ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ» (МГТУ ГА)

Кафедра вычислительных машин, комплексов, систем и сетей

С.В. Дианов, О.Г. Феоктистова

АРХИТЕКТУРА КОМПЬЮТЕРНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Учебно-методическое пособие
по проведению практических занятий

для студентов II курса
направления 09.03.01
очной формы обучения

Москва
ИД Академии Жуковского
2020

УДК 681.324
ББК 6Ф7.3
Д44

Рецензент:
Затучный Д.А. – канд. техн. наук, профессор

Дианов С.В.

Д44 Архитектура компьютерных вычислительных систем [Текст] : учебно-методическое пособие по проведению практических занятий / С.В. Дианов, О.Г. Феоктистова. – М.: ИД Академии Жуковского, 2020. – 36 с.

Данное учебно-методическое пособие издается в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Архитектура компьютерных вычислительных систем» по учебному плану для студентов II курса направления 09.03.01 очной формы обучения.

Рассмотрено и одобрено на заседаниях кафедры 06.03.2020 г. и методического совета 06.03.2020 г.

УДК 681.324
ББК 6Ф7.3

В авторской редакции

Подписано в печать 29.06.2020 г.
Формат 60x84/16 Печ. л. 2,25 Усл. печ. л. 2,09
Заказ № 635/0413-УМП34 Тираж 30 экз.

Московский государственный технический университет ГА
125993, Москва, Кронштадтский бульвар, д. 20

Издательский дом Академии имени Н. Е. Жуковского
125167, Москва, 8-го Марта 4-я ул., д. 6А
Тел.: (495) 973-45-68
E-mail: zakaz@itsbook.ru

Практическое занятие №1

Количественная оценка информации

Цель и задачи проведения практического занятия.

Ознакомиться с понятием информации, различными подходами к формализации этого понятия. Овладеть методикой получения количественных оценок информации и способами интерпретации полученных результатов. Получить практические навыки вычислений оценок количества информации.

Методические указания по теме.

Для оценки количества информации в настоящее время принято использовать, так называемый «энтропийный подход». Основоположниками, которого являются Ральф Хартли и Клод Шеннон. В соответствии с этим подходом, Хартли предложил определять количество информации в сообщении, которое заключается в выборе одного исхода из **N** равновероятно возможных, как двоичный логарифм

$$\mathbf{I = log_2 N}$$

Например, если из **16** возможных исходов выбрано **1**, то количество информации в нём $\mathbf{I = log_2 16 = 4}$

Стоит заметить, что в данном случае речь идёт о передаче информации. Вопрос о том, что это за информация, насколько она полезна и откуда взялась, в данном случае не рассматривается.

Для более общего и распространённого случая, когда вероятности исходов не равны, используют формулу, предложенную К. Шенноном

$$\mathbf{I} = -\sum_{i=1}^{n} p_i \, log_2 p_i$$

где $\mathbf{p_i}$ - вероятность появления **i** - ого сообщения, **n** - общее число сообщений. Предложенная ранее Хартли формула, является частным случаем формулы Шеннона для случая $\mathbf{p_i} = \frac{1}{n}$

В данном случае, поскольку, основание логарифма равно 2, то количество информации исчисляется в битах. Основание логарифма теоретически не принципиально, оно может быть 10 или число e. В этом случае информация будет вычисляться в дитах и нитах соответственно. Логарифм по основанию 2 может быть записан как lb.

log_2 – lb бит

log_{10} – lg дит

log_e – ln - нит

В соответствии с предложенной формулой считается, что получение информации соответствует уменьшение энтропии у наблюдателя. Чем больше информации, тем меньше неопределённость, меньше энтропия. Полученная по данной формуле количественная оценка, обладает полезным свойствами для определённых технических задач. Для бытового восприятия она не применима.

Для более широкого круга задач используется понятие ценности информации. Ценность информации определяется тем, насколько полученная информация приблизила достижение некоторой цели. Разницу достижения цели при условии получения некоторой информации и без неё можно определить в стоимостных показателях. Наиболее распространены две количественные оценки ценности информации

$$\mathbf{V_1 = \log_2 \frac{P}{p}\ ;\ -\infty < V < V_{min}}$$

$$\mathbf{V_2 =} \frac{P-p}{1-p}\ \mathbf{;\ 0 < V < 1}$$

где **P** – вероятность достижения цели при наличии

информации, **p** – вероятность достижения цели при отсутствии

информации.

Для получения представления о соотношения ценности и количества информации, рассмотрим следующий **пример**. Предположим, в студенческой группе половину составляют девушки, половину юноши. Всего в группе **24** человека. Допустим, существует необходимость выделить из этой группы одного юношу для назначения его командиром группы. Допустим так же, что доступен только список с фамилиями, личности студентов априори неизвестны. Можно исходить из различия написания фамилий в женском и мужском роде, однако, в русском языке не все фамилии склоняются по родам. Попробуем вычислить количество информации, содержащееся в фамилии, а так же в том факте, что наугад выбран первый попавшийся студент. Воспользуемся формулами Шеннона и Хартли для решения первой и второй задачи соответственно.

$$\mathbf{I = -\ N}\ \sum_{i=1}^{M} p_i \, log_2 \, p_i$$

Где **N** – общее число букв в фамилии, **M** – число неповторяющихся букв, p_i – вероятность появления **i**-й буквы (частота её использования в русском языке в % деленная на 100).

Выберем для примера фамилию Свеаду.

Таблица 1.Частота использования букв в русском языке

№	Буква	Частота появления
1	о	10.97%
2	е	8.45%
3	а	8.01%
4	и	7.35%
5	н	6.70%
6	т	6.26%
7	с	5.47%
8	р	4.73%
9	в	4.54%
10	л	4.40%
11	к	3.49%
12	м	3.21%
13	д	2.98%
14	п	2.81%
15	у	2.62%
16	я	2.01%
17	ы	1.90%
18	ь	1.74%
19	г	1.70%
20	з	1.65%
21	б	1.59%
22	ч	1.44%
23	й	1.21%
24	х	0.97%
25	ж	0.94%
26	ш	0.73%
27	ю	0.64%
28	ц	0.48%
29	щ	0.36%
30	э	0.32%
31	ф	0.26%
32	ъ	0.04%
33	ё	0.04%

Частота букв фамилии:

