

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ» (МГТУ ГА)

---

Кафедра технической механики и инженерной графики

Ю.В. Петров, М.В. Семакова

## СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ.

РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ  
ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И КРУЧЕНИИ.

### ЧАСТЬ I

**Учебно-методическое пособие**  
по проведению практических занятий

*для студентов II курса  
направления 25.03.01 и специальности 25.05.05  
очной формы обучения*

Москва  
ИД Академии Жуковского  
2020

УДК 530.152.1  
ББК 605  
ПЗ1

Рецензент:

*Самойленко В.М.* – д-р техн. наук, профессор

**Петров Ю.В.**

ПЗ1 Соппротивление материалов. Расчеты на прочность и жесткость при растяжении и кручении. Часть I [Текст] : учебно-методическое пособие по проведению практических занятий / Ю.В. Петров, М.В. Семакова. – М.: ИД Академии Жуковского, 2020. – 36 с.

Данное учебно-методическое пособие издается в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Соппротивление материалов» по учебному плану для студентов II курса направления 25.03.01 и специальности 25.05.05 очной формы обучения.

Рассмотрено и одобрено на заседаниях кафедры 10.04.2020 г. и методического совета 14.04.2020 г.

**УДК 530.152.1**  
**ББК 605**

*В авторской редакции*

Подписано в печать 29.06.2020 г.  
Формат 60x84/16 Печ. л. 2,25 Усл. печ. л. 2,09  
Заказ № 619/0413-УМП23 Тираж 60 экз.

Московский государственный технический университет ГА  
125993, Москва, Кронштадтский бульвар, д. 20

Издательский дом Академии имени Н. Е. Жуковского  
125167, Москва, 8-го Марта 4-я ул., д. 6А  
Тел.: (495) 973-45-68  
E-mail: zakaz@itsbook.ru

© Московский государственный технический  
университет гражданской авиации, 2020

## **Введение**

Сопротивление материалов является одной из важнейших общетехнических дисциплин, играющих существенную роль в научной подготовке инженера любой специальности, поскольку каждому из них в практической деятельности приходится решать широкий круг задач, среди которых большое место занимают расчеты на прочность, жесткость и устойчивость.

В настоящем пособии рассмотрены основные учебные вопросы, изучаемые студентами на практических занятиях.

Практические занятия имеют целью выработать умение решать практические задачи, закрепить и углубить теоретические знания. На практических занятиях решаются, как правило, типовые задачи, рассматривается их физический смысл, анализируется методика решения и полученные результаты. При подготовке к практическим занятиям студенты должны повторить теоретический материал по теме занятия, рассмотреть примеры решения практических задач, приведенные в данном пособии.

## **Практическое занятие № 1 (4 часа)**

### **Расчеты на прочность и жесткость при растяжении-сжатии. Определение напряжений. Условия прочности и жесткости**

#### **Основы теории**

Под действием внешних сил все тела меняют свою форму - деформируются. При нагружении твердого тела в нем возникают внутренние силы взаимодействия между частицами (атомами, молекулами), оказывающие противодействие внешним силам и стремящиеся вернуть частицы тела в положение, которое те занимали до деформации. *Мерой интенсивности внутренних сил является физическая величина, которая называется напряжением.* В сопротивлении материалов рассматривают два вида дифференциальных внутренних усилия: нормальные напряжения  $\sigma$  и касательные напряжения  $\tau$ .

*Центральное растяжение стержня* - вид нагружения и деформирования стержня, при котором все внешние силы действуют вдоль его прямолинейной продольной оси. При этом единственным интегральным силовым фактором, действующим в поперечных сечениях стержня, является продольная сила  $N$ . Во всех точках поперечного сечения действуют нормальные напряжения  $\sigma$ . При растяжении  $\sigma > 0$ , а при сжатии  $\sigma < 0$ .

Для вычисления нормальных напряжений  $\sigma$  в сечении необходимо знать характер их распределения по сечению. При решении данной задачи применяется обоснованная экспериментальными данными *гипотеза плоских сечений* (гипотеза Бернулли): поперечные сечения стержня остаются плоскими и перпендикулярными его продольной оси, а продольные волокна не взаимодействуют между собой (остаются прямыми и параллельными оси) и удлиняются на одну и ту же величину. Однако следует учитывать, что такой характер распределения нормальных напряжений справедлив лишь на некотором удалении от точки приложения внешней силы (гипотеза Сен-Венана).

Эксперимент показывает, что при малых деформациях растяжения - сжатия выполняется закон Гука в виде:

$$\sigma = E \varepsilon,$$

где  $E$  - модуль Юнга (модуль упругости первого рода),  $\varepsilon = \Delta l / l$  - относительная продольная деформация стержня;  $\Delta l$  - абсолютная продольная деформация стержня;  $l$  - начальная длина стержня. Модуль Юнга является важнейшей механической характеристикой материала, из которого изготовлен стержень, и определяется опытным путем. Согласно гипотезе Бернулли относительная продольная деформация постоянна по сечению, а значит и напряжения постоянны во всех точках сечения стержня ( $\sigma = const$ ). Тогда получаем:

$$\sigma = \frac{N}{F} \quad (1.1)$$

Формула (1.1) является основной для расчета на прочность при центральном растяжении (сжатии).

Относительная деформация в сечении стержня по закону Гука

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{EF} \quad (1.2)$$

Произведение  $EF$  называют *жесткостью стержня на растяжение*.

Если на некотором участке стержня длиной  $l$  продольная сила  $N$  постоянна, то постоянна и деформация  $\varepsilon$ . Следовательно, абсолютное удлинение стержня может быть вычислено по формуле:

$$\Delta l = \varepsilon l = \frac{Nl}{EF}. \quad (1.3)$$

Для стержня, состоящего из нескольких участков с постоянными жесткостью  $(EF)_i$  и продольной силой  $N_i$ , производится суммирование по участкам:



$$\Delta l = \sum_i \frac{N_i l_i}{EF}. \quad (1.4)$$

В самом общем случае сумма заменяется интегралом по всей длине стержня:

$$\Delta l = \int_l \frac{N dz}{EF}. \quad (1.5)$$

При анализе прочности узлов и деталей машиностроительных конструкций, в том числе авиационных, применяется метод расчета на прочность *по допускаемым напряжениям*. Согласно этому методу, вводится понятие *опасного напряжения*. Под опасным напряжением при растяжении – сжатии понимается напряжение, соответствующее началу разрушения для хрупких материалов или появлению остаточных деформаций в элементах конструкции для пластичных материалов. Для деталей, изготовленных из пластичного материала, опасным напряжением считают предел текучести  $\sigma_T$ . Для хрупких материалов опасным напряжением считают временное сопротивление (предел прочности)  $\sigma_B$ . Предел текучести  $\sigma_T$  и предел прочности  $\sigma_B$  являются *механическими характеристиками материала*, определяются в процессе эксперимента и приводятся в справочной литературе.

Допускаемые напряжения  $[\sigma]$  определяют по формуле:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{пред}}{[n]}, \quad \sigma_{пред} \in (\sigma_T, \sigma_B),$$

где  $[n]$  — допускаемый коэффициент запаса прочности. Он зависит от неоднородности материала, неточности задания внешних нагрузок, приближенности расчетных схем и расчетных формул, тяжести последствий разрушения конструкции. Следует отметить, что элементы конструкции ЛА обычно рассчитываются на прочность по разрушающим нагрузкам. В этом случае используется понятие коэффициент безопасности  $f$ , который по своему физическому смыслу соответствует допускаемому коэффициент запаса прочности  $[n]$ . Для большинства элементов авиационных конструкций этот коэффициент принимается равным 1,5.

Условие прочности при центральном растяжении записывают следующим образом

$$\sigma_{max} \leq [\sigma], \quad (1.6)$$

где  $\sigma_{max}$  - максимальное значение расчетных напряжений в стержне. Если известны максимальные расчетные напряжения  $\sigma_{max}$  и допускаемые напряжения  $[\sigma]$ , то можно вычислить текущий коэффициент запаса прочности  $n$ :

$$n = \frac{[\sigma]}{\sigma_{max}}. \quad (1.7)$$

Очевидно, что если  $n > 1$ , то стержень удовлетворяет условию прочности при заданной внешней нагрузке и известных геометрических параметрах.

**Аналогично могут решаться задачи на жесткость, если задаться опасными значениями перемещений (деформаций). Расчет по условию жесткости базируется на соотношении вида:**

$$n_{\Delta} = \frac{[\Delta l]}{\Delta l_{max}},$$

где  $n_{\Delta}$  - коэффициент запаса по жесткости;  $[\Delta l]$  - максимальная допускаемая деформация, которая задается по условию задачи (например, из конструктивных соображений);  $\Delta l_{max}$  - максимальная расчетная продольная деформация стержня.

## Примеры решения задач

### Задача 1.1

Условие задачи: Определить из условия прочности диаметры стержня, изображенного на рис. 1.1. Стержень составной, причем в правой по рисунку части стержня выполнено отверстие диаметром  $0,5d$  и глубиной  $l/2$ .  
Дано:  $[\sigma] = 150 \text{ МПа}$ .

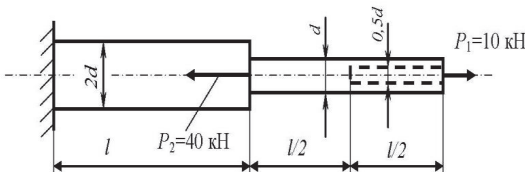


Рис. 1.1

### Алгоритм решения задачи.

#### 1. Определяем реакции опор

Для определения реакций опор необходимо составить уравнения равновесия стержня с учетом реактивных сил и моментов.

