ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ» (МГТУ ГА)

Кафедра электротехники
и авиационного электрооборудования

А.Г. Зеленский

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Учебно-методическое пособие
по выполнению контрольного домашнего задания

для студентов II курса
направления 25.03.02
всех форм обучения

Москва
ИД Академии Жуковского
2020

УДК 537.8
ББК 537
З-48

Рецензент:
Халютин С.П. – д-р техн. наук, профессор

Зеленский А.Г.
З-48 Теория электромагнитного поля [Текст] : учебно-методическое пособие по выполнению контрольного домашнего задания / А.Г. Зеленский. – М.: ИД Академии Жуковского, 2020. – 24 с.

Данное учебно-методическое пособие издается в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Теория электромагнитного поля» по учебному плану для студентов II курса направления 25.03.02 всех форм обучения.

Рассмотрено и одобрено на заседаниях кафедры 25.11.2019 г. и методического совета 26.11.2019 г.

УДК 537.8
ББК 537

В авторской редакции

Подписано в печать 29.06.2020 г.
Формат 60x84/16 Печ. л. 1,5 Усл. печ. л. 1,395
Заказ № 576/0225-УМП14 Тираж 50 экз.

Московский государственный технический университет ГА
125993, Москва, Кронштадтский бульвар, д. 20

Издательский дом Академии имени Н. Е. Жуковского
125167, Москва, 8-го Марта 4-я ул., д. 6А
Тел.: (495) 973-45-68
E-mail: zakaz@itsbook.ru

1. ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОГО ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ

1.1. Цель контрольного домашнего задания

Контрольное домашнее задание (КДЗ) по дисциплине «Теория электромагнитного поля» имеет целью закрепление знаний студентов по следующим разделам учебной дисциплины: постоянное электрическое поле в вакууме, закон Кулона, электростатическая теорема Гаусса, потенциал.

В ходе самостоятельного выполнения КДЗ студенты приобретают практические навыки анализа и расчета напряженности электрического поля заданного распределения точечных зарядов (***Задание 1***); определение напряженности электростатического поля, созданного зарядами, распределенными равномерно в произвольных конечных областях пространства с постоянными значениями линейной плотности заряда (τ), поверхностной плотности заряда (σ) или объёмной плотности заряда (ρ) (***Задания 2 - 5***); определение потенциала или разности потенциалов поля заданного распределения зарядов (***Задания 6 - 8***).

1.2. Требования к оформлению КДЗ

КДЗ выполняется и оформляется в обычной тетради или на листах стандартного формата А4, которые должны быть обязательно скреплены.

Графики выполняются с соблюдением требований ЕСКД и использованием чертежных инструментов (не от руки), допускается применение компьютерной графики. В случае использования при расчетах компьютерных средств соответствующие распечатки должны быть выполнены также на стандартных листах и вложены в работу.

Условия задачи необходимо приводить полностью в том виде, как они сформулированы в задании, с учетом особенностей своего варианта. В решение включать необходимый минимум промежуточных расчетов. Окончательный результат расчета привести с указанием единицы измерения соответствующей величины.

Работа должна быть выполнена собственноручно, датирована и подписана студентом. Выполненная работа представляется на кафедру преподавателю для проверки. Все замечания, отмеченные преподавателем, устраняются студентом в установленные сроки, после чего он защищает свою работу.

Студенты, не выполнившие КДЗ в назначенный срок, к зачёту по дисциплине «Теория электромагнитного поля» не допускаются.

1.3. Указания к выбору варианта

Вариант задания выбирается студентом из соответствующих каждому заданию таблиц по последней цифре номера зачетной книжки (шифра).

1.4. Рекомендуемая литература:

1. Матвеев А.Н. Электричество и магнетизм. – М.: Оникс 21 век, 2005.

2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Электричество. – М.: Физматлит, 2006.

3. Калашников С.Г. Электричество. – М.: Физматлит, 2003.

4. Тамм И.Е. Основы теории электричества. – М.: Физматлит, 2003.

2. ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Задание 1

Положительный точечный заряд q мкКл находится на плоскости xy в точке A с радиус-вектором $\mathbf{r_0} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, где $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ – орты осей x и y. Найти модуль и направление вектора напряженности электрического поля **E** в точке *B* с радиус-вектором **r** = 6**i** – 3**j**. Значения координат $\mathbf{r_0}$ и **r** даны в метрах.

Последняя цифра шифра	*q*, мкКл	$\mathbf{r_0}$, м	**r**, м
1	70	3**i** + 2**j**	6**i** – 2**j**
2	50	2**i** + 2**j**	6**i** + 3**j**
3	40	2**i** + 3**j**	3**i** – 3**j**
4	10	3**i** + 4**j**	3**i** – 4**j**
5	90	3**i** + 5**j**	5**i** – 2**j**
6	70	4**i** + 2**j**	2**i** – 5**j**
7	40	5**i** + 2**j**	4**i** – 7**j**
8	50	6**i** + 2**j**	2**i** – 3**j**
9	30	3**i** + 6**j**	3**i** + 3**j**
0	20	4**i** + 3**j**	5**i** - 3**j**

Задание 2

Прямая нить длиной *L* м заряжена равномерно с линейной плотностью *τ*. Найти напряженность поля в произвольной точке, расположенной на расстоянии *h* м от нити.

Последняя цифра шифра	*L*, м	*τ*, мкКл/м	*h*, м
1	2	4	0,2
2	5	3	0,3
3	4	10	0,2
4	1	9	0,4
5	3	6	0,5
6	2	6	0,2
7	4	7	0,1
8	6	9	0,2
9	3	10	0,3
0	2	2	0,4

Задание 3

Определить напряженность поля на оси тонкого диска радиуса R_0 м, заряженного равномерно с поверхностной плотностью σ.

Последняя цифра шифра	R_0, м	σ, мкКл/м^2	z_0 м
1	0,1	0,2	0,1
2	0,2	0,1	0,3
3	0,3	0,3	0,2
4	0,4	0,4	0,5
5	0,5	0,5	0,1
6	0,6	0,6	0,3
7	0,1	0,7	0,4
8	0,7	0,8	0,3
9	0,8	0,8	0,5
0	0,9	0,9	0,6

Задание 4

На поверхности сферы радиуса R м равномерно распределен положительный заряд с поверхностной плотностью σ. Найти напряженность электрического поля в точке r м.

Последняя цифра шифра	R, м	σ, мкКл/м^2	r, м
1	1	0,2	3
2	2	0,1	6
3	1	0,3	2
4	3	0,4	3
5	1	0,5	1
6	4	0,2	3
7	1	0,1	4
8	5	0,3	3
9	1	0,4	2
0	2	0,5	4

Задание 5

Шар радиуса R м равномерно заряжен с объемной плотностью ρ. Найти напряженность поля в точке r м.

Последняя цифра шифра	R, м	ρ, Кл/м^3	r, м
1	1	4	2
2	5	3	3
3	4	5	4
4	1	6	3
5	2	7	1
6	2	9	5
7	1	7	4
8	1	1	3
9	3	10	2
0	2	2	1

Задание 6

Найти потенциал поля, создаваемого равномерно заряженной с линейной плотностью τ нитью длины $2L$ в точке M (r, z), где $r = 2$ м и $z = 8$ м.

Последняя цифра шифра	L, м	τ, мкКл/м
1	2	4
2	5	3
3	4	10
4	1	9
5	2	6
6	2	7
7	4	6
8	6	3
9	3	4
0	2	2

Задание 7

Тонкий диск радиуса R заряжен равномерно с поверхностной плотностью σ. Определить потенциал поля в точке A, расположенной на оси диска на расстоянии h от его плоскости.

