right),$$

5.5. $$B x = \left(x_1,\quad x_1 - 2x_2 - 3x_3,\quad 4x_1^4 - 5x_2 - 6x_3\right),$$

$$C x = \left(x_1,\quad x_1 - 2x_2 - 3x_3,\quad 4x_1 - 5x_2 - 6x_3\right).$$

$$A x = \left(2x_1 + x_2,\quad x_2 - 2x_3,\quad 3x_1 - 4x_2^2 - 5x_3\right),$$

5.6. $$B x = \left(2x_1 + x_2,\quad x_2 - 2x_3,\quad 3x_1 - 4x_2 - 5x_3\right),$$

$$C x = \left(2x_1 + x_2,\quad x_2 - 2,\quad 3x_1 - 4x_2 - 5\right).$$

$$A x = \left(x_1,\quad x_1 + 2x_2 + 3x_3,\quad 4x_1 + 5x_2 + 6x_3\right),$$

5.7. $$B x = \left(x_1,\quad x_1 + 2x_2 + 3,\quad 4x_1 + 5x_2 + 6\right),$$

$$C x = \left(x_1,\quad x_1 + 2x_2 + 3x_3,\quad 4x_1^4 + 5x_2 + 6x_3\right).$$

$$A x = \left(3x_1 - 2x_2 - x_3,\quad 1,\quad x_1 + 2x_2 + 3\right),$$

5.8. $$B x = \left(3x_1 - 2x_2 - x_3,\quad 0,\quad x_1^3 + 2x_2 + 3x_3\right),$$

$$C x = \left(3x_1 - 2x_2 - x_3,\quad x_3,\quad x_1 + 2x_2 + 3x_3\right).$$

$$A x = \left(2x_1 - x_2,\quad x_3,\quad x_1 + 2x_2 + 3x_3^4\right),$$

5.9. $$B x = \left(2x_1 - x_2,\quad x_3,\quad x_1 + 2x_2 + 3x_3\right),$$

$$C x = \left(2x_1 - x_2,\quad 1,\quad x_1 + 2x_2 + 3\right).$$

$$
\begin{aligned}
&Ax = \left(x_3,\quad 2x_1 + 3x_2 + 4x_3,\quad 5x_1 + 6x_2 + 7x_3\right),\\
5.10.\ &Bx = \left(x_3,\quad 2x_1 + 3x_2 + 4,\quad 5x_1 + 6x_2 + 7\right),\\
&Cx = \left(x_3,\quad 0,\quad 5x_1^4 + 6x_2 + 7x_3\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&Ax = \left(6x_1 - 5x_2 - 4x_3,\quad 3x_1 - 2x_2 - x_3,\quad 0\right),\\
5.11.\ &Bx = \left(6x_1 - 5x_2 - 4,\quad 3x_1 - 2x_2 - x_3,\quad 0\right),\\
&Cx = \left(6x_1 - 5x_2 - 4x_3,\quad 3x_1 - 2x_2 - x_3^2,\quad 0\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&Ax = \left(5x_1 - 4x_2 - 3,\quad 2x_1 - x_2,\quad x_3^2\right),\\
5.12.\ &Bx = \left(5x_1 - 4x_2 - 3x_3,\quad 2x_1 - x_2,\quad 1\right),\\
&Cx = \left(5x_1 - 4x_2 - 3x_3,\quad 2x_1 - x_2,\quad x_3\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&Ax = \left(4x_1 - 3x_2 - 2x_3,\quad x_1^2,\quad x_2 + 2x_3\right),\\
5.13.\ &Bx = \left(4x_1 - 3x_2 - 2x_3,\quad x_1,\quad x_2 + 2x_3\right),\\
&Cx = \left(4x_1 - 3x_2 - 2,\quad x_1,\quad x_2 + 2\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&Ax = \left(3x_1 + 2x_2 + x_3,\quad 0,\quad x_1 - 2x_2 - 3x_3\right),\\
5.14.\ &Bx = \left(3x_1 + 2x_2 + 1,\quad 0,\quad x_1 - 2x_2 - 3\right),\\
&Cx = \left(3x_1 + 2x_2 + x_3,\quad 0,\quad x_1^2 - 2x_2 - 3x_3\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&Ax = \left(x_1,\quad x_2 - 2x_3,\quad 3x_1 - 4x_2 - 5\right),\\
5.15.\ &Bx = \left(x_1,\quad x_2^2 - 2x_3,\quad 3x_1 - 4x_2 - 5\right),\\
&Cx = \left(x_1,\quad x_2 - 2x_3,\quad 3x_1 - 4x_2 - 5x_3\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&Ax = \left(2x_1 + x_2,\quad x_3^2,\quad 2x_1 - 3x_2 - 4x_3\right),\\
5.16.\ &Bx = \left(2x_1 + x_2,\quad x_3,\quad 2x_1 - 3x_2 - 4x_3\right),\\
&Cx = \left(2x_1 + x_2,\quad x_3,\quad 2x_1 - 3x_2 - 4\right).
\end{aligned}
$$

$$5.17.\quad \begin{aligned} Ax &= \left(x_1,\quad x_2 + 2x_3,\quad 3x_1 + 4x_2 + 5x_3\right), \\ Bx &= \left(x_1,\quad x_2 + 2x_3,\quad 3x_1 + 4x_2 + 5\right), \\ Cx &= \left(x_1,\quad x_2^2 + 2x_3,\quad 3x_1 + 4x_2 + 5x_3\right). \end{aligned}$$

$$5.18.\quad \begin{aligned} Ax &= \left(3x_1 - 2x_2 - 1,\quad 0,\quad x_1 + 2x_2 + 3x_3\right), \\ Bx &= \left(3x_1^2 - 2x_2 - x_3,\quad 0,\quad 0\right), \\ Cx &= \left(3x_1 - 2x_2 - x_3,\quad 0,\quad x_1 + 2x_2 + 3x_3\right). \end{aligned}$$