Д – 2,98%

У – 2,62%

С – 5,47%

A – 8,01%

E – 8,45%

B – 4,54%

N=6 общее число букв

Количество информации по Шеннону

$$I = -\left(\frac{298}{1000}\frac{298}{1000} + \frac{262}{1000}\frac{262}{1000} + \right.$$

$$+ \frac{547}{1000}\frac{547}{1000} + \frac{801}{1000}\frac{801}{1000} + \frac{845}{1000}\frac{845}{1000} +$$

$$\left. + \frac{454}{1000}\frac{454}{1000}\right)$$

$$= -(0,298 * -1,7 + 0,262 * -1,9 + 0,547 * -0,9 + 0,801 * -0,3 +$$

$$+ 0,845 * -0,2 + 0,454 * -1.1) = 2,4014$$

$I = 2,4014$ (бит)

Однако в случайно взятом слове «дуевас» содержится формально точно такое же количество информации
$I = 2,4014$ (бит)

Количество информации в результате выбора наугад одно из студентов вычисляется согласно по следующей формуле, предложенной Хартли

$I = N$ **= -** P

где N общее количество студентов, P – вероятность выбора одного из них

P=1/N,

$I = -P = -\frac{1}{24} = 4,585$ **(бит)**

Количество информации в полученном сообщении, что выбранный студент юноша **I =- lb 0.5 = 1 бит**

Определим ценность информации, содержащейся в сообщении, что выбранный из списка студент – юноша. Если нам требуется командиром именно юношу, причём пол командира, это только один из критериев выбора, остальные в рамках данного примера рассматривать не будем, то вероятность достижения поставленной цели, до получения сообщения **p=** $\frac{1}{24}$. После получения сообщения она увеличивается и становится **P=** $\frac{1}{12}$ **.** Вычислим ценность полученной в сообщении информации с помощью обоих ранее предложенных способов

$$\mathbf{V_1 = \log_2 \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{24}} = 1}$$

$$\mathbf{V_2} = \frac{\frac{1}{12} - \frac{1}{24}}{1 - \frac{1}{24}} = \frac{1}{23}$$

Как видно из полученных результатов, ценность информации – метрики относительные, Наиболее эффективно их использовать при сравнительном анализе множества сообщений.

Задание на практическое занятие:

1. Вычислить количество информации в сообщении о том, что вас выбрали командиром группы.

2. Вычислить количество информации в Вашей фамилии.

Контрольные вопросы:

1. Для чего в системах обмена данными вводится понятие информации ?
2. Какие бывают виды информации ?
3. Каким образом вычисляется количество информации ?
4. Для чего вводится понятие ценности информации ?
5. В каких единицах оценивается информация ?
6. В чём заключается корреляционный подход к оценке количества информации ?
7. В чём заключается энтропийный подход к оценке количества информации ?
8. В чём различия между энтропийным и корреляционным подходами к оценке количества информации ?

Практическое занятие №2

Системы остаточных классов

Цель и задачи проведения практического занятия.

Знакомство с непозиционными системами счисления, областями их применения. Сравнение достоинств и недостатков позиционных и непозиционных систем счисления. Изучение методики выбора системы остаточных классов, подходящей под определённую задачу. Получение практических навыков вычислений при использовании системы остаточных классов.

Методические указаний по теме.

Наряду с общеизвестными и повсеместно распространёнными позиционными системами счисления существуют непозиционные системы счисления. В вычислительной технике нашла применение одна из таких систем, так называемая «система остаточных классов» (СОК), в англоязычной литературе известная как Residue Number System (RNS). На этой системе основан раздел математики называемый «модулярной арифметикой». Краеугольным камнем, на котором разработана теория и практика таких вычислений является «Китайская теорема об остатках», которая формулируется следующим образом:

Для любой системы натуральных взаимно простых чисел $\boldsymbol{p_1, \ldots p_n}$, любое число $\boldsymbol{X}$ из диапазона [$\boldsymbol{0; M}$), где $\boldsymbol{M = p_1 * p_2 * \ldots * p_n}$ взаимооднозначно представимо в виде вектора ($\boldsymbol{a_1, a_2, \ldots, a_n}$), где $\boldsymbol{a_i = X \% p_i}$ (знаком «%» — в данном случае обозначается операция взятия остатка от целочисленного деления $\boldsymbol{X}$ на $\boldsymbol{p_i}$).
числа $\boldsymbol{p_1, \ldots p_n}$ – называются модулями системы
числа $\boldsymbol{a_1, a_2, \ldots, a_n}$ – это остатки или вычеты выбранного числа по заданной системе модулей.

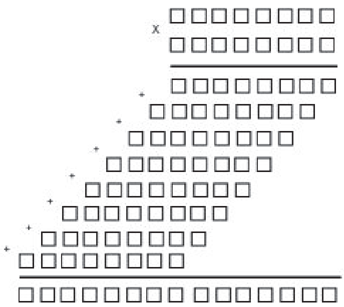
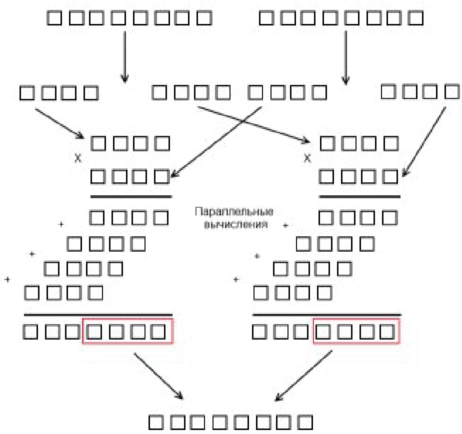
Для организации вычислений в цифровом компьютере такая представление чисел в ряде случаев может дать существенные преимущества. О недостатках упомянем позже, а достоинства определяются двумя следующими свойствами:

1. При выполнении операций сложения и умножения отсутствует разряд переноса. Эта особенность заложена правилами выполнения операция в этой системе счисления. Допустим, что требуется сложить или перемножить два числа $\mathbf{X_1}$ и $\mathbf{X_2}$, представленные в виде системы остатков $(\mathbf{x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}})$ и $(\mathbf{x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}})$ по модулям $(\mathbf{p_1, p_2, \ldots, p_n})$. Операции сложения и умножения производятся по следующим правилам:

$$\mathbf{X_3 = X_1 + X_2 = ((x_{11}+x_{21})\%p_1, (x_{12}+x_{22})\%p_2, \ldots, (x_{1n}+x_{2n})\%p_n)}$$
$$\mathbf{X_4 = X_1 * X_2 = ((x_{11}*x_{21})\%p_1, (x_{12}*x_{22})\%p_2, \ldots, (x_{1n}*x_{2n})\%p_n)}$$

При сложении и умножении чисел операции сложения и умножения производятся над соответствующими элементами векторов, которыми представлены эти числа. В арифметическо-логическом устройстве (АЛУ) процессора вычислительной системы выполнение этих операций можно осуществить либо параллельно, либо организовать их конвейерное выполнение. К тому же, по причине малых размерностей элементов вектора модулей $\mathbf{p_1, p_2, \ldots, p_n}$ скорость выполнения вычислений будет высокой.