Последняя цифра шифра	R, м	σ, мкКл/м^2	h, м
1	1	0,1	3
2	2	0,2	5
3	1	0,3	2
4	3	0,5	3
5	1	0,4	1
6	5	0,1	4
7	1	0,2	3
8	4	0,5	3
9	1	0,3	2
0	2	0,4	1

Задание 8

Шар радиуса R равномерно заряжен с объемной плотностью ρ. Найти значение потенциала в точке r.

Последняя цифра шифра	R, м	ρ, Кл/м^3	r, м
1	1	5	2
2	5	4	3
3	4	5	4
4	1	2	3
5	2	3	1
6	2	4	5
7	1	7	4
8	1	2	3
9	3	6	2
0	2	1	1

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И ПРИМЕРЫ

Задание 1

Метод решения: использовать формулы (1) – (3) (см. ниже) и принцип суперпозиции.

Закон Кулона: сила взаимодействия двух точечных неподвижных зарядов q_1 и q_2, расположенных в вакууме на расстоянии r друг от друга, в системе единиц СИ равна

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}, \qquad (1)$$

и направлена по прямой, соединяющей заряды (одноимённые заряды отталкиваются, разноимённые – притягиваются).

Величина

$$\varepsilon_0 \approx 8{,}85\cdot10^{-12}\ \text{Ф/м},$$

называется электрической постоянной.

Напряженность электростатического поля **E** – векторная характеристика поля, определяемая силой, действующей на внесенный в поле неподвижный точечный пробный заряд q

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}, \qquad (2)$$

Напряженность поля точечного заряда q на расстоянии r от него равна по величине

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}. \qquad (3)$$

С целью упрощения вычислений необходимо выбрать такую систему координат, которая соответствует элементам симметрии, присутствующим в условии задачи.

Задача. Положительный точечный заряд q = 60 мкКл находится на плоскости xy в точке A с радиус-вектором $\mathbf{r_0} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, где $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ – орты осей x и y. Найти модуль и направление вектора напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ в точке B с радиус-вектором $\mathbf{r} = 6\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$. Значения координат $\mathbf{r_0}$ и $\mathbf{r}$ даны в метрах.

Решение.

Используя численные данные, приведенные в условии задачи, рисуем схематическое изображение изучаемой системы (Рис. 1).

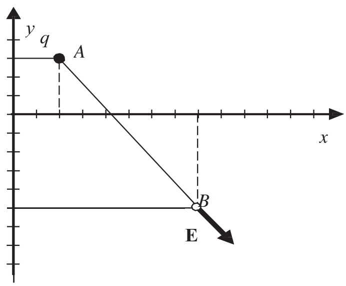

Рис. 1. К определению напряженности поля **E** точечного заряда.

Заряд находится в точке A с координатами x_0 = 2 м, y_0 = 3 м, а напряженность поля определяется в точке B с координатами x = 8 м, y = –5 м. Для применения формулы (3) находим расстояние d между точками A и B:

$$d = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \sqrt{36 + 64} = 10\ (м).$$

Тогда модуль напряженности поля будет равен

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} = \frac{9\times10^9 \cdot 5\times10^{-5}}{100} = 4{,}5\ (\frac{кВ}{м}).$$

Так как направление вектора **E** совпадает с направлением от точки A к точке B, то вектор **E** можно представить в виде

$$\vec{E} = \vec{i}\ E\cos\alpha + \vec{j}\ E\sin\alpha\,,$$

где $\cos\alpha = \dfrac{x - x_0}{d} = 0{,}6$, $\sin\alpha = \dfrac{y - y_0}{d} = -0{,}8$. Окончательно получаем

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} = \frac{(x - x_0)\,\vec{i} + (y - y_0)\,\vec{j}}{\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = (2{,}7\vec{i} - 3{,}6\vec{j})\,(\frac{кВ}{м}).$$

Ответ: $E = 4{,}5\,\dfrac{кВ}{м}$, $\vec{E} = (2{,}7\vec{i} - 3{,}6\vec{j})\,\dfrac{кВ}{м}$.