$$5.19.\quad \begin{aligned} Ax &= \left(2x_1^2 - x_2,\quad x_3,\quad 2x_2 + 3x_3\right), \\ Bx &= \left(2x_1 - x_2,\quad x_3,\quad 2x_2 + 3x_3\right), \\ Cx &= \left(2x_1 - x_2,\quad x_3,\quad 2x_2 + 3\right). \end{aligned}$$

$$5.20.\quad \begin{aligned} Ax &= \left(0,\quad x_1 + 2x_2 + 3x_3,\quad 4x_1 + 5x_2 + 6x_3\right), \\ Bx &= \left(0,\quad x_1 + 2x_2 + 3x_3,\quad 4x_1 + 5x_2 + 6\right), \\ Cx &= \left(0,\quad x_1^2 + 2x_2 + 3x_3,\quad 4x_1 + 5x_2 + 6x_3\right). \end{aligned}$$

$$5.21.\quad \begin{aligned} Ax &= \left(6x_1 - 5x_2 - 4x_3,\quad 3x_1 - 2x_2 - x_3,\quad x_2\right), \\ Bx &= \left(6x_1 - 5x_2 - 4,\quad 3x_1 - 2x_2 - x_3,\quad x_2\right), \\ Cx &= \left(6x_1 - 5x_2 - 4x_3^3,\quad 3x_1 - 2x_2 - x_3,\quad 0\right). \end{aligned}$$

$$5.22.\quad \begin{aligned} Ax &= \left(5x_1 - 4x_2 - 3,\quad 2x_1 - x_2,\quad x_1 + 2x_2 + 3x_3\right), \\ Bx &= \left(5x_1 - 4x_2 - 3x_3^3,\quad 2x_1 - x_2,\quad x_1 + 2x_2 + 3x_3\right), \\ Cx &= \left(5x_1 - 4x_2 - 3x_3,\quad 2x_1 - x_2,\quad x_1 + 2x_2 + 3x_3\right). \end{aligned}$$

$$5.23.\quad \begin{aligned} Ax &= \left(4x_1 - 3x_2^3 - 2x_3,\quad x_1 + x_3,\quad 0\right), \\ Bx &= \left(4x_1 - 3x_2 - 2x_3,\quad x_1 + x_3,\quad 2x_1 + 3x_2 + 4x_3\right), \\ Cx &= \left(4x_1 - 3x_2 - 2,\quad x_1 + x_3,\quad 2x_1 + 3x_2 + 4x_3\right). \end{aligned}$$

$$Ax = \left(3x_1 + 4x_2 + 5x_3,\quad 6x_1 + 7x_2 + 8x_3,\quad 9x_1 + x_3\right),$$

5.24. $$Bx = \left(3x_1 + 4x_2 + 5,\quad 6x_1 + 7x_2 + 8,\quad 9x_1 + x_3\right),$$

$$Cx = \left(3x_1 + 4x_2 + 5x_3^3,\quad 6x_1 + 7x_2 + 8x_3,\quad 0\right).$$

$$Ax = \left(2x_1 + 3x_2 + 4,\quad 5x_1 + 6x_2 + 7,\quad 8x_1 + x_3\right),$$

5.25. $$Bx = \left(2x_1 + 3x_2 + 4x_3^3,\quad 5x_1 + 6x_2 + 7x_3,\quad 0\right),$$

$$Cx = \left(2x_1 + 3x_2 + 4x_3,\quad 5x_1 + 6x_2 + 7x_3,\quad 8x_1 + x_3\right).$$

$$Ax = \left(x_1^3 + x_3,\quad 2x_1 + 3x_2 + 4x_3,\quad 0\right),$$

5.26. $$Bx = \left(x_1 + x_3,\quad 2x_1 + 3x_2 + 4x_3,\quad 5x_1 + 6x_2 + 7x_3\right),$$

$$Cx = \left(x_1 + 1,\quad 2x_1 + 3x_2 + 4,\quad 5x_1 + 6x_2 + 7x_3\right).$$

$$Ax = \left(3x_1 - 2x_2 - x_3,\quad x_2 + 2x_3,\quad 3x_1 + 4x_2 + 5x_3\right),$$

5.27. $$Bx = \left(3x_1 - 2x_2 - 1,\quad x_2 + 2,\quad 3x_1 + 4x_2 + 5x_3\right),$$

$$Cx = \left(3x_1 - 2x_2 - x_3^3,\quad x_2 + 2x_3,\quad 0\right).$$

$$Ax = \left(2x_1 - x_2,\quad x_1 + 2x_2 + 3,\quad 4x_1 + 5x_2 + 6x_3\right),$$

5.28. $$Bx = \left(2x_1 - x_2^3,\quad x_1 + 2x_2 + 3x_3,\quad 0\right),$$

$$Cx = \left(2x_1 - x_2,\quad x_1 + 2x_2 + 3x_3,\quad 4x_1 + 5x_2 + 6x_3\right).$$

$$Ax = \left(x_1^3 + 2x_2 + 3x_3,\quad 4x_1 + 5x_2 + 6x_3,\quad 7x_1 + 8x_2\right),$$

5.29. $$Bx = \left(x_1 + 2x_2 + 3x_3,\quad 4x_1 + 5x_2 + 6x_3,\quad 7x_1 + 8x_2\right),$$

$$Cx = \left(x_1 + 2x_2 + 3,\quad 4x_1 + 5x_2 + 6,\quad 7x_1 + 8x_2\right).$$

$$Ax = \left(x_2 + 2x_3,\quad 3x_1 + 4x_2 + 5x_3,\quad 6x_1 + 7x_2 + 8x_3\right),$$