2. Ошибка в вычислениях одном разряде в данном случае может быть не столь фатальна, как при использовании позиционной системы счисления. Вклад возможной ошибки в любом из разрядов примерно одинаков и может быть заранее оценен. Используя эту особенность можно при планировании вычислений предусмотреть алгоритм, гарантирующий заданную точность. Существуют алгоритмы коррекции ошибок для вычислительных систем повышенной надёжности, работающих на базе систем остаточных классов.

Умножение в позиционной системе счисления	Умножение в системе остаточных классов
	

Однако, в случае выполнения большинства математических операций, за проведение вычислений на базе систем остаточных классов не только не даёт никакого выигрыша, но наоборот приводит к излишним затратам. Например :

- сравнение чисел;

- контроль переполнения;

- деление;

- вычисление квадратного корня.

Области использования и причины использования вычислений на основе СОК в вычислительных системах:

- упрощение архитектуры вычислительных устройств и, как следствие, увеличение энергоэффективности;

- разработка вычислительных систем повышенной надёжности за счёт введения избыточности в вектор модулей;

- криптографические алгоритмы, использующие алгоритмы факторизации, поскольку СОК и есть своего рода факторизация;

- системы связи и системы цифровой обработки сигналов, использующие векторные алгоритмы (умножение матриц, преобразование Фурье).

Прямое преобразование

Прямое преобразование чисел из традиционной десятичной позиционной системы счисления в число в СОК заключается в том, что вычисляются остатки от деления числа в десятичной форме на все элементы выбранного вектора модулей. Если взять число **X** = **20** и вектор модулей **P(3,5,7)**. То **X = (20%3,20%5,20%7) = (2,0,6)**

Для операций над числами в вычислительных системах требуется проведение операций над вычетами в двоичной позиционной системе счисления. В этом случае используются следующие свойства вычетов

(a+b) % p = (a%p + b%p)%p
(a*b) % p = (a%p * b%p)%p

Для представления некоторого числа **X** в двоичном виде в СОК его можно записать таким образом $\mathbf{X\%p = (x_{n-1}*2^{n-1} + x_{n-2}*2^{n-2} + x_0*2^0)\%p = ((x_{n-1})\%p*2^{n-1}\%p) + ((x_{n-2})\%p*2^{n-2}\%p) + \ldots + x_0\%p)\%p}$. Поскольку система двоичная, то все $\mathbf{x_{n-1}, \ldots x_0}$ равны либо **0** , либо **1**, поэтому, для нахождения вычета числа **X** следует сложить вычеты вида ($\mathbf{2^i\%p}$).

Например, для числа **X = 30** что в двоичной форме будет выглядеть как **11110** требуется взять остаток по модулю **7**.

$\mathbf{30\%7 = (1*2^4 + 1*2^3 + 0*2^2 + 1*2^1 + 0*2^0)\%7 = (2^4\%7 + 2^3\%7 + 2^2\%7+ \quad +2^1\%7)\%7 = (2 + 1 + 4 + 2)\%7 = 2}$

Систему модулей выбирают исходя из условий поставленной задачи. Например, система модулей **(3,5,7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31)** достаточно для представления **32**-х битных чисел. Произведение этих взаимнопростых чисел **3*5*7***

11* 13* 17* 19* 23* 29* 31= 100 280 245 065 〉 2 147 483 648 = 2^{31}. Произведение модулей СОК это то максимальное число, которое может быть в данной СОК представлено.Для записи значения каждого модуля в данном случае потребуется **5** разрядов, следовательно для записи результатов операций сложения, умножения и возведения в степень потребуется не более **5** разрядов.

Интересные возможности предоставляет система модулей **(2^{n-1}, 2^n, 2^{n+1})** Для взятия остатка от деления на **2^n** требуется всего лишь отбросить первые **2^{n+1}** разрядов числа в двоичной записи. Результатом взятия остатка будут последние **n** разрядов.

Арифметические операции в СОК

Пусть задана система модулей (**5, 7, 11**), максимально число, которое может быть описано в системе этих модулей **M = 5*7*11= 385**. Перемножим два числа 6 и 12

6=(6%5,6%7,6%11)=(1,6,6)

12= (12%5,12%7,12%11) = (2,5,1)

12*6 = ((1*2)%5,(5*6)%7,(6*1)%11) = (2,2,6)

Проверка

72 = (72%5, 72%7, 72%11) = (2,2,6)

Обратное преобразование в СОК

Рассмотрим один из способов преобразования чисел в СОК в десятичную позиционную систему счисления. Этот способ получен при помощи «китайской теоремы об остатках» или системы ортогональных базисов.

Согласно «китайской теореме об остатках» любое натуральное число может быть представлено в следующем виде:

$$X = (x_1, x_2, \dots x_n) = (x_1, 0, \dots, 0) + (0, x_2, \dots, 0) + \dots + (0, 0, \dots., x_n) = x_1*(1, 0, \dots, 0) + x_2*(0, 1, \dots, 0) + \dots + x_n*(0, 0, \dots, 1).$$

Соответственно, если найти систему ортогональных базисов

$$B_1 = (1, 0, \dots, 0), B_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, B_N = (0, 0, \dots, 1),$$

Можно будет перевести число в десятичную систему счисления. Для заданного базиса, который является в нашем случае системой модулей, эти вектора потребуется найти один раз. Для этого потребуется решить уравнение вида **$(M_i*b_i)\%p_i = 1$**, где **$M_i = M/p_i$**, а **b_i** – искомое число, для каждого модуля. **$B_i = M_i*b_i$** – позиционное представление искомого числа. Соответственно, десятичное представление числа **X**, определяется по формуле:

$$X = (x_1*(M_1*b_1) + x_2*(M_2*b_2) + \dots + x_n*(M_n*b_n))\%M$$

Пример: пусть задана система модулей (**5, 7, 11**), найдем значения **M_i** и **b_i** **($0 < i <= 3$)**

M = 5*7*11 = 385

M_1 = 385/5= 77

M_2 = 385/7 = 55

M_3 = 385/11 = 35
(77*b_1)%5 = 1 => b_1 = 3
(55*b_2)%7= 1 => b_2 = 6
(35*b_3)%11 = 1 => b_3 = 6.