Задание 2

Метод решения: в непрерывно распределенных зарядах выделяем физически бесконечно малые заряды – т.е. заряды, находящиеся на отрезке бесконечно малой длины dl (в случае линейного распределения), на бесконечно малой площади dS (в случае поверхностного распределения) и в бесконечно малом объеме dV (в случае объемного распределения). Эти выделенные заряды далее рассматриваются как точечные. Создаваемая ими напряженность поля в интересующей нас точке вычисляется по формуле напряженности поля точечного заряда (3), после чего по принципу суперпозиции суммируются все вклады от таких зарядов. Фактически задача сводится к вычислению линейных, поверхностных или объемных интегралов.

Задача. Прямая нить длиной L = 2 м заряжена равномерно с линейной плотностью τ = 4 мкКл/м. Найти напряженность поля в произвольной точке, расположенной на расстоянии h = 0,2 м от нити.

Решение.

Поместим начало системы координат O в основание перпендикуляра, опущенного из точки наблюдения A на направление нити, ось Y направим вдоль нити, а ось X перпендикулярно к ней (Рис. 2, для наглядности нить представлена в виде тонкого цилиндра).

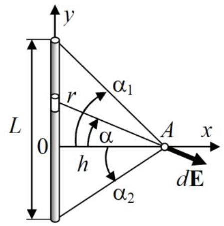

Рис. 2. К нахождению напряжённости поля **E**, создаваемого отрезком заряженной нити.

Выделим на нити на произвольном расстоянии у от начала координат участок бесконечно малой длины dy, заряд которого рассматриваем как точечный. Этот заряд создает в точке А поле напряженностью

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau\, dy}{r^2},$$

где $r = \sqrt{x^2 + h^2} = \dfrac{h}{\cos\alpha}$ (угол α отсчитываем от направления AO). Вектор $d\mathbf{E}$ лежит в плоскости XY и его проекции на координатные оси равны

$$dE_x = dE\cos\alpha,\ dE_y = dE\sin\alpha,\ dE_z = 0.$$

Полное значение проекций напряженности поля получим, суммируя все такие бесконечно малые вклады, т.е. вычисляя интеграл вдоль всей нити. Интегрирование выполняется совсем просто, если в качестве переменной вместо y использовать угол α.

Из соотношения $y = h\ \mathrm{tg}\ \alpha$ находим

$$dy = \frac{h}{\cos^2\alpha}d\alpha$$

и

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{h}\cos\alpha d\alpha,\ dE_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{h}\sin\alpha d\alpha .$$

Пределы интегрирования определяются углами α_1 и α_2, под которыми из точки наблюдения А видны концы нити (оба угла считаем положительными). Итак,

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{h}(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2),\ E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{h}(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2).$$

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{h}\sin(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}).$$

Эти формулы очень удобны для анализа частных случаев. Например, если нить бесконечная, то $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi/2$ и мы получаем

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{h},\ E_y = 0 .$$

Если нужно вычислить напряженность в точке напротив центра нити, то полагаем $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ и получаем

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{h}\sin\alpha .$$

И так далее. Конечно, эти результаты можно выразить и через координату у верхнего конца нити, заменяя α_1 на arctg y/h и α_2 – на arctg $(y\text{-}L)/h$.

Ответ: $E = \dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{\tau}{h}\sin(\dfrac{\alpha_1 + \alpha_2}{2})$.

Задание 3

Задача. Определить напряженность поля на оси тонкого диска радиуса *R0,* заряженного равномерно с поверхностной плотностью σ.

Решение.

Выберем ось Z совпадающей с осью диска (Рис. 3). Малый элемент поверхности диска, находящийся на расстоянии R от центра, имеет площадь $dS = Rd\varphi dR$, где φ – полярный угол. Элементарный заряд на нем можно считать точечным; он равен $dq = \sigma dS = \sigma\, R\, dR\, d\varphi$. Соответственно напряженность поля от этого точечного заряда в точке с координатой z_0 будет равна

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma R dR d\varphi}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}, \quad r = \sqrt{R^2 + z_0^2}\,.$$

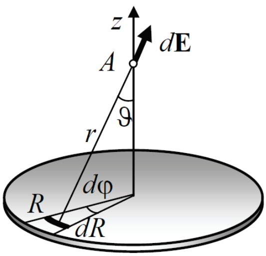

Рис.3. Определение напряженности поля **E** на оси заряженного диска.