5.30. $$Bx = \left(x_2 + 2,\quad 3x_1 + 4x_2 + 5,\quad 6x_1 + 7x_2 + 8x_3\right),$$

$$Cx = \left(x_2^3 + 2x_3,\quad 3x_1 + 4x_2 + 5x_3,\quad 6x_1 + 7x_2 + 8x_3\right).$$

$$Ax = \left(x_1^2, \quad x_1 - x_3, \quad x_2 + x_3\right),$$

5.31. $Bx = \left(1, \quad x_1 - x_3, \quad x_2 + x_3\right),$

$$Cx = \left(x_1, \quad x_1 - x_3, \quad x_2 + x_3\right).$$

Задача 6. Пусть $x = \{x_1, \quad x_2, \quad x_3\}$, $Ax = \{x_2 - x_3, \quad x_1, \quad x_1 + x_3\}$, $Bx = \{x_2, \quad 2x_3, \quad x_1\}$. Найти:

6.1.	$ABx.$	6.2.	$A^2x.$	6.3.	$\left(A^2 - B\right)x.$
6.4.	$B^4x.$	6.5.	$B^2x.$	6.6.	$\left(2A + 3B^2\right)x.$
6.7.	$\left(A^2 + B^2\right)x.$	6.8.	$\left(B^2 + A\right)x.$	6.9.	$BAx.$
6.10.	$B\left(2A - B\right)x.$	6.11.	$A\left(2B - A\right)x.$	6.12.	$2\left(AB + 2A\right)x.$
6.13.	$\left(A - B\right)^2 x.$	6.14.	$\left(B - 2A^2\right)x.$	6.15.	$BA^2x.$
6.16.	$\left(3A^2 + B\right)x.$	6.17.	$\left(A^2 + B\right)x.$	6.18.	$\left(A^2 - B^2\right)x.$
6.19.	$\left(2B - A^2\right)x.$	6.20.	$B^3x.$	6.21.	$\left(B^2 - 2A\right)x.$
6.22.	$\left(A\left(B + A\right)\right)x.$	6.23.	$\left(AB^2\right)x.$	6.24.	$\left(A\left(B - A\right)\right)x.$
6.25.	$2\left(B + 2A^2 + B^2\right)x.$	6.26.	$\left(B\left(A - B\right)\right)x.$	6.27.	$\left(B - A + B^2\right)x.$
6.28.	$\left(B\left(A + B\right)\right)x.$	6.29.	$\left(A + BA - B\right)x.$	6.30.	$\left(3B + 2A^2\right)x.$
6.31	$\left(B\left(2A + B\right)\right)x.$				

Задача 7. Найти матрицу в базисе $\left(e_1', \quad e_2', \quad e_3'\right)$, где $e_1' = e_1 - e_2 + e_3$, $e_2' = -e_1 + e_2 - 2e_3$, $e_3' = -e_1 + 2e_2 + e_3$, если она задана в базисе $\left(e_1, \ e_2, \ e_3\right)$.

7.1.	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$	7.2.	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$	7.3.	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$
7.4.	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$	7.5.	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$	7.6.	$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$

7.7.	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$	7.8.	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$	7.9.	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$
7.10.	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$	7.11.	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$	7.12.	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$
7.13.	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$	7.14.	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$	7.15.	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$
7.16.	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$	7.17.	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$	7.18.	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$
7.19.	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$	7.20.	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$	7.21.	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$
7.22.	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$	7.23.	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$	7.24.	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$
7.25.	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$	7.26.	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$	7.27.	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$
7.28.	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$	7.29.	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$	7.30.	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$
7.31.	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$				

Задача 8. Доказать линейность, найти матрицу, область значений и ядро оператора:

8.1. проектирования на ось Ox;

8.2. проектирования на плоскость $z=0$;
8.3. проектирования на ось Oz;
8.4. зеркального отражения относительно плоскости Oyz;
8.5. проектирования на ось Oy;
8.6. проектирования на плоскость $y=0$;
8.7. зеркального отражения относительно плоскости $x-y=0$;
8.8. зеркального отражения относительно плоскости $y+z=0$;
8.9. проектирования на плоскость $y-z=0$;
8.10. проектирования на плоскость $y=\sqrt{3}x$;
8.11. проектирования на плоскость Oyz;
8.12. зеркального отражения относительно плоскости $x-z=0$;
8.13. зеркального отражения относительно плоскости Oxy;
8.14. поворота относительно оси Ox на угол $\pi/2$ в положительном направлении;
8.15. проектирования на плоскость $x-y=0$;
8.16. проектирования на плоскость $y+z=0$;
8.17. зеркального отражения относительно плоскости $x+y=0$;
8.18. зеркального отражения относительно плоскости $y-z=0$;
8.19. проектирования на плоскость $x+y=0$;
8.20. проектирования на плоскость $x-z=0$;
8.21. зеркального отражения относительно плоскости $x+z=0$;
8.22. поворота относительно оси Oz в положительном направлении на угол $\pi/2$;
8.23. проектирования на плоскость $\sqrt{3}y+z=0$;
8.24. зеркального отражения относительно плоскости Oxz;
8.25. поворота в положительном направлении относительно оси Oy на угол $\pi/2$;
8.26. проектирования на плоскость $x+z=0$;
8.27. проектирования на плоскость $y+\sqrt{3}z=0$;
8.28. проектирования на плоскость $\sqrt{3}x+z=0$;
8.29. проектирования на плоскость $\sqrt{3}x+y=0$;
8.30. поворота относительно оси Oz в положительном направлении на угол $\pi/4$;
8.31. проектирования на плоскость $x-\sqrt{3}z=0$;

Задача 9. Даны линейные операторы φ и ψ в пространстве V^3.
1. Найти матрицы операторов φ, ψ и φ·ψ в базисе (i, j, k).