Последние три уравнения решены перебором.

Если **X = (2,2,6),** то в десятичной системе счисления оно будет равно

X = (2,2,6) = (2*77*3 + 2*55*6 + 6*35*6)%385= (462 + 660 + 1260)%385 = 2382%385 = 72

Теперь преобразуем какое-нибудь число в системе остаточных классов с модулями (**5, 7, 11**). Например, **(2, 3, 1)**

X = (2, 3, 1) = (2*35*2 + 3*21*1 + 1*15*1)%105 = (140 + 63 + 15)%105 = 218%105 = 8

Задание на практическое занятие:

1. Десятичные числа, первое из которых составлено из первых трёх цифр зачётной книжки, а второе – это номер в списке группы плюс 40, преобразовать в СОК в системе модулей **(5,7,11)** или **(7,11,13)**.
2. Сложить эти два числа в СОК.
3. Выполнить обратное преобразование в десятичную систему счисления.

Контрольные вопросы:

1. В чём различие позиционных и непозиционных систем счисления ?
2. Какие преимущества имеют непозиционные систем счисления ?
3. Что такое система остаточных классов ?
4. На основании какого математического аппарата строятся системы остаточных классов ?
5. Какие операции и вычисления в цифровом компьютере предпочтительно проводить в системе остаточных классов ?
6. Какие операции и вычисления в цифровом компьютере не эффективно выполнять в системе остаточных классов ?
7. Какие основные сложности возникают при переводе числа из системы остаточных классов десятичную позиционную систему счисления ?

Практическое занятие №3

Физический смысл преобразования Фурье, восстановление прямоугольного импульса

Цель и задачи проведения практического занятия.

Изучение принципов преобразования информации из аналоговой в цифровую форму для дальнейшей обработки в цифровом вычислителе. Изучения условий, при которых отсутствуют потери информации при проведении преобразований сигналов из цифровой в аналоговую форму. Изучение свойств преобразования Фурье, используемых для обработки и изучения цифровых и аналоговых сигналов. Получение практических навыков изучения структуры цифровых и аналоговых сигналов.

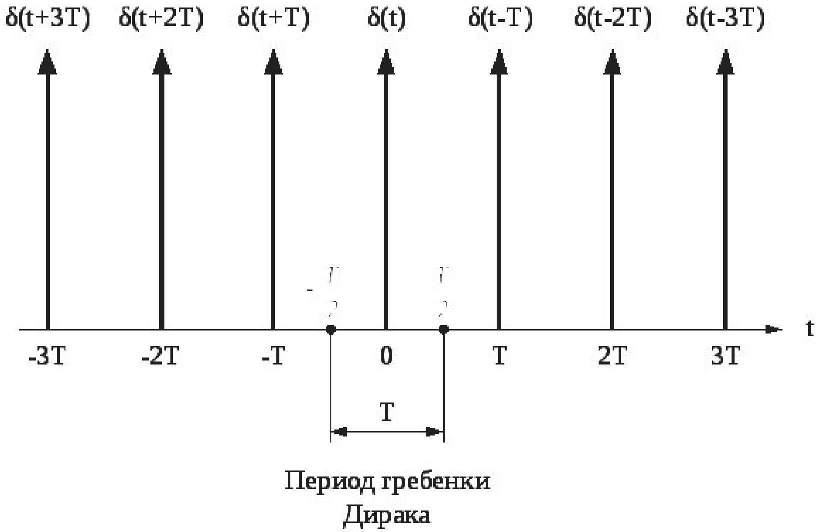
Методические указаний по теме.

Преобразование Фурье (ПФ) – эта некая математическая операция, которая ставит в соответствие выбранной исходной функции её отображение, называемое часто спектром или Фурье-образом. В случае обработки цифровых сигналов — это преобразование позволяет перевести отображение функции из временной области в частотную. В частотной области появляется возможность исследовать состав сигнала и произвести определённые преобразования, которые затруднительно выполнить во временной. По сути ПФ представляет собой математическую операцию как множество других, например интегрирование. Особенностью ПФ является то, что его результат всегда комплексное число. Поэтому преобразованный сигнал в частотной области можно представить двумя графиками, разложив его на функции модуля и аргумента. Таким образом, получаются амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики сигнала или, что равнозначно, амплитудный и фазовый спектр.

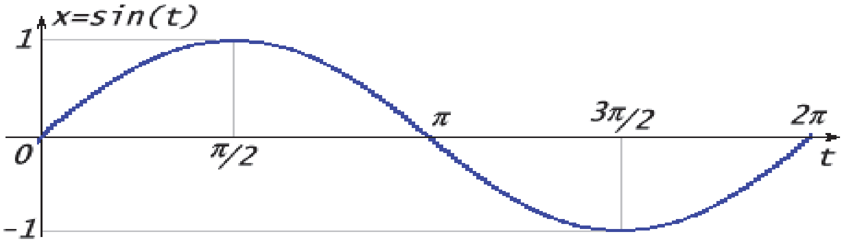
Для решения практических задач непрерывный сигнал удобно представить последовательностью цифр, для дальнейшей обработки в цифровом компьютере. Эту операцию называют дискретизацией по времени. Математически это можно описать следующим образом, исходный сигнал поточечено умножают на функцию, которую называют «гребёнкой Дирака». Гребенка Дирака — это просто периодическая последовательность дельта-функций с единичным коэффициентом, начинающаяся в нуле и идущая с шагом **T**.

Основная проблема дискретизации по времени это правильныйвыборинтервала **T**, который называют шагом дискретизации. Величина **1/T** известна, как частота дискретизации. Эта частота определяется теоремой **Котельникова-Найквиста**, согласно которой, для того чтобы полностью восстановить исходный сигнал, частоту дискретизации следует выбрать такой, чтобы она в два раза превосходила верхнюю частоту спектра обрабатываемого сигнала.