Разложим d**E** на две составляющие – по оси Z и перпендикулярную оси Z. Последняя при суммировании по площади диска в силу симметрии задачи даст нуль, а первая будет равна $dE_z = dE\cos\vartheta$, где $\cos\vartheta = z_0/r$. Тогда

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma z_0 R dR d\varphi}{(R^2 + z_0^2)^{3/2}}$$

и

$$E_z = \frac{\sigma z_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{R_0}\int_0^{2\pi}\frac{R dR d\varphi}{(R^2 + z_0^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z_0}{\sqrt{R^2 + z_0^2}}\right).$$

При $R_0 \to \infty$ (или $z_0 \to 0$) $E_z \to \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, т.е. стремится к величине поля равномерно заряженной бесконечной плоскости.

Ответ: $E = E_z = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}(1 - \dfrac{z_0}{\sqrt{R^2 + z_0^2}})$.

<u>Задание 4</u>

Задача. На поверхности сферы радиуса R равномерно распределен положительный заряд с поверхностной плотностью σ. Найти напряженность электрического поля в точке r.

Решение.

Система имеет сферическую симметрию. Для применения теоремы Гаусса выберем в качестве поверхности Гаусса концентрическую сферу радиуса r.

При $r < R$ заряда внутри этой поверхности нет. Значит, в любой точке внутри равномерно заряженной сферы $E = 0$.

При $r > R$ весь заряд $q = 4\pi R^2\sigma$ находится внутри поверхности Гаусса, а поток вектора E через неё равен $4\pi r^2 E$. По теореме Гаусса находим

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}.$$

Поле вне равномерно заряженной сферы совпадает с полем точечного заряда q, расположенного в центре сферы. На заряженной поверхности напряженность поля не определена (испытывает скачок от $E = 0$ внутри, до $E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{R^2} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$ – снаружи).

Ответ: для $r < R$: E внутри = 0; для $r > R$: $E_{вне} = \dfrac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}$.

Задание 5

Задача. Шар радиуса R равномерно заряжен с объемной плотностью ρ. Найти напряженность поля в точке r.

Решение.

Система имеет сферическую симметрию. Для применения теоремы Гаусса выберем в качестве поверхности Гаусса концентрическую сферу радиуса r.

При $r < R$ заряд внутри этой сферы равен $(4/3)\pi r^3\rho$, а поток **E** через её поверхность равен $4\pi r^2 E$. По теореме Гаусса $E_{внутри} = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0} r$.

Таким образом, внутри равномерно заряженного шара поле растёт от центра шара по линейному закону, достигая на поверхности шара значения

$E = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0} r = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{R^2}$, где q – полный заряд, размещенный на шаре.

При $r > R$ поле снаружи равномерно заряженного шара совпадает с полем точечного заряда, расположенного в центре шара и равного по величине полному заряду шара. Функция $E(r)$ непрерывна, так как нет поверхностей, несущих поверхностный заряд.

Ответ: для $r < R$: $E_{внутри} = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0} r$;

для $r \geq R$: $E_{вне} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}$, где $q = \dfrac{4}{3}\pi R^3 \rho$.

<u>Задание 6</u>

Определение потенциала или разности потенциалов поля заданного распределения зарядов.

Метод решения: прямое суммирование потенциалов в заданной точке от точечных зарядов (4) и непрерывно распределенных зарядов (5) (см. ниже). Этот метод универсален, т.е. применим к любому распределению зарядов. Однако, в случае симметричной системы зарядов, когда с помощью теоремы Гаусса легко выполняется вычисление напряженности поля Е, можно найти потенциал из известной напряженности поля (6). Такой подход часто позволяет существенно упростить расчеты.

