ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ» (МГТУ ГА)

Кафедра высшей математики

Е.В. Владова

МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие
по выполнению практических заданий

для студентов I курса
специальности 23.05.05
очной формы обучения

Москва
ИД Академии Жуковского
2020

УДК 51
ББК 51
В57

Рецензент:
Илларионова О.Г. – канд. физ.-мат. наук

Владова Е.В.

В57 Математика [Текст] : учебно-методическое пособие по выполнению практических заданий / Е.В. Владова. – М.: ИД Академии Жуковского, 2020. – 48 с.

Учебно-методическое пособие содержит варианты трёх контрольных домашних заданий по темам: «Линейная и векторная алгебра», «Аналитическая геометрия», «Пределы», «Производная и её приложения», «Неопределенный интеграл» и «Определенный интеграл и его приложения».

Данное учебно-методическое пособие издается в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Математика» по учебному плану для студентов I курса специальности 25.05.05 очной формы обучения.

Рассмотрено и одобрено на заседаниях кафедры 17.12.2019 г. и методического совета 22.01.2020 г.

УДК 51
ББК 51

В авторской редакции

Подписано в печать 29.06.2020 г.
Формат 60x84/16 Печ. л. 3 Усл. печ. л. 2,79
Заказ № 589/0225-УМП22 Тираж 40 экз.

Московский государственный технический университет ГА
125993, Москва, Кронштадтский бульвар, д. 20

Издательский дом Академии имени Н. Е. Жуковского
125167, Москва, 8-го Марта 4-я ул., д. 6А
Тел.: (495) 973-45-68
E-mail: zakaz@itsbook.ru

Первый семестр

Контрольное домашнее задание №1

Задание ко всем вариантам

1. **1.** Решить систему линейных уравнений тремя методами: а) методом Крамера, б) методом Гаусса и в) матричным методом.
2. Задание приведено в каждом варианте.
3. Убедиться, что векторы $\overline{\ }, \overline{b}, \overline{c}$ образуют базис. Написать разложение вектора $\overline{x}$ по векторам базиса**.**
4. Даны плоскости α и β. Найти: а) угол между плоскостями α и β;
б) каноническое уравнение прямой, определяемой этими плоскостями;
в) расстояние от точки $A(x, y, z)$ до плоскости α и координаты основания перпендикуляра, опущенного из точки A на плоскость β.
5. Задание приведено в каждом варианте.
6. Даны точки $A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4$. Найти:
а) уравнение и длину высоты $A_4 0$, опущенной из A_4 на грань $A_1A_2\ A_3$;
б) уравнение медианы A_4C грани $A_1A_2A_4$;
в) объём тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$;
г) угол между прямой A_1A_3 и плоскостью $A_1A_2A_3$.

Вариант 1

1. $\begin{cases} 2x - 3y + z = -1 \\ \ \ x + y - z = 0 \\ \ 3x - y + z = 4 \end{cases}$

2. Найти координаты единичного вектора, перпендикулярного векторам $\overline{a} = 3\overline{i} + \overline{k}$ и $\overline{b} = 2\overline{i} - \overline{j} + \overline{k}$.

3. $\overline{x} = \{8, -7, -13\}$, $\overline{\ } = \{0,1,5\}$, $\overline{b} = \{3, -1,2\}$, $\overline{c} = \{-1,0,21\}$.

4. $\alpha: 2x - y + 5z + 16 = 0$, $\beta: x + 2y + 3z + 8 = 0$; $A(3, 1, -3)$.

5. Составьте уравнение линии на плоскости, каждая точка M, которой отстоит от точки $A(1, 0)$ на расстоянии, вдвое меньшем, чем от прямой $y = -3$.

6. $A_1(-3, -1, -1), A_2(3, -5, -7), A_3(6, -4, -3), A_4(-2,0,1)$.

Вариант 2

1. $\begin{cases} \ 5x + y - z = 2 \\ 2x - 3y + z = -4 \\ \ \ x - y - z = 0 \end{cases}$

2. Найти большую из высот параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a} = \{3,1,1\}$ и $\overline{b} = \{-2,0,1\}$.

3. $\overline{x} = \{13,2,7\}$, $\overline{\ } = \{5,1,0\}$, $\overline{b} = \{2,-1,3\}$, $\overline{c} = \{1,0,-1\}$.

4. $\alpha: 2x + 2y + z - 1 = 0$, $\beta: x + z - 1 = 0$, $A(0,-1,2)$.

5. Составьте уравнение линии на плоскости, каждая точка M которой отстоит от оси Oy на расстоянии в три раза меньшем, чем от начала координат.

6. $A_1(2,3,2), A_2(8,0,-4), A_3(11,1,0), A_4(3,5,4)$.

Вариант 3

1. $\begin{cases} 3x - 2y + z = -3 \\ 4x + y - z = -5 \\ 4x + 3y + 2z = 3 \end{cases}$

2. Найти скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$**,** если угол между ними 150°, а площадь параллелограмма, построенного на них, равна 16.

3. $\overline{x} = \{-19,-1,7\}$, $\overline{\ } = \{0,1,1\}$, $\overline{b} = \{-2,0,1\}$, $\overline{c} = \{3,1,0\}$.

4. $\alpha: 3x + y + z - 4 = 0$, $\beta: y + z + 5 = 0$, $A(2,3,-1)$.

5. Составьте уравнение линии на плоскости, каждая точка M которой отстоит от оси Ox на расстоянии в полтора раза большем, чем от точки $A(4,-2)$.

6. $A_1(-4,4,2), A_2(2,1,-8), A_3(5,2,-4), A_4(-3,6,0)$.

Вариант 4

1. $\begin{cases} x - 3y - z = 0 \\ 2x + y + z = 6 \\ 2x - 3y + z = -6 \end{cases}$

2. Найти скалярное произведение векторов $\overline{\ } - 2\overline{b}$ и $\overline{b} - 2\overline{c}$**,** если

$|\overline{a}| = 2$, $|\overline{b}| = 3, |\overline{c}| = 4, (\widehat{\overline{a},\overline{b}}) = 60^\circ, (\widehat{\overline{a},\overline{c}}) = (\widehat{\overline{b},\overline{c}}) = 90^\circ$**.**

3. $\overline{x} = \{3,-3,4\}$, $\overline{\ } = \{1,0,2\}$, $\overline{b} = \{0,1,1\}$, $\overline{c} = \{2,-1,4\}$.

4. $\alpha: 3x - 2y - 2z - 16 = 0$, $\beta: x + y - 3z - 7 = 0$, $A(4,-8,0)$.

5. Составьте уравнение линии на плоскости, каждая точка M которой отстоит от точки $A(1,0)$ на расстоянии, равном расстоянию от A до точки $B(-1,-3)$.

6. $A_1(3,5,-3), A_2(9,2,-9), A_3(12,3,-5), A_4(4,7,-1)$.

Вариант 5

1. $\begin{cases} 3x + 2y - z = -4 \\ x + 2y - 3z = -8 \\ 4x + 3y + 2z = 9 \end{cases}$

2. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\overline{\ }$ и $\overline{b}$**,** если $|\overline{a}| = 1$, $|\overline{b}| = 3, (\widehat{\overline{a},\overline{b}}) = 45^\circ$.

3. $\overline{x} = \{3,3,-1\}$, $\overline{\ } = \{3,1,0\}, \overline{b} = \{-1,2,1\}$, $\overline{c} = \{-1,0,2\}$.

4. $\alpha: 2x + 2y + z + 9 = 0$, $\beta: x - y + 3z - 1 = 0$, $A(0;-1;33)$.

5. Составьте уравнение линии на плоскости, каждая точка M которой отстоит от прямой $x = -6$ на расстоянии, в 2 раза большем, чем от точки $A(1,3)$.

6. $A_1(-5,0,1), A_2(-4,-2,3), A_3(6,2,11), A_4(3,4,9)$.

Вариант 6

1. $\begin{cases} x - 7y + z = 6 \\ 2x - y + 3z = 7 \\ x + 3y - 2z = 7 \end{cases}$

2. Найти координаты единичного вектора, перпендикулярного векторам $\overline{a} = \overline{i} - 3j + \overline{k}$ и $\overline{b} = \overline{i} + \overline{j} - \overline{k}$.

3. $\overline{x} = \{-1,7,-4\}, \overline{a} = \{-1,2,1\}, \overline{b} = \{2,0,3\}, \overline{c} = \{1,1,-1\}$.

4. $\alpha\colon x + 2y + 2z - 3 = 0,\ \beta\colon 2x - y + 2z + 5 = 0,\ A(1;-1;-0{,}5)$.

5. Составьте уравнение линии на плоскости, каждая точка M которой отстоит от точки А (1; 0) на расстоянии, в 5 раза меньшем, чем от прямой $y = 8$.

6. $A_1(1,-4,0), A_2(2,-6,2), A_3(12,-2,10), A_4(9,0,8)$.

Вариант 7

1. $\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 1 \\ 3x - y - 5z = -1 \\ x + 2y - z = -2 \end{cases}$

2. Найти меньшую из высот параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a} = \{2,0,1\}$ и $\overline{b} = \{3,-2,1\}$.

3. $\overline{x} = \{6,5,-14\}, \overline{\ } = \{1,1,4\},\ \overline{b} = \{0,-3,2\},\ \overline{c} = \{2,1,-1\}$.

4. $\alpha\colon 3x + 2y - 3z - 1 = 0,\ \beta\colon x + y + z - 7 = 0,\ A(1,1,2)$.

5. Составьте уравнение линии на плоскости, каждая точка M которой отстоит от прямой $x = -2$ на расстоянии, в 2 раза большем, чем от точки А(4; 0).

6. $A_1(-1,-2,-8), A_2(0,-4,-6), A_3(10,0,2), A_4(7,2,0)$.

Вариант 8

1. $\begin{cases} 3x - y - 2z = 3 \\ 5x + 2y + z = 0 \\ x + 3y + z = 1 \end{cases}$

2. Найти скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если угол между ними 120°, а площадь параллелограмма, построенного на них, равна 18.

3. $\overline{x} = \{6,-1,7\},\ \overline{\ } = \{1,-2,0\}, \overline{b} = \{-1,1,3\}, \overline{c} = \{1,0,4\}$.

4. $\alpha\colon x - 3y - 2z - 8 = 0,\ \beta\colon x + y - z + 3 = 0,\ A(2,-1,1)$.

5. Составьте уравнение линии на плоскости, каждая точка M которой отстоит от точки $A(4,1)$ на расстоянии, в 4 раза большем, чем от точки $B(-2,-1)$.

6. $A_1(0,2,-10), A_2(1,0,8), A_3(11,4,0), A_4(8,6,-2)$.

Вариант 9

1. $\begin{cases} \quad -y + 6z = -3 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ 3x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$

2. Вычислить скалярное произведение векторов $3\overline{a} - 2\overline{b}$ и $\overline{b} + 3\overline{c}$, если $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 5, |\overline{c}| = 8$, $(\widehat{\overline{a}, \overline{b}}) = 90^\circ$, $(\widehat{\overline{a}, \overline{c}}) = (\widehat{\overline{b}, \overline{c}}) = 60^\circ$.

3. $\overline{\ } = \{5,15,0\}$, $\overline{\ } = \{1,0,5\}$, $\overline{b} = \{-1,3,2\}$, $\overline{c} = \{0,-1,1\}$.

4. α: $3x - 2y + 3z + 23 = 0$, β: $y + z + 5 = 0$, $A(2,0,1)$.

5. Составьте уравнение линии на плоскости, каждая точка M которой отстоит от прямой $y = 7$ на расстоянии, в 3 раза меньшем, чем от точки $A(1,4)$.

6. $A_1(1,4,-7), A_2(2,2,-5), A_3(12,6,3), A_4(9,8,1)$.

Вариант 10

1. $\begin{cases} \quad + 4y + 2z = -1 \\ 3x - y - 4z = 3 \\ -x + 2y + 5z = 3 \end{cases}$

2. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\overline{\ }$ и $\overline{b}$, если $|\overline{a}| = 2$, $|\overline{b}| = 1, (\widehat{\overline{a}, \overline{b}}) = 30^\circ$.

3. $\overline{\ } = \{2,-1,11\}$, $\overline{\ } = \{1,1,0\}$, $\overline{b} = \{0,1,-2\}$, $\overline{c} = \{1,0,3\}$.

4. α: $x + y + 3z - 7 = 0$, β: $y + z - 1 = 0$, $A(1,2,-3)$.

5. Составьте уравнение линии на плоскости, каждая точка M которой отстоит от точки $A(4,-2)$ на расстоянии, в 2 раза меньшем, чем от точки $B(1,6)$.

6. $A_1(-2,-2,-2), A_2(-3,1,0), A_3(5,4,1), A_4(2,-3,8)$.

Вариант 11

1. $\begin{cases} 4x - 7y + z = 2 \\ 5x + 4y - z = 4 \\ 3x - 6y - z = -8 \end{cases}$

2. Найти скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если угол между ними 120°, а площадь параллелограмма, построенного на них, равна 18.

3. $\overline{\ } = \{11,5,-3\}$, $\overline{\ } = \{1,0,2\}$, $\overline{b} = \{-1,0,1\}$, $\overline{c} = \{2,5,-3\}$;

4. α: $x - 2y + 2z + 17 = 0$, β: $x - 2y - 1 = 0$, $A(-1,4,2)$;

5. Составьте уравнение линии на плоскости, каждая точка M которой отстоит от прямой $\quad = 14$ на расстоянии, в 2 раза меньшем, чем от точки $A(2,3)$.

6. $A_1(0,-1,-1), A_2(-2,3,5), A_3(1,-5,-9), A_4(-1,-6,3)$.

Вариант 12

1. $\begin{cases} x - 2y + 8z = -4 \\ 4x - y + 9z = 5 \\ 3x + y - 7z = 9 \end{cases}$

2. Найти большую из высот параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a} = \{2,1,-1\}$ и $\overline{b} = \{3,-2,0\}$.

3. $\overline{x} = \{8,0,5\}$, $\overline{} = \{2,0,1\}$, $\overline{b} = \{1,1,0\}$, $\overline{c} = \{4,1,2\}$.

4. $\alpha: x + 2y - 1 = 0$, $\beta: x + y + 6 = 0$, $A(0,2,-4)$.

5. Составьте уравнение линии на плоскости, каждая точка *M* которой отстоит от точки $A(-3,3)$ на расстоянии, в пять раз меньшем, чем от точки $A(5,1)$.

6. $A_1(5,2,0), A_2(2,5,0), A_3(1,2,4), A_4(-1,1,1)$.

Вариант 13

1. $\begin{cases} x + y - z = 4 \\ 4x - y + 2z = 2 \\ 4x + 5y + 2z = 8 \end{cases}$

2. Найти скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$**,** если угол между ними 60°, а площадь параллелограмма, построенного на них, равна 20.

3. $\overline{x} = \{3,1,8\}$, $\overline{} = \{0,1,3\}$, $\overline{b} = \{1,2,-1\}$, $\overline{c} = \{2,0,-1\}$.

4. $\alpha: 2x - z + 5 = 0$, $\beta: 2x + 3y - 7 = 0$, $A(0,-2,3)$.