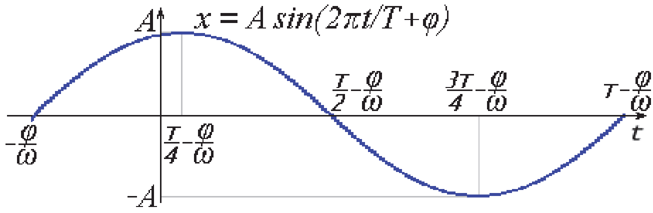
Любой сигнал можно разложить на гармонические составляющие, например синусоиды. Строго говоря, сигнал разложим на любые периодические функции. На практике самыми распространёнными, исследованными и удобными в обработке являются синусоиды, они же косинусоиды(те же синусоиды, но сдвинутые по фазе), они же гармонические составляющие или гармоники. Набор этих гармонических составляющих или гармоник удобно обрабатывать и изучать в спектральной области, выполнив прямое ПФ. Амплитудный спектр описывает амплитуды гармоник, фазовый спектр описывает их сдвиг по времени друг относительно друга. Периодические сигналы раскладываются на конечное число гармоник, непериодические – на бесконечное. Другими словами непериодический сигнал имеет сплошной спектр.



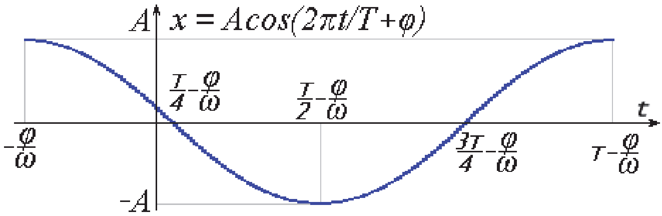
В качестве примера рассмотрим функцию **x = sin(t)**.



В данном случае амплитуда синусоиды равна **1**, но умножив её на масштабируемый множитель **A** ,можно растянуть функцию по оси абсцисс в **A** раз **x = A*sin(t)**Период колебания синусоиды равен **2π**. Если необходимо изменить период колебания синусоиды, то следует уменьшить или увеличить период до **T**. Для этого следует умножить **t**на коэффициент**1/T**. Это вызовет растяжение графика по горизонтали: **x = A sin(2πt/T)** или его сужение. Частота колебания **ν = 1/T**, кроме того существует понятие круговой частоты **ω= 2πν = 2πT**. Таким образом, рассматриваемая функция может быть записана в виде **x = A sin(ωt).** Для полного описания синусоиды используется фаза **φ**, которая сдвигает график влево или вправо и физически означает опережение или задержку сигнала по времени. Это описание гармоники, на которые раскладываются любые сигналы.



Косинус точно такая же по сути гармоника, как и синус, другими словами это синус сдвинутый по фазе на **π/2**:



x = A cos(2πt/T + φ) = A cos(2πνt + φ) = A cos(ωt + φ)

Применив формулу для косинуса суммы, получим:

x = A cos φcos(2πt/T) - A sin φ sin(2πt/T)

Выделим коэффициенты, которые не зависят от **t**, и обозначим их как **Re**и **Im**:

x = Re cos(2πt/T) - Im sin(2πt / T)

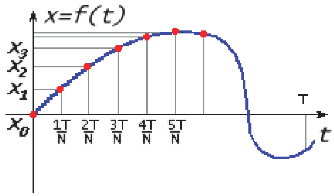
Re = A cos φ, Im = A sin φ

По значениям коэффициентов**Re** и **Im** можно однозначно восстановить амплитуду и фазу исходной гармоники:

$$\varphi = arctg\left(\frac{Im}{Re}\right)$$

$$A = \sqrt{Re^2 + Im^2}$$

Возьмём произвольную функцию**x = f(t)**. Предположим, что эта функция ограничена временем**[0, T)**. Выполним дискретизацию следующим образом. Разобьём отрезок времени **T** на **N-1** равных частей. Вычислим значения функции $\mathbf{x_n = f(t_n) = \{ x_0, x_1, x_2,..., x_N \}}$ в моменты времени $\mathbf{t_n = nT/N}$. Отметим сразу, что первая гармоника, составляющая эту функцию будет иметь частоту$\mathbf{v_1 = 1/T}$, гармоники более высоких порядков $\mathbf{v_n = 1/(T*n)}$



Выполнив прямое дискретноеПФможно вычислить**N** значений для $\mathbf{X_k}$:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{\frac{-j2\pi kn}{N}}$$

Обратное ПФ запишем следующим образом:

$$x_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{\frac{j2\pi kn}{N}}$$

Используя формулу Эйлера $e^{i\varphi}$ = **cos φ + isin φ** можно получить следующее выражение

$$x_n = f(t_n) = \sum_{k=0}^{N-1}\left[\frac{Re_k}{N}\cos\left(\frac{2\pi kt_n}{T}\right) - \frac{Im_k}{N}\sin\left(\frac{2\pi kt_n}{T}\right)\right]$$

Полученное выражение представляет собой вариант записи полученного ранее выражения для гармоники:

x = Recos(2πt/T) - Imsin(2πt / T)   что так же можно записать в виде

x = A cos(2πt/T + φ)

Полученное значение исходной функции $\mathbf{x_n}$состоит из суммы N гармоник со своими амплитудами, частотами и фазами.

Выражение для $\mathbf{x_n}$ можно так же записать в виде

$$f(t_n) = \sum_{k=0}^{N-1} A_k \cos(2\pi tk/T + \varphi_k) = \sum_{k=0}^{N-1} G_k(t_n)$$

Где функция

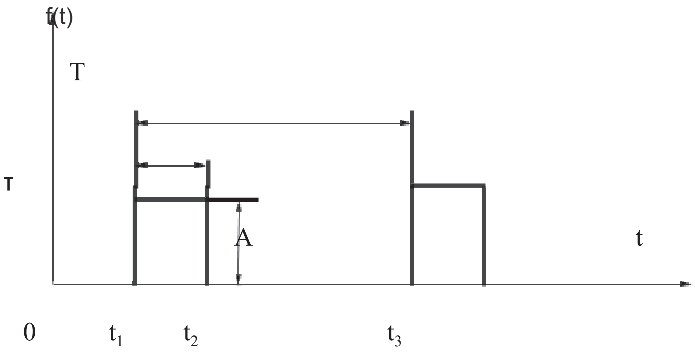
$\mathbf{G_k(t) = A_k cos(2\pi tk/T + \varphi_k)}$

будет**k**-й гармоникой. Ниже приведены формулы, связывающие амплитуду, фазу и частоту **k**-й гармоники.

$$X_k = Re_k + j\,Im_k$$
$$X_k = NA_k e^{j\varphi_k}$$
$$A_k = \frac{1}{N}\sqrt{Re_k^2 + Im_k^2}$$
$$\varphi_k = Arg(X_k)$$

Таким образом, физический смысл дискретного преобразования Фурье состоит в том, чтобы представить некоторый дискретный сигнал в виде суммы гармоник(эта взаимосвязь видна так же из формулы Эйлера). Выполнив прямое ПФ можно получить информацию об отдельных гармониках, проведя обратное ПФ можно восстановить исходный сигнал.