Если заряды распределены в конечной области пространства, то в дальнейшем (если не оговорено другое условие) будем полагать равным нулю значение потенциала в бесконечно удаленной точке.

Потенциал $\varphi(r)$ – скалярная функция, поэтому суммирование выполняется алгебраически, что значительно упрощает расчет по сравнению с вычислением напряженности поля $E(r)$, когда вклады от разных зарядов складываются векторно.

Наиболее общий подход состоит в использовании уравнения Пуассона (или уравнения Лапласа). При этом учитываются условия непрерывности потенциала, граничные условия и условия нормировки. Однако решение дифференциального уравнения второго порядка в частных производных является достаточно сложной задачей. Другое дело – использование уравнения Пуассона для решения обратной задачи. Если задано распределение потенциала, то, вычисляя его вторые производные по координатам, можно с помощью уравнения Пуассона найти распределение заряда во всем пространстве.

Потенциал поля точечного заряда q равен

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}, \qquad (4)$$

где r – расстояние от заряда q до точки наблюдения (потенциал в точке, бесконечно удалённой от заряда принимается равным нулю).

Потенциал поля непрерывного распределения зарядов: если все заряды расположены в конечной области пространства и потенциал нормирован на нуль в бесконечности, то

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}, \qquad (5)$$

где $\vec{r}\,'$ – радиус-вектор заряда dq, $\vec{r}$ – вектор, проведенный из точки, в которой вычисляется потенциал, до заряда $dq(\vec{r}\,')$ в бесконечно малой окрестности точки $\vec{r}\,'$. Интегрирование производится по всем объемам, содержащим распределенные с плотностью ρ заряды ($dq(\vec{r}\,') = \rho(\vec{r}\,')dV$), по всем поверхностям, несущим поверхностные заряды σ ($dq(\vec{r}\,') = \sigma(\vec{r}\,')dS$), и по всем линиям, на которых находятся распределенные с линейной плотностью τ заряды ($dq(\vec{r}\,') = \tau(\vec{r}\,')dl$).

Связь потенциала с напряженностью поля

$$\vec{E} = -grad\ \varphi, \qquad (6)$$

Нахождение разности потенциалов $\Delta\phi_{21}$ из заданной напряженности поля

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\int_{(1)}^{(2)} \vec{E}d\vec{l}, \qquad (7)$$

где интегрирование идет по любой траектории, соединяющей точки 1 и 2.

Задача. Найти потенциал поля, создаваемого равномерно заряженной с линейной плотностью τ нитью длины $2L$.

Решение.

Поместим начало координат в центре нити и направим ось Z вдоль нити. Система зарядов аксиально симметрична, поэтому для расчетов выберем цилиндрическую систему координат r, φ, z, в которой потенциал в произвольной точке M зависит только от переменных r и z (Рис. 4, для наглядности нить показана в виде тонкого цилиндра).

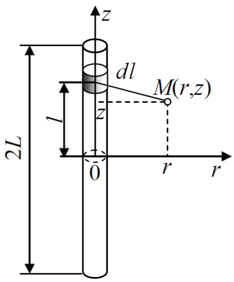

Рис.4. Нахождение потенциала поля, создаваемого заряженной нитью.

Выделяем на нити на расстоянии l от центра бесконечно малую область с зарядом $dq = \tau\, dl$, который можно считать точечным. Его расстояние до точки $M(r,\ z)$ равно $\sqrt{r^2+(l-z)^2}$, а создаваемый им потенциал определяется формулой (4):

$$d\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau dl}{\sqrt{r^2+(l-z)^2}}.$$

Потенциал, создаваемый всей нитью, равен

$$\varphi=\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{-L}^{L}\frac{dl}{\sqrt{r^2+(l-z)^2}}=\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{z+L+\sqrt{r^2+(z+L)^2}}{z-L+\sqrt{r^2+(z-L)^2}}. \qquad (8)$$

Анализ результата и дополнительные выводы.