2. Найти ядро и образ операторов φ и ψ. В случае ненулевого ядра описать их уравнениями.
3. Выяснить, существует ли обратный оператор для φ·ψ. Если да, то описать его геометрический смысл; если нет, то указать причину.

Условия вариантов

Номер варианта	φ	ψ	Номер варианта	φ	ψ	Номер варианта	φ	ψ
1	1а	2б	11	4б	1г	21	1е	2а
2	2а	1б	12	5б	2в	22	1г	5б
3	3а	4а	13	6б	3в	23	4в	3б
4	4а	6д	14	1е	2б	24	1г	4в
5	5а	3а	15	1в	5б	25	2б	3б
6	6а	2а	16	2в	6г	26	3б	6е
7	6е	5а	17	3в	5а	27	4б	4в
8	1б	4б	18	4в	2б	28	2а	5б
9	2б	6б	19	5в	6д	29	6г	6д
10	3б	6в	20	6в	1д	30	4б	1е

1. Поворот вокруг оси а) OZ на 90°; б) OZ на 45°; в) OX на 45°; г) OX на 30°; д) OY на 90°; е) OY на 60°.
2. Ортогональное проектирование на плоскость а) x + y + z = 0; б) x – y + z = 0; в) x + y – z = 0.
3. Ортогональное проектирование на ось а) x = 0, y = z; б) x = z, y = 0; в) x = y = z.
4. Зеркальное отражение относительно плоскости а) x + y + z = 0; б) x – y + z = 0; в) x + y – z = 0.
5. Зеркальное отражение относительно оси а) x = y, z = 0; б) x = z, y = 0; в) x = y = z. 6. Векторное умножение на вектор а) a = i + j + k; б) a = i + j – k; в) a = i – j + k; г) a = i + 2k; д) a = j – 2k; е) a = 2i – j.

Примеры решения задачи 9.

1. Рассмотрим поворот трехмерного пространства (R^3) вокруг оси OY на 45°. Обозначим этот оператор через φ. (Очевидно, что φ действительно есть линейный оператор.) Если не указано иначе, то подразумевается, что поворот осуществляется против часовой стрелки, если смотреть из конца оси OY (точнее, смотреть вдоль этой оси в направлении, противоположном стрелке). Прежде всего запишем матрицу этого оператора. Из геометрических соображений ясно, что плоскость XOZ, перпендикулярная к оси OY, будет вращаться внутри себя, поэтому поворот вектора $\boldsymbol{i}$ будет осуществляться в пределах этой плоскости. Координаты вектора $\varphi(\boldsymbol{i})$ в плоскости XOZ будут равны $\{\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\}$, т. е. $\varphi(\boldsymbol{i}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{k}$. Далее, $\varphi(\boldsymbol{j}) = \boldsymbol{j}$ (вектор $\boldsymbol{j}$ при заданном

вращении не меняется), а $\varphi(\boldsymbol{k}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{k}$. Таким образом, искомая матрица равна:

$$A_\varphi = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix}$$

Этот оператор обратим – обратным к нему будет оператор поворота на угол 45° в противоположную сторону. (Обратимость данного оператора следует также из невырожденности матрицы A_φ – ее определитель равен 1.) Найдем теперь ядро и образ этого оператора. Так как любой вектор имеет прообраз, то образ совпадает со всем пространством R^3. Что же касается ядра, то это по определению множество всех векторов, переходящих в нуль. Так как при повороте длина вектора не меняется, то таковым может быть только нулевой вектор. Итак, ядро в данном случае равно нулевому подпространству. Впрочем, мы могли воспользоваться общим утверждением: если линейный оператор обратим, то у него нулевое ядро, а его образ есть все пространство.

2. Обозначим через ψ ортогональное проектирование на плоскость x=y. Из свойств проекции вытекает, что оператор проектирования на ось или на плоскость всегда линеен. Ясно, что $\psi(\boldsymbol{i}) = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{i} + \frac{1}{2}\boldsymbol{j}$; $\psi(\boldsymbol{j}) = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{i} + \frac{1}{2}\boldsymbol{j}$; $\psi(\boldsymbol{k})=\boldsymbol{k}$. Чтобы получить эти результаты, можно воспользоваться формулой проекции вектора $\boldsymbol{a}$ на плоскость $\boldsymbol{\pi}$ (в этой формуле проекция рассматривается как вектор):

$$\text{пр}_\pi a = a - \frac{(a,n)\cdot n}{|n|^2}$$

Здесь $\boldsymbol{n}$ – произвольный ненулевой вектор, нормальный к данной плоскости. В нашем случае в качестве таковаго можно взять вектор {1; –1; 0}. Поэтому, например, $\psi(\boldsymbol{i}) = \text{пр}_\pi \boldsymbol{i} = \boldsymbol{i} - \frac{(\boldsymbol{i},n)\cdot n}{|n|^2} = \boldsymbol{i} - \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{n} == \left\{\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}; \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}; 0\right\}$ и аналогично для других проекций. Это дает матрицу:

$$A_\psi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Рассматриваемый оператор необратим (т.к. он неинъективен: $\psi(\boldsymbol{i}) = \psi(\boldsymbol{j})$. Он также не является сюръективным – образы всех векторов заполняют плоскость x=y, но не заполняют всего пространства). Необратимость оператора ψ вытекает также из того, что det A_ψ=0 (первые две строки матрицы A_ψ одинаковы). Найдем ядро и образ оператора ψ. Так как образы всех векторов заполняют плоскость x=y, то эта плоскость и является образом нашего оператора. Что же касается ядра, то это по определению есть множество всех векторов, переходящих в нуль, т.е. в данном случае проектирующихся в нуль. Легко понять, что эти векторы заполняют прямую, перпендикулярную данной плоскости и проходящую через начало координат. Пользуясь знаниями аналитической геометрии, мы можем определить, что ядро – множество всех векторов, коллинеарных вектору {1; –1; 0} (т.к. этот вектор нормален к плоскости x–y=0). То есть ***Ker***ψ – линейная оболочка указанного вектора. (Напишите канонические или параметрические уравнения соответствующей прямой!)