В общем плоском случае в жесткой заделке могут возникать две силы реакции  $R_{Oy}$ ,  $R_{Oz}$  и реактивный момент  $M_O$  в связанной с заделкой системе координат  $Oyz$  (рис. 1.2). Так как все внешние силы  $P$  направлены вдоль продольной оси стержня, то очевидно, что  $R_{Oy} = M_O = 0$ . Тогда неизвестную реакцию  $R_{Oz}$  определим так:

$$\sum P_z = R_{Oz} - P_2 + P_1 = 0 \rightarrow R_{Oz} = P_2 - P_1 = 30 \text{ кН.}$$

Данную запись нужно понимать следующим образом: сумма проекций всех сил на ось  $Oz$  для статического равновесия стержня должна быть равна нулю. Из уравнения равновесия вычисляем неизвестную реактивную силу  $R_{Oz}$ . Силы, действующие по направлению оси  $Oz$ , подставляются в уравнение равновесия со знаком «+», а противоположно направленные – со знаком «-».

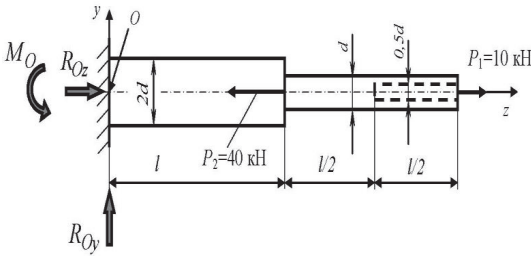


Рис. 1.2

**Внимание!** В данной задаче выполнение п.1 алгоритма (определение реакции опор) необязательно. Удобнее исходную систему координат  $Oyz$  связать со свободным концом (правым по рис. 1.1) и строить эпюру продольных сил справа – налево.

Тогда при правильном построении эпюры значение реактивной силы  $R_{Oz}$  в заделке вычисляется автоматически.

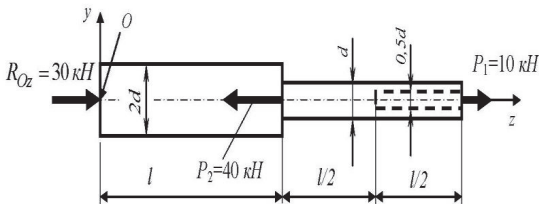


Рис. 1.3

## 2. Изображаем

### расчетную схему стержня

Под расчетной схемой стержня будем понимать исходную схему, у которой отброшены опоры и их действие заменено соответственными силами реакции. Расчетная схема стержня для задачи 1.1 приведена на рис. 1.3.

### 3. Разбиваем стержень на характерные участки

Границами характерных участков при построении эпюр продольных сил являются сечения, в которых приложены внешние силы (включая силы реакции опор) и (или) изменяется геометрия (площадь поперечного сечения). В пределах характерного участка продольная сила описывается одним уравнением. **Важно отметить**, что изменение геометрии сечений стержня на вид эпюры продольных сил не влияет. Однако уже на этом этапе решения задачи рекомендуется выделять характерные участки с измененной геометрией, так как в дальнейшем при построении эпюр нормальных напряжений их необходимо будет учитывать.

В данной задаче свяжем систему координат  $Oyz$  с левым по рис. 1.4 концом стержня. Выделим три характерных участка с координатами: первый -  $0 \leq z_1 \leq l$ , второй -  $l \leq z_2 \leq 1,5l$  и третий -  $1,5l \leq z_3 \leq 2l$ .

### 4. Строим эпюру продольных сил $N$

На 1-ом характерном участке ( $0 \leq z_1 \leq l$ ) уравнение равновесия отсеченной части (рис. 1.4) имеет вид:  $\sum P_z = R_{Oz} + N_1 = 0$  (сила, направление действия которой совпадает с направлением оси  $Oz$ , в уравнение равновесия подставляется со знаком «+»), а значит  $N_1 = R_{Oz} = -30$  кН. Знак «-» в полученном значении продольной силы на первом характерном участке указывает на то, что сила  $N_1$  направлена не от сечения (как показано на рис. 1.4), а в противоположную сторону – к сечению. Значит, сила  $N_1$  сжимающая и на эпюре продольных сил ее нужно будет отложить вниз от базовой линии ( $N=0$ ).

На 2-ом характерном участке ( $l \leq z_2 \leq 1,5l$ ) уравнение равновесия отсеченной части имеет вид:  $\sum P_z = R_{Oz} - P_2 + N_2 = 0$ , а значит  $N_2 = -R_{Oz} + P_2 = 10$  кН. Исходное направление силы  $N_2$  (рис. 1.4) выбрано верно (знак «+»). Она будет направлена от сечения, т.е. является положительной (растягивающей). С учетом полученного значения строим эпюру продольных сил на втором участке.

На 3-ем характерном участке ( $1,5l \leq z_3 \leq 2l$ ) уравнение равновесия отсеченной части имеет тот же вид, что и на втором:  $\sum P_z = R_{Oz} - P_2 + N_3 = 0$ , а значит  $N_3 = N_2 = 10$  кН. Видно, что изменение геометрии стержня (площади поперечного сечения) не оказывает влияния на эпюру продольных сил. С учетом полученного значения строим эпюру продольных сил на третьем участке.

### 5. Проверяем правильность построения эпюры продольных сил

Простейшим способом проверки правильности построения эпюры является удовлетворение следующему правилу: скачок на эпюре продольных сил может возникать лишь в сечениях приложения сосредоточенных внешних (включая реакции опор) продольных сил, и он численно равен абсолютному значению этих сил. Из рис. 1.4 видно, что указанное условие выполняется, а значит эпюра построена верно.

### 6. Вычисляем нормальные напряжения на характерных участках и строим эпюру

$$\text{На участке 1 имеем } \sigma_1 = \frac{N_1}{\frac{\pi(2d)^2}{4}} = \frac{N_1}{\pi d^2} = \frac{30}{\pi d^2} \text{ Па.}$$

$$\text{На участке 2 имеем } \sigma_2 = \frac{N_2}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{4N_2}{\pi d^2} = \frac{40}{\pi d^2} \text{ Па.}$$

$$\text{На участке 3 имеем } \sigma_3 = \frac{N_3}{\left(\frac{\pi d^2}{4} - \frac{\pi(0,5d)^2}{4}\right)} = \frac{16N_3}{3\pi d^2} = \frac{53,3}{\pi d^2} \text{ Па.}$$

Видно, что напряжения на третьем характерном участке больше, а значит, диаметры стержня будем вычислять из условия прочности, записанного для 3-го характерного участка.

### 7. Вычисляем геометрические параметры стержня

Условия прочности запишем в виде (1.6)

$$\sigma_{max} = \sigma_3 = \frac{53,3 \cdot 10^3}{\pi d^2} \leq [\sigma].$$

Следовательно, минимально допустимый диаметр стержня, удовлетворяющего условию прочности, равен (округлять полученное число нужно только в большую сторону)

$$d = \sqrt{\frac{53,3 \cdot 10^3}{\pi[\sigma]}} = \sqrt{\frac{53,3 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 1,5 \cdot 10^8}} = 1,07 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Полученное значение диаметра стержня можно использовать для вычисления напряжений на характерных участках (п. 6) и построения эпюры нормальных напряжений, как показано на рис. 1.4. Так, максимальные напряжения на третьем участке равны

$$\sigma_{max} = \sigma_3 = \frac{53,3}{\pi(1,07 \cdot 10^{-2})^2} = 148,5 \text{ МПа.}$$

### 8. Вычисляем коэффициент запаса прочности

Для вычисления коэффициента запаса прочности используется формула (1.7). Тогда

$$n = \frac{[\sigma]}{\sigma_{max}} = \frac{150 \cdot 10^6}{148,5 \cdot 10^6} = 1,01.$$

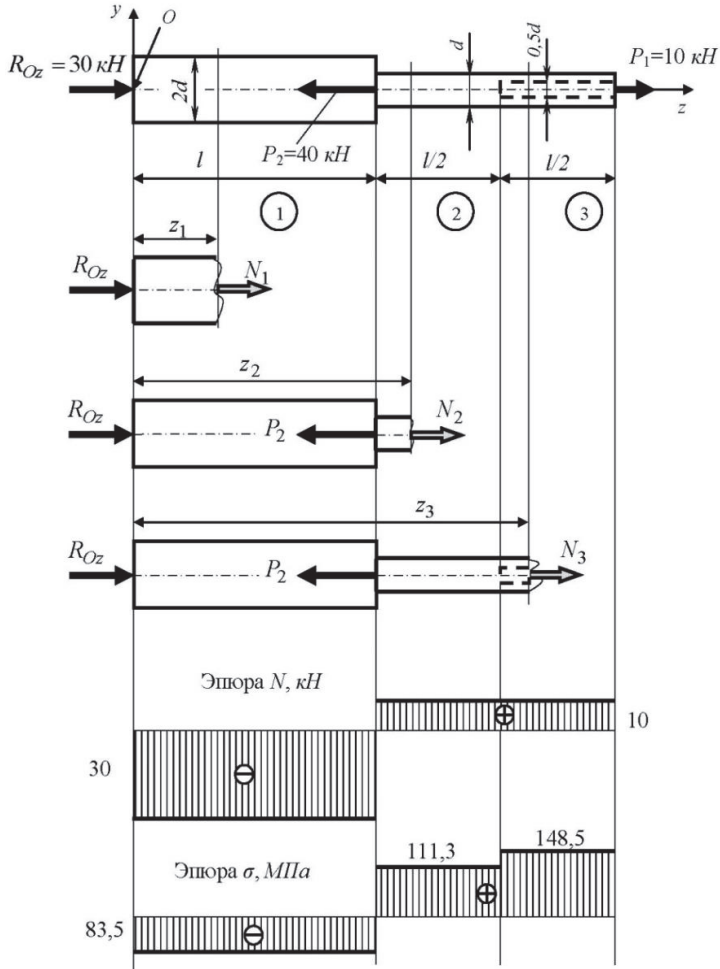


Рис. 1.4

**Задача 1.2.**

Условие задачи: в какую сторону и насколько переместится крайнее правое сечение стержня (рис. 1.5). Дано:  $P = 4 \text{ кН}$ ;  $d = 10 \text{ мм}$ ;  $l = 1 \text{ м}$ ;  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ .

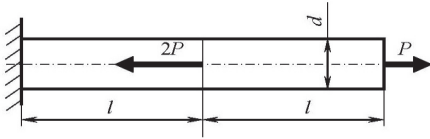


Рис. 1.5

**Алгоритм решения задачи****1. Определяем реакции опор**

В случае консольно защемленного стержня можно исключить п.1 алгоритма (см. задачу 1.1), если систему координат  $Bz$  связать со свободным концом стержня

(правым по рис. 1.6). После построения эпюры продольных сил реакция опоры (сила  $R_{Oz}$ ) определится автоматически.

**2. Изображаем расчетную схему стержня**

В связи с тем, что реакции опор не вычислялись, то и расчетную схему можно не изображать, т.к. она совпадает с исходной.

**3. Разбиваем стержень на характерные участки**

Границами характерных участков при построении эпюр продольных сил являются сечения, в которых приложены внешние силы (включая силы реакции опор) и (или) изменяется геометрия (площадь поперечного сечения). В пределах характерного участка продольная сила описывается одним уравнением. В данной задаче свяжем систему координат  $Bz$  с правым концом стержня. Выделим два характерных участка с координатами: первый -  $0 \leq z_1 \leq l$  и второй -  $l \leq z_1 \leq 2l$ .

**4. Строим эпюру продольных сил  $N$** 

На 1-ом участке  $0 \leq z_1 \leq l$  уравнение равновесия отсеченной части имеет вид:  $\sum P_z = N_1 - P = 0$ , а значит  $N_1 = P = 4 \text{ кН}$ .

Сила направлена от сечения, значит, она растягивающая и имеет знак «+».

На 2-ом участке  $l \leq z_1 \leq 2l$  уравнение равновесия отсеченной части имеет вид:  $\sum P_z = N_2 + 2P - P = 0$ , а значит  $N_1 = P = -4 \text{ кН}$ . Исходное направление силы  $N_2$  выбрано неверно (знак «-»), она будет направлена не от сечения (как предполагалось изначально), а к сечению, т.е. является сжимающей. С учетом полученных значений строим эпюру продольных сил (рис. 1.6). Легко показать, что сила реакции опоры в жесткой заделке равна 4 кН и она направлена в сторону противоположную оси  $Bz$ .

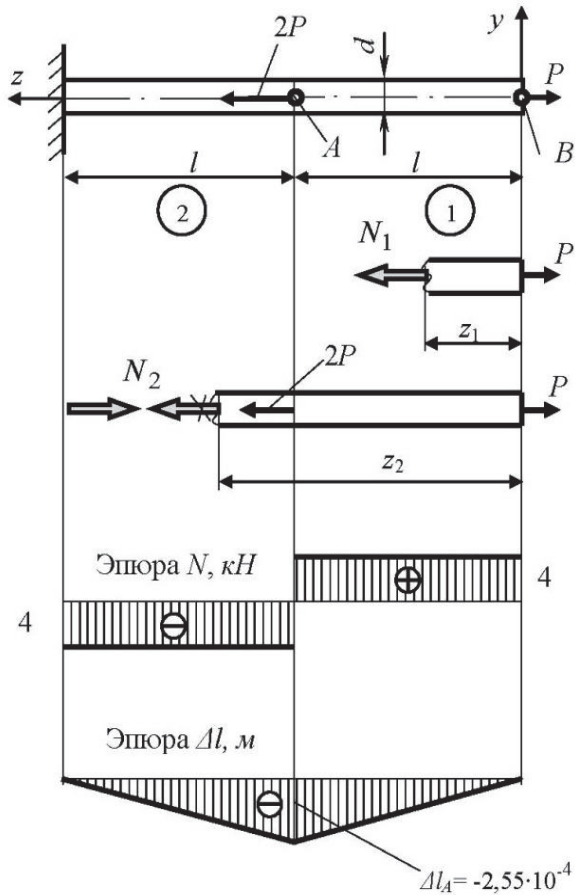


Рис. 1.6

### 5. Вычисляем удлинения стержня в характерных точках А и В

Известно, что удлинения однородного стержня постоянного поперечного сечения изменяются по линейному закону, поэтому для построения эпюры удлинений  $\Delta l$  достаточно определить линейные перемещения в характерных точках А и В.

Перемещение точки А относительно заделки определяется по формуле (1.3):



$$\Delta l_A = \frac{N_2 l}{EF} = -\frac{Pl}{EF} = -\frac{4 \cdot 10^3 \cdot 1}{2 \cdot 10^{11} \cdot \frac{\pi d^2}{4}} = -2,55 \cdot 10^{-4} \text{ м},$$

где  $F = \frac{\pi d^2}{4}$  - площадь поперечного сечения стержня.

Перемещение точки В относительно заделки определяется соотношением:

$$\Delta l_B = \Delta l_A + \frac{N_1 l}{EF} = -2,55 \cdot 10^{-4} + \frac{Pl}{EF} = 0.$$

**Вывод:** при заданной схеме нагружения стержня правое его сечение не совершает линейных перемещений.

### Практическое занятие № 2 (2 часа)

**Расчеты на прочность при чистом сдвиге. Определение напряжений. Условия прочности**

#### **Основы теории**

Рассмотрим еще один вид простейшего напряженно – деформированного состояния, которое носит название *чистого сдвига*. Указанное состояние возникает в случае, когда брус нагружен двумя равными и противоположно направленными силами, перпендикулярными к оси бруса и удаленными друг от друга на малое (по сравнению с длиной бруса) расстояние. В таком случае влиянием изгибающего момента на НДС бруса можно пренебречь и учитывать единственный интегральный силовой фактор, действующий в сечениях – поперечную силу  $Q$ .

Поперечная сила лежит в плоскости поперечного сечения и ей соответствуют касательные напряжения  $\tau$ . Если выделить элементарную площадку площадью  $dF$ , то элементарная поперечная сила, действующая на этой площадке, равна  $\tau dF$ . Суммируя по всей площади сечения, получим

$$Q = \int_F \tau dF.$$

Для того чтобы при известной поперечной силе  $Q$  найти напряжения в точках сечения, необходимо знать характер распределения касательных напряжений по сечению. По аналогии с растяжением при чистом сдвиге полагают, что касательные напряжения распределены равномерно, т.е.  $\tau = const$ .

Тогда

$$\tau = \frac{Q}{F}. \quad (2.1)$$

Реальное распределение напряжений по сечению несколько отличается от равномерного, особенно вблизи свободной поверхности бруса. Причем на самой свободной поверхности ввиду отсутствия внешних сил они должны быть равны нулю. Очевидно, что по закону парности касательных напряжений, нулю будут равны и касательные напряжения  $\tau$ , действующие в точках, прилегающих к внешнему контуру сечения.

В процессе экспериментальных исследований определяются основные механические характеристики материалов, которые приводятся в справочной литературе:  $\tau_{\text{пц}}$  – предел пропорциональности при сдвиге,  $\tau_{\text{т}}$  – предел текучести и  $\tau_{\text{в}}$  – предел прочности (временное сопротивление) при сдвиге. При напряжениях, не превышающих предела пропорциональности ( $\tau < \tau_{\text{пц}}$ ), между касательными напряжениями и углом сдвига  $\gamma$  существует прямая пропорциональная зависимость. Эту зависимость согласно обобщенному закону Гука принято записывать так

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \text{ или } \tau = G\gamma, \quad (2.2)$$

где  $G$  – модуль сдвига, который является константой материала, определяется экспериментальным путем и приводится в справочной литературе.

При оценке прочности с использованием метода расчета по допускаемым напряжениям условие прочности при чистом сдвиге имеет вид

$$\tau_{\text{max}} = \left( \frac{Q}{F} \right)_{\text{max}} \leq [\tau], \quad (2.3)$$

Допускаемые касательные напряжения при известных механических характеристиках материала, из которого выполнена конструкция, определяются подобно допускаемым напряжениям при растяжении

$$[\tau] = \frac{\tau_{\text{пред}}}{[n]}, \quad \tau_{\text{пред}} \in (\tau_{\text{т}}, \tau_{\text{в}}), \quad (2.4)$$

где  $[n]$  — допускаемый коэффициент запаса прочности. Он зависит от неоднородности материала, неточности задания внешних нагрузок, приближенности расчетных схем и расчетных формул, тяжести последствий разрушения конструкции.

Если для рассматриваемого материала нет данных по испытаниям на сдвиг, то пользуются гипотезами прочности. Например, по гипотезе *максимальных касательных напряжений* имеем

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{2}. \quad (2.5)$$

По гипотезе энергии формоизменения можно получить

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}}. \quad (2.6)$$

Сопоставляя выражения (2.3) и (2.5, 2.6), получим условия прочности при чистом сдвиге, когда известны лишь допускаемые нормальные напряжения:

- по гипотезе максимальных касательных напряжений

$$\tau_{max} = \left( \frac{Q}{F} \right)_{max} \leq \frac{[\sigma]}{2}; \quad (2.7)$$

- по гипотезе энергии формоизменения

$$\tau_{max} = \left( \frac{Q}{F} \right)_{max} \leq \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}}. \quad (2.8)$$

Выбор для практических расчетов той или иной формулы определяется большим числом факторов, определяющим из которых является материал конструкции.

### **Особенности расчета заклепочных соединений**

Болтовые и заклепочные соединения имеют широкое применение в технике для соединения частей металлических конструкций. Для образования заклепочного соединения листов в них просверливают или продавливают отверстия. Заклепки малого диаметра (меньше 8 мм) обычно ставятся в холодном состоянии (например, авиационные конструкции).

Для проверки прочности заклепок применим общий порядок решения задач сопротивления материалов. На каждую заклепку передаются по две равные и противоположно направленные силы  $P_3$ : одна - от первого листа, другая - от второго (рис. 2.1). Опытные исследования многорядных заклепочных соединений показывают, что одни из заклепок ряда нагружаются больше, другие меньше, кроме того, распределение нагрузки между рядами неравномерное. Однако к моменту наступления предельного состояния усилия, передающиеся на различные заклепки, в основном выравниваются за счет пластических деформаций. Поэтому будем считать, что все заклепки работают в одинаковых

условиях. Таким образом, на каждую из заклепок в соединении, действуют по две равные и противоположно направленные силы  $P_3 = \frac{P}{n}$ , где  $P$  - суммарная сила, передаваемая заклепочным соединением,  $n$  – суммарное число заклепок в соединении. Эти силы передаются на заклепку путем контактного воздействия соответствующего листа на боковую полуцилиндрическую поверхность стержня заклепки. Силы  $P_3$  стремятся перерезать заклепку по плоскости раздела  $mn$ .