5. Составьте уравнение линии на плоскости, каждая точка *M* которой отстоит от прямой $y = 7$ на расстоянии, в 5 раза большем, чем от точки $A(4,-3)$.

6. $A_1(2,-1,-2), A_2(1,2,1), A_3(5,0,-6), A_4(-10,9,-7)$.

Вариант 14

1. $\begin{cases} -x + 3y + z = 1 \\ 5x - 6y + 7z = 4 \\ 4x - 5y + 6z = 3 \end{cases}$

2. Найти скалярное произведение векторов $\overline{} - 2\overline{b}$ и $3\overline{b} + \overline{c}$**,** если $|\overline{a}| = 2$, $|\overline{b}| = 6, |\overline{c}| = 4, (\widehat{\overline{a},\overline{b}}) = 90^\circ, (\widehat{\overline{a},\overline{c}}) = (\widehat{\overline{b},\overline{c}}) = 60^\circ$**.**

3. $\overline{x} = \{8,1,12\}$, $\overline{} = \{1,2,-1\}$, $\overline{b} = \{3,0,2\}$, $\overline{c} = \{-1,1,1\}$.

4. $\alpha: 5x + 3y + z - 18 = 0$, $\beta: 2y + z - 9 = 0$, $A(1,-4,-3)$.

5. Составьте уравнение линии на плоскости, каждая точка *M* которой отстоит от точки $A(0,-5)$ на расстоянии, в 2 раза меньшем, чем от прямой $x = 4$

6. $A_1(-2,0,-4), A_2(-1,7,1), A_3(4,-8,-4), A_4(1,-4,6)$.

Вариант 15

1. $\begin{cases} 2x - y + 7z = 3 \\ 4x + 2y = -2 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$

2. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\overline{\ }$ и $\overline{b}$**,** если $|\overline{a}| = 2,\ |\overline{b}| = 4, (\widehat{\overline{a}, \overline{b}}) = 30^\circ$.

3. $\overline{x} = \{-9, -8, -3\},\ \overline{\ } = \{1,4,1\},\ \overline{b} = \{-3,2,0\},\ \overline{c} = \{1, -1,2\}$.

4. α: $4x + 3z - 2 = 0,\ \ \beta: x + 2y + 2z + 5 = 0,\ \ A(1, 2, 4)$.

5. Выяснить геометрический смысл уравнения линии на плоскости:

$x^2 + y^2 - 3x + 0{,}8y + 0{,}41 = 0$. Лежит ли точка $A(2,3)$ на данной линии?

6. $A_1(14,4,5), A_2(-5, -3,2), A_3(-2, -6, -3), A_4(-2,2, -1)$.

Вариант 16

1. $\begin{cases} 3x + 2y + 2z = 2 \\ 2x + y - 3z = -2 \\ x + 3y + z = -6 \end{cases}$

2. Найти координаты единичного вектора, перпендикулярного векторам $\overline{\ } = \overline{i} - 4\overline{k}$ и $\overline{b} = \overline{i} - \overline{j} + 3\overline{k}$.

3. $\overline{x} = \{-5,9, -13\},\ \overline{\ } = \{0,1, -2\},\ \overline{b} = \{3, -1,1\},\ \overline{c} = \{4,1,0\}$.

4. α: $x + 4y - z + 1 = 0,\ \ \beta: 2x + y + 4z - 3 = 0,\ \ A(-2; -1; 2)$.

5. Выяснить геометрический смысл уравнения линии на плоскости:

$9x^2 + 4y^2 - 18x + 8y - 23 = 0$. Лежит ли точка $A(1,2)$ на данной линии?

6. $A_1(1,2,0), A_2(3,0, -3), A_3(5,2,6), A_4(8,4, -9)$.

Вариант 17

1. $\begin{cases} x - y + z = 6 \\ 2x - 3y - z = -6 \\ 5x + 3y - 7z = 5 \end{cases}$

2. Найти меньшую из высот параллелограмма, построенного на векторах $\overline{\ } = \{1, -2,3\}$ и $\overline{b} = \{3,0,1\}$.

3. $\overline{x} = \{-15,5,6\},\ \overline{\ } = \{0,5,1\},\ \overline{b} = \{3,2, -1\},\ \overline{c} = \{-1,1,0\}$.

4. α: $2y + z - 9 = 0,\ \ \beta: x - y + 2z - 1 = 0,\ \ A(0,3, -1)$.

5. Выяснить геометрический смысл уравнения линии на плоскости:

$3x^2 - 2y^2 + 4y - 8 = 0$. Лежит ли точка $A(2, 1)$ на данной линии?

6. $A_1(2, -1,2), A_2(1,2, -1), A_3(3,2,1), A_4(-4,2,5)$.

Вариант 18

1. $\begin{cases} x + 8y + z = 1 \\ 3x - 9y + 2z = 7 \\ x - 2y + 2z = -3 \end{cases}$

2. Найти скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$**,** если угол между ними 150°, а площадь параллелограмма, построенного на них, равна 12.

3. $\overline{x} = \{8,9,4\}$, $\overline{\ } = \{1,0,1\}$, $\overline{b} = \{0,-2,1\}$, $\overline{c} = \{1,3,0\}$.

4. α: $2x - 6y + 14z - 1 = 0$, β: $5x - 10y + 5z - 3 = 0$, $A(1,0,0)$.

5. Выяснить геометрический смысл уравнения линии на плоскости:

$2x^2 - 4x + 2y - 3 = 0$. Лежит ли точка $A(0;1{,}5)$ на данной линии?

6. $A_1(1,1,2), A_2(-1,1,3), A_3(2,-2,4), A_4(-1,0,-2)$.

Вариант 19

1. $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 4y + 3z = 2 \\ 6x + 2y + z = 3 \end{cases}$

2. Вычислить скалярный квадрат вектора $\overline{\ } - 2\overline{b}$**,** если $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 2$**,** $(\widehat{\overline{a},\overline{b}}) = 60^\circ$.

3. $\overline{x} = \{23,-14,-30\}$, $\overline{\ } = \{2,1,0\}$, $\overline{b} = \{1,-1,0\}$, $\overline{c} = \{-3,2,5\}$.

4. α: $x - y + 7z - 1 = 0$, β: $2x - 2y - 5 = 0$, $A(1;0{,}5;1)$.

5. Выяснить геометрический смысл уравнения линии на плоскости:

$x^2 - 8x + 15 = 0$. Лежит ли точка $A(3,0)$ на данной линии?

6. $A_1(2,3,1), A_2(4,1,-2), A_3(6,3,7), A_4(7,5,-3)$.

Вариант 20

1. $\begin{cases} 3x - 4y - z = -3 \\ 6x + 5y - 2z = 7 \\ 2x - 3y + z = 1 \end{cases}$

2. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\overline{\ }$ и $\overline{b}$**,** если $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 4$, $(\widehat{\overline{a},\overline{b}}) = 120^\circ$.

3. $\overline{x} = \{3,1,3\}$, $\overline{\ } = \{2,1,0\}$, $\overline{b} = \{1,0,1\}$, $\overline{c} = \{4,2,1\}$;

4. α: $3x - y - 5 = 0$, β: $2x + y - 3 = 0$, $A(0;0{,}5;1)$;

5. Составить уравнение гиперболы, проходящей через точку $A(6,\sqrt{15})$, если уравнения асимптоты гиперболы: $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}x$.

6. $A_1(1,1,-1), A_2(2,3,1), A_3(3,2,1), A_4(5,9,-8)$.

Вариант 21

1. $\begin{cases} 5x + 7y + 2z = 3 \\ 3x - 2y + z = -4 \\ 8x - 5y - 6z = 7 \end{cases}$

2. Найти диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\overline{\ } = \{1,1,0\}$ и $\overline{b} = \{2,0,-3\}$.

3. $\overline{x} = \{-2,4,7\}$, $\overline{\ } = \{0,1,2\}$, $\overline{b} = \{1,0,1\}$, $\overline{c} = \{-1,2,4\}$.

4. α: $6x + 2y - 4z + 17 = 0$, β: $9x + 3y - 6z - 4 = 0$, $A\left(2; \frac{10}{3}; -3\right)$.

5. На параболе $y^2 = 4x$ найдите точку, расстояние от которой до директрисы равно 2.

6. $A_1(1,5,-7), A_2(-3,6,3), A_3(-2,7,3), A_4(-4,8,-12)$.

Вариант 22

1. $\begin{cases} x + 3y - 4z = -7 \\ -x - 2y + z = 5 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{cases}$

2. Найти вектор $\overline{\mu} = \{2, y, z\}$, перпендикулярный вектору $\overline{\ } = \{1,1,-1\}$, если $|\overline{\mu}| = \sqrt{6}$.

3. $\overline{x} = \{-1,7,0\}$, $\overline{\ } = \{0,3,1\}$, $\overline{b} = \{1,-1,2\}$, $\overline{c} = \{2,-1,0\}$.

4. α: $3x - y + 2z + 15 = 0$, β: $5x + 9y - 3z - 1 = 0$, $A(1,0,1)$.

5. Составить уравнение прямой, проходящей через правую и нижнюю вершины эллипса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$.

6. $A_1(-3,4,-7), A_2(1,5,-4), A_3(-5,-2,0), A_4(2,5,4)$.

Вариант 23

1. $\begin{cases} x + 2y - z = -2 \\ 3x + y + 2z = -1 \\ 5x + y - 2z = 11 \end{cases}$

2. Векторы $\overline{\ } = \{1,0,-1\}$ и $\overline{b} = \{2,1,0\}$ в основании пирамиды, построенной на векторах $\overline{\ }, \overline{b}, \overline{c}$. Найти высоту пирамиды, опущенную на это основание, если объём пирамиды равен $\sqrt{12}$.

3. $\overline{x} = \{11,-1,4\}$, $\overline{\ } = \{1,-1,2\}$, $\overline{b} = \{3,2,0\}$, $\overline{c} = \{-1,1,1\}$.

4. α: $3y - z = 0$, β: $2y + z = 0$, $A(0,9,2)$.

5. Составить уравнение прямой, проходящей через левый фокус и нижнюю вершину гиперболы $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$.

6. $A_1(-1,2,-3), A_2(4,-1,0), A_3(2,1,-2), A_4(3,4,5)$.

Вариант 24

1. $\begin{cases} 2x+3y+z=0 \\ 9x-2y-3z=7 \\ 5x+4y+z=1 \end{cases}$

2. Найти угол между векторами $\overline{\ }$ и $\overline{b}$**,** если векторы $\overline{\ }+\overline{b}$ и $2\overline{a}-\overline{b}$ перпендикулярны и $|\overline{a}|=1,\ |\overline{b}|=2.$

3. $\overline{x}=\{-13,2,18\},\ \overline{\ }=\{1,1,4\},\ \overline{b}=\{-3,0,2\}, \overline{c}=\{1,2,-1\}.$

4. α: $6x+3y-2z=0,\ \ \beta$: $x+2y+6z-12=0,\ \ A(3,1,8).$

5. Написать каноническое уравнение эллипса, если расстояние между фокусами равно 2, а длина большой оси равна 4.

6. $A_1(4,-1,3), A_2(-2,1,0), A_3(0,-5,1), A_4(3,2,-6).$

Вариант 25

1. $\begin{cases} x-2y+3z=4 \\ 2x+y-2z=6 \\ x+3y+z=-4 \end{cases}$

2. Даны векторы $\overline{\ }=-2\overline{j}+\overline{k}$ и $\overline{b}=3\overline{i}+\overline{j}-\overline{k}$. Найти пр$_{\overline{b}}\overline{\ }$.

3. $\overline{x}=\{0,-8,9\},\ \overline{\ }=\{0,-2,1\}, \overline{b}=\{3,1,-1\},\ \overline{c}=\{4,0,1\}.$

4. α: $x+y-2z-2=0,\ \ \beta$: $x-y+z+2=0,\ \ A(-2,0,3).$

5. Написать уравнение параболы с вершиной в начале координат, уравнение директрисы которой $x=-0{,}25$.

6. $A_1(1,-1,1), A_2(-2,0,3), A_3(2,1,-1), A_4(2,-2,-4).$

Образец решения варианта КДЗ №1

1. Решить систему линейных уравнений тремя методами: $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+4y+z=0 \\ x-3y-4z=-3 \end{cases}$

а) методом Крамера, б) методом Гаусса и в) матричным методом.

Решение. а) Составим и вычислим (способом треугольников или с помощью разложения по элементам любой строки или столбца) определитель системы Δ и три определителя, получающихся из Δ заменой соответствующего столбца столбцом из свободных членов $(3, 0, -3)$:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix}=-15;\quad \Delta_x=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -4 \end{vmatrix}=-30;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 15; \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & -3 \end{vmatrix} = -30$$

Так как $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение. Применяя формулы Крамера, найдем решение системы:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 2, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = -1, \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = 2$$

Итак, $(2, -1, 2)$ – решение системы.

б) Составим расширенную матрицу системы и сведем ее к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований ее строк:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -4 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{array}\right)$$

Вторая строка второй матрицы получена как разность элементов первой строки и соответствующих элементов второй, третья строка – как разность элементов первой строки и соответствующих элементов третьей. Далее найдена сумма элементов второй строки второй матрицы, умноженных на 4/3, с элементами третьей строки (результат – на месте третьей строки третьей матрицы, вторая строка умножена на 1/3). Ранг матрицы и расширенной матрицы равен 3. Система совместна, и имеет единственное решение, которое найдем из равносильной системы:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ \quad -y = 1, \\ \quad 5z = 10 \end{cases} \text{из которой: } \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{cases}$$

Итак, $(2, -1, 2)$ – решение системы.

в) Представим данную систему в матричном виде: $A \cdot X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Поскольку определитель матрицы A ($detA$) отличен от нуля, то существует обратная матрица A^{-1}, и решение уравнения имеет вид: $X = A^{-1} \cdot B$.

Найдем обратную матрицу по формуле $A^{-1} = \frac{1}{detA} A^C$, где

$A^C = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$, где A_{ij} – алгебраические дополнения элементов $_{ij}$ матрицы A. Определитель $detA = \Delta = -15$ вычислен в п. а). Найдём A_{ij}:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = -13 \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 5 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -5 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -7 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 4 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3$$

$$X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{15}\begin{pmatrix} -13 & 1 & -3 \\ 5 & -5 & 0 \\ -7 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{15}\begin{pmatrix} -39+0+9 \\ 15+0+0 \\ -21+0-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Итак, $(2, -1, 2)$ – решение системы.