Рассмотрим прямоугольный импульс



Необходимо восстановить сигнал по первым пяти гармоникам. Функция, описывающая последовательность прямоугольных импульсов выглядит следующим образом :

$\{A, \quad \text{при} t_1 \le t \le t_2 = t_1 + \ 0, \quad \text{при} t_2 \le t \le t_3 = t_1 + T$

Где**τ**– длительность импульса, **A** – амплитуда , **ω = 2π/T**– круговая частота.

Формулы для расчётов амплитуд и фаз гармоник выглядят следующим образом:

$\mathbf{A_n} = \frac{4A}{n\omega_1 T} sin(n\ \boldsymbol{\omega_1}_{\frac{\tau}{2}}) = \frac{2A}{q} \frac{sin\frac{n\pi}{q}}{\frac{n\pi}{q}}$

$\boldsymbol{\varphi_n} = -\ \boldsymbol{\omega_{1n} t_0} = -2\pi \mathbf{t_0}_{\frac{1}{T}}$

где $q\ = \frac{T}{\tau}$ - скважность

откуда $\mathbf{A_0} = \frac{A}{2}$

$\mathbf{A_1} = \frac{2A}{\pi}$, $\mathbf{A_2} = \mathbf{A_4} = \ldots = 0;$

$\boldsymbol{\varphi_1} = -2\,\pi\frac{t_0}{T}$;$\boldsymbol{\varphi_3} = -4\,\pi\frac{t_0}{T} - \pi$; $\boldsymbol{\varphi_5} = -6\,\pi\frac{t_0}{T} - 2\pi$ **.**

$\mathbf{A_3} = \frac{2A}{3\pi}$; $\mathbf{A_5} = \frac{2A}{5\pi}$

Учитывая, что чётные гармоники в силу свойств косинуса равны нулю, и имея ввиду, что нулевая гармоника есть постоянная составляющая равная половине амплитуды, приведём формулы для расчёта амплитуд и фаз первых трёх нечётных гармоник.

Таблица 2.

ω_n	φ_n	$A(\omega_n)$	Гармоники
0	**0**	**A**	**f(t)=** $\frac{A}{2}$
ω_1	**0**	**A** $\frac{2}{}$	$f_1(t) = A\ \frac{2}{}\ \cos\ \omega_1 t$
ω_3	**π**	**A** $\frac{2}{3}$	$f_3(t) = A\ \frac{2}{3} \cos(3\ \omega_1 t - \pi)$
ω_5	**0**	**A** $\frac{2}{5}$	$f_5(t) = A\ \frac{2}{5} \cos 5\omega_1 t$

Для восстановления заданного сигнала, в данном случае прямоугольного импульса, необходимо для каждого момента времени**t** вычислить значение трёх косинусоид. Сложив полученные три числа и прибавив постоянную составляющую $\frac{A}{2}$ **,** получим значение исходной функции для времени **t.**Для оценки корректности использования всего лишь первых пяти гармоник для восстановления сигнала обратимся к понятию мощности сигнала. Физический смысл этого понятия - это мощность выделяемая сигналом на резисторе с сопротивлением 1 Ом. Вычислить мощность можно по следующей формуле

$$\mathbf{P_{ср}} = \frac{A^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{к=1} A(к\omega_1)^{\mathbf{2}}$$

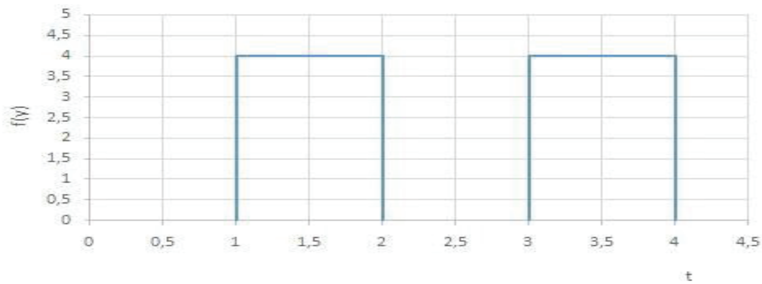
Откуда видно, что средняя энергия складывается из энергий отдельных гармоник, включая постоянную составляющую. Причём энергия не зависит от фазы гармоники, а определяется только лишь её амплитудой, что соответствует здравому смыслу.

Для первых пяти гармоник формула для мощности будет выглядеть так

$$\mathbf{P_5 = \left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{2A}{}\right)^2 + \left(\frac{2A}{3}\right)^2 + \left(\frac{2A}{5}\right)^2 = 0.48\ A^2}$$

При условии, что скважность **$q = 2$**, то полная мощность сигнала составляет **$0.5\ A^2$**. Таким образом, мощность первых пяти гармоник **P_5**составит **96%** этой мощности, что говорит о том, что в этих гармониках сосредоточена основная информация о сигнале, его форма в основном будет восстановлена по этим гармоникам.

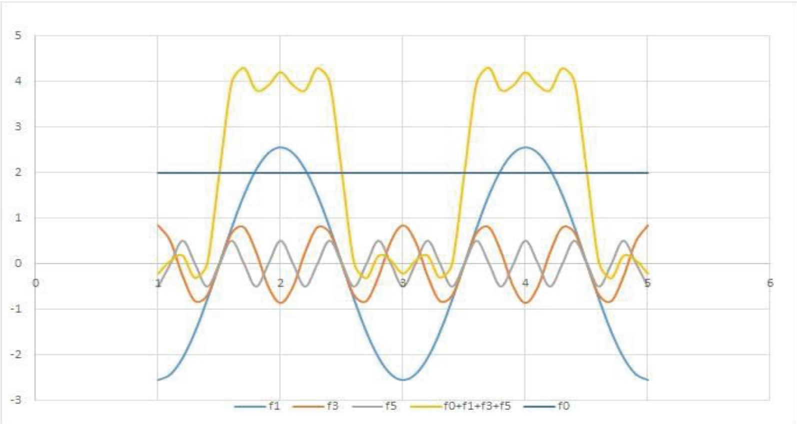
Пример выполнения практического задания.