1. При удалении на очень большое расстояние ($z\to\infty$ или $r\to\infty$) система выглядит как точечный заряд. Если в полученном результате сделать предельный переход $z\to\infty$ или $r\to\infty$, то должен получиться потенциал точечного заряда. Выполним такой предельный переход.

Если ввести переменную $R=\sqrt{z^2+r^2}$, то любой из упомянутых двух предельных переходов выполняется, если $R \to \infty$. Тогда при очень больших значениях R ($R >> L$) имеем:

$$\sqrt{r^2+(z\pm L)^2} \approx R \pm \frac{zL}{R},$$

$$\ln\frac{z+L+R+\dfrac{zL}{R}}{z-L+R-\dfrac{zL}{R}} = \ln\left(\frac{1+\dfrac{L+\dfrac{zL}{R}}{R+z}}{1-\dfrac{L-\dfrac{zL}{R}}{R+z}}\right) = \ln\left(1+\frac{L+\dfrac{zL}{R}}{R+z}\right) - \ln\left(1-\frac{L-\dfrac{zL}{R}}{R+z}\right) \approx$$

$$\approx \frac{L+\dfrac{zL}{R}}{R+z} - \frac{-L-\dfrac{zL}{R}}{R+z} = \frac{2L+2\dfrac{zL}{R}}{R+z} = \frac{2L}{R}.$$

Отсюда получаем, что на больших расстояниях от нити потенциал приближенно равен потенциалу поля точечного заряда

$$\varphi \approx \frac{2\tau L}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R},$$

где $q = 2L\tau$ – полный заряд нити.

2. Если $L \to \infty$, то потенциал стремится к бесконечности. Потенциал остается ограниченной функцией, если только все заряды сосредоточены в области конечных размеров, а здесь заряды имеются в бесконечно удаленной области. В этом случае непосредственный физический смысл имеет только разность потенциалов в любых двух точках. В случае бесконечной нити разность потенциалов находим из (8) для точек 1 и 2, удаленных от оси нити на расстояния r и R ($r < R$)

$$\Delta\varphi_{12} = \varphi(r) - \varphi(R) = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r}{R}. \qquad (9)$$

Поясним сказанное расчетом. При $L \to \infty$ потенциал не зависит от z и в (4) можно положить $z = 0$. Кроме того, $r << L$ и

$$\sqrt{L^2+r^2} \approx L\left(1+\frac{r^2}{2L^2}\right), \ \frac{L+\sqrt{L^2+r^2}}{-L+\sqrt{L^2+r^2}} \approx 1+\frac{4L}{r^2}.$$

Из (8) находим:

$$\varphi(r)-\varphi(R) \approx \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\left(\ln(1+\frac{4L}{r^2})-\ln(1+\frac{4L}{R^2})\right) \approx$$

$$\approx \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R^2}{r^2} \approx -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r}{R}.$$

В случае бесконечной нити можно получить выражение для напряженности поля бесконечной равномерно заряженной нити: $E = E_r = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{r}$. Согласно (7)

$$\varphi(r)-\varphi(R) = -\int\limits_R^r E dr = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r}{R},$$

что совпадает с (9).

3. Компоненты напряженности поля можно найти из (8), вычисляя градиент потенциала, т.е. используя (6). Ввиду аксиальной симметрии системы, целесообразно расчет выполнить в цилиндрических координатах, где

$$E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}, E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r}.$$

Проекция E_φ в нашем случае равна нулю. Этот расчет мы предоставляем сделать самостоятельно.

Ответ: $\varphi(r,z) = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{z+L+\sqrt{r^2+(z+L)^2}}{z-L+\sqrt{r^2+(z-L)^2}}.$

Задание 7

Задача. Тонкий диск радиуса R заряжен равномерно с поверхностной плотностью σ. Определить потенциал поля в точке A, расположенной на оси диска на расстоянии h от его плоскости.

Решение.

Учитывая условия цилиндрической симметрии распределения заряда, выделим на диске кольцевую область между окружностями радиусов r и $r+dr$. Находящийся на ней заряд $dq = \sigma 2\pi r\ dr$ создает в точке наблюдения A потенциал $d\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{l}$, где $l = \sqrt{r^2 + h^2}$.