Замечание. Матрицу A^{-1} можно было найти другим способом. Запишем матрицу, у которой слева матрица A, а справа единичная матрица. С помощью элементарных преобразований строк получим слева единичную матрицу. Для этого вычтем из первой строки вторую, затем из первой третью, и результаты вычитания запишем в соответствующих строках:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Умножим первую строку на 3 и сложим со второй (результат - на месте первой строки), вторую умножим на 4 и сложим с третьей, умноженной на 3, (результат – на месте третьей строки). Получим матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 3 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 7 & -4 & -3 \end{array}\right)$$

Далее первую строку умножим на -5 и сложим с первой (результат – в первой строке), вторую умножим на 5, третью – на -1, получим матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -15 & 0 & 0 & -13 & 1 & -3 \\ 0 & -15 & 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -15 & -7 & 4 & 3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{13}{15} & -\frac{1}{15} & \frac{3}{15} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{15} & \frac{5}{15} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{15} & -\frac{4}{15} & -\frac{3}{15} \end{array}\right),$$

Откуда заключаем, что обратная матрица $A^{-1} = -\frac{1}{15}\begin{pmatrix} -13 & 1 & -3 \\ 5 & -5 & 0 \\ -7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

2. Найти скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если известно, что модуль их векторного произведения равен 10, а угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ составляет 135°.

Решение. Скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равно:

$$(\overline{a},\overline{b}) = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot cos(\widehat{\overline{a},\overline{b}})$$

Произведение модулей векторов $|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|$ найдём из условия:

$$\left|[\overline{a},\overline{b}]\right| = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot sin(\widehat{\overline{a},\overline{b}}) = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot sin135^\circ = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 10$$

Отсюда $|\overline{a}| \cdot |\overline{b}| = 10\sqrt{2}$. Учитывая, что $cos135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, получим:

$$(\overline{a},\overline{b}) = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot cos135^\circ = 10\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -10.$$

Итак, $(\overline{a},\overline{b}) = -10$.

3. Разложить вектор $\overline{x} = \{4,8,2\}$ по векторам $\overline{a} = \{1,2,3\}, \overline{b} = \{-2,5,-7\}, \overline{c} = \{3,6,-1\}$.

Решение. Убедимся, что определитель из координат векторов $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ отличен от нуля.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & -7 & -1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -90 \neq 0,$$

Следовательно, ранг матрицы перехода равен трем, и векторы $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ линейно независимы, а, значит, образуют базис в $\mathbb{R}^3$.

Чтобы найти разложение $\overline{x} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b} + \gamma\overline{c}$, нужно решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \alpha - 2\beta + 3\gamma = 4 \\ 2\alpha + 5\beta + 6\gamma = 8 \\ 3\alpha - 7\beta - 1\gamma = 2 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу и сведем ее к ступенчатому виду

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 & 8 \\ 3 & -7 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -10 & -10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -90 & -90 \end{array}\right)$$

Получили решение системы: $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 1 \end{cases}$

Таким образом, искомое разложение:

$\overline{x} = 1 \cdot \overline{a} + 0 \cdot \overline{b} + 1 \cdot \overline{c} = \overline{a} + \overline{c}$.

4. Плоскости заданы общими уравнениями: α: $2x + 3y + z - 6 = 0$ и β: $-4x + 5y - z + 2 = 0$. Найти:

а) угол между плоскостями; б) каноническое уравнение прямой, определяемой этими плоскостями; в) расстояние от точки $M(0, 10, 10)$ до плоскости α и координаты основания перпендикуляра, опущенного из точки M на плоскость β:

Решение.

а) Угол между плоскостями равен углу между их нормальными векторами. $\overline{n}_1 = \{2,3,1\}, \overline{n}_2 = \{-4,5,-1\}$ - нормальные векторы данных плоскостей.

$$cos\angle(\alpha,\beta) = cos\angle(\overline{n}_1, \overline{n}_2) = \frac{(\overline{n}_1,\overline{n}_2)}{|\overline{n}_1|\cdot|\overline{n}_2|} = \frac{2\cdot(-4)+3\cdot5+1\cdot(-1)}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}\cdot\sqrt{4^2+5^2+(-1)^2}} = \frac{3\sqrt{3}}{7};$$

$$\angle(\alpha,\beta) = arccos\frac{3\sqrt{3}}{7}.$$

б) коэффициенты данных уравнений не пропорциональны, поэтому плоскости не параллельны, т.е. пересекаются по некоторой прямой. Найдем какую-нибудь точку, лежащую на данной прямой. Например, полагая $y = 0$, найдем x и z из системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x + z - 6 = 0 \\ -4x - z + 2 = 0 \end{cases}$$

Таким образом, на данной прямой взята точка $(-2, 0,10)$. В качестве направляющего вектора прямой возьмем векторное произведение нормальных векторов плоскостей:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 1 \\ -4 & 5 & -1 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = -8i - 2j + 22k$$

Каноническое уравнение прямой:

$$\frac{x+2}{-8} = \frac{y}{-2} = \frac{z-10}{22}$$

в) Используем формулу расстояния от точки до плоскости:

$$\rho(M,\alpha) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Получим расстояние от точки М до плоскости α:

$$\rho(M,\alpha) = \frac{|2\cdot 0 + 3\cdot 10 + 1\cdot 10 - 6|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{40}{\sqrt{14}}$$

Составим уравнение прямой MH, перпендикулярной плоскости β и проходящей через точку M:

$$\frac{x}{-4} = \frac{y-10}{5} = \frac{z-10}{-1}$$

Чтобы найти точку С пересечения прямой MH и плоскости β, нужно решить систему уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{x}{-4}=\dfrac{y-10}{5}=\dfrac{z-10}{-1}\\ -4x+5y-z+2=0\end{cases}$$

Выразим из первого уравнения $y=-\frac{5}{4}x+10$, $z=\frac{1}{4}x+10$ и подставим во второе: получим $x=4$, затем $y=-\frac{5}{4}\cdot 4+10=5$, $z=\frac{1}{4}\cdot 4+10=11$.
Таким образом, искомая точка $C(4,5,11)$.

5. Составить уравнение линии, каждая точка которой удалена от точки $\text{A}(1,0,)$ на расстояние, в два раза меньшее, чем от прямой $x=2$.

Решение. Пусть точка $M\,(x;\,y)$ – произвольная точка искомой линии. Тогда по условию задачи: $2|MA|=|MN|$, где точка $N(2,y)$. Так как расстояние $|MA|=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$, а $|MN|=\sqrt{(x-2)^2+(y-y)^2}=|x-2|$, то получаем уравнение $\sqrt{(x-1)^2+y^2}=|x-2|$. Возводя обе части в квадрат и перенося слагаемые в левую часть, получим уравнение $3x^2-4x+4y^2=0$. Затем выделим полный квадрат: $3\left(x^2-2\cdot\frac{2}{3}x+\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)+4y^2=\frac{4}{3}$. Далее, разделив уравнение на $4/3$, преобразуем уравнение к виду: $\left(x-\frac{2}{3}\right)^2$

$$\frac{\left(x-\dfrac{2}{3}\right)^2}{4/9}+\frac{y^2}{1/3}=1$$

Откуда заключаем, что линия является эллипсом с центром в точке $\left(\frac{2}{3},0\right)$ и полуосями $a=2/3$ и $b=1/\sqrt{3}$.

6. Даны точки $A_1(0,-4,3), A_2(3,-2,1), A_3(-4,-5,6), A_4(3,3,-2)$. Найти:
а) уравнение и длину высоты $A_4 0$, опущенной из A_4 на грань $A_1A_2\,A_3$;
б) уравнение медианы A_4C грани $A_1A_2A_4$,
в) объём тетраэдра $A_1A_2\,A_3A_4$;
г) угол между прямой A_1A_3 и плоскостью $A_1A_2A_3$.
Решение.
а) Направляющим вектором прямой $A_4 0$ служит нормальный вектор плоскости $A_1A_2\,A_3$. Составим уравнение плоскости $A_1A_2\,A_3$. Используем уравнение плоскости, проходящей через три точки:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Подставляя координаты точек $A_1, A_2,\ A_3$, получим

$$\begin{vmatrix} x-0 & y+4 & z-3 \\ 3 & 2 & -2 \\ -4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Откуда получаем уравнение плоскости $A_1A_2\,A_3$: $4x - y + 5z - 19 = 0$.
Нормальный вектор плоскости (он же направляющий вектор прямой): $\vec{n} = \{4, -1, 5\}$. Используя уравнение прямой с начальной точкой и направляющим вектором $\frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r}$, получим уравнение высоты A_4O: $\frac{x-3}{4} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+2}{5}$.
Длина высоты A_40 равна расстоянию от точки A_4 до плоскости $A_1A_2\,A_3$. Применим формулу $\rho(\mathrm{M}, \alpha) = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, получим

$$A_40 = \frac{|4\cdot 3 - 1\cdot 3 + 5\cdot(-2) - 19|}{\sqrt{4^2 + (-1)^2 + 5^2}} = \frac{20}{\sqrt{42}} = \frac{10\sqrt{42}}{21}$$

Таким образом, длина высоты равна $\frac{10\sqrt{42}}{21}$.
б) найдем координаты точки С – середины отрезка A_1A_2:

$x_C = \frac{x_A+x_B}{2} = \frac{0+3}{2} = \frac{3}{2}$; $\ y_C = \frac{y_A+y_B}{2} = \frac{-4-2}{2} = -3$; $\ z_C = \frac{z_A+z_B}{2} = \frac{3+1}{2} = 2$
Таким образом, $\mathrm{C}(3/2;\ -3; 2)$.
Чтобы составить уравнение прямой A_4C, используем уравнение прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1},$$

Подставляя координаты точек A_4 и C, получим уравнение прямой A_4C:

$$\frac{x-3}{-3/2} = \frac{y-3}{-6} = \frac{z+2}{4}$$

в) Объём тетраэдра вычислим по формуле:
$V = \frac{1}{6}\left|\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)\right|$, где $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$ – смешанное произведение векторов
$\vec{a} = \overrightarrow{A_1A_2} = \{3,2,-2\}, \vec{b} = \overrightarrow{A_1A_3} = \{-4,-1,3\}$ и $\vec{c} = \overrightarrow{A_1A_4} = \{3,7,-5\}$.
Вычислим векторное произведение:

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}3&2&-2\\-4&-1&3\\3&7&-5\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}-1&3\\7&-5\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}-4&3\\3&-5\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}-4&-1\\3&7\end{vmatrix}=-20$$

Тогда объём тетраэдра: $V=\frac{1}{6}\left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right|=\frac{1}{6}|-20|=\frac{10}{3}$.

г) угол между прямой A_1A_3 и плоскостью $A_1A_2A_3$ определим по формуле:

$sin\varphi=\frac{|(\overline{n},\overline{\lambda})|}{|\overline{n}|\cdot|\overline{\lambda}|}$, где $\overline{n}=\{A,B,C\}=\{4,-1,5\}$ – нормальный вектор плоскости, а $\overline{\lambda}=\{p,q,r\}=\{0,5,-3\}$ – направляющий вектор прямой.

Подставляя координаты векторов, получим:

$$sin\varphi=\frac{|Ap+Bq+Cr|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

$$sin\varphi=\frac{|4\cdot 0-1\cdot 5+5\cdot(-3)|}{\sqrt{4^2+(-1)^2+5^2}\cdot\sqrt{0^2+5^2++(-3)^2}}=\frac{10}{\sqrt{357}}$$

Контрольное домашнее задание №2

Задания ко всем вариантам

1. Вычислить пределы.
2. Найти точки разрыва функции $f(x)$ и установить их вид. В нечетных вариантах приведены функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $\chi(x)$ функции $f(x)$:
$$f(x)=\begin{cases}\varphi(x) \text{ при } x\le a\\ \psi(x),\ a<x\le b\\ \chi(x) \text{ при } x>b\end{cases}$$
3. Вычислить производные данных функций.
4. Составить уравнение касательной и нормали к кривой в точке, соответствующей значению параметра $t=t_0$
5. Найти дифференциал второго порядка функции $f(x)$ в точке x.
6. Провести полное исследование функции и построить график.

Вариант 1

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+4}{4x^2+6x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2+6x+8}{x^3+8}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+1}{sin(x+1)}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{cosx}{x^2+8x-1}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-3}\right)^{3x}$.

2. $\varphi(x)=2-x^2,\ \psi(x)=cosx,\ \chi(x)=x-\frac{\pi}{2},\ a=0,b=\frac{\pi}{2}$.

3. а) $y = \sqrt[3]{2x^3 - 6x + 1}$; б) $y = sin^2 4x \cdot tg3x^2$; в) $y = \frac{e^{arcsinx}}{\sqrt{x}}$;

г) $y = (lnx)^{3x}$.

4. $x = sin^3 t, y = cos^3 t, t_0 = \pi/3$; **5.** $f(x) = \frac{2}{x+1}$; **6.** $y = \frac{1}{x^2 - x}$

Вариант 2

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2+x-3}{x^3+3x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{3-8x-3x^2}{x^2+x-6}$; в) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{2x+1}-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-1}{sin(x-1)}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{sin3x}{x^2+6x}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x}{2x+1}\right)^{4x}$.

2. $f(x) = \frac{1}{1+3^{lgx}}$; **3.** а) $y = \sqrt[5]{(2x+1)^3}$;

б) $y = e^{5x} arccos^2 2x$; в) $y = \frac{(x-1)^3}{e^{arctgx}}$; г) $y = (x)^{arcsin2x}$.

4 . $x = \sqrt{3}cost, y = sint, t_0 = \frac{\pi}{3}$; **5**. $f(x) = \frac{2}{x^3+4x-3}$; **6**. $y = \frac{x^2}{(x-1)^2}$

Вариант 3

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{-x^2-5x+7}{x^3-1}$; б) $\lim\limits_{x\to -4} \frac{2x^2+7x-4}{4-3x-x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{2x+3}-3}{2-\sqrt{x+1}}$;

г) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{3sin(x-5)}{x^3-125}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{sinx}{x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x}{x-2}\right)^{x+1}$.

2. $\varphi(x) = 3 + x,\ \psi(x) = sinx,\ \chi(x) = x + \pi,\ a = 0, b = \pi$.

3. а) $y = \sqrt{(3x-1)^3}$; б) $y = (tgx)^{4e^x}$; в) $y = \frac{ln(3-8x)}{3cos3x}$;

г) $y = tg^3 2x \cdot sin3x^2$; **4**. $x = a(t - sint), y = a(1 - cost), t_0 = \frac{\pi}{3}$.

5. $f(x) = \frac{4}{(x^2-3x+1)^4}$; **6.** $y = \frac{1-x^3}{x^2}$.

Вариант 4

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x^4+2x+9}{x^3+4}$; б) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{2x^2-17x+35}{x^2-x-20}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{9-x}-3}{\sqrt{x+4}-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-cos4x}{5x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{cosx}{x^2}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{3x-2}$.

2. $f(x) = xsin\frac{\pi}{x}$. **3.** а) $y = \sqrt[4]{7x^2 - 4x + 3}$;

б) $y = arcsin^4 x \cdot ctgx^3$; в) $y = \frac{2^{sin3x}}{\sqrt{x}}$; г) $y = (ctgx)^{x^2}$.