3. Пусть оператор ω – ортогональное проектирование на ось x=y, z=0. Оператор ортогонального проектирования, как уже отмечалось выше, линеен. Легко видеть, что ω($\boldsymbol{i}$) ={ $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$; $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$; 0}= $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{i}$+ $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{j}$; ω($\boldsymbol{j}$) = { $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$; $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$; 0}= $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{i}$+ $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{j}$; ω($\boldsymbol{k}$)=0. Чтобы получить эти результаты, можно воспользоваться формулой проекции вектора на ось (в этой формуле проекция рассматривается как вектор):

$$\text{пр}_l a = \frac{(a,l)\cdot l}{|l|^2}$$

Здесь $\boldsymbol{l}$ – произвольный ненулевой (направляющий) вектор данной оси. В нашем примере в качестве такового можно взять вектор {1; 1; 0}. Поэтому, например, =

$$\omega(\boldsymbol{i}) = \text{пр}_l i = \frac{(i,l)\cdot l}{|l|^2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{l} = \{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}};\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}};\mathbf{0}\}$$

и аналогично для других проекций. Таким образом, мы имеем:

$$A\omega = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оператор необратим (объясните, почему!). Аналогично предыдущей задаче решается вопрос о ядре и образе. Образом будет данная ось (прямая, точнее, соответствующее одномерное подпространство векторов; то есть ***Im*** ω является линейной оболочкой вектора {1; 1; 0}). Ядро же – совокупность векторов, перпендикулярных нашей оси. Эта совокупность является плоскостью, уравнение которой мы легко можем написать, пользуясь знаниями аналитической геометрии: x+y=0. (Найдите базис подпространства ***Ker*** ψ.)

4. Обозначим через σ зеркальное отражение относительно плоскости y=z. Здесь каждый вектор переходит в вектор, симметричный (зеркально отраженный) относительно указанной плоскости. (Докажите, что этот оператор линеен.) Найдем образы базисных векторов: σ($\boldsymbol{i}$) = {1; 0; 0} = $\boldsymbol{i}$; σ($\boldsymbol{j}$) = {0;0;1}=$\boldsymbol{k}$; σ($\boldsymbol{k}$)={0;1;0}=$\boldsymbol{j}$. Чтобы получить эти результаты, можно воспользоваться следующей формулой, выражающей вектор $\boldsymbol{d}$, симметричный данному вектору $\boldsymbol{a}$ относительно данной плоскости π: $d = a - \frac{2(a,n)\cdot n}{|n|^2}$.

Здесь $\boldsymbol{n}$ – произвольный ненулевой вектор, нормальный к данной плоскости. В нашем случае в качестве такового можно взять вектор {0; 1; –1}. Поэтому, например, σ($\boldsymbol{j}$) = $j - \frac{2(j,n)\cdot n}{|n|^2} = j - n$ ={0;0;1} и аналогично для других базисных векторов. Это дает матрицу:

$$A_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица A_σ невырождена, и, следовательно, оператор σ обратим. Это ясно также из того, что любой оператор зеркального отражения (относительно плоскости или прямой) всегда обратен самому себе (объясните это). Поскольку наш оператор обратим, то, как объяснялось выше (см. пример 1), у него нулевое ядро, а его образ есть все пространство.

5. Пусть τ – оператор зеркального отражения относительно прямой y=z, x=0. Этот оператор также обратим и обратен самому себе. Найдем его матрицу: $\tau()$ = {–1;0;0} =–***i***; $\tau(\boldsymbol{j})$={0;0;1}=***k***; $\tau(\boldsymbol{k})$ ={0;1;0}=***j***. Чтобы получить эти результаты, можно воспользоваться формулой, выражающей вектор ***d***, симметричный данному вектору ***a*** относительно данной оси: $d = \frac{2(a,l)\cdot l}{|l|^2} - a$. Здесь ***l*** – произвольный ненулевой (направляющий) вектор данной оси. В нашем примере в качестве такового можно взять вектор {0; 1; 1}. Поэтому, например, $\tau(\boldsymbol{j}) = \frac{2(j,l)\cdot l}{|l|^2} - j = l - j = k$ и аналогично для других базисных векторов. Таким образом, мы имеем:

$$A_\tau = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оператор τ, будучи обратимым, имеет нулевое ядро, а его образ есть все пространство.

6. Рассмотрим теперь векторное умножение на вектор 2***i*** +***j*** – ***k***, т. е. на вектор ***d*** с координатами {2; 1; –1}. Обозначим это отображение $R^3 \to R^3$ через δ. Из свойств векторного умножения легко вытекает, что δ – линейный оператор (докажите!). Составим теперь матрицу этого линейного оператора (A_δ). Действуя по определению линейного оператора, последовательно вычисляем:

$$\delta(\boldsymbol{i}) = [\boldsymbol{i}, \boldsymbol{d}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \{0;\ 1;\ 1\};$$

$$\delta(\boldsymbol{j}) = [\boldsymbol{j}, \boldsymbol{d}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \{-1;\ 0;\ -2\};$$

$$\delta(\boldsymbol{k}) = [\boldsymbol{k}, \boldsymbol{d}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \{-1;\ 2;\ 0\};$$