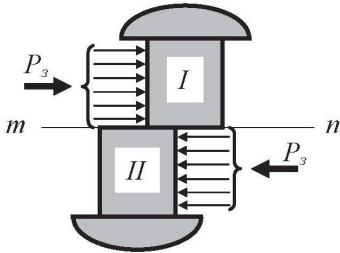


Рис. 2.1

равнодействующую, равную  $P_3$ . Следовательно, напряжения, возникающие в этом сечении и действующие в плоскости сечения, это - *касательные* напряжения  $\tau$ . Обычно принимают равномерное распределение этих напряжений по сечению:

$$\tau_3 = \frac{P_3}{\frac{\pi d^2}{4}}, \quad (2.9)$$

где  $d$  - диаметр стержня заклепки. Тогда условие прочности (2.3) при расчете заклепки на срез примет вид:

$$\tau_3 = \frac{P_3}{\frac{\pi d^2}{4}} \leq [\tau_{ср}], \quad (2.10)$$

где  $[\tau_{ср}]$  - допускаемые напряжения для материала заклепок на срез.

При выводе формулы расчета заклепки на срез вводится еще одно допущение. Очевидно, что силы  $P_3$  не направлены по одной прямой, а образуют пару сил. Эта пара уравнивается другой парой сил  $N$ , образующейся из сил реакций соединенных листов на головку заклепки (рис. 2.2) и ведет к появлению нормальных напряжений, действующих в стержне заклепки по сечению  $mn$ .

Кроме указанных нормальных напряжений от сил  $N$ , по сечению  $mn$  действуют еще нормальные напряжения, вызванные

контактными усилиями, возникшими при стягивании листов заклепками в процессе монтажа.

Однако опыт расчета заклепочных соединений показывает, что *в первом приближении нормальными напряжениями можно пренебречь.*

Передача нагрузки на заклепочный стержень от скрепленных листов происходит путем контактного взаимодействия стенок заклепочного отверстия и стержня заклепки. В этом случае необходимо произвести также проверку прочности элементов соединения на смятие.

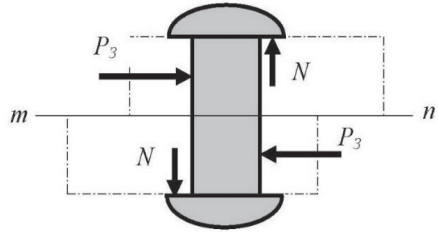


Рис. 2.2

На рис. 2.3 изображена примерная схема передачи распределенной нагрузки на стержень заклепки. Закон распределения этих усилий  $\sigma_C$  по цилиндрической поверхности нелинейный и зависит от многих факторов. Поэтому принято расчет проводить по упрощенной методике. Принято считать, что неравномерная распределенная нагрузка  $\sigma_C$ , передающаяся на поверхность стержня заклепки от листа, распределяется равномерно по диаметральной плоскости  $BB_1C_1C$  сечения стержня заклепки. При этом напряжения по этой диаметральной плоскости распределены условно равномерно и численно равны наибольшему сминающему напряжению  $\sigma_C$  в точке  $A$  поверхности заклепки.

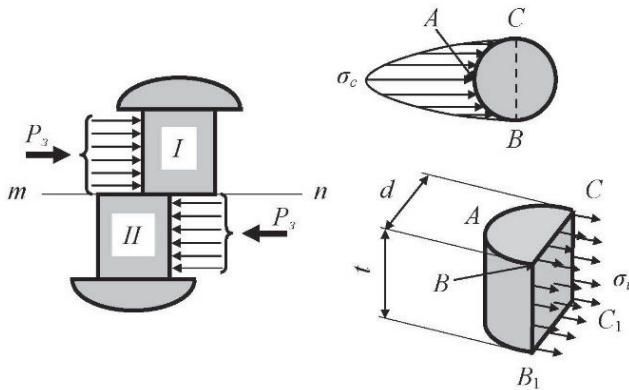


Рис. 2.3

Чтобы вычислить это условное напряжение смятия  $\sigma_t$ , необходимо разделить силу, приходящуюся на заклепку, на площадь диаметрального сечения  $BB_1C_1C$ . Эта площадь представляет собой прямоугольник, одной стороной которого служит диаметр заклепки  $d$ , другая же равна толщине листа  $t$ , передающего соответствующее усилие на стержень заклепки. Так как сила, приходящаяся на одну заклепку равна  $P_3 = \frac{P}{n}$ , то напряжения, действующие по поверхности смятия равны  $\sigma_t = \frac{P}{ntd}$ . Тогда условие прочности на смятие запишем в виде:

$$\sigma_c = \sigma_t = \frac{P}{ntd} \leq [\sigma_{см}], \quad (2.11)$$

где  $[\sigma_{см}]$  — допускаемое напряжение на смятие.

Допускаемое напряжение на смятие принимают обычно в 2 - 2,5 раза больше допускаемого напряжения на растяжение и сжатие  $[\sigma]$ , так как расчет на смятие по существу является упрощенной проверкой прочности по контактным напряжениям.

Очевидно, что соотношение (2.11) можно использовать и для вычисления потребного числа заклепок при известной нагрузке и выбранном диаметре заклепок, а также для определения потребного диаметра заклепок при известной нагрузке и числе заклепок в соединении.

В нескольких других условиях будут работать заклепки соединения, показанного на рис. 2.4. Здесь стык двух листов осуществлен при помощи двух накладок.

Сила  $P$  при помощи группы  $I$  заклепок передается от листа 1 обоим накладкам, а от последних при помощи группы  $II$  заклепок передается листу 2. Пусть  $n$  - число заклепок, необходимое для передачи усилия  $P$  от листа на накладку и от накладки на другой лист. Тогда получаем, что на каждую заклепку передается усилие от листа  $\frac{P}{n}$ . Оно уравнивается усилиями  $\frac{P}{2n}$ , передающимися на заклепку от накладок. Стержень заклепки теперь подвергается перерезыванию уже в двух плоскостях по сечениям  $ab$  и  $cd$ . Допускают, что сила  $\frac{P}{n}$  равномерно распределяется по двум сечениям  $ab$  и  $cd$ . Напряжения  $\tau_3$  и условие прочности для *многосрезной* заклепки записываются так:

$$\tau_3 = \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4} n_c} \leq [\tau_{ср}], \quad (2.12)$$

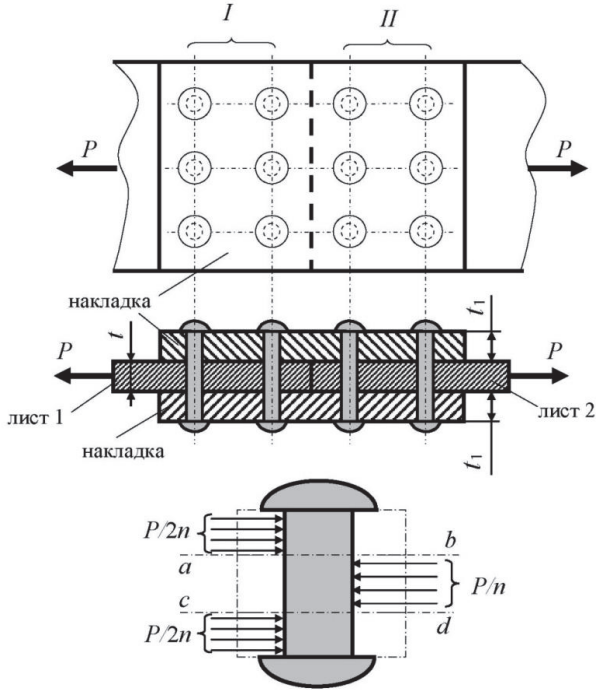


Рис. 2.4

где  $n_C$  - число поверхностей среза заклепки (в рассмотренном случае  $n_C = 2$ ).

Таким образом, при наличии нескольких плоскостей среза минимально потребное число заклепок по условию прочности на срез оказывается в  $n_C$  раз меньше, чем при одной поверхности среза:

$$n \geq \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4} n_C [\tau_{ср}]}. \quad (2.13)$$

Условие прочности на смятие останется таким же, как и при односрезных заклепках:

$$\sigma_c = \frac{P}{n t_{min} d} \leq [\sigma_{см}], \quad n \geq \frac{P}{t_{min} d [\sigma_{см}]}, \quad (2.14)$$

где  $t_{min}$  - минимальная толщина склепываемых листов, включая накладки. В формулах (2.14) подразумевается, что  $[\sigma_{см}]$  одинаково и для накладок, и для

листов. В общем случае необходимо проводить расчет для каждого элемента соединения отдельно.

Расположение заклепок в плане производится как по условиям обеспечения прочности и плотности соединения, так и по чисто производственно - технологическим соображениям. Расстояния до края листов (рис. 2.5) рекомендуется выбирать не менее  $(1,5...2)d$  ( $d$ -диаметр заклепки).

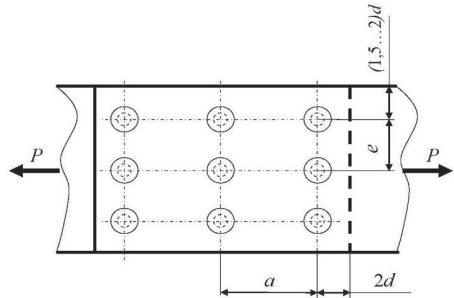


Рис. 2.5

Для уменьшения длины стыка расстояние между рядами заклепок по длине заклепочного соединения принимают равным  $a = (3...4) d$ .