4. $x = 2t - t^2, y = 3t - t^3, t_0 = 1.$ **5.** $f(x) = \frac{1}{(3x-4)^3}.$ **6.** $y = \frac{(x-1)^2}{x^2}$

Вариант 5

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3-9x^2-x+8}{2x^3+x-3};$ б) $\lim\limits_{x\to2} \frac{-2x^2+9x-10}{x^2-x-2};$ в) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{\sqrt{4-x^2}-2};$

г) $\lim\limits_{x\to0} \frac{sin^3x-sinx}{3x};$ д) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{arctgx}{x};$ е) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x+2}{x-4}\right)^{x-3}.$

2. $\varphi(x) = x^2 + 3,\ \psi(x) = 4x,\ \chi(x) = 5 - x,\ a = 1, b = 3.$

3. а) $y = \sqrt[5]{2x^3 - x - 7}.$ б) $y = ctg4x \cdot arccosx^2;$ в) $y = \frac{\sqrt{5x^3-2x+1}}{e^{cosx}};$

г) $y = (shx)^{chx}.$ **4.** $x = \frac{2t+t^2}{1+t^3}, y = \frac{2t-t^2}{1+t^3}, t_0 = 1.$

5. $f(x) = \frac{5}{(2x+1)^5}.$ **6.** $y = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2.$

Вариант 6

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{7x^3-4x^2+5x}{2x^3+6x-3};$ б) $\lim\limits_{x\to-1} \frac{3x^2+2x-1}{x^3+1};$ в) $\lim\limits_{x\to4} \frac{5-\sqrt{x^2+9}}{\sqrt{2x+1}-3};$

г) $\lim\limits_{x\to0} \frac{sin^2 3x+sin^2 x}{3x^2};$ д) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{arctg(x^2-1)}{x^2-1};$ е) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{x+5}.$

2. $f(x) = sin\frac{\pi}{2x}.$ **3.** а) $y = \sqrt[6]{8x^2 - 5x + 4}.$

б) $y = 6^{-2x}ln^2(3x + 2);$ в) $y = \frac{\sqrt{6x^2-5x+4}}{e^{ctgx}};$ г) $y = (thx)^{cthx}.$

4. $x = arcsin\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\quad y = arccos\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\quad t_0 = -1.$

5. $f(x) = \frac{2}{(x+1)^3}.$ **6.** $y = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2.$

Вариант 7

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{9x^2-x+4}{3x^2+5x-7};$ б) $\lim\limits_{x\to2} \frac{3x^2-2x-8}{2x^2-x-6};$ в) $\lim\limits_{x\to4} \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x+5}-3};$

г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1-sin2x}{\pi-4x};$ д) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{arcctg(x+1)}{x+1};$ е) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x}{x+5}\right)^{\frac{x}{2}}.$

2. $\varphi(x) = (x + 2)^2,\ \psi(x) = |x|,\ \chi(x) = 0,\ a = -1, b = 1.$

3. а) $y = \sqrt[4]{(x - 1)^3};$ б) $y = arctg^2x \cdot lg(x + 3);$ в) $y = \frac{3^{sin2x}}{(2x-7)^5};$

г) $y = \left(\sqrt{x + 1}\right)^x.$ **4.** $x = t(tcost - 2sint), y = t(tsint + 2cost), t_0 = \frac{\pi}{4}.$

5. $f(x) = \frac{5}{4x^2+7x-3}.$ **6.** $y = \frac{2x}{(x+1)^2}.$

Вариант 8

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^5-11x+4}{x^5+16x-10}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{2x^2-5x-12}{5x^2-21x+4}$; в) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x-3}-1}{\sqrt{2x+1}-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cosx}{xsinx}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{arcctg(x^2)}{x^2}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-3}\right)^{2x-1}$.

2. $f(x) = arctg\,\frac{1}{x}$; **3.** а) $y = \sqrt[5]{(4x-5)^3}$; б) $y = \frac{ln(7x+3)}{e^{7x}}$;

в) $y = arctg^3 4x \cdot 3^{lnx}$; г) $y = (x+4)^{arccosx}$.

4. $x = \frac{3at}{1+t^2}, y = \frac{3at^2}{1+t^2}, t_0 = 2$. **5.** $f(x) = \frac{2}{5x-3}$. **6.** $y = \frac{1-2x^3}{x^2}$.

Вариант 9

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^7+4}{4x^5+6x-21}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2+x-14}{2x^2-x-6}$; в) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x-3}-\sqrt{5-x}}{x-4}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{cos4x-cos2x}{8x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{cos(x^2-1)}{x^2-1}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{3+x}\right)^{3x}$.

2. $\varphi(x) = -1,\ \psi(x) = x^2,\ \chi(x) = (x-2)^2,\ a = -1, b = 1$.

3. а) $y = \sqrt{8x^3-5}$; б) $y = 9^{sinx}ctg5x^2$; в) $y = \frac{log_3(2x-1)}{\sqrt{x+3}}$;

г) $y = (cosx)^{3x}$. **4.** $x = 2lnctgt + 1, y = atcost, t_0 = \frac{\pi}{4}$.

5. $f(x) = \frac{9}{(3x+1)^2}$. **6.** $y = \frac{e^{x-1}}{x-1}$.

Вариант 10

1. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x^6-x^3-9x^2}{2x^8+6x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{5x^2-x-42}{2x^2+4x-30}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{3-\sqrt{11-x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{1-cos(x+2)}{(x^2-4)^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{arctg5x}{5x}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{tg2x}{x}\right)^{3+x}$.

2. $f(x) = \frac{1}{lg|x|}$; **3.** а) $y = (tgx)^{ctgx}$; б) $y = \frac{arctg(shx)}{e^{chx}}$

в) $y = 10^x \cdot \lg(x^2-4)$; г) $y = \sqrt[5]{4x^2-6x+9}$.

4. $x = t^2 - t^4, y = t^2 + t^3, t_0 = 0$. **5.** $f(x) = \frac{4}{(2x-1)^3}$. **6.** $y = \frac{3x^4+1}{x^3}$

Вариант 11

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5+x-2}{4x^3+x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-3x-4}{3x^2+x-52}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{5-\sqrt{22+x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{8-x^3}{2sin(x-2)}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{arcctgx^4}{x^4}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x+2}{x+4}\right)^{cosx}$.

2. $\varphi(x)=\left(x+\frac{\pi}{2}\right)^2, \psi(x)=cosx, \chi(x)=x+1, a=-\frac{\pi}{2}, b=\frac{\pi}{2}$.

3. а) $y=\frac{1}{\sqrt{(x-5)^3}}$; б) $y=(lgx)^{\sqrt{x}}$; в) $y=\frac{\sqrt{2x^3-10x+2}}{e^{tgx}}$;

г) $y=lgx\cdot arcsin^4x$. **4.** $x=sin^2t, y=cos^2t, t_0=\pi/6$.

5. $f(x)=\sqrt[3]{x^2-6}$. **6.** $y=\frac{x}{(x-2)^2}$.

Вариант 12

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+12x}{x^2+2x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^3-(1+3x)}{x^5+x}$; в) $\lim\limits_{x\to 16}\frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$;

г) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{cos5x-cos3x}{sin^2x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{cosx^3}{x^2}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{sin5x}{3x}\right)^{1+x}$.

2. $f(x)=\frac{x^3-1}{x-1}$. **3.** а) $y=\frac{2}{\sqrt[3]{x^2+1}}$; б) $y=\frac{e^{arcsinx}}{arccos\sqrt{x}}$;

в) $y=sin^2x\cdot 2^{ctgx}$; г) $y=(lnx+1)^{2x}$.

4. $x=\frac{1+lnt}{t^2}, y=\frac{3+2lnt}{t}, t_0=1$. **5.** $f(x)=\frac{7}{x^2-6x+3}$. **6.** $y=\left(\frac{x}{x-2}\right)^2$.

Вариант 13

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+x-3}{-x^2-2x-8}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{x^2-\pi^2}{sinx}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{arctgx^3}{x^2}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{sin3x}{sin5x}\right)^{x^2}$.

2. $\varphi(x)=-5x,\ \psi(x)=\sqrt{x},\ \chi(x)=x^2+2,\ a=0, b=1$.

3. а) $y=\frac{2}{\sqrt[3]{x^2-9x+1}}$; б) $y=ln^5x\cdot arctgx$; в) $y=\frac{arcsin2x}{\sqrt{2x+6}}$;

г) $y=(lnx)^{\sqrt{x}}$. **4.** $x=\frac{1+t}{t^2}, y=\frac{3}{2t^2}+\frac{2}{t}, t_0=2$

5. $f(x)=\frac{1}{x+3}$. **6.** $y=\frac{x^3-4}{x^2}$.

Вариант 14

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^4+11x+4}{8x^4-7x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1+cos\pi x}{tg^2\pi x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{sinx^3}{x^2}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\left(cos\frac{x}{\pi}\right)^{\frac{1}{x}}$.

2. $f(x)=\frac{1}{ln(x-1)}$. **3.** а) $y=\sqrt[5]{(4x-5)^3}$; б) $y=\frac{ln(7x+3)}{e^{7x}}$

в) $y=arctg^2x\cdot 3^{lnx}$; г) $y=(arcsinx)^{arctgx}$.

4. $x = 1 - t^2, y = t - t^3, t_0 = 2.$

5. $f(x) = \frac{2}{5x-3}.$ **6.** $y = \frac{x^2-x+1}{x-1}.$

Вариант 15

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x^2-6x+7}{2x^3+x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-x^2-x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to-2} \frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x+2}$;

г) $\lim\limits_{x\to1} \frac{cos(\pi x/2)}{1`-\sqrt{x}}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{cosx^3}{x^2+x-3}$; е) $\lim\limits_{x\to0} \left(\frac{arctgx}{sinx}\right)^{\frac{1}{x}}$.

2. $\varphi(x) = x^2,\ \psi(x) = |sinx|,\ \chi(x) = 1,\ a = 0,\ b = 2\pi.$

3. а) $y = \sqrt[5]{10x+5}$; б) $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{arcsinx}$; в) $y = (2x+1)^{x^3}$

г) $y = 3^{-x^4+3x^2-7} \lg x$. **4.** $x = \frac{ln(1+t^2)}{t}, y = t - arctgt, t_0 = 1.$

5. $f(x) = \frac{(3x^2+11x-3)^2}{5}.$ **6.** $y = \frac{1}{x^4-1}.$

Вариант 16

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x^4-2x+4}{-2x^4+5x-9}$; б) $\lim\limits_{x\to-1} \frac{x^3+4x^2+5x+2}{x^3-3x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to4} \frac{\sqrt[3]{16x}-4}{\sqrt{12+x}-4}$;

г) $\lim\limits_{x\to0} \frac{arcsin3x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{arctg(x^3+x^2-3x)}{x^2}$; е) $\lim\limits_{x\to2} \left(\frac{cosx}{cos2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$.

2. $f(x) = arctg\frac{1}{x+1}$. **3.** а) $y = \sqrt[6]{8x^2-2x+4}$;

б) $y = 6^{arcsinx} \cdot log_6 x$; в) $y = \frac{ctg^2 3x}{sin3x}$; г) $y = x^{1/x}$.

4. $x = \frac{1+t^3}{t^2-1}, y = \frac{t}{t^2-1}, t_0 = 2.$ **5.** $f(x) = \frac{1}{(3x-4)^5}.$ **6.** $y = \frac{x^3-32}{x^2}$

Вариант 17

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{11x^3+9x-7}{-x^2+x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to-2} \frac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+3x^2-4}$; в) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[5]{x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to0} \frac{arctg2x}{sin(2\pi(x+10))}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{sin(x^3+x)}{x^3+x}$; е) $\lim\limits_{x\to3} \left(\frac{6-x}{3}\right)^{tg\frac{\pi x}{6}}$.

2. $\varphi(x) = 0,\ \psi(x) = -|x|,\ \chi(x) = x^2 - 2,\ a = -1,\ b = 1.$

3. а) $y = \sqrt[3]{x^2+3x-5}$; б) $y = \frac{sh^2 2x}{e^{4x}}$; в) $y = x^{e^{cosx}}$

г) $y = arccos6x \cdot \sqrt{1-36x^2}$.

4. $x = 3cost, y = 4sint, t_0 = \pi/4.$

5. $f(x)=\frac{5}{(3x+1)^2}$. **6.** $y=(x+1)e^{-(x+1)}$.

Вариант 18

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-x+4}{-8x^2+6x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-3x^2+4}$; в) $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt[3]{16x}-4}{\sqrt{4+x}-\sqrt{2x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\frac{arcsin3x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{cos\pi x}{e^{x^2}}$ е) $\lim\limits_{x\to1}(3-2x)^{tg\frac{\pi x}{2}}$.

2. $f(x)=\frac{1}{3^{\frac{1}{x-1}}+1}$. **3.** а) $y=e^{1/x}\cdot arctgx$;

б) $y=\frac{3}{\sqrt{3x-7}}$; в) $y=\frac{ln(ch3x)}{thx}$; г) $y=x^{e^{cosx}}$.

4. $x=t^3+1, y=t^2+t+1, t_0=1$.

5. $f(x)=\frac{1}{(6x-4)^2}$. **6.** $y=\frac{x^2-6x+9}{(x-1)^2}$.

Вариант 19

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-3x+1}{4x^2+6x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-6x^2+12x-8}{x^3-3x^2+4}$; в) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{sin(\pi(x+2))}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{sin5x^3}{5x^3}$; е) $\lim\limits_{x\to3}\left(2-\frac{x}{3}\right)^{sin\pi x}$.

2. $\varphi(x)=\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2,\ \psi(x)=cosx,\ \chi(x)=0,\ a=\frac{\pi}{2},\ b=2\pi$.

3. а) $y=tg^2x\cdot lncosx$; б) $y=(1+x^2)^{arctgx}$; в) $y=\frac{cth3x}{e^{5x}}$;

г) $y=\sqrt[3]{2x^2-4x+1}$. **4.** $x=2cost, y=sint, t_0=-\frac{\pi}{3}$.

5. $f(x)=\frac{1}{x^3+1}$. **6.** $y=\frac{12-3x^2}{x^2+12}$.

Вариант 20

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+x-4}{4x^2+5x-10}$; б) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+7x^2+16x+12}$; в) $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt[3]{9x}-3}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\frac{tgx-sinx}{x(1-cos2x)}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{sin(\sqrt{1+x}-1)}{\sqrt{1+x}-1}$; е) $\lim\limits_{x\to1}(arcsinx)^{tg\pi x}$.

2. $f(x)=\frac{1}{3^x-1}$. **3.** а) $y=arcctge^x\cdot e^{2x}$;

3. б) $y=ln^2(x^2-1)$; в) $y=\frac{sin1/x}{lnx}$; г) $y=\left(\sqrt{x}\right)^{sin\sqrt{x}}$.

4. $x=2tgt, y=2sin^2t+sin2t, t_0=\pi/4$.

5. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. **6.** $y=\frac{4}{x^2+2x-3}$.

Вариант 21

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-9x+4}{-x^3+x^2-3}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3-3x-2}{(x^2-x-2)^2}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{1-x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{1-cos10x}{e^{x^2}-1}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-cos2x^3}{x^4}$; е) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(ln^2ex)^{\frac{1}{x^2-1}}$.

2. $\varphi(x)=x^2+1,\ \psi(x)=(x-1)^2,\ \chi(x)=-2x+6,\ a=0,\ b=2.$

3. а) $y=\frac{1}{ln\sqrt{e^x-1}}$; б) $y=(lnx)^{x^2}$; в) $y=\frac{arccos1/\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$;

г) $y=arcctg2x\cdot sin^2 4x$. **4.** $x=t-t^4, y=t^2-t^3, t_0=1$.