t	f0(t)=e/2	f1(t)	f3(t)	f5(t)	sf
1	2	-2,54777	0,849253	-0,50954	-0,20805
1,1	2	-2,42445	0,501694	-0,00446	0,072781
1,2	2	-2,06405	-0,25909	0,509531	0,186395
1,3	2	-1,50181	-0,80647	0,005275	-0,303
1,4	2	-0,79271	-0,6896	-0,50952	0,008174
1,5	2	-0,00609	-0,00473	-0,00609	1,983093
1,6	2	0,781127	0,68403	0,509513	3,97467
1,7	2	1,491956	0,809388	0,006898	4,308242

1,8	2	2,056888	0,268088	-0,5095	3,815475
1,9	2	2,42068	-0,49402	-0,00771	3,918947
2	2	2,547758	-0,84923	0,50949	4,208017
2,1	2	2,425694	-0,50496	0,008521	3,929252
2,2	2	2,066424	0,255221	-0,50948	3,812169
2,3	2	1,505082	0,80519	-0,00933	4,30094
2,4	2	0,796561	0,691959	0,509461	3,99798
2,5	2	0,010144	0,008792	0,010144	2,029079
2,6	2	-0,77726	-0,68162	-0,50944	0,031674
2,7	2	-1,48866	-0,81061	-0,01095	-0,31023
2,8	2	-2,05449	-0,27194	0,509427	0,183001
2,9	2	-2,41941	0,490718	0,011766	0,083072
3	2	-2,54774	0,849188	-0,50941	-0,20796
3,1	2	-2,42693	0,508219	-0,01258	0,06871
3,2	2	-2,0688	-0,25135	0,509389	0,189246
3,3	2	-1,50835	-0,80389	0,013389	-0,29886
3,4	2	-0,80041	-0,6943	-0,50937	-0,00408
3,5	2	-0,0142	-0,01285	-0,0142	1,958749
3,6	2	0,773399	0,679189	0,509345	3,961932
3,7	2	1,48537	0,811808	0,015011	4,312189
3,8	2	2,052089	0,275776	-0,50932	3,818544
3,9	2	2,418137	-0,4874	-0,01582	3,914914
4	2	2,547719	-0,84913	0,509296	4,207888
4,1	2	2,428163	-0,51146	0,016634	3,933333
4,2	2	2,071161	0,247469	-0,50927	3,809361
4,3	2	1,511623	0,802573	-0,01744	4,296751
4,4	2	0,804265	0,696632	0,509241	4,010139

4,5	2	0,01826	0,016906	0,018256	2,053421
4,6	2	-0,76953	-0,67674	-0,50921	0,044511
4,7	2	-1,48207	-0,81299	-0,01907	-0,31413
4,8	2	-2,04968	-0,27961	0,509182	0,179889
4,9	2	-2,41686	0,484072	0,019878	0,087093
5	2	-2,54769	0,849046	-0,50915	-0,20779



Задание на практическое занятие:

4. Рассчитать параметры прямоугольного импульса по следующим формулам:
   T = № в списке группы***10** (сек);
   τ = 0.4*T (сек);
   A = 0,1*№ в списке группы (В)
5. Вычислить постоянную составляющую и определить параметры для **1,3,5** гармоник. Построить графики полученных функций.
6. Восстановить заданный прямоугольный импульс, построить полученный график.

Контрольные вопросы:

1. Что такое преобразование Фурье?
2. Что такое дискретизация по времени?
3. Для чего нужна оцифровка сигнала?
4. На какие составляющие можно разложить сигнал?
5. Как не потерять информацию при оцифровке сигнала?
6. Для чего сигнал представляют в виде гармонических составляющих?

7. На сколько гармонических составляющих можно разложить непериодический сигнал?
8. Существуют ли в природе сигналы, преобразование Фурье которых не приводит к потере информации ?

Практическое занятие №4

Вычисление пропускной способности шины процессора.

Цель и задачи проведения практического занятия.

Ознакомиться с теоретическими основами функционирования шины процессора цифрового компьютера и принципами её работы. Овладеть численным методом вычисления. Получить практические навыки проведения пропускной способности шины.

Методические указания по теме. Краткие теоретические сведения.

Шина (bus)– совокупность линий, которые являются проводниками на материнской плате, которые функционально объединены задачей обмена информации между процессором и остальными функциональными устройствами цифрового компьютера. По этим линиям происходит обмен информацией между компонентами и устройствами ПК. Шина используется для обмена информационными и управляющими сигналами между двумя и более элементами цифрового вычислителя. Структурно в шине выделяют механический, электрический или физический, а так же логический или управляющий уровни.

В отличие от обычного проводника на печатной плате точка-точка, к шине можно подключить несколько устройств через соответствующие интерфейсы или напрямую, в соответствии с логикой работы шины. У определённых типов шин существует соответственный набор коннекторов или соединителей для физического подключения устройств, карт и кабелей.

Если для электронно вычислительных машин первых поколений шинами служили жгуты проводников физически соединённых вместе, то в настоящее время в вычислительном комплексе или, например, на материнской плате персонального компьютера шиной называется некая логическая функциональность, используемая для параллельного обмена данными и управляющими сигналами.

Следующие типы шин - FibreChannel, InfiniBand, скоростной Ethernet, SDH для параллельного обмена данными и управляющими сигналами используют, даже не электрические, а оптические связи.

В настоящее время шины могут быть разработаны, как для параллельных, так и последовательных соединений. Соответственно связи, образованные такими шинами имеют параллельные (англ. *multidrop*) и цепные (англ. *daisychain*) топологии. В случае USB и некоторых других шин могут также использоваться хабы (концентраторы).

Для физического присоединения к шине применяются разнообразные разъёмы, которые в обязательном порядке унифицированы, что даёт возможность подключать различные устройства к шине.

Управление передачей данных и сигналов управления по шине может быть реализовано аппаратно (мультиплексоры, демультиплексоры, буферы, регистры, шинные формирователи), так и программно, со стороны ядра операционной системы, для этих целей служит драйвер.

Можно условно выделить четыре группы линий, которые составляют шину в зависимости от типа передаваемых данных:

- линии данных;
- линии адреса;
- линии управления данными;
- контроллер шины

Подобное функциональное разделение отличает шину от других проводников, которые соединяют элементы и узлы цифрового компьютера.