Полученные строки записываем в столбцы матрицы A_δ:

$$A_\delta = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы видим, что ***det*** A_δ=0 и, следовательно, оператор δ необратим. Можно указать причину этого: $\delta(\boldsymbol{d}) = [\boldsymbol{d}, \boldsymbol{d}] = 0$, а т. к. $\delta(0)$ также есть 0, причем $\boldsymbol{d} \neq \boldsymbol{0}$, то на этих двух векторах (***d*** и 0) нарушается инъективность. Найдем теперь ядро и образ данного оператора. Ядру принадлежат те и только те векторы ***x***, для которых [***x, d***]=0. Последнее условие, как известно, равносильно тому, что векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{d}$ коллинеарны. Таким образом, ядро нашего линейного оператора – это совокупность всех векторов, коллинеарных вектору $\boldsymbol{d}$, т.е. это одномерное подпространство, являющееся линейной оболочкой вектора $\boldsymbol{d}$. Для нахождения образа нашего линейного оптратора, т.е. совокупности всех векторов вида $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{d}]$, где вектор $\boldsymbol{x}$ пробегает все пространство, заметим прежде всего, что все эти векторы перпендикулярны вектору $\boldsymbol{d}$ и, следовательно, лежат в плоскости, ему перпендикулярной и проходящей через начало координат. Так как сумма размерностей ядра и образа любого линейного оператора всегда равна размерности всего пространства, мы заключаем отсюда, что размерность образа в нашем случае должна быть равна двум, откуда вытекает, что образ оператора δ совпадает с указанной плоскостью. Так как нормальным к этой плоскости вектором будет вектор $\boldsymbol{d}$ с координатами $\{2;\ 1;\ -1\}$, то уравнение этой плоскости будет таково: $2x + y - z = 0$.

7. Решим задачу о произведении двух операторов. Найдем матрицу оператора $\chi = \varphi\psi$, где φ есть оператор поворота всего пространства на 45° вокруг оси OY (см. пример 1), а ψ – оператор проектирования на плоскость $x = y$ (см. пример 2). Матрицу оператора χ получим, перемножая матрицы операторов ψ и φ (именно в этом порядке!):

$$A\chi = A\psi \cdot A\varphi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Как было объяснено выше, оператор χ необратим. В качестве причины можно указать, например, несюръективность оператора χ – образы всех векторов будут лежать в плоскости $x = y$, т. е. они не заполняют всего пространства. Или можно указать на вырожденность матрицы $A\chi$ (в ней две одинаковые строки).

8. Рассмотрим отображение, являющееся результатом последовательного выполнения операторов φ (поворот на 45° вокруг оси OY, см. пример 1) и оператора σ (зеркальное отражение относительно плоскости $y = z$, пример 4). Это отображение есть произведение $\varphi\sigma$ оператора φ на оператор σ и, следовательно, само является линейным оператором. Его матрица

$$A\varphi\sigma = A\sigma \cdot A\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Этот оператор обратим; обратным к нему будет оператор последовательного выполнения сначала зеркального отражения относительно нашей плоскости $x = y$ ($\sigma^{-1} = \sigma$), а затем поворота вокруг оси OY на угол 45° по часовой стрелке (если смотреть вдоль этой оси в направлении, противоположном стрелке; это оператор φ^{-1}). Аналогичным образом находятся произведения любых других двух из рассмотренных нами операторов.

Задача 10. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы.

10.1.	$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.	10.2.	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.	10.3.	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
10.4.	$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.	10.5.	$\begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.	10.6.	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.
10.7.	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.	10.8.	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.	10.9.	$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.
10.10.	$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.	10.11.	$\begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.	10.12.	$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.
10.13.	$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.	10.14.	$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.	10.15.	$\begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.
10.16.	$\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 4 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.	10.17.	$\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.	10.18.	$\begin{pmatrix} 13 & 2 & -2 \\ 6 & 9 & -6 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.
10.19.	$\begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.	10.20.	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{7}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$.	10.21.	$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{13}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} \end{pmatrix}$.
10.22.	$\begin{pmatrix} 19/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2 & 5 & -2 \\ 2/3 & -2/3 & 11/3 \end{pmatrix}$.	10.23.	$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.	10.24.	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

10.25	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$	10.26	$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$	10.27	$\begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$
10.28	$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2/3 & 5/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -13/3 \end{pmatrix}.$	10.29	$\begin{pmatrix} 5/3 & -2/3 & -4/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2/3 & 2/3 & 7/3 \end{pmatrix}.$	10.30	$\begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$
10.31	$\begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$				

Задача 11. Дана матрица A, которая является матрицей оператора в стандартном базисе пространства R^3.

1. Найти собственные числа и собственные векторы оператора φ.
2. Убедившись в существовании базиса пространства R^3, состоящего из собственных векторов оператора φ, записать матрицу оператора φ в таком базисе.
3. Указать матрицу перехода к новому базису из собственных векторов и проверить справедливость формулы, связывающей матрицы оператора в разных базисах.

11.1.	$\begin{pmatrix} -11 & 0 & 12 \\ -3 & 1 & 3 \\ -9 & 0 & 10 \end{pmatrix}$	11.2.	$\begin{pmatrix} -6 & -2 & 6 \\ -2 & 3 & 3 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$	11.3.	$\begin{pmatrix} -13 & -6 & 18 \\ -6 & -4 & 9 \\ -12 & -6 & 17 \end{pmatrix}$
11.4.	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	11.5.	$\begin{pmatrix} -14 & -6 & 18 \\ -6 & -5 & 9 \\ -12 & -6 & 16 \end{pmatrix}$	11.6.	$\begin{pmatrix} -2 & -6 & 6 \\ -3 & -5 & 6 \\ -3 & -6 & 7 \end{pmatrix}$
11.7.	$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 6 \\ 12 & 1 & 12 \\ -9 & 0 & -8 \end{pmatrix}$	11.8.	$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$	11.9.	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 6 & 5 & 12 \\ -3 & -3 & -7 \end{pmatrix}$
11.10.	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	11.11.	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 6 & 4 & 12 \\ -3 & -3 & -8 \end{pmatrix}$	11.12.	$\begin{pmatrix} -5 & 3 & 0 \\ -6 & 4 & 0 \\ 6 & -3 & 1 \end{pmatrix}$
11.13.	$\begin{pmatrix} 13 & 0 & -12 \\ -6 & 1 & 6 \\ 15 & 0 & -14 \end{pmatrix}$	11.14.	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$	11.15.	$\begin{pmatrix} 8 & 3 & -6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 9 & 3 & -7 \end{pmatrix}$
11.16.	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$	11.17.	$\begin{pmatrix} 7 & 3 & -6 \\ 0 & -2 & 0 \\ 9 & 3 & -8 \end{pmatrix}$	11.18.	$\begin{pmatrix} -5 & 3 & 6 \\ 6 & -2 & -6 \\ -6 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