5. $f(x)=\sqrt{e^x-1}$. **6.** $y=\frac{2}{x^2+3x-4}$.

Вариант 22

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^2-x-5}{-3x^2+2x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-3x-2}{x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{4-x}}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{1-x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\frac{ln^2(x^2+1)}{1-\sqrt{x^4+1}}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{arctgx^4}{x^4}$; е) $\lim\limits_{x\to1}\left(\sqrt{x}+1\right)^{\frac{\pi}{arctglnx}}$.

2. $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$. **3.** а) $y=ln(e^x+1)\cdot arctgx$

б) $y=\sqrt{shx+3}$; в) $y=\frac{8^{sinx}}{ctgx}$; г) $y=x^{\frac{1}{x}}$.

4. $x=sint, y=cos2t, t_0=\pi/6$.

5. $f(x)=\frac{2}{(x+3)^2}$. **6.** $y=\frac{2x}{x^2+x-12}$.

Вариант 23

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4x^3-3x+8}{4x^2+2x-7}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3-3x-2}{x^2+2x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to16}\frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{3x}-4\sqrt{3}}$;

г) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{e^\pi-e^x}{sin5x-sin3x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{arcctg(x^4-1)}{x^4+1}$; е) $\lim\limits_{x\to\pi}\left(ctg\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{cosx/2}}$.

2. $\varphi(x)=-x,\ \psi(x)=\frac{6}{x},\ \chi(x)=x,\ a=0,\ b=3.$

3. а) $y=\sqrt{2x-3}$; б) $y=cos1/x\cdot tgx$; в) $y=\frac{e^{arctgx}}{1+x^2}$;

г) $y=(arcsinx)^{e^x}$. **4.** $x=sint, y=a^t, t_0=0$.

5. $f(x)=\frac{3}{(1-x)^2}$. 6. $y=\frac{x^3}{x^2+6}$.

Вариант 24

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-x+5}{x^2-3x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-2x+1}{x^3-x^2-x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt[3]{x^2-16}}$;

г) $\lim\limits_{x\to1}\frac{cos(x-1+\pi/2)}{arctg(x^2-1)}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{arctgsinx}{x}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-3}{4x^2+6x}\right)^{x^3+5x}$.

2. $f(x)=e^{\frac{1}{x+1}}$. **3.** а) $y=lntgx\cdot cosx$;

б) $y=\sqrt[3]{4x+1}$; б) $y=lntgx\cdot cosx$; в) $y=\frac{\sqrt{1-4x^2}}{arccos2x}$;

г) $y=(cosx)^{lnx}$. **4.** $x=3e^{-t}, y=2e^t, t_0=0$.

5. $f(x)=\frac{5}{x^2-4x+3}$. **6.** $y=xe^{1/x}$.

Вариант 25

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x^2-x+4}{2x^2+9x-7}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$; в) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{\sqrt[3]{x^3+8}}$;

г) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\frac{3^{cos^2x}-1}{lnsin2x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin(cosx)}{x}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+4}{2x^2+x-1}\right)^{2x^2}$.

2. $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$. **3.** а) $y=lncosx\cdot tg^3 2x$;

б) $y=\sqrt[3]{x^5+2x}$; в) $y=\frac{arctg^2x}{x^2+1}$; г) $y=x^{e^x}$.

4. $x=atcost, y=atsint, t_0=\pi/2$. **5.** $f(x)=\frac{1}{5^x+2}$. **6.** $y=ln\frac{x}{x-1}$.

Образец решения варианта КДЗ №2

1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4-2x^2+3x-1}{2x^4-7x+5}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-2/x^2+3/x^3-1/x^4}{2-7/x^3+5/x^4}=\frac{3}{2}$;

б) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-5x^2+2x+8}{x^2-4}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to2}\frac{(x-2)(x+1)(x-4)}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to2}\frac{(x+1)(x-4)}{(x+2)}=-1$;

в) $\lim\limits_{x\to9}\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{2x-2}-4}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to9}\frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)(\sqrt{2x-2}+4)}{(\sqrt{2x-2}-4)(\sqrt{2x-2}+4)(\sqrt{x}+3)}=$

$=\lim\limits_{x\to9}\frac{(x-9)(\sqrt{2x-2}+4)}{(2x-2-16)(\sqrt{x}+3)}\lim\limits_{x\to9}\frac{\sqrt{2x-2}+4}{2(\sqrt{x}+3)}=\frac{8}{2\cdot6}=\frac{2}{3}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x^2+3}\right)^{2x}=(1^\infty)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3-3}{x^2+3}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x^2+3}\right)^{2x}=$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x^2+3}\right)^{-\frac{x^2+3}{3}\left(-\frac{6x}{x^2+3}\right)} = e^{-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x}{x^2+3}} = e^0 = 1;$$

д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg4x}{e^{sin2x}-1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{4x}{sin2x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{4x}{2x} = 2.$

2. Найти точки разрыва функции и установить их вид: а) $f(x) = 2^{\frac{1}{x-1}}$;

   б) $f(x) = \begin{cases}\sqrt{1-x}, & x \le 1\\ x+1, & x > 1\end{cases}$

Решение. а) Функция определена при любых x, кроме $x = 1$, следовательно, $x = 1$ является точкой разрыва. Определим характер разрыва. Для этого найдем односторонние пределы функции в этой точке:

$$f(1-0) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} 2^{\frac{1}{x-1}} = 0;\; f(1+0) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} 2^{\frac{1}{x-1}} = +\infty.$$

Так как правосторонний предел бесконечен, то точка $x = 1$ является точкой разрыва второго рода.

б) $f(x) = \begin{cases}\sqrt{1-x}, & x \le 1\\ x+1, & x > 1\end{cases}$

Слева и справа от точки $x = 1$ функция $f(x)$ задана разными непрерывными функциями. Найдем односторонние пределы функции $f(x)$ в точке $x = 1$:

$$f(1-0) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim_{x\to 1}\sqrt{1-x} = 0, f(1+0) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2.$$

Оба односторонних предела конечны, следовательно, точка $x = 1$ является точкой разрыва 1-го рода (неустранимый разрыв, т.к. $f(1-0) \ne f(1+0)$).

3. Вычислить производные данных функций:

а) $y = \sqrt[5]{8x^4+2x^2-x-1}$; б) $y = sin^2 4x \cdot tg3x^2$; в) $y = \frac{e^{arcsinx}}{\sqrt{x}}$; г) $y = (lnx)^{3x}$.

Решение. а) по правилу дифференцирования сложной функции:

$$y' = \left((8x^4+2x^2-x+1)^{\frac{1}{5}}\right)' = \frac{1}{5}(8x^4+2x^2-x+1)^{\frac{1}{5}-1}\cdot(8x^4+2x^2-x+1)' =$$

$$y' = \frac{1}{5}(8x^4+2x^2-x+1)^{-\frac{4}{5}}\cdot(32x^3+4x-1) = \frac{32x^3+4x-1}{5\cdot\sqrt[5]{(8x^4+2x^2-x+1)^4}}$$

б) по правилу дифференцирования произведения:

$y' = (sin^2 4x)' \cdot tg3x^2 + sin^2 4x \cdot (tg3x^2)'$

$y' = 2sin4x \cdot cos4x \cdot 4 \cdot tg3x^2 + sin^2 4x \cdot \dfrac{1}{cos^2 3x^2} \cdot 6x$

$y' = 4sin8x \cdot \ tg3x^2 + \dfrac{6x \cdot sin^2 4x}{cos^2 3x^2}$

в) по правилу дифференцирования частного имеем: $y' = \frac{\left(e^{arcsinx}\right)' \cdot \sqrt{x} - e^{arcsinx} \cdot \left(\sqrt{x}\right)'}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = \frac{e^{arcsinx} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \sqrt{x} - e^{arcsinx} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{e^{arcsinx}\left(2x - \sqrt{1-x^2}\right)}{2x\sqrt{x}\sqrt{1-x^2}}$

$y' = \frac{e^{arcsinx}\left(2x - \sqrt{1-x^2}\right)}{2\sqrt{x^3 - x^5}}$.

г) проинтегрируем сначала функцию $y = (lnx)^x$, получим $lny = x \cdot ln(lnx)$. Затем продифференцируем:

$\frac{1}{y} \cdot y' = (x)' \cdot ln(lnx) + x \cdot \left(ln(lnx)\right)' = ln(lnx) + \frac{1}{lnx}$

$y' = y\left(ln(lnx) + \frac{1}{lnx}\right) = (lnx)^x \cdot \left(ln(lnx) + \frac{1}{lnx}\right)$.

4. Составить уравнение касательной и нормали к кривой в точке, соответствующей значению параметра $t_0 = 0$: $x = 2e^t, y = e^{-t}$

Решение. Уравнение касательной к графику функции в точке (x_0, y_0), где $y_0 = f(x_0)$ имеет вид:

$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$. Найдем x_0 и y_0: $x_0 = 2e^0 = 2$, $y_0 = e^0 = 1$.

Производная функции, заданной параметрическими уравнениями:

$f'(x) = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2e^t}{-e^{-t}}$

Значение производной функции в точке $t_0 = 0$: $f'(x_0) = \frac{2e^0}{-e^0} = -2$

Тогда $y - 1 = -2(x - 2)$ или $y = -2x + 5$ – уравнение искомой касательной.

Уравнение нормали к кривой в точке (x_0, y_0) имеет вид:

$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$. Подставляя данные, получим:

$y - 1 = -1/2(x - 2)$ или $y = -0{,}5x + 2$ - уравнение искомой нормали.

5. Найти дифференциал второго порядка функции $y = \frac{2}{(3x^2-2x+1)^5}$ в произвольной точке x

Решение. Дифференциал второго порядка функции $f(x)$ в точке x:

$d^2f(x) = f''(x)dx^2$

Найдем первую производную $f(x)$ как от степени:

$f'(x) = 2 \cdot (-5)(3x^2 - 2x + 1)^{-6}(6x - 2) = -10\frac{3x-1}{(3x^2-2x+1)^6}$.

Вторая производная:

$$f''(x) = -10\frac{3(3x^2 - 2x + 1)^6 - 6(3x - 1)(3x^2 - 2x + 1)^5(6x - 2)}{(3x^2 - 2x + 1)^{12}} = 30\frac{33x^2 - 22x + 3}{(3x^2 - 2x + 1)^7}$$

Искомый дифференциал равен:

$d^2f(x) = 30\frac{33x^2-22x+3}{(3x^2-2x+1)^7}dx^2$.

4. Исследовать функцию и построить ее график: $f(x) = \frac{x^2}{2(x-1)}$.

Решение.

1. Область определения функции: $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.
2. Функция общего вида.
3. График функции проходит через начало координат.
4. Функция имеет разрыв в точке $x = 1$. Найдем односторонние пределы в этой точке:

$$f(1-0) = \lim_{x\to 1-0}\frac{x^2}{2(x-1)} = -\infty;\ f(1+0) = \lim_{x\to 1+0}\frac{x^2}{2(x-1)} = +\infty\ ,$$

Точка $x = 1$ есть точка разрыва 2-го рода. Прямая $x = 1$ - вертикальная асимптота, так как односторонние пределы в этой точке бесконечны. Найдём

$k = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x(x-1)} = \frac{1}{2}, b = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{2(x-1)} - \frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}$.

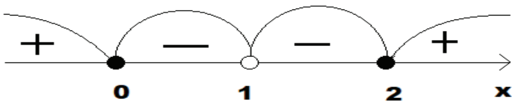
Прямая $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ является наклонной асимптотой.

5. Найдем производную данной функции:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{2(x-1)^2}$$

Стационарные точки: $x = 0, x = 2$, в точке $x = 1$ производная не существует. Определим знак производной в полученных интервалах:

$f'(x)$:



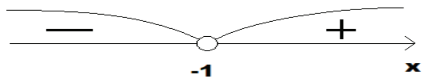
Таким образом, функция возрастает на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(2; +\infty)$ и убывает на промежутках $(0; 1)$ и $(1; 2)$.

Так как $f'(x) > 0$ слева от точки $x = 0$ и $f'(x) < 0$ справа, то $x = 0$ является точкой максимума; $f_{max} = f(0) = 0$. Так как $f'(x) < 0$ при $x < 2$ и $f'(x) > 0$ при $x > 2$, то $x = 2$ является точкой минимума; $f_{min} = f(2) = \frac{4}{2(2-1)} = 2$.

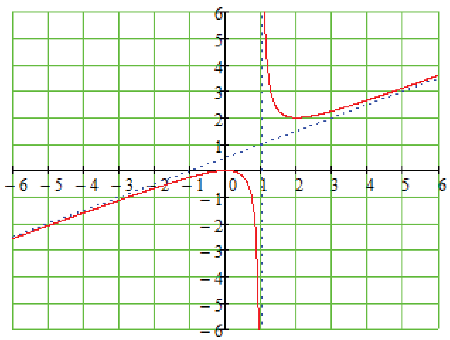
6. Найдем вторую производную функции:

$f''(x) = \frac{1}{2}\frac{(2x-2)(x-1)^2-(x^2-2x)2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{1}{(x-1)^3}$. Так как $f''(x) \neq 0$, то график функции не имеет точек перегиба. Определим знак $f''(x)$ на интервалах $(-\infty; 1)$ и $(1; +\infty)$:

$f''(x)$:



На промежутке $(-\infty; 1)$функция выпукла вверх, а на промежутке $(1; +\infty)$ выпукла вниз. Изобразим график функции.



Второй семестр

Контрольное домашнее задание №3

Задание ко всем вариантам

1. Вычислить неопределенные интегралы.
2. Вычислить определенные интегралы.
3. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость.
4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций.
5. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением.
6. Вычислить объем тела, образованного вращением фигур, ограниченных графиками функций вокруг оси *Ox* (варианты 1-13) и вокруг оси *Oy* (варианты 14-25).

Вариант 1

1. а) $\int \frac{(\sqrt{x}+2)^2}{x^2\sqrt{x}}dx$; б) $\int \frac{arcsinx-x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; в) $\int (x-2)sinxdx$.

2. а) $\int_0^{\pi} sin^4xdx$; б) $\int_1^4 \frac{(\sqrt{x}+4)dx}{x^2+3x\sqrt{x}+2x}$.

3. а) $\int_1^{+\infty} \frac{arctgx}{1+x^2}dx$; б) $\int_3^4 \frac{dx}{\sqrt[5]{x^2-9}}$.

4. а) $y=(x-2)^3, y=4x-8$; б) $\begin{cases} x=4\sqrt{2}cos^3t \\ y=2\sqrt{2}sin^3t \end{cases}, x=2, x\geq 2$;

в) $\rho=4cos3\varphi,\ \rho=2, (\rho\geq 2)$.

5. $y=lnx,\ \sqrt{3}\leq x\leq \sqrt{15}$.

6. $y=-x^2+5x-6,\ \ y=0$.