С целью минимального ослабления сечения отверстиями под заклепки расстояние  $e$  выбирают возможно большим (до  $7d$ ).

## Примеры решения задач

### Задача 2.1

Условие задачи: Проверить прочность заклепочного соединения, изображенного на рис. 2.6. Дано: сила, передаваемая соединением  $P = 240$  кН; диаметр заклепки  $d = 2$  см; число заклепок  $n = 9$ ; допускаемые напряжения для материала заклепок на срез  $[\tau_{ср}] = 100$  МПа; допускаемые напряжения материала заклепок на смятие  $[\sigma_{см}] = 240$  МПа; толщина листов:  $t_1 = 1$  см,  $t_2 = 2$  см. Листы и заклепки изготовлены из одного материала.

### Алгоритм решения задачи

#### 1. Проверка прочности заклепочного соединения на срез

Вычислим касательные напряжения в заклепке при заданных исходных данных в соответствии с формулой (2.9):

$$\tau_3 = \frac{P}{n \frac{\pi d^2}{4} n_c} = \frac{240000}{9 \frac{3,14 \cdot 4 \cdot 10^{-4}}{4}} \approx 85 \text{ МПа}$$

Условие прочности заклепки на срез запишем в виде (2.10)

$$\tau_3 \leq [\tau_{ср}] \rightarrow 85 \text{ МПа} < 100 \text{ МПа.}$$

Условие прочности выполняется.



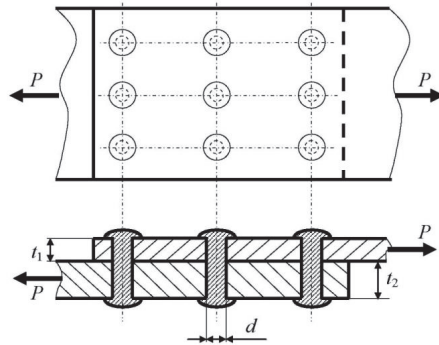


Рис. 2.6

## 2. Проверка прочности заклепочного соединения на смятие

В рассматриваемом случае, очевидно, нужно рассчитать напряжения смятия только для тонкого листа ( $t_1=1\text{см}$ ), т.к. у толстого листа ( $t_2=2\text{см}$ ) они будут заведомо меньше. Запишем условие прочности на смятие (2.11) в виде:

$$\sigma_c = \frac{P}{nt_1d} \leq [\sigma_{\text{см}}] \rightarrow \frac{240000}{9 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^{-2}} \approx 130 \text{ МПа} < 240 \text{ МПа},$$

где  $[\sigma_{\text{см}}]$  - допускаемое напряжение на смятие.

Условие прочности выполняется.

Очевидно, что в случае изготовления листов и заклепок из одного материала (условие задачи 2.1), полученное соотношение справедливо и для заклепок, и для листов. Однако при разных материалах элементов заклепочного соединения необходимо выполнение условия прочности (2.11) проверить отдельно для материала заклепки и материала листов.

Если известна нагрузка  $P$ , передаваемая заклепочным соединением, а также геометрические параметры и материалы элементов соединения, то используя выражение (2.11) можно определить минимально необходимое число заклепок по условию смятия

$$n \geq \frac{P}{t_{\text{min}}d[\sigma_{\text{см}}]},$$

где  $t_{\text{min}}$  - минимальная толщина соединенных листов.

### Задача 2.2

Условие задачи: Проверить прочность заклепочного соединения (рис. 2.7), если дано:  $P = 550 \text{ кН}$ ; допускаемые напряжения для материала

заклепок на срез  $[\tau_{\text{ср}}] = 100$  МПа; допустимые напряжения материала заклепок и листов на смятие  $[\sigma_{\text{см}}] = 240$  МПа; допустимые напряжения материала листов на растяжение  $[\sigma] = 150$  МПа; толщина листов  $t = 1,6$  см; толщина накладок  $t_1 = 1$  см; ширина листов  $b = 28$  см; ширина накладок  $b_n = 27$  см; диаметр заклепок  $d = 2$  см.

### Алгоритм решения задачи

В общем случае расчет включает проверку прочности: заклепок на срез и смятие, стенок отверстий в листах и накладках на смятие, листов и накладок на растяжение.

#### 1. Проверка прочности заклепок на срез

Проверку прочности заклепок на срез выполняем по формуле (2.12):

$$\tau_3 = \frac{P}{n \frac{\pi d^2}{4} n_c} \leq [\tau_{\text{ср}}],$$

где  $n_c = 2$  - число поверхностей среза заклепок по одну сторону от стыка;  $n = 9$  - число заклепок по одну сторону от стыка (рис. 2.7). Тогда получим

$$\tau_3 = \frac{P}{n \frac{\pi d^2}{4} n_c} = \frac{4 \cdot 550 \cdot 10^3}{9 \cdot 3,14 \cdot 4 \cdot 10^{-4} \cdot 2} = 97,3 \text{ МПа} \leq [\tau_{\text{ср}}] = 100 \text{ МПа.}$$

Условие прочности выполняется.

#### 2. Проверка прочности соединения на смятие

Проверку на смятие для заклепок и листов на смятие выполняем по формуле (2.14):

$$\sigma_c = \frac{P}{n t_{\text{мин}} d} \leq [\sigma_{\text{см}}],$$

где  $t_{\text{мин}}$  - минимальная толщина склепываемых листов, включая накладки.

В заданном соединении (рис. 2.7)  $t < 2t_1$ , значит расчетная площадь смятия стенок отверстий в соединяемых листах меньше, чем стенок отверстий в накладках. Следовательно, напряжения смятия для листов больше, чем для накладок. Тогда расчетная минимальная толщина равна:  $t_{\text{мин}} = t = 1,6$  см.

Подставляя числовые данные в исходную формулу, получаем:

$$\sigma_c = \frac{P}{n t_{\text{мин}} d} = \frac{550000}{9 \cdot 1,6 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^{-2}} \approx 191 \text{ МПа} < [\sigma_{\text{см}}] = 240 \text{ МПа.}$$

Условие прочности выполняется. Учитывая, что допускаемые напряжения на смятие для материала заклепок, листов и накладок одинаковы, дополнительного расчета заклепок на смятие не требуется.

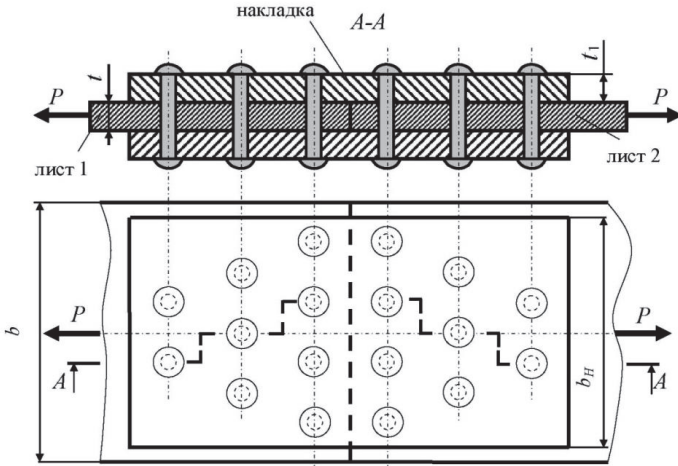


Рис. 2.7

### 3. Проверка прочности листов и накладок на растяжение

Проверку прочности соединяемых листов и накладок на растяжение выполняем по известным формулам, полученным для растяжения – сжатия

$$\sigma_{max} = \frac{N}{F_{min}} \leq [\sigma],$$

где  $\sigma_{max}$  – максимальное расчетное напряжение;  $N$  – продольная сила в опасном сечении;  $F_{min}$  – площадь опасного поперечного сечения (за вычетом площади отверстий для установки заклепок).

Для определения опасного сечения строим эпюру продольных сил для листов и накладок (рис. 2.8). При построении эпюры воспользуемся допущением о равномерном распределении силы  $P$ , передаваемой через заклепочное соединение, между заклепками. В таком случае каждая из заклепок передает силу, равную  $P_3 = P/9$ .

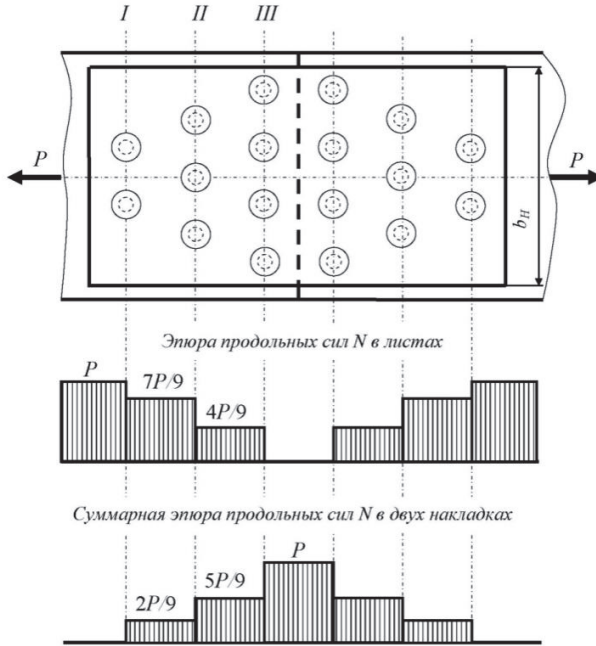


Рис. 2.8

### Проверка прочности листов

Площади ослабленных отверстиями под заклепки сечений (I, II и III) различны, поэтому положение опасного сечения в листах неочевидно и необходимо вычислить напряжения во всех опасных сечениях:

- сечение I

$$\sigma_{\text{л}}^I = \frac{N_{\text{л}}^I}{F_{\text{л}}^I} = \frac{P}{t \cdot (b - 2d)} = \frac{550000}{1,6 \cdot 10^{-2} \cdot (0,28 - 2 \cdot 2 \cdot 10^{-2})} \approx 143 \text{ МПа} \leq [\sigma] = 150 \text{ МПа}$$

Условие прочности выполняется.