11.19.	$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -15 & 1 & 15 \\ 6 & 0 & -5 \end{pmatrix}$	11.20.	$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	11.21.	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ -6 & -7 & -12 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$
11.22.	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -3 & 4 & 9 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$	11.23.	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -6 & -8 & -12 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$	11.24.	$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 9 \\ 9 & -8 & -27 \\ -3 & 3 & 10 \end{pmatrix}$
11.25	$\begin{pmatrix} -8 & -9 & 0 \\ 6 & 7 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$	11.26	$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	11.27	$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$
11.28	$\begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 \\ 2 & 5 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$	11.29	$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 6 \\ 0 & -5 & -6 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$	11.30	$\begin{pmatrix} 7 & 12 & 6 \\ -6 & -11 & -6 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

Задача 12. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом инвариантов.

12.1. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 + 4x_3^2$.

12.2. $4x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 3x_2{}^2 + 4x_3^2$.

12.3. $4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_3^2$.

12.4. $4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 - 2x_3^2$.

12.5. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$.

12.6. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3 + x_3^2$.

12.7. $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 3x_2^2 - 6x_2x_3 - 2x_3^2$.

12.8. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2$.

12.9. $x_1^2 + 4x_1x_3 - x_2^2 - 2x_2x_3 + 4x_3^2$.

12.10. $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_3^2$.

12.11. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2^2 + 12x_2x_3 + 4x_3^2$.

12.12. $4x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 5x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$.

12.13. $4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2^2 + 8x_2x_3 + x_3^2$.

12.14. $4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 5x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$.

12.15. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 5x_2^2 + 12x_2x_3 + 7x_3^2$.

12.16. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2^2 + 16x_2x_3 + 7x_3^2$.

12.17. $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 5x_2^2 + 10x_2x_3 + 4x_3^2$.

12.18. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 5x_2^2 + 6x_2x_3 + x_3^2$.

12.19. $x_1^2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 4x_3^2$.

12.20. $x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2$.

12.21. $x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3+2x_3^2$.

12.22. $4x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3-3x_2^2+2x_3^2$.

12.23. $4x_1^2+8x_1x_2+4x_1x_3+x_3^2$.

12.24. $4x_1^2+8x_1x_2+4x_1x_3+3x_2^2-4x_3^2$.

12.25. $x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3+3x_2^2+4x_2x_3-x_3^2$.

12.26. $x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3-x_3^2$.

12.27. $x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3-3x_2^2-6x_2x_3-4x_3^2$.

12.28. $x_1^2+4x_1x_2+2x_1x_3+3x_2^2+2x_2x_3-x_3^2$.

12.29. $x_1^2+4x_1x_2-x_2^2-2x_2x_3+2x_3^2$.

12.30. $x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3-x_3^2$.

12.31. $x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+3x_3^2$.

Задача 13. Привести квадратичную форму к каноническому виду ортогональным преобразованием.

13.1. $4x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$.

13.2. $4x_1^2+4x_2^2+x_3^2-2x_1x_2+2\sqrt{3}x_2x_3$.

13.3. $2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+8x_1x_2+8x_1x_3-8x_2x_3$.

13.4. $2x_1^2+9x_2^2+2x_3^2-4x_1x_2+4x_2x_3$.

13.5. $-4x_1^2-4x_2^2+2x_3^2-4x_1x_2+8x_1x_3-8x_2x_3$.

13.6. $x_1^2+x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2-2\sqrt{3}x_2x_3$.

13.7. $4x_1^2+4x_2^2+x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3+4x_2x_3$.

13.8. $3x_1^2+x_2^2-\dfrac{3}{2}x_3^2+2\sqrt{3}x_1x_2-x_1x_3+\sqrt{3}x_2x_3$.

13.9. $-x_1^2-x_2^2-3x_3^2-2x_1x_2-6x_1x_3+6x_2x_3$.

13.10. $x_1^2-7x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-2x_1x_3-4x_2x_3$.

13.11. $\dfrac{5\sqrt{2}}{4}x_1^2+\dfrac{5\sqrt{2}}{4}x_2^2+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}x_3^2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$.

13.12. $3x_1^2-7x_2^2+3x_3^2+8x_1x_2-8x_1x_3-8x_2x_3$.

13.13. $x_1^2+5x_2^2+x_3^2-4x_1x_2+5\sqrt{2}x_1x_3+\sqrt{2}x_2x_3$.