Искомый потенциал есть сумма всех таких вкладов:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R \frac{\sigma 2\pi r dr}{\sqrt{r^2 + h^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{R^2 + h^2} - h).$$

Ответ: $\varphi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{R^2 + h^2} - h)$.

Анализ результата и дополнительные выводы.

1. В центре диска $h = 0$ и потенциал равен $\frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}$.

2. На большом расстоянии от плоскости диска (при $R << h$) имеем при разложении по малой величине R/h в первом порядке:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\pi R^2}{h} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{h}.$$

Это означает, что с ростом h потенциал становится все ближе к потенциалу точечного заряда, равного заряду диска и расположенному в центре диска.

3. Вблизи плоскости диска (при $h << R$) при разложении по малой величине R/h в первом порядке имеем $\varphi = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}(1 - \frac{h}{R})$.

4. При $R/h \to \infty$ мы ожидаем получить потенциал бесконечной заряженной плоскости (т.е. линейно зависящий от расстояния h до плоскости). Однако такому предельному переходу препятствует наша нормировка потенциала, приемлемая только для заряда, распределенного в конечной области пространства. В этом случае за нуль потенциала следует принять его значение в какой-либо произвольной точке, не лежащей в бесконечности. Если

положить $\varphi = 0$ при $h = 0$, то получим закон изменения потенциала в однородном поле, соответствующем полю бесконечной заряженной плоскости.

Вопрос о нормировке не возникает, если требуется вычислить разность потенциалов в двух точках, отстоящих от плоскости на расстояния h_1 и h_2. В этом случае независимо от нормировки имеем $\Delta\varphi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(h_1 - h_2)$, что и соответствует однородному полю от бесконечной заряженной плоскости.

Задание 8

*Задача***.** Шар радиуса R равномерно заряжен с объемной плотностью ρ. Найти значение потенциала в произвольной точке.

Решение.

Из симметрии системы следует, что для решения целесообразно выбрать сферическую систему координат. Напряженность поля равномерно заряженного шара уже была вычислена (см. ***Задание*** 5):

для $r < R$: $E_{внутри} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$; для $r \geq R$: $E_{вне} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$, где полный заряд шара $q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$.

Напряженность поля зависит только от одной координаты r. В этом случае из (6) находим $E(r) = -\frac{d\varphi}{dr}$ и, интегрируя это уравнение, получаем

$$\varphi_{внутри}(r) = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0} r^2 + C_1,\ \varphi_{вне}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} + C_2.$$

В нашем случае заряды сосредоточены в ограниченной области пространства, поэтому можно положить равным нулю потенциал бесконечно удаленной точки. Тогда $C_2 = 0$, а постоянная C_1 определяется из условия непрерывности потенциала при $r = R$:

$$-\frac{\rho}{6\varepsilon_0}r^2+C_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r},$$

откуда $C_1=\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}$. Физический смысл константы C_1 – это потенциал в центре шара при нашей нормировке. Итак, внутри шара потенциал убывает по квадратичному закону $\varphi_{внутри}(r)=\frac{\rho}{6\varepsilon_0}(3R^2-r^2)$, а снаружи – как потенциал точечного заряда q, расположенного в центре шара.

Если, сохраняя заряд q и его симметричное распределение, перенести его весь на поверхность шара, то напряженность поля и потенциал во внешней области не изменятся. Потенциал любой точки на поверхности останется равным $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}$. Но во внутренней области теперь поле отсутствует, работа по перемещению пробного заряда с поверхности шара в его центр не совершается и потенциал в любой точке внутри получившейся заряженной сферы будет одним и тем же – потенциалом поверхности сферы.

Ответ:1) $r < R$: $\varphi_{внутри}(r)=\frac{\rho}{6\varepsilon_0}(3R^2-r^2)$;

2) $r > R$: $\varphi_{вне}(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}$.

СОДЕРЖАНИЕ