Вариант 2

1. а) $\int \frac{(x-3)^2}{x^2\sqrt[3]{x}}dx$; б) $\int \frac{e^{arctgx}+x}{1+x^2}dx$; в) $\int ln(3x+1)dx$.

2. а) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{1-cosx}$; б) $\int_0^{\frac{1}{8}} \frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x}}dx$.

3. а) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+8x+17}$; б) $\int_0^1 \frac{arccosx}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

4. а) $y=4-x^2, y=x^2-2x$; б) $\begin{cases} x=4(t-sint) \\ y=4(1-cost) \end{cases}, y=4$.

$(0<x<8\pi, y\geq 4)$; в) $\rho=cos2\varphi$.

5. $y=ln\frac{5}{2x},\ \sqrt{3}\leq x\leq \sqrt{8}$.

6. $2x-x^2-y=0,\ 2x^2-4x+y=0$.

Вариант 3

1. а) $\int \frac{2x\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}}dx$; б) $\int \frac{\sqrt{tgx}-2}{cos^2x}dx$; в) $\int x \cdot arctg2xdx$.

2. а) $\int_0^{\pi} tg^2xdx$; б) $\int_0^1 \frac{\sqrt[6]{x}}{2\sqrt[3]{x}-2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}dx$.

3. а) $\int_4^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[5]{(1+x)^7}}$; б) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}$.

4. а) $y = \sqrt{4-x^2},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 1$; б) $\begin{cases} x = 2cost \\ y = 6sint \end{cases},\ y = 3, (y \geq 3)$;

в) $\rho = \sqrt{3}cos\varphi,\ \rho = sin\varphi, \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right)$.

5. $y = \frac{x^2}{4} - \frac{lnx}{2},\ 1 \leq x \leq 2$.

6. $y = 3sinx,\ y = sinx,\ 0 \leq x \leq \pi$.

Вариант 4

1. а) $\int \frac{-x^3+2x-1}{x^2\sqrt[4]{x}}dx$; б) $\int \frac{ln^2x-\sqrt{x}}{x}dx$; в) $\int \sqrt{x}lnxdx$.

2. а) $\int_0^{\pi} cosxsin3xdx$; б) $\int_3^5 \frac{\sqrt{x-1}+3}{(x-1)(x-2)}dx$.

3. а) $\int_0^{+\infty} x^4e^{-x^5}dx$; б) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-2}}$.

4. а) $y = \frac{1}{x\sqrt{1+lnx}}, y = 0,\ x = 1,\ x = e^3$; б) $\begin{cases} x = \sqrt{2}cost \\ y = 2\sqrt{2}sint \end{cases},\ y = 2, (y \geq 2)$;

в) $\rho = sin3\varphi,\ \rho = 2, (\rho \geq 2)$;

5. $y = -lncosx + 2,\ 0 \leq x \leq \pi/6$;

6. $y = sin^2x,\ \ x = \frac{\pi}{2},\ y = 0$.

Вариант 5

1. а) $\int \frac{1-\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}}{x^2}dx$; б) $\int (ch3x-1)sh3xdx$; в) $\int (x^2+1)e^x dx$.

2. а) $\int_0^{\pi/2} cos^5xdx$; б) $\int_0^8 \frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt[4]{(x+1)^7}+\sqrt[4]{(x+1)^5}}dx$.

3. а) $\int_1^{+\infty} \frac{arctg^4x}{1+x^2}dx$; б) $\int_1^3 \frac{dx}{x^2+x-2}$.

4. а) $y = (1+x)^2,\ y^2 = x+1$; б) $\begin{cases} x = 16cos^3t \\ y = 2sin^3t \end{cases},\ x = 2, (x \geq 2)$.

в) $\rho = 2cos\varphi,\ \rho = 2\sqrt{3}sin\varphi\ \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right)$.

5. $y = e^x + 6,\ ln\sqrt{8} \leq x \leq ln\sqrt{15}$.

6. $y = 5cosx,\ y = cosx,\ x = 0,\ x \geq 0$.

Вариант 6

1. а)$\int\left(\sqrt{x}-\frac{2}{x\sqrt{x}}+2\right)^2dx$; б) $\int\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$; в) $\int x^3e^{-x^2}dx$.

2. а) $\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{cos^4x}$**;** б) $\int_{-4}^{-3}\sqrt{\frac{x+3}{x}}dx$.

3. а) $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{lnx}}$**;** б) $\int_0^2\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$**.**

4. а) $y=x\sqrt{36-x^2},(0\le x\le 6),\ y=0$; б) $\begin{cases}x=2(t-sint)\\y=2(1-cost)\end{cases},\ y=3,$

$(0<x<2\pi,\ y\ge 3)$; в) $\rho=sin3\varphi$.

5. $y=\sqrt{x-x^2}+arcsin\sqrt{x}+2,\ \ 1/4\le x\le 1.$

6. $y=xe^x,\ y=0,\ x=1.$

Вариант 7

1. а)$\int e^{-x}\left(3-\frac{e^x}{x\sqrt{x}}\right)dx$; б) $\int xe^{-x^2}dx$; в) $\int arcsin^2xdx$.

2. а) $\int_0^{\pi/2}\frac{1-cosx}{1+cosx}dx$**;** б) $\int_{0,5}^1\frac{dx}{x\sqrt{5x^2-2x+1}}$**.**

3. а) $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}e^{-1/x}dx$**;** б) $\int_{-1}^1\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.

4. а) $y=xarctgx,\ y=0,\ x=\sqrt{3}$; б) $\begin{cases}x=16cos^3t\\ y=sin^3t\end{cases},\ x=6\sqrt{3},\ \left(x\ge 6\sqrt{3}\right)$;

в) $\rho=6sin3\varphi,\ \rho=3,(\rho\ge 3)$.

5. $y=ln(x^2-1),\ 2\le x\le 3.$

6. $y=0{,}5chx,\ y=0,\ x=0,\ x=1.$

Вариант 8

1. а)$\int\left(\frac{1}{x}+2\sqrt{x}\right)^2dx$; б)$\int xcosx^2dx$; в) $\int\frac{cos3x}{e^{2x}}dx$.

2. а)$\int_0^{\pi/6}sin2xsin3xdx$**;** б) $\int_0^1\frac{x-1}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}dx$.

3. а) $\int_0^{+\infty}xe^{-x^2}dx$**;** б) $\int_0^1\frac{dx}{1-x^3}$**.**

4. а) $y=\frac{x}{1+\sqrt{x}},\ y=0,\ x=1$; б) $\begin{cases}x=6cost\\y=2sint\end{cases},\ y=\sqrt{3},\ \left(y\ge\sqrt{3}\right)$;

в) $\rho=cos3\varphi$;

5. $y=arccosx+\sqrt{1-x^2}+1,\ 0\le x\le 8/9.$

6. $y=2x-x^2,y=-x+2,x=0.$

Вариант 9

1. а)$\int cosx\left(sinx-\frac{\sqrt[3]{x}}{cosx}\right)dx$; б) $\int\frac{e^{1/x}-3}{x^2}dx$; в) $\int ln^2xdx$.

2. а) $\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{dx}{sin^6x}$**;** б) $\int_0^2\frac{\sqrt{x+1}}{(x+1)(x+2)}dx.$

3. а) $\int_{-\infty}^{\pi/2}sinxdx$**;** б) $\int_{-3}^{0}\frac{xdx}{\sqrt{9-x^2}}$**.**

4. а) $x=(y-2)^3,\ x=4y-8;$ б) $\begin{cases}x=3(t-sint)\\y=3(1-cost)\end{cases},\ y=3,\begin{pmatrix}0<x<6\pi,\\ y\geq 3\end{pmatrix};$

в) $\rho=cos\varphi,\ \rho=\sqrt{2}cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right),\ \left(-\frac{\pi}{4}\leq\varphi\leq\frac{\pi}{4}\right).$

5. $y=ln(1-x^2),\ 0\leq x\leq 1/4;$

6. $y=e^{1-x},\ y=0,\ x=0,\ x=1.$

Вариант 10

1. а) $\int\frac{3x(1-\sqrt{x})}{x^2-\sqrt{x^5}}dx;$ б) $\int\frac{cosx}{4+sin^2x}dx;$ в) $\int\frac{x}{3^x}dx.$

2. а) $\int_0^{\pi/2}\frac{sin^2xcosxdx}{1+sin^2x};$ б) $\int_1^2\frac{5dx}{x^2\sqrt{x-1}}$**.**

3. а) $\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+2}$**;** б) $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\frac{arcsin^3xdx}{\sqrt{1-x^2}}$**.**

4. а) $y=\frac{x}{(x^2+1)^2},\ y=0,\ x=1;$ б) $\begin{cases}x=8\sqrt{2}cos^3t\\ y=\sqrt{2}sin^3t\end{cases},\ x=4,\ x\geq 4.$

в) $\rho=sin\varphi,\ \rho=\sqrt{2}cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right),\ \left(0\leq\varphi\leq\frac{3\pi}{4}\right).$

5. $y=1-lncosx+2,\ 0\leq x\leq\pi/6.$

6. $y=x^2,\ y^2-x=0.$

Вариант 11

1. а) $\int\frac{(x+1)^3}{x\sqrt{x}}dx;$ б) $\int\sqrt{1+cosx}\cdot sinxdx;$ в) $\int\frac{x}{cos^2x}dx.$

2. а) $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{sin^3x}{\sqrt{cosx}}dx$**;** б) $\int_{-1}^{62}\frac{\sqrt[6]{x+2}}{2\left(\sqrt{x+2}+\sqrt[3]{x+2}\right)^2}dx$**.**

3. а) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$**;** б)$\int_3^{3,5}\frac{dx}{(x-3)ln^3(x-3)}$**.**

4. а) $y=x\sqrt{9-x^2},\ (0\leq x\leq 3),$ б) $y=0;\begin{cases}x=2\sqrt{2}cost\\y=3\sqrt{2}sint\end{cases},\ y=3,(y\geq 3);$

в) $\rho=6cos3\varphi,\ \rho=3,(\rho\geq 3).$

5. $y=e^x+13,\ ln\sqrt{5}\leq x\leq ln\sqrt{24}.$

6. $y=1-x^2,\ x=0,\ x=\sqrt{y-2},\ x=1.$

Вариант 12

1. а)$\int\frac{1-\sqrt[4]{x}}{x}dx;$ б) $\int\frac{sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx;$ в) $\int arctg(2x+1)dx.$

2. а) $\int_\pi^{3\pi}\frac{\sqrt{1+cosx}}{sinx}dx$**;** б) $\int_0^{ln5}\frac{e^x\sqrt{e^x-1}dx}{(e^x+3)^2}$**.**

3. а) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx$; б) $\int_0^3 \frac{(x-1)dx}{(x-2)^2}$.

4. а) $y = \sqrt{e^x - 1}$, $y = 0, x = ln2$; б) $\begin{cases} x = 6(t - sint) \\ y = 6(1 - cost) \end{cases}, y = 9,$

$(0 < x < 12\pi, y \geq 9)$; в) $\rho = \frac{1}{2} + sin\varphi$.

5. $y = 2 - e^x$, $ln\sqrt{3} \leq x \leq ln\sqrt{8}$.

6. $y = x^2$, $y = 1$, $x = 2$.

Вариант 13

1. а) $\int (3^x - 3^{-x})^2 dx$; б) $\int \sqrt{x^3 + 5} \cdot x^2 dx$; в) $\int ln(4x^2 - 1)dx$.

2. а) $\int_0^{\pi} sin^2 3x dx$; б) $\int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x}}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2} dx$.

3. а) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)ln^2(x+1)}$; б) $\int_{-1}^{-2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

4. а) $y = x^2\sqrt{4 - x^2}, (0 \leq x \leq 2)$, $y = 0$; б) $\begin{cases} x = 32cos^3 t \\ y = sin^3 t \end{cases}, x = 4,$

$(x \geq 4)$; в) $\rho = cos\varphi, \rho = sin\varphi, \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right)$.

5. $y = arcsinx - \sqrt{1 - x^2}, 0 \leq x \leq 15/16$.

6. $y = x^2 + 1, y = x, x = 0, x = 1$.

Вариант 14

1. а) $\int \left(\frac{x^3}{2} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}\right) dx$; б) $\int \frac{1}{x\sqrt{lnx-1}} dx$; в) $\int (1 - 6x)e^{-x} dx$.

2. а) $\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} ctg^2 2x dx$; б) $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3}}$.

3. а) $\int_1^{+\infty} \frac{x+3}{x\sqrt[3]{x}} dx$; б) $\int_0^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^2} sin\frac{1}{x} dx$.

4. а) $y = arccosx$, $y = 0$, $x = 0$; б) $\begin{cases} x = 3cost \\ y = 8sint \end{cases}$, $y = 4, (y \geq 4)$;

в) $\rho = \sqrt{2}sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right), \rho = \sqrt{2}cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right), \left(\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}\right)$.

5. $y = 1 - lnsinx + 2$, $\pi/3 \leq x \leq \pi/2$.

6. $y = \sqrt{x - 1}$, $y = 0$, $y = 1$, $x = 0{,}5$.

Вариант 15

1. а) $\int \frac{xsinx - \sqrt[4]{x}}{x} dx$; б) $\int \frac{\sqrt{arctg2x}}{1+4x^2} dx$; в) $\int (4x - 2)cos2xxdx$.

2. а) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{sin^4 5x}$; б) $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx$.

3. а) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x-5)(x+3)}$; б) $\int_2^3 \frac{dx}{x^3-8}$.

4. а) $y=-x^2+2x+3,\ y=x^2-4x+3;$ б) $\begin{cases} x=6(t-sint) \\ y=6(1-cost) \end{cases},\ y=6,$

$(0<x<2\pi, y\geq 6);$ в) $\rho=cos\varphi,\ \ \rho=2cos\varphi.$

5. $y=1-ln(x^2-1),\ \ 3\leq x\leq 4.$

6. $y=lnx,\ \ x=2,\ \ y=0.$

Вариант 16

1. а) $\int\frac{x\sqrt{x}-x^2}{x^3}dx;$ б) $\int(1+sinx)^2cosxdx;$ в) $\int sin(lnx)dx.$

2. а) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}sin^3 2xdx;$ б) $\int_{-0,5}^{0}\frac{dx}{e^x\sqrt{e^{-2x}+1}}.$

3. а) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x+x^2};$ б) $\int_2^6\frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}.$

4. а) $x=arccosy,\ x=0,\ y=0;$ б) $\begin{cases} x=8cos^3t \\ y=4sin^3t \end{cases},\ \ x=3\sqrt{3},\left(x\geq 3\sqrt{3}\right);$

в) $\rho=sin\varphi,\ \ \rho=2sin\varphi.$

5. $y=\sqrt{x-x^2}-arccos\sqrt{x}+5,\ \ 1/9\leq x\leq 1.$

6. $y=x^2,\ \ y=0,\ \ x=2.$

Вариант 17

1. а) $\int\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt[3]{x}}dx;$ б) $\int\frac{sh\frac{1}{x}-x\sqrt{x}}{x^2}dx;$ в) $\int x\cdot ln2xdx.$

2. а) $\int_0^{\pi/4}cos^3 2xdx;$ б) $\int_{-\frac{5}{3}}^{1}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx.$

3. а) $\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{\sqrt{(4x^2+1)^3}};$ б) $\int_0^{0,5}\frac{dx}{(1+4x^2)arcctg2x}.$

4. а) $y=x^2\sqrt{8-x^2},\ \left(0\leq x\leq 2\sqrt{2}\right),\ y=0;$ б) $\begin{cases} x=6cost \\ y=4sint \end{cases},y=2\sqrt{3},$

$\left(y\geq 2\sqrt{3}\right);$ в) $\rho=1+\sqrt{2}cos\varphi.$

5. $y=-arccosx+\sqrt{1-x^2}+1,\ \ 0\leq x\leq 9/16.$

6. $y=(x-1)^2,\ \ y=1.$

Вариант 18

1. а) $\int\frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx;$ б) $\int\frac{x^3}{4+x^8}dx;$ в)$\int cos(lnx)dx.$

2. а) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{cos^6x};$ б) $\int_{\frac{3}{\sqrt{2}}}^{3}\frac{\sqrt{(9-x^2)^3}}{x^6}dx.$

3. а) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2(x+1)};$ б) $\int_2^3\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}.$

4. а) $y=x\sqrt{4-x^2},(0\leq x\leq 2),\ y=0;$ б) $\begin{cases} x=10(t-sint) \\ y=10(1-cost) \end{cases},y=15;$

$(0 < x < 20\pi, y \geq 15)$; в) $\rho = \frac{1}{2} + cos\varphi$.