13.14. $x_1^2+x_2^2+x_3^2-\frac{4}{3}x_1x_2-\frac{8\sqrt{2}}{3}x_2x_3.$

13.15. $-2x_1^2+2x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+5\sqrt{2}x_1x_3+\sqrt{2}x_2x_3.$

13.16. $-(1/2)x_1^2+5x_2^2-(1/2)x_3^2-4x_1x_2+3x_1x_3+4x_2x_3.$

13.17. $x_1^2+x_2^2-x_3^2-4x_1x_3+4x_2x_3.$

13.18. $-2x_1^2+2x_2^2-2x_3^2+4x_1x_2-6x_1x_3+4x_2x_3.$

13.19. $2x_1^2+3x_2^2+2x_3^2-8x_1x_2-4\sqrt{2}x_1x_3+2\sqrt{2}x_2x_3.$

13.20. $-4x_1^2+x_2^2-4x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+4x_2x_3.$

13.21. $10x_1^2+14x_2^2+7x_3^2-10x_1x_2-\sqrt{2}x_1x_3-5\sqrt{2}x_2x_3.$

13.22. $(3/2)x_1^2-5x_2^2+(3/2)x_3^2+4x_1x_2-x_1x_3-4x_2x_3.$

13.23. $x_1^2+x_2^2+2x_3^2+4x_1x_2+2\sqrt{2}x_1x_3-2\sqrt{2}x_2x_3.$

13.24. $2x_2^2-3x_3^2-2\sqrt{3}x_1x_2-4x_1x_3+4\sqrt{3}x_2x_3.$

13.25. $x_1^2+x_2^2+x_3^2+\frac{4}{3}x_1x_2+\frac{8\sqrt{2}}{3}x_2x_3.$

13.26. $x_1^2+x_3^2+8x_1x_2+4\sqrt{2}x_1x_3-2\sqrt{2}x_2x_3.$

13.27. $5x_1^2+13x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2+8x_2x_3.$

13.28. $2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+\frac{2}{3}x_1x_2+\frac{4\sqrt{2}}{3}x_2x_3.$

13.29. $5x_1^2+4x_2^2+2x_3^2-4x_1x_2-2\sqrt{2}x_1x_3+4\sqrt{2}x_2x_3.$

13.30. $-2x_1^2+5x_2^2-2x_3^2+4x_1x_2+4x_2x_3.$

13.31. $-3x_1^2+9x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2+8x_1x_3+4x_2x_3.$

Задача 14. Исследовать кривую второго порядка и построить ее.

14.1. $-x^2-y^2+4xy+2x-4y+1=0.$

14.2. $2x^2+2y^2-2xy-2x-2y+1=0.$

14.3. $4xy+4x-4y=0.$

14.4. $-2x^2-2y^2+2xy-6x+6y+3=0.$

14.5. $-3x^2-3y^2+4xy-6x+4y+2=0.$

14.6. $-2xy-2x-2y+1=0.$

14.7. $-x^2-y^2-4xy-4x-2y+2=0.$

14.8. $-4x^2-4y^2+2xy+10x-10y+1=0.$

14.9. $4xy+4x-4y-2=0.$

14.10. $x^2+y^2+2xy-8x-8y+1=0.$

14.11. $x^2+y^2+4xy-8x-4y+1=0.$

14.12. $x^2+y^2-2xy-2x+2y-7=0.$

14.13. $2xy+2x+2y-3=0.$

14.14. $4x^2+4y^2+2xy+12x+12y+1=0.$

14.15. $3x^2+3y^2+4xy+8x+12y+1=0.$

14.16. $x^2+y^2-8xy-20x+20y+1=0.$

14.17. $3x^2+3y^2-2xy-6x+2y+1=0.$

14.18. $4xy+4x+4y+1=0.$

14.19. $3x^2+3y^2-4xy+6x-4y-7=0.$

14.20. $-4xy-4x+4y+6=0.$

14.21. $5x^2+5y^2-2xy+10x-2y+1=0.$

14.22. $2x^2+2y^2+4xy+8x+8y+1=0.$

14.23. $-x^2-y^2+2xy+2x-2y+1=0.$

14.24. $2x^2+2y^2-4xy-8x+8y+1=0.$

14.25. $3x^2+3y^2+2xy-12x-4y+1=0.$

14.26. $-4xy+8x+8y+1=0.$

14.27. $2x^2+2y^2-2xy+6x-6y-6=0.$

14.28. $x^2+y^2+4xy+4x+2y-5=0.$

14.29. $4xy+4x-4y+4=0.$

14.30. $3x^2+3y^2-4xy+4x+4y+1=0.$

14.31. $x^2+y^2-4xy+4x-2y+1=0.$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 2005.
2. Ильин В. А. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Изд-во Проспект 2008.
3. Кадомцев С.Б. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. – М.: Физматлит, 2001.
4. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии, - М.: Наука, 1986.
5. Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. Учебное пособие. – М.: Наука, 1987.
6. Моденов М.П., Пархоменко П.С. Сборник задач по аналитической геометрии. - М.: Наука, 1976, 332 с.
7. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. - М.: Наука, 1987, 254 с.
8. Александров П.С. Аналитическая геометрия. - М.: Наука, 1967, 588 с.
9. Постников М.М. Аналитическая геометрия. - М.: Наука, 1987.
10. Федорчук В.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. - М.: Изд-во МГУ, 1990, 328 с.
11. Бодренко И.И. Аналитическая геометрия. Сборник задач, 1998, 36 с.
12. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть 2. Линейная алгебра. – М.:Физматлит,2000.
13. Кострикин А.И., Манин Ю.И. Линейная алгебра и геометрия. – М.: Наука, 1986.
14. Линейные операторы: Метод. указания к домашней контрольной работе по курсу «Линейная алгебра и аналитическая геометрия». Часть 1 / Моск. гос. институтт электроники и математики; Сост.: И.К. Бусяцкая, К.К. Андреев. – М., 2005, 23 с.

Н.И. Овсянникова

Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Учебно-методическое пособие

В авторской редакции

Подписано в печать 29.06.2020 г.
Формат 60x84/16 Печ. л. 3,25 Усл. печ. л. 3,02
Заказ № 582/0225-УМП16 Тираж 20 экз.

Московский государственный технический университет ГА
125993, Москва, Кронштадтский бульвар, д. 20

Издательский дом Академии имени Н. Е. Жуковского
125167, Москва, 8-го Марта 4-я ул., д. 6А
Тел.: (495) 973-45-68
E-mail: zakaz@itsbook.ru