- сечение II

$$\sigma_{\text{л}}^{II} = \frac{N_{\text{л}}^{II}}{F_{\text{л}}^{II}} = \frac{7 \cdot P}{9 \cdot t \cdot (b - 3d)} = \frac{7 \cdot 550000}{9 \cdot 1,6 \cdot 10^{-2} \cdot (0,28 - 3 \cdot 2 \cdot 10^{-2})} \approx 122 \text{ МПа} \leq [\sigma] = 150 \text{ МПа}.$$

Условие прочности выполняется.

- сечение III

$$\sigma_{л}^{III} = \frac{N_{л}^{III}}{F_{л}^{III}} = \frac{4 \cdot P}{9 \cdot t \cdot (b - 3d)} = \frac{4 \cdot 550000}{9 \cdot 1,6 \cdot 10^{-2} \cdot (0,28 - 4 \cdot 2 \cdot 10^{-2})} \approx$$

$$\approx 76,4 \text{ МПа} \leq [\sigma] = 150 \text{ МПа}$$

Условие прочности выполняется.

Наиболее нагруженным (опасным) оказалось сечение I листа.

### *Проверка прочности накладок*

Проверка накладок осуществляется аналогично проверке листов. По суммарной эпюре продольных сил для двух накладок (рис. 2.8) видно, что опасным для каждой накладки является сечение III, так как в данном сечении максимального значения достигает продольная сила  $N_{н}^{III} = 0,5P$ , передаваемая каждой накладкой. Кроме того, площадь этого сечения минимальна (четыре заклепки). Напряжения в опасном сечении каждой накладки равны:

$$\sigma_{н}^{III} = \frac{N_{н}^{III}}{F_{н}^{III}} = \frac{0,5 \cdot P}{t_1 \cdot (b_{н} - 4d)} = \frac{0,5 \cdot 550000}{10^{-2} \cdot (0,27 - 4 \cdot 2 \cdot 10^{-2})} \approx$$

$$\approx 145 \text{ МПа} \leq [\sigma] = 150 \text{ МПа}.$$

Условие прочности выполняется.

## **Практическое занятие № 3 (2 часа)**

**Кручение стержней круглого поперечного сечения. Определение напряжений и углов закручивания. Условия прочности и жесткости**

### **Основы теории**

Кручением называется такой вид деформации, при котором в поперечном сечении бруса возникает лишь один силовой фактор - крутящий момент  $M_{кр}(z)$ . Брус, работающий на кручение, обычно называют валом. При расчете вала на кручение надо решить две задачи: определить дифференциальные внутренние усилия во всех точках опасных сечений (касательные напряжения) и найти относительные угловые смещения сечений в зависимости от действия внешних сил.

На первом этапе решения практических задач на кручение, используя метод сечений, строится эпюра крутящих моментов. Анализ данной эпюры позволяет выявить потенциально опасные сечения, в которых крутящий момент

$M_{кр}$  достигает максимального значения. В расчетах используются следующие основные допущения:

- поперечные сечения остаются плоскими после деформации (выполняется гипотеза Бернулли - гипотеза плоских сечений);
- расстояние между поперечными сечениями не изменяется.

Касательные напряжения при кручении вала круглого поперечного сечения определяются по формуле

$$\tau = \frac{M_{кр}}{J_p} \rho, \quad J_p = \int_F \rho^2 dF, \quad (3.1)$$

где  $\tau$  - касательные напряжения в точке, удаленной от продольной оси вала на расстояние  $\rho$ ;  $J_p$  - полярный момент инерции сечения. Так, для вала круглого поперечного сечения диаметром  $D$  имеем  $J_p = \frac{\pi D^4}{32}$ .

Полученные результаты позволяют сформулировать ряд важных выводов:

- касательные напряжения при кручении направлены перпендикулярно к текущему радиусу  $\rho$ ;
- касательные напряжения достигают своего максимального значения в точках наиболее удаленных от продольной оси вала:  $\rho = \rho_{max} = D/2$ .

В этом случае

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{J_p} \rho_{max} = \frac{M_{кр}}{W_p}, \quad (3.2)$$

Геометрическая характеристика сечения  $W_p = \frac{J_p}{\rho_{max}}$  называется *полярным моментом сопротивления*. Для сплошного круглого вала он равен

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16}. \quad (3.3)$$

Взаимный угол поворота сечений определяется по формуле (интегрирование проводят по длине вала  $l$ )

$$\varphi = \int_l \frac{M_{кр}(z)}{G J_p(z)} dz, \quad (3.4)$$

где  $G$  - модуль сдвига (модуль упругости второго рода), который приводится в справочной литературе. Если по длине стержня крутящий момент и полярный момент инерции имеют постоянное значение, то получим

$$\varphi = \frac{M_{кр}}{G J_p} l. \quad (3.5)$$

Условия прочности при использовании метода расчета по допускаемым напряжениям для вала круглого поперечного сечения имеют вид

$$\tau_{max} = \left(\frac{M_{кр}}{W_p}\right)_{max} \leq [\tau], \quad (3.6)$$

Допускаемые напряжения при кручении определяются подобно растяжению – сжатию

$$[\tau] = \frac{\tau_{пред}}{[n]}, \quad \tau_{пред} = (\tau_T, \tau_B),$$

где  $[n]$  — допускаемый коэффициент запаса прочности. Он зависит от неоднородности материала, неточности задания внешних нагрузок, приближенности расчетных схем и расчетных формул, тяжести последствий разрушения конструкции;  $(\tau_T, \tau_B)$  - соответственно, предел текучести и предел прочности при кручении.

При оценке жесткости сравнивают максимальный относительный (погонный) угол закручивания сечений с нормируемым по каким-либо условиям (например, эксплуатационные ограничения) значением  $[\theta] = \left[\frac{d\varphi}{dz}\right]$ , т.е.

$$\theta_{max} = \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)_{max} = \left(\frac{M_{кр}}{GJ_p}\right)_{max} \leq [\theta]. \quad (3.7)$$

## Примеры решения задач

### Задача 3.1

Условие задачи: определить из условия прочности диаметры ступенчатого вала (рис. 3.1). Дано:  $T = 1$  кНм;  $[\tau] = 100$  МПа.

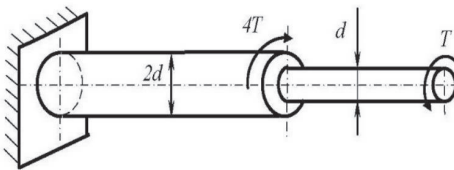


Рис. 3.1

### Алгоритм решения задачи

#### 1. Определяем реакции опор

Для определения реакции опоры (рис. 3.2) необходимо составить уравнение равновесия вала относительно продольной оси  $Oz$  с учетом реактивного момента  $M_{RO}$ .

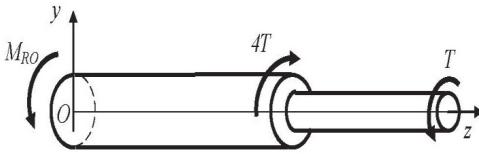


Рис. 3.2

Известно, что в общем плоском случае в жесткой заделке могут возникать две силы реакции  $R_{Oy}, R_{Oz}$  и реактивный момент  $M_{RO}$  в связанной с заделкой системе координат  $Oyz$ .

Так как в данной задаче на вал не действуют активные внешние силы, то очевидно, что  $R_{Oy} = R_{Oz} = 0$ .

При составлении уравнения равновесия используется правило знаков теоретической механики: момент скручивающий вал против часовой стрелки считается положительным (вектор момента направлен вдоль оси  $Oz$ ). Тогда неизвестный реактивный момент  $M_{RO}$  определится:

$$\sum M_z = M_{RO} - 4T + T = 0 \rightarrow M_{RO} = 3T = 3 \text{ кНм.}$$

Получено положительное значение реактивного момента  $M_{RO}$ , что указывает на правильный выбор направления его действия. Если же при вычислении получено отрицательное значение реактивного момента, то направление действия момента  $M_{RO}$  необходимо изменить на противоположное.

*Внимание!* В данной задаче выполнение п.1 алгоритма (определение реакции опоры) нецелесообразно. Удобнее исходную систему координат связать со свободным концом и строить эпюру крутящих моментов справа – налево. Тогда при правильном построении эпюры значение реактивного момента  $M_{RO}$  в заделке вычисляется автоматически.

## 2. Разбиваем вал на характерные участки

Границами характерных участков при построении эпюр крутящих моментов являются сечения, в которых приложены внешние моменты (включая реактивный момент) и (или) изменяется геометрия (площадь или форма поперечного сечения). Важно, что в пределах характерного участка интегральный внутренний силовой фактор - крутящий момент описывается одним уравнением. **Необходимо отметить**, что изменение геометрии сечений вала на вид эпюры крутящих моментов не влияет. Однако уже на этом этапе решения задачи рекомендуется выделять характерные участки с измененной



геометрией, так как в дальнейшем при анализе напряженно – деформированного состояния вала их необходимо будет учитывать.

В данной задаче свяжем систему координат  $Oyz$  с правым по рис. 3.3 концом стержня. Выделим два характерных участка с координатами: первый -  $0 \leq z_1 \leq l_1$  и второй  $l_1 \leq z_2 \leq l$ .

### 3. Построение эпюр крутящих моментов

Условно разделяем вал на два характерных участка 1 и 2, как показано на рисунке. Напомним, правило знаков для внутреннего интегрального силового фактора - крутящего момента  $M_{кр}$ : если наблюдатель смотрит на поперечное сечение, принадлежащее отсеченной части вала, со стороны внешней нормали к нему, то момент  $M_{кр}$ , направленный против часовой стрелки, считается положительным.