5. $y = lnsinx + 2,\ \pi/3 \leq x \leq \pi/2$.

6. $y^2 = x - 2,\ y = 0,\ y = x^3,\ y = 1$.

Вариант 19

1. а) $\int \frac{1-x^3}{1-x^2}dx$; б) $\int \frac{arccos2x-3x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$; в) $\int xe^{2x+3}dx$.

2. а) $\int_{\pi}^{2\pi} sin2xcos3xdx$; б) $\int_1^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}(\sqrt[3]{x}+1)}dx$.

3. а) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$; б) $\int_2^4 \frac{xdx}{\sqrt{x^2-9}}$.

4. а) $x = 4 - y^2,\ x = y^2 - 2$; б) $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}cos^3t \\ y = 2sin^3t \end{cases},\ x = 1, (x \geq 1)$;

в) $\rho = 1 + \sqrt{2}sin\varphi$.

5. $y = ln7 - lnx + 2,\ \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$.

6. $y^2 = 8x,\ y = x^2$.

Вариант 20

1. а) $\int \frac{2x^3-x+1}{\sqrt[3]{x}}dx$; б) $\int (e^{cosx} + sinx)sinxdx$; в) $\int x^2e^{3x}dx$.

2. а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cosxdx}{1+cosx}$; б) $\int_1^3 \sqrt{\frac{x-2}{x}}dx$.

3. а) $\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{x^2+3x+2}$; б) $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$.

4. а) $x = \frac{1}{y\sqrt{1-lny}},\ x = 0,\ y = 1$; б) $\begin{cases} x = \sqrt{2}cost \\ y = 4\sqrt{2}sint \end{cases},\ y = 4, (y \geq 4)$;

в) $\rho = \frac{5}{2}sin\varphi, \rho = \frac{3}{2}sin\varphi$.

5. $y = 1 + arcsinx - \sqrt{1 - x^2},\ 0 \leq x \leq 3/4$.

6. $y = arccos\frac{x}{5}, y = arccos\frac{x}{3},\ y = 0$.

Вариант 21

1. а) $\int \frac{1-x}{1+\sqrt{x}}dx$; б) $\int \frac{2^{ctgx}-3}{sin^2x}dx$; в) $\int e^{\alpha x}cos\beta xdx$.

2. а) $\int_0^{\pi/2} \frac{cosxdx}{(1+cosx)^2}$; б) $\int_0^{15} \frac{\sqrt[4]{x+3}}{(\sqrt{x+3}+1)x}dx$.

3. а) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$; б) $\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^6}}$.

4. а) $y = x^2\sqrt{16 - x^2},\ y = 0$; б) $\begin{cases} x = t - sint \\ y = 1 - cost \end{cases},\ y = 1, (0 < x < 2\pi, y \geq 1)$;

в) $\rho = \frac{5}{2}cos\varphi, \rho = \frac{3}{2}cos\varphi$.

5. $y = lncosx + 2, \ \ 0 \le x \le \pi/6.$

6. $y = arccosx, \ \ y = arcsinx, y = 0.$

Вариант 22

1. а) $\int \frac{2^x - \sqrt{x}e^x}{e^x} dx;$ б) $\int \frac{2x^2}{\sqrt{x^3-5}} dx;$ в) $\int arctg^2 x dx.$

2. а) $\int_{\pi/8}^{\pi/4} \frac{cos2xdx}{sin^2 x cos^2 x}$; б) $\int_{-1}^{2} \frac{\sqrt{x+2}+1dx}{(x+4)^2}$.

3. а) $\int_0^{+\infty} \frac{(x+1)dx}{x^2+x+2}$; б) $\int_{-1}^{1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}} dx.$

4. а) $y = (x-1)^2, \ y^2 = x - 1;$ б) $\begin{cases} x = 8cos^3 t \\ y = 4sin^3 t \end{cases}, \ x = 1, (x \ge 1);$

в) $\rho = 4cos4\varphi.$

5. $y = e^x + 26, \ \ ln\sqrt{8} \le x \le ln\sqrt{24}.$

6. $y = x^2 - 2x + 1, \ \ x = 2, \ y = 0.$

Вариант 23

1. а)$\int \frac{(4-\sqrt{x})^2}{\sqrt[3]{x}} dx;$ б) $\int \frac{\sqrt{1+cthx}-2}{sh^2 x} dx;$ в) $\int arcsin^2 x dx.$

2. а) $\int_{2\pi/3}^{\pi} \frac{sinxdx}{cos2x + sin^2 x}$; б) $\int_{\frac{1}{16}}^{\frac{1}{4}} \frac{\sqrt[4]{x}+1}{(1-x)\sqrt{x}} dx.$

3. а) $\int_{-\infty}^{0} \frac{xdx}{x^2+4x+5}$; б) $\int_{-1}^{1} \frac{x^2+1}{\sqrt[3]{x^2}} dx.$

4. а) $x = 4 - (y-1)^2, \ x = y^2 - 4y + 3;$ б) $\begin{cases} x = 9cost \\ y = 4sint \end{cases}, y = 2, (y \ge 2);$

в) $\rho = sin6\varphi.$

5. $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + 3, \ \ ln\sqrt{3} \le x \le ln\sqrt{15}.$

6. $y = x^3, \ \ y = x.$

Вариант 24

1. а) $\int \frac{x^3 - x\sqrt{x} + 2\sqrt{x}}{x^2\sqrt{x}} dx;$ б) $\int \frac{3^{1/x} - 3}{x^2} dx;$ в) $\int \sqrt{1-x^2} dx.$

2. а) $\int_0^{\pi/4} \frac{1+cos^2 x}{1+cos2x} dx$; б) $\int_{\frac{3}{2}}^{2} \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-1}}$.

3. а) $\int_{-\infty}^{0} \frac{xdx}{\sqrt{(x^2+1)^5}}$; б) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2-x}$.

4. а) $y = \frac{e^{1/x}}{x^2}, \ y = 0, \ x = 1, \ x = 2;$ б) $\begin{cases} x = 24cos^3 t \\ y = 2sin^3 t \end{cases}, x = 9\sqrt{3}, (x \ge 9\sqrt{3});$

в) $\rho = 2cos\varphi, \rho = 3cos\varphi.$

5. $y = e^x + e, \ \ ln\sqrt{3} \le x \le ln\sqrt{15}.$

6. $y = arccosx, \ \ y = arcsinx, x = 0.$

Вариант 25

1. а) $\int \frac{\left(\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}\right)^3}{x}dx$; б) $\int \frac{arctg^5x-x}{1+x^2}dx$; в) $\int ln(x^2+1)dx$.

2. а) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} cos^3xsin2xdx$**;** б) $\int_1^{64} \frac{dx}{(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x})\sqrt{x}}$.

3. а) $\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^2+3}}$**;** б) $\int_{0,5}^1 \frac{dx}{(1-x)ln^2(1-x)}$.

4. а) $x=\sqrt{4-y^2},\ x=0,\ y=0,\ y=1$; б) $\begin{cases} x=8(t-sint) \\ y=8(1-cost) \end{cases}$, $y=12$,

$(0<x<16\pi, y\geq 12)$; в) $\rho=2cos\varphi,\ \rho=1, (\rho\geq 1)$.

5. $y=arccos\sqrt{x}-\sqrt{x-x^2}+4;\quad 0\leq x\leq \frac{1}{2}$.

6. $y=(x-1)^2,\ y=0,\ x=0,\ x=2$.

Образец решения варианта КДЗ №3

1. Вычислить неопределённые интегралы

а) $\int \frac{\sqrt[3]{x}-5\sqrt{x}+2}{x^2\sqrt{x}}dx$; б) $\int \frac{5x-2arcctg^3x}{1+x^2}dx$; в) $\int (x-2)sinxdx$.

а) Разделим почленно числитель на знаменатель и вычислим интеграл от суммы степенных функций:

$\int \frac{\sqrt[3]{x^4}-5\sqrt{x}+2}{x^2\sqrt{x}}dx = \int \left(x^{-\frac{7}{6}}-5x^{-2}+2x^{-\frac{5}{2}}\right)dx = -6x^{-1/6}+\frac{5}{x}-\frac{4}{3}x^{-\frac{3}{2}}+C=$

$=\frac{6}{\sqrt[6]{x}}+\frac{5}{x}-\frac{4}{3\sqrt{x^3}}+C.$

б) Используем приём внесения множителя под знак дифференциала:

в первом интеграле $2xdx=(1+x^2)'dx=d(1+x^2)$ и далее $\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2}=$ $ln(1+x^2)+\text{C}$, во втором $\frac{dx}{1+x^2}=(-arcctgx)'dx=-d(arcctgx)$ и далее $\int arcctg^3x\,d(arcctgx)$ вычисляется как от степенной функции:

$$\int \frac{3x-5arcctg^3x}{1+x^2}dx=\frac{3}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx+5\int arcctg^3x\,d(arcctgx)=$$

$$=\frac{3}{2}ln(1+x^2)+\frac{5}{4}arcctg^4x+C.$$

в) Для вычисления интеграла применим формулу интегрирования по частям

$\int udv = uv - \int vdu$, получим:

$$\int (3x+1)2^x dx = \begin{vmatrix} u = 3x+1 & du = 3dx \\ dv = 2^x dx & v = \dfrac{2^x}{ln2} \end{vmatrix} = (3x+1)\frac{2^x}{ln2} - \frac{3}{ln2}\int 2^x dx =$$

$$= (3x+1)\frac{2^x}{ln2} - \frac{3\cdot 2^x}{ln^2 x} + C$$

2. Вычислить определённые интегралы: а) $\int_0^{\pi} \frac{dx}{cos^4x \cdot sin^2x}$; б) $\int_4^{10} \frac{\sqrt{x-1}-3}{x^2+7x-8}dx$.

а) Можно применить подстановку $tgx = t$, но проще вычислить, используя тригонометрические формулы и преобразование подынтегральной функции:

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{cos^4x \cdot sin^2x} = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{(sin^2x + cos^2x)^2 dx}{cos^4x \cdot sin^2x} =$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{sin^4x + 2sin^2xcos^2x + cos^4x}{cos^4x \cdot sin^2x}dx = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{sin^2xdx}{cos^2x \cdot cos^2x} +$$

$$+2\int_{\pi/3}^{\pi/3} \frac{dx}{cos^2x} + \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{sin^2x} = \int_{\pi/4}^{\pi/3} tg^2xd(tgx) + \left((2tgx - ctgx)\Big|_{\pi/4}^{\pi/3}\right) =$$

$$= \left(\frac{tg^3x}{3}\Big|_{\pi/4}^{\pi/3}\right) + \frac{5}{\sqrt{3}} - 1 = \frac{8\sqrt{3}-4}{3}.$$

б) Применим метод замены переменной:

$$\int_4^{10} \frac{\sqrt{x-1}-3}{x^2+7x-8}dx = \int_4^{10} \frac{\sqrt{x-1}-3}{(x-1)(x+8)}dx = \begin{vmatrix} \sqrt{x-1} = t \\ x = t^2+1 \\ dx = 2tdt \\ x: \quad 4 \quad 10 \\ t: \quad \sqrt{3} \quad 3 \end{vmatrix} =$$

$$\int_{\sqrt{3}}^{3} \frac{t-3}{t(t^2+9)}dt = \left| \frac{t-3}{t(t^2+9)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{t^2+9}; \quad \begin{matrix} A = -1/3 \\ B = 1/3 \\ C = 1 \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{2}{3}\left(-\int_{\sqrt{3}}^{3} \frac{dt}{t} + \frac{1}{2}\int_{\sqrt{3}}^{3} \frac{d(t^2+9)}{t^2+9} + 3\int_{\sqrt{3}}^{3} \frac{dt}{t^2+9}\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\left(-ln|t| + \frac{1}{2}ln(t^2+9) + arctg\frac{t}{3}\Big|_{\sqrt{3}}^{3}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{12} - ln\sqrt{2}\right).$$

3. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость

а) $\int_e^{+\infty}\frac{dx}{xln^4x} = \lim_{A\to+\infty}\int_e^A\frac{dx}{xln^4x} = \lim\limits_{A\to+\infty}\left(-\frac{1}{3ln^3x}\Big|_e^A\right) = \lim\limits_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3ln^3A}\right) = \frac{1}{3}$;

б)

$\int_{-1}^1\frac{dx}{x\sqrt[3]{x}} = \int_{-1}^0\frac{dx}{x\sqrt[3]{x}} + \int_0^1\frac{dx}{x\sqrt[3]{x}} = \lim_{\varepsilon\to0-}\int_{-1}^{\varepsilon}\frac{dx}{x} + \lim_{\varepsilon\to0+}\int_{\varepsilon}^1\frac{dx}{x\sqrt[3]{x}} =$

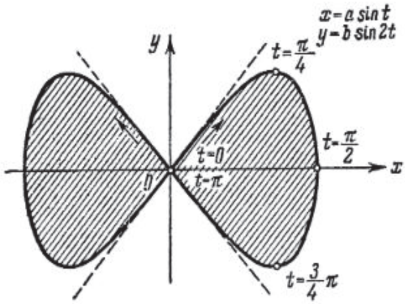
$\lim\limits_{\varepsilon\to0-}\left(-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\Big|_{-1}^{\varepsilon}\right) + \lim\limits_{\varepsilon\to0+}\left(-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\Big|_{\varepsilon}^{1}\right) = \infty$, интеграл расходится.