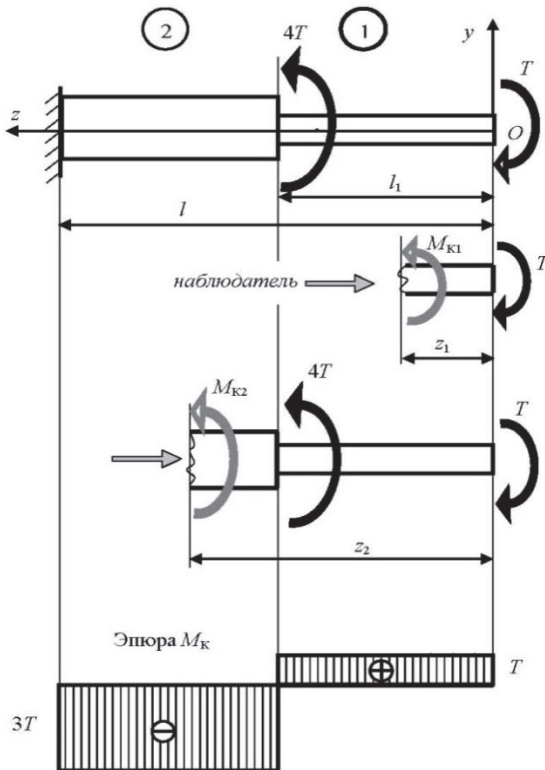


Рис. 3.3

На 1-ом участке  $0 \leq z_1 \leq l_1$  уравнение равновесия отсеченной части имеет вид:

$\sum M_z = M_{к1} - T = 0$ , а значит  $M_{к1} = T$ . Таким образом, крутящий момент на участке 1 направлен против часовой стрелки, и он имеет знак «+».

На 2-ом участке  $l_1 \leq z_2 \leq l$  уравнение равновесия отсеченной части имеет вид:

$\sum M_z = M_{к2} + 4T - T = 0$ , а значит  $M_{к2} = -3T$ . Следовательно, уравновешивающий крутящий момент имеет знак «-» и направлен по часовой стрелке, как показано на рисунке.

#### 4. Вычисляем полярные моменты сопротивления на участках 1 и 2

Известно, что полярный момент сопротивления является геометрической характеристикой сечения и для сплошного вала вычисляется по известным формулам:

$$\text{- на 1 участке } W_{p1} = \frac{\pi \cdot d^3}{16};$$

$$\text{- на 2 участке } W_{p2} = \frac{\pi \cdot (2 \cdot d)^3}{16} = \frac{\pi \cdot d^3}{2}.$$

#### 5. Вычисляем максимальные касательные напряжения на участках 1 и 2

$$\text{На 1 участке } \tau_1 = \frac{M_{к1}}{W_{p1}} = \frac{16 \cdot T}{\pi \cdot d^3};$$

$$\text{на 2 участке } \tau_2 = \frac{M_{к2}}{W_{p2}} = \frac{6 \cdot T}{\pi \cdot d^3}.$$

Из формул видно, что наибольшие касательные напряжения возникают на 1 участке (хотя абсолютное значение крутящего момента в три раза меньше, чем на втором характерном участке). Следует учитывать, что знак крутящего момента носит условный характер и не влияет на расчетные формулы.

#### 6. Определяем геометрические параметры вала по условию прочности на кручение

Условия прочности запишем в виде  $\tau_{max} = \tau_1 \leq [\tau]$ .

$$\text{Тогда } \tau_1 = \frac{16 \cdot T}{\pi \cdot d^3} = [\tau], \text{ следовательно, } d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot T}{\pi \cdot [\tau]}}.$$

#### Задача 3.2

Условие задачи: определить угол закручивания вала кольцевого сечения (рис. 3.4). Дано:  $T = 20$  кНм;  $l = 1$  м;  $D = 30$  см;  $d = 20$  см;  $G = 8 \cdot 10^4$  МПа.

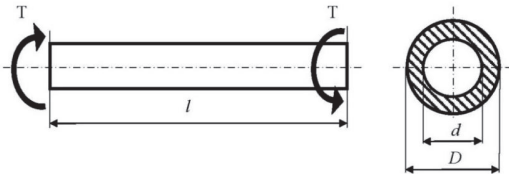


Рис. 3.4

#### Алгоритм решения задачи

Для данного простого случая нет необходимости выполнять пункты 1-3 алгоритма по аналогии с задачей 3.1, включая

построение эпюры крутящих моментов. Очевидно, что во всех сечениях вала действует постоянный внутренний интегральный силовой фактор - крутящий момент, численно равный внешнему моменту  $T$ . Значит,  $M_{кр} = T$ .

Формула для вычисления угла закручивания вала (3.5) запишем в виде:

$$\varphi = \frac{M_{кр}}{G J_p} l,$$

где  $G$  – модуль сдвига;  $J_p = \frac{\pi \cdot D^4}{32} (1 - \alpha^4)$ , – полярный момент инерции кольцевого сечения ( $\alpha = \frac{d}{D}$ ). Тогда имеем

$$\varphi = \frac{M_{кр}}{GJ_p} l = \frac{T \cdot l}{G \cdot \frac{\pi \cdot D^4}{32} (1 - \frac{d^4}{D^4})} = \frac{2 \cdot 10^4 \cdot 1 \cdot 32}{8 \cdot 10^{10} \cdot 3,14 \cdot (0,3)^4 \cdot 0,8} \approx 3,9 \cdot 10^{-4} \text{ рад.}$$

### Задача 3.3

Условие задачи: к стальному валу постоянного поперечного сечения (рис. 3.5) приложено пять внешних скручивающих момента:  $M_1 = 2,0$  кНм;  $M_2 = 1,5$  кНм;  $M_3 = 5,5$  кНм;  $M_4 = 3,2$  кНм;  $M_5 = 1,8$  кНм. Длины участков вала:  $a = 1,5$  м;  $b = 2,0$  м;  $c = 1,0$  м;  $d = 1,2$  м. Модуль сдвига  $G = 8 \cdot 10^4$  МПа. Требуется: построить эпюру крутящих моментов, определить диаметр вала из условия прочности при  $[\tau] = 80$  МПа, построить эпюру углов закручивания поперечных сечений вала и относительных углов закручивания вала. Проверить жесткость вала на кручение  $[\theta] = 0,03$  рад/м.

#### Алгоритм решения задачи

##### 1. Определяем реакции опор

В данной задаче вал статически уравновешен приложенными внешними моментами, т.е. можно считать, что первый пункт алгоритма по определению реакций опор выполнен на этапе формирования условия задачи.

##### 2. Разбиваем вал на характерные участки

Границами характерных участков при построении эпюр крутящих моментов являются сечения, в которых приложены внешние моменты и (или) изменяется геометрия (площадь или форма поперечного сечения). В данной задаче свяжем систему координат  $Ouz$  с левым по рис. 3.5 концом вала. Выделим четыре характерных участка с координатами: первый -  $0 \leq z_1 \leq 1,5$  м, второй -  $1,5 \leq z_2 \leq 3,5$  м, третий -  $3,5 \leq z_2 \leq 4,5$  м и четвертый -  $4,5 \leq z_2 \leq 5,7$  м.

##### 3. Построение эпюр крутящих моментов

На 1-ом участке  $0 \leq z_1 \leq 1,5$  м уравнение равновесия отсеченной части имеет вид с учетом ранее описанного правила знаков:  $\sum M_z = M_{к1} - M_1 = 0$ , а значит  $M_{к1} = M_1 = -2,0$  кНм. Таким образом, внутренний крутящий уравновешивающий момент на участке 1 направлен по часовой стрелке, и он имеет знак «-».

На 2-ом участке  $1,5 \leq z_2 \leq 3,5$  м уравнение равновесия отсеченной части имеет вид:  $\sum M_z = M_{к2} + M_1 - M_2 = 0$ , а значит  $M_{к2} = -0,5$  кНм.

Следовательно, внутренний крутящий уравновешивающий момент на участке 2 направлен по часовой стрелке, и он имеет знак «-».

На 3-ем участке  $3,5 \text{ м} \leq z_2 \leq 4,5$  уравнение равновесия отсеченной части имеет вид:  $\sum M_z = M_{K3} + M_1 - M_2 - M_3 = 0$ , а значит  $M_{K3} = 5 \text{ кНм}$ . Внутренний крутящий уравновешивающий момент на участке 3 направлен против часовой стрелки, и он имеет знак «+».

На 4-ом участке  $4,5 \text{ м} \leq z_2 \leq 5,7$  м уравнение равновесия отсеченной части имеет вид:  $\sum M_z = M_{K4} + M_1 - M_2 - M_3 + M_4 = 0$ , а значит  $M_{K4} = 1,8 \text{ кНм}$ .

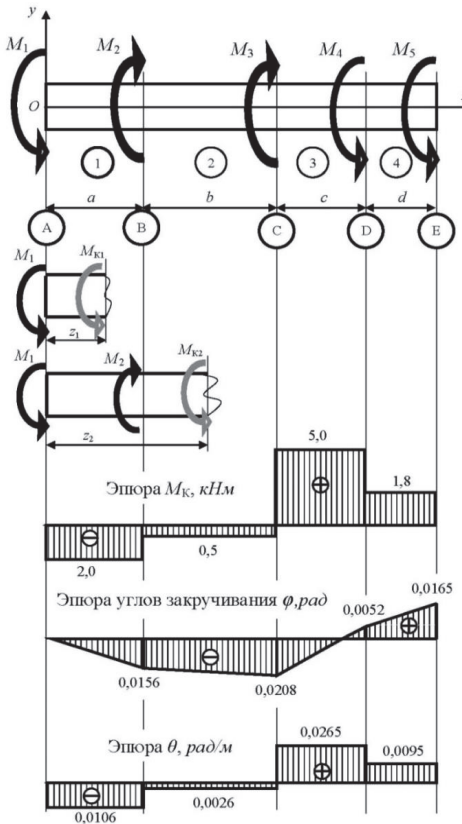


Рис. 3.5

Внутренний крутящий уравновешивающий момент на участке 4 направлен против часовой стрелки, и он имеет знак «+».

По полученным данным строим эпюру крутящих моментов  $M_K$ , как показано на рис. 3.5.

Вычисленные значения крутящих моментов в выбранном масштабе и с учетом их знака откладываем от базовой линии ( $M_K = 0$ ). В пределах каждого из участков стержня крутящий момент постоянен, поэтому мы как бы «заштриховываем» вертикальными линиями соответствующий участок. Напомним, что каждый отрезок «штриховки» (ордината эпюры) дает в принятом масштабе значение крутящего момента в соответствующем поперечном сечении стержня.

**Важно!** После построения эпюры целесообразно проверить правильность построения. В частности, скачки на эпюре  $M_K$

возникать только в сечениях приложения внешних скручивающих моментов и, численно равны этим моментам.

По полученным данным строим эпюру крутящих моментов  $M_k$ , как показано на рис. 3.5. Вычисленные значения крутящих моментов в выбранном масштабе и с учетом их знака откладываем от базовой линии ( $M_k = 0$ ). В пределах каждого из участков стержня крутящий момент постоянен, поэтому мы как бы «заштриховываем» вертикальными линиями соответствующий участок. Напомним, что каждый отрезок «штриховки» (ордината эпюры) дает в принятом масштабе значение крутящего момента в соответствующем поперечном сечении стержня. **Важно!** После построения эпюры целесообразно проверить правильность построения. В частности, скачки на эпюре  $M_k$  могут возникать только в сечениях приложения внешних скручивающих моментов и, численно равны этим моментам.

#### 4. Определяем диаметр вала из условия прочности

Условие прочности при кручении (3.6) для вала постоянного поперечного сечения можно записать в виде:

$$\tau_{max} = \left(\frac{M_{кр}}{W_p}\right)_{max} \leq [\tau],$$

где  $W_p = \frac{\pi \cdot D^3}{16}$  – полярный момент сопротивления (момент сопротивления при кручении). Анализ эпюры крутящих моментов показывает, что при постоянном полярном моменте сопротивления  $W_p$  максимального значения соотношение  $\left(\frac{M_{кр}}{W_p}\right)_{max}$  достигает на третьем характерном участке ( $M_k^{max} = M_{к3} = 5 \text{ кНм}$ ). Тогда требуемый диаметр вала определяется по формуле:

$$D_{min} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_k^{max}}{\pi \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 5 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 80 \cdot 10^6}} \approx 6,83 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Округляя полученное значение до стандартного, принимаем диаметр вала равным  $7,0 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ .

#### 5. Определяем углы закручивания поперечных сечений А, В, С, D и Е и строим эпюру углов закручивания

Так как строится эпюра относительных углов закручивания сечений, то положим, что в сечении А вал не деформирован, т.е.  $\varphi_A = 0$ . Предварительно вычислим полярный момент инерции сечения вала

$$J_p = \frac{\pi \cdot D^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 7^4 \cdot 10^{-8}}{32} \approx 2,36 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4 \text{ и крутильную жесткость вала}$$

$$GJ_p = 8 \cdot 10^{10} \cdot 2,36 \cdot 10^{-6} = 1,89 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{м}^2.$$

Тогда угол закручивания сечения В относительно сечения А (3.4) равен:

$$\varphi_B = \varphi_A + \varphi_{AB} = 0 + \frac{M_{к1}}{GJ_p} a = \frac{-2 \cdot 10^3}{1,89 \cdot 10^5} \cdot 1,5 = -0,0159 \text{ рад.}$$

Угол закручивания сечения С относительно сечения В равен:

$$\begin{aligned} \varphi_C = \varphi_B + \varphi_{BC} &= -0,0159 - \frac{M_{к2}}{GJ_p} b = -0,0159 - \frac{0,5 \cdot 10^3}{1,89 \cdot 10^5} \cdot 2,0 = \\ &= -0,0212 \text{ рад.} \end{aligned}$$

Угол закручивания сечения D относительно сечения С равен:

$$\begin{aligned} \varphi_D = \varphi_C + \varphi_{CD} &= -0,0212 - \frac{M_{к3}}{GJ_p} c = -0,0212 + \frac{5 \cdot 10^3}{1,89 \cdot 10^5} \cdot 1,0 = \\ &= 0,0053 \text{ рад.} \end{aligned}$$

Угол закручивания сечения E относительно сечения D равен:

$$\varphi_E = \varphi_D + \varphi_{DE} = 0,0053 + \frac{M_{к4}}{GJ_p} d = 0,0053 + \frac{1,8 \cdot 10^3}{1,89 \cdot 10^5} \cdot 1,2 = 0,0167 \text{ рад.}$$

Эпюра углов закручивания показана на рис. 3.5. Отметим, что в пределах длины каждого из характерных участков вала угол закручивания изменяется по линейному закону.

### 6. Определяем относительные углы закручивания поперечных сечений вала на участках АВ, ВС, CD и DE и строим эпюру

Относительные углы закручивания вала на  $i$ - том характерном участке вычисляется по формуле (3.7):

$$\theta_i = \left( \frac{d\varphi}{dz} \right)_i = \frac{M_{ki}}{GJ_p}.$$

Видно, что в пределах характерного участка, это величина постоянная. Тогда

$$\begin{aligned} \theta_{AB} &= \frac{M_{к1}}{GJ_p} = -\frac{2 \cdot 10^3}{1,89 \cdot 10^5} = -0,0106 \frac{\text{рад}}{\text{м}}, \\ \theta_{BC} &= \frac{M_{к2}}{GJ_p} = -\frac{0,5 \cdot 10^3}{1,89 \cdot 10^5} = -0,0026 \frac{\text{рад}}{\text{м}}, \\ \theta_{CD} &= \frac{M_{к3}}{GJ_p} = \frac{5 \cdot 10^3}{1,89 \cdot 10^5} = 0,0265 \frac{\text{рад}}{\text{м}}, \\ \theta_{DE} &= \frac{M_{к4}}{GJ_p} = \frac{1,8 \cdot 10^3}{1,89 \cdot 10^5} = 0,0095 \frac{\text{рад}}{\text{м}}. \end{aligned}$$

По полученным данным строим эпюру относительных углов закручивания сечения (рис. 3.5).

### 7. Проверяем выполнение условия жесткости вала при кручении

Условие жесткости, с учетом формулы (3.7), можно записать в виде:  $|\theta_{max}| \leq [\theta]$ . Тогда имеем  $|\theta_{max}| = 0,0265 \frac{\text{рад}}{\text{м}} \leq [\theta] = 0,03 \frac{\text{рад}}{\text{м}}$ . Условие жесткости при заданной внешней нагрузке и геометрических параметрах вала выполняются. Может быть вычислен также коэффициент запаса по жесткости

$$n_{\theta} = \frac{[\theta]}{|\theta_{max}|} = \frac{0,03}{0,0265} = 1,13 > 1.$$

#### Задача 3.4

Условие задачи: определить величину и указать направление касательных напряжений, действующих в точке А вала сплошного поперечного сечения (рис. 3.6).

Дано: диаметр вала  $D = 20 \text{ см}$ ; координаты точки А ( $x_A = 3 \text{ см}$ ,  $y_A = 4 \text{ см}$ ); крутящий момент в сечении  $M_K = 150 \text{ кНм}$ .

#### Алгоритм решения задачи

Касательные напряжения в поперечном сечении при кручении изменяются по линейному закону и могут быть вычислены по формуле (3.1):

$$\tau = \frac{M_K}{J_p} \rho, \quad J_p = \int_F \rho^2 dF,$$

где  $\tau$  - касательные напряжения в точке, удаленной от продольной оси вала на расстояние  $\rho$ ;  $J_p$  - полярный момент инерции сечения. Касательные напряжения действуют по линии, перпендикулярной вектору  $\rho$ , как показано на рис. 3.6.

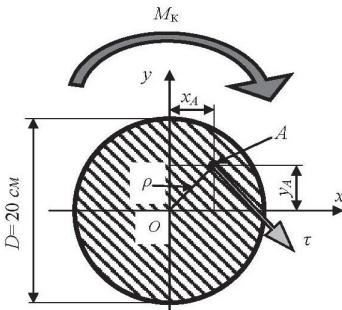


Рис. 3.6

Предварительно вычислим полярный момент инерции сечения  $J_p = \frac{\pi \cdot D^4}{32} = \frac{3,14 \cdot (0,2)^4}{32} = 1,57 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4$ . Расстояние от центра сечения до точки А равно  $\rho = \sqrt{(x_A)^2 + (y_A)^2} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ . Тогда касательные напряжения в точке А будут равны:

$$\tau = \frac{M_K}{J_p} \rho = \frac{1,5 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-2}}{1,57 \cdot 10^{-4}} = 47,8 \text{ МПа}.$$

## Оглавление

|  |    |
|--|----|
| Введение .....   | 3  |
| Практическое занятие № 1 .....   | 3  |
| Расчеты на прочность и жесткость при растяжении-сжатии. Определение напряжений. Условия прочности и жесткости .....              | 3  |
| Основы теории .....  | 3  |
| Примеры решения задач .....  | 6  |
| Задача 1.1 .....   | 6  |
| Алгоритм решения задачи .....  | 6  |
| Задача 1.2 .....   | 11 |
| Алгоритм решения задачи .....  | 11 |
| Практическое занятие № 2 .....   | 13 |
| Расчеты на прочность при чистом сдвиге. Определение напряжений. Условия прочности .....  | 13 |
| Основы теории .....  | 13 |
| Примеры решения задач .....  | 20 |
| Задача 2.1 .....   | 20 |
| Алгоритм решения задачи .....  | 20 |
| Задача 2.2 .....   | 21 |
| Алгоритм решения задачи .....  | 22 |
| Практическое занятие № 3 .....   | 25 |
| Кручение стержней круглого поперечного сечения. Определение напряжений и углов закручивания. Условия прочности и жесткости ..... | 25 |
| Основы теории .....  | 25 |
| Примеры решения задач .....  | 27 |
| Задача 3.1 .....   | 27 |
| Алгоритм решения задачи .....  | 27 |
| Задача 3.2 .....   | 30 |
| Алгоритм решения задачи .....  | 30 |
| Задача 3.3 .....   | 31 |
| Алгоритм решения задачи .....  | 31 |
| Задача 3.4 .....   | 35 |
| Алгоритм решения задачи .....  | 35 |