4. а) Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $y = \sqrt{4-x^2}$, прямой $x = 1$ и осями координат $(x \geq 0, y \geq 0)$

$$S = \int_0^1\sqrt{4-x^2}dx = \left|\begin{array}{c} x = 2sint \\ \sqrt{4-x^2} = 2cost \\ dx = 2costdt \end{array}\right| = 4\int_0^{\pi/6} cos^2tdt = 2\int_0^{\pi/6}(1+cos2t)dt$$

$$= 2\left(t + \frac{1}{2}sin2t\Big|_0^{\pi/6}\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

б) Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $x = acost, y = bsin2t$.



Решение. Для построения кривой учтем, что она симметрична относительно осей координат. Действительно, если заменить t на $\pi - t$, то переменная x не меняется, а y изменит только свой знак, следовательно, кривая симметрична относительно оси Ox. При замене t на $\pi + t$ переменная y не меняется, а переменная x изменяет свой знак. Это означает симметрию кривой относительно оси Oy. Далее, так как функции $x = acost$ и $y = bsin2t$ периодические с общим периодом 2π, то достаточно ограничиться изменением параметра: $0 \leq t \leq 2\pi$.

Из уравнений кривой легко заключить, что переменные x и y одновременно сохраняют неотрицательные значения только при изменении t на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, поэтому при $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ получается часть кривой в первой четверти.

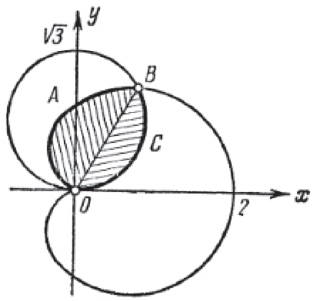
Достаточно вычислить площадь одной петли кривой, соответствующей изменению t от 0 до $\pi/2$, и затем результат умножить на 4:

$$S = 4\int_0^{\pi/2} y(t)\cdot x'(t)dt = 2\int_0^{\pi/2} bsin2t\cdot acostdt = 4ab\int_0^{\pi/2} cos^2t\cdot sintdt =$$

$$= -4ab\int_0^{\pi/2} cos^2td(cost) = -4ab\left(\frac{cos^3t}{3}\Big|_0^{\pi/2}\right) = \frac{8}{3}ab.$$

в) Найти площадь фигуры, вырезаемой окружностью $\rho = 1+\sqrt{3}sin\varphi$ из кардиоиды $\rho = 1+cos\varphi$.

Решение. Найдем точки пересечения кривых. Для этого решим систему



$$\begin{cases}\rho = 1+\sqrt{3}sin\varphi \\ \rho = 1+cos\varphi\end{cases} \quad 0\le\varphi\le\pi,$$

откуда $\varphi = \pi/3$ и $\varphi = \pi$.

Искомая площадь равна сумме площадей двух сегментов: кругового сегмента и части фигуры, ограниченной кардиоидой, причем сегменты имеют общий отрезок OB луча $\varphi = \pi$. Дуга BAO описывается концом полярного радиуса кардиоиды при $\pi/3\le\varphi\le\pi$, а дуга OCB – концом полярного радиуса окружности при $0\le\varphi\le\pi/3$.

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} 3sin^2\varphi d\varphi + \frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{\pi}(1+cos\varphi)^2 d\varphi = \frac{3}{4}\left(\varphi - \frac{sin2\varphi}{2}\Big|_0^{\pi/3}\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\varphi + 2sin\varphi + \frac{\varphi}{2} + \frac{sin2\varphi}{4}\Big|_{\pi/3}^{\pi}\right) = \frac{3}{4}\left(\pi/3 - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\pi - 9\sqrt{3}/8\right).$$

Итак, $S = \frac{3}{4}\left(\pi - \sqrt{3}\right)$.

5. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением:

$$y = ln\frac{e^x+1}{e^x-1},\ 0 < a \le x \le b.$$

Решение. Кривая задана уравнением в декартовых координатах. Поэтому используем формулу длины дуги: $l = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx$. Вычислим y':

$y' = \frac{e^x-1}{e^x+1}\cdot\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right)' = \frac{-2e^x}{e^{2x}-1}$; преобразуем $\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\frac{4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}} =$

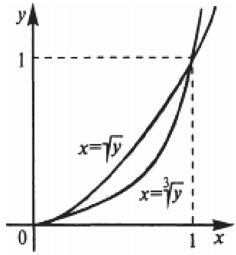
$= \sqrt{\frac{(e^{2x}+1)^2}{(e^{2x}-1)^2}} = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}.$

$$l = \int_a^b \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}dx = \int_a^b \frac{2e^{2x}-(e^{2x}-1)}{e^{2x}-1}dx = \int_a^b \frac{d(e^{2x}-1)}{e^{2x}-1} - \int_a^b dx =$$

$$= \left(ln|e^{2x}-1| - x\Big|_a^b\right) = ln\left|e^{2b}-1\right| - ln|e^{2a}-1| - b + a.$$

Итак, $l = ln\left|\frac{e^{2b}-1}{e^{2a}-1}\right| + a - b.$

6. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2$ и $y = x^3$ вокруг оси Oy



Решение. Искомый объём равен разности двух объёмов: тела, образованного вращением вокруг оси ординат фигуры, ограниченной линиями: $x = \sqrt[3]{y}$, $x = 0$, $y = 1$ и тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями: $x = \sqrt{y}, x = 0, y = 1$. Тогда

$$V = \pi\int_0^1\left(\sqrt[3]{y}\right)^2 dy - \pi\int_0^1\left(\sqrt{y}\right)^2 dy = \pi\left(\frac{3y^{\frac{5}{3}}}{5} - \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^1\right) = \frac{3\pi}{5} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{10}.$$

Итак, $V = \frac{\pi}{10}$.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Некоторые формулы векторной алгебры и аналитической геометрии

Если $A(x_1, y_1, z_1)$ – начало, а $B(x_2, y_2, z_2)$ – конец вектора $\overline{AB}$, то *координаты* вектора $\overline{AB}$: $\overline{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$,

модуль вектора $\overline{AB}$: $\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z)^2}$.

Скалярное произведение векторов есть число: $\left(\overline{a}, \overline{b}\right) = |\overline{a}|\left|\overline{b}\right|cos\left(\widehat{\overline{a}, \overline{b}}\right)$.

Если $\overline{a} = \{a_1, a_2, a_3\}, \overline{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$, то выражение скалярного произведения через координаты сомножителей: $\left(\overline{a}, \overline{b}\right) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

Векторное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ есть новый вектор $[\overline{a}, \overline{b}]$:

1. $[\overline{a}, \overline{b}] \perp \overline{a}, [\overline{a}, \overline{b}] \perp \overline{b}$; 2. $|[\overline{a}, \overline{b}]| = |\overline{a}||\overline{b}| sin(\widehat{\overline{a}, \overline{b}})$; 3. $\overline{a}, \overline{b}, [\overline{a}, \overline{b}]$ - правая тройка.
Выражение векторного произведения через координаты сомножителей:

$$[\overline{a}, \overline{b}] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \overline{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \overline{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \overline{k}.$$

Смешанное произведение $\overline{a}$ и $\overline{b}$ число: $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = ([\overline{a}, \overline{b}], \overline{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$.

Геометрический смысл $[\overline{a}, \overline{b}]$ и $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$: $|[\overline{a}, \overline{b}]| = S_{\text{пар}}$; $V_{\text{пр пар}} = |(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})|$.

Уравнение плоскости: а) каноническое; б) проходящей через три точки; в) с нормальным вектором $\overline{n} = \{A, B, C\}$; г) общее:

а) $\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$;

в) $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) + D = 0$; г) $Ax + By + Cz + D = 0$.

Уравнение прямой, заданной: а) начальной точкой $A(x_0, y_0, z_0)$ и направляющим вектором $\overline{\lambda} = \{p, q, r\}$; б) двумя точками $A_1(x_1, y_1, z_1)$ и $A_2(x_2, y_2, z_2)$; в) как линия пересечения двух плоскостей:

а) $\frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r}$; б) $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$; в) $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$.

Расстояние от точки $M(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости α: $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$\rho(\text{M}, \alpha) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Приложение 2

Формулы тригонометрии

$$sin^2x + cos^2x = 1 \qquad tgx = \frac{sinx}{cosx} \qquad ctgx = \frac{cosx}{sinx}$$

$$1 + tg^2x = \frac{1}{cos^2x} \qquad 1 + ctg^2x = \frac{1}{sin^2x}$$

$$sin2x = 2sinxcosx \qquad tg2x = \frac{2tgx}{1 - tg^2x} \qquad ctgx = \frac{ctg^2x - 1}{2ctgx}$$

$$cos2x = cos^2x - sin^2x \qquad cos2x = 2cos^2x - 1 \qquad cos2x = 1 - 2sin^2x$$

$$cos^2x = \frac{1+cos2x}{2} \qquad sin^2x = \frac{1-cos2x}{2} \qquad tg(x \pm y) = \frac{tgx \pm tgy}{1 \mp tgx \cdot tgy}$$

$$sin(x \pm y) = sinxcosy \pm cosxsiny \qquad cos(x \pm y) = cosxcosy \mp sinxsiny;$$

$$sinx \pm siny = 2sin\frac{x \pm y}{2} cos\frac{x \mp y}{2} \qquad cosx + cosy = 2cos\frac{x+y}{2} cos\frac{x-y}{2}$$

$$cosx - cosy = -2sin\frac{x+y}{2} sin\frac{x-y}{2} \qquad sinxcosy = \frac{1}{2}\big(sin(x-y) + sin(x+y)\big)$$

$$cosxcosy = \frac{1}{2}\big(cos(x-y) + cos(x+y)\big) \qquad sinxsiny = \frac{1}{2}\big(cos(x-y) - cos(x+y)\big)$$

Гиперболические функции

Гиперболические синус и косинус: $shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Гиперболические тангенс и котангенс: $thx = \frac{shx}{chx} \qquad cthx = \frac{chx}{shx}$

$$ch^2x - sh^2x = 1$$

Приложение 3

Пределы

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0, (|q| < 1); \ \lim_{n\to\infty} q^n = \infty, (|q| > 1); \ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1, (c > 0); \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0, |a| > 1, k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \forall a, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{log_a n}{n^\gamma} = 0, a > 0, a \neq 1, \gamma > 0; \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n!}{n} = +\infty;$$

Замечательные пределы и их следствия

$$\lim_{x\to 0} \frac{sinx}{x} = 1; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{arcsinx}{x} = 1; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{tgx}{x} = 1; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{arctgx}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e; \qquad \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{ln(1+x)}{x} = 1; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Таблица эквивалентных бесконечно малых (при $x \to 0$)

1. $sinx \sim x$;
2. $tgx \sim x$;
3. $arcsinx \sim x$;
4. $arctgx \sim x$;
5. $1 - cosx \sim \frac{1}{2}x^2$
6. $e^x - 1 \sim x$
7. $a^x - 1 \sim x \ln x$
8. $(1+x)^k - 1 \sim kx$
9. $ln(1+x) \sim x$
10. $\log_a(1+x) \sim \frac{1}{lna} x$

Приложение 4

Таблица производных

1. $(C)' = 0;$
2. $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1};$
3. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2};$
4. $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$
5. $(a^x)' = a^x \cdot lna;$
6. $(e^x)' = e^x;$
7. $(log_a x)' = \frac{1}{x \cdot lna};$
8. $(lnx)' = \frac{1}{x};$
9. $(sinx)' = cosx;$
10. $(cosx)' = -sinx;$
11. $(tgx)' = \frac{1}{cos^2 x};$
12. $(ctgx)' = -\frac{1}{sin^2 x};$
13. $(arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$
14. $(arccosx)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$
15. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$
16. $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$
17. $(shx)' = chx;$
18. $(chx)' = shx;$
19. $(thx)' = \frac{1}{ch^2 x};$
20. $(cthx)' = -\frac{1}{sh^2 x}$

Правила дифференцирования

$(cu)' = cu',\ (c = const);\quad (u \pm v)' = u' \pm v';\quad (u \cdot v)' = u'v + uv';$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, v \neq 0$; производная *сложной функции*: $\Big(f\big(u(x)\big)\Big)' = f'_u \cdot u'_x;$

функции, заданной параметрически $(x = x(t), y = y(t))$: $\quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$

Производная обратной функции: $y'_x = \frac{1}{x'_y}$

Геометрический смысл производной: $f'(x_0)$ равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке x_0: $f'(x_0) = k_{\text{кас}} = tg\varphi$

Правило Лопиталя

Пусть существуют $f'(x)$ и $g'(x) \neq 0$ в окрестности a (где a – число или символ ∞) и пусть $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ или

$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$. Тогда из существования $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ вытекает существование $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ и $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Приложение 5

Таблица интегралов

1. $\int 0dx = C;$
2. $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\,, \alpha \neq -1;$
3. $\int \frac{dx}{x} = ln|x| + C;$
4. $\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{lna} + C;$
5. $\int e^{x}dx = e^{x} + C;$
6. $\int cosxdx = sinx + C;$
7. $\int sinxdx = -cosx + C;$
8. $\int \frac{dx}{cos^{2}x} = tgx + C;$
9. $\int \frac{dx}{sin^{2}x} = -ctgx + C;$
10. $\int chxdx = shx + C;$
11. $\int chxdx = shx + C;$
12. $\int shxdx = chx + C;$
13. $\int \frac{dx}{sh^{2}x} = -cthx + C;$
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}} = \left[\begin{array}{l} arcsinx + C \\ -arccosx + C \end{array}\right.;$
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^{2}-x^{2}}} = \left[\begin{array}{l} arcsin\frac{x}{a} + C \\ -arccos\frac{x}{a} + C \end{array}\right.;$
16. $\int \frac{dx}{1+x^{2}} = \left[\begin{array}{l} arctgx + C \\ -arcctgx + C \end{array}\right.;$
17. $\int \frac{dx}{a^{2}+x^{2}} = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C \\ -\frac{1}{a}arcctg\frac{x}{a} + C \end{array}\right.;$
18. $\int \frac{dx}{a^{2}-x^{2}} = \frac{1}{2a}ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C;$
19. $\int \frac{dx}{x^{2}-a^{2}} = \frac{1}{2a}ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C;$
20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^{2}\pm a^{2}}} = ln\left|x + \sqrt{x^{2} \pm a^{2}}\right| + C$

Рекуррентная формула:

$$\int \frac{dx}{(x^{2}+a^{2})^{n+1}} = \frac{x}{2na^{2}(x^{2}+a^{2})^{n}} + \frac{2n-1}{2na^{2}}\int \frac{dx}{(x^{2}+a^{2})^{n}}$$

Формула интегрирования по частям в а) неопределенном и б) определенном интеграле: *а*) $\int udv = uv - \int vdu;$ б) $\int_{a}^{b} udv = \left(uv\Big|_{a}^{b}\right) - \int_{a}^{b} vdu$

Формула замены переменной а) в неопределенном, б) определенном интеграле:

а) $\int f(x)dx = \int f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)dt = F(t) + C = F\big(\varphi(t)\big) + C$

б) $\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)dt$

Рекомендуемая литература

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс. Издательствао Айрис-пресс, 3013.
2. Шипачев В.С. Начала высшей математики.Издательство Лань, 2013.
3. Шипачев В.С. Задачник по высшей математике. М.: Высшая школа, 2011.

СОДЕРЖАНИЕ