Кроме того, существует классификация самих шин. Выглядит она следующим образом:

- системная шина (CPU шина). CPU - central processing unit или центральное обрабатывающее устройство Используется микросхемами chipset (набор микросхем на материнской плате, позволяющих осуществить выполнение задач, для которых данный компьютер предназаначен) для пересылки информации к и от CPU ;
- шина кэш-памяти. Предназначена для обмена информацией между CPU и кэш-памятью;
- шина памяти. Обмен информацией между оперативной памятью и CPU;
- шины ввода/вывода.

Структурно шина, как правило, состоит из следующих компонент:

- линии для обмена данными (шины данных);
- линии для адресации данных (шины адреса);
- линии для управления данными (шины управления);
- контроллер шины.

Разрядность, ширина, количество линий шины является важнейшим параметром шины. Данный параметр определяет количество данных, параллельно передаваемых через шину. Второй определяющей характеристикой шины является пропускная способность, которая определяется количеством бит информации, передаваемых по шине за секунду.

Чтобы определить пропускную способность шины необходимо умножить тактовую частоту шины на её разрядность.

Пример выполнения практического задания.

1. Рассчитать пропускную способность шины **SATA-III**.

Решение:

- Тактовая частота: **6.0** ГГц
- Разрядность: **64**

Пропускная способность:

$$\frac{(64 \text{ бит} \times 6.0 \text{ ГГц})}{8} = \frac{384 \frac{\text{Гбит}}{\text{с}}}{8} = 48 \ \frac{\text{Гбайт}}{\text{с}}$$

2. Процессор:**IntelPentium 4**

Тактовая частота: **3,4** ГГц

Разрядность: **64** бита

Пропускная способность:

$$\frac{(64 \text{ бит} \times 3{,}4 \text{ ГГц})}{8} = \frac{217{,}6 \frac{\text{Гбит}}{\text{с}}}{8} = 27{,}2 \frac{\text{Гбайт}}{\text{с}}$$

Задание на практическое занятие:

Рассчитать пропускную способность шины процессора, выбранного преподавателем.

Контрольные вопросы:

1. Для чего предназначена шина цифрового компьютера ?
2. Из каких составных частей состоит шина цифрового компьютера и каково функциональное назначение этих частей ?
3. Каковы основные параметры шина цифрового компьютера ?
4. Как осуществляется физическое подключение к шине ?
5. Как организуется управление работой шины ?
6. Как физически может организована передача сигналов по шине ?
7. Как структурные уровни можно выделить в шине ?
8. Какие четыре группы линий можно различить в шине ?

Практическое занятие №5

Основы квантовых вычислений.

Цель и задачи проведения практического занятия.

Ознакомиться с теоретическими основами квантовой модели вычислений. Овладеть основами математического аппарата, используемого для разработки квантовых алгоритмов. Получить практические навыки проведения расчётов оценок состояния квантовых объектов.

Методические указания по теме. Краткие теоретические сведения.

В настоящее время квантовый компьютер есть сложное и интригующие устройство «второй квантовой революции», которая представляет собой революцию технологий на основе использования индивидуальных квантовых объектов. Квантовый компьютер послужил явным стимулом к развитию таких технологий как квантовое моделирование, квантовые датчики, квантовый генератор случайных чисел, а также квантовая коммуникация. Само устройство как квантовый компьютер является чисто гипотетическим, что в свою очередь возлагает на плечи инженеров огромный вызов на его создание.

Почему создание квантового компьютера так важно для нас. Во-первых, это апгрейд уже имеющихся технологий в сфере информационной безопасности, что в свою очередь является немало важным фактором в нашей жизни. Во-вторых, квантовый компьютер отрывает перед пользователем новые методы поиска по базам данных. А также принесет новые методы машинного обучения, что в свою очередь позволит продвинуть искусственный интеллект на новый уровень.

На создание квантового компьютера научное сообщество повлияли «три мысленных облачка». Первое – это развитие и обобщение классической теории информации Шеннона на квантовый случай. Первоначально большой интерес к данному вопросу был исключительно академическим, а рассмотрение чисто теоретическим, что в дальнейшем перешло в более качественное изучение, ибо был выявлен яркий потенциал квантовых систем для теории информации. В работах Юрия Манина, Александра Холево возникли основные модели для квантовой теории информации. Первые квантовые алгоритмы были протестированы на квантовой машине Тьюринга, разработанной Дэвидом Дойчем.

Второе «облачко» – возникло в ходе работы и в качестве вопроса о том, какие возможные фактические ограничения накладывает квантовый механизм на возможности компьютера. В одном из своих первых докладов, отражающих идеи квантовых вычислений, Ричард Фейнман осветил данный вопрос. Фейнман пришел к такому выводу, что определить такое ограничение достаточно сложно, но исключение все-таки есть, ибо размеры транзистора не могут составлять менее чем один атом. Если же все-таки мыслить в пределах размерных ограничений, то на гипотетическом уровне есть возможность сконструировать мини-компьютер, в котором будут задействованы квантовые биты (кубиты), реализуемые с помощью квантовых систем. Так в таком мини-компьютере квантовые биты будут задействованы во всех возможных суперпозициях.

И в заключение третье «облачко» отражает тот факт, что в сфере атомных и космических технологий компьютер показал свои возможности по решению многообразных задач. Что, к сожалению, нельзя сказать о ситуации с расчетами из нескольких квантовых частиц. Тем не менее, на данный момент наука изобилует множеством задач для выполнения расчетов в области квантовой физики.

Идея создания квантового компьютера, заметно отразилась на научном сообществе, но также породила вопрос: что же все-таки даст обществу гипотетические квантовые вычислительные устройства? В чем же их эффективность?

В качестве примера можно упомянуть следующие квантовые алгоритмы, предложенные в начале 90ых. Девид Дойч и Ричард Йожи в **1992** году доказали, что квантовый компьютер дает выигрыш в достаточно уникальных задачах. В своей работе, основанной на предшествующем докладе Дойча **1985** года, ученые показали как квантовый компьютер продемонстрировал экспоненциальный выигрыш над своим классическим собратом. Параллельно с работами других ученых, Питер Шора создаёт алгоритм решения задачи факторизации и дискретного логарифмирования. Что является частью, используемой в криптографии с открытым кличем. В свою очередь методы криптография с открытым ключом широко используются в продукции для информационной безопасности. Тем самым квантовый компьютер может послужить угрозой для конфиденциальности данных, что приводит нас к тому, что необходимо модернизировать методы защиты информации.

Для полноценного понимания картины человеку для понимания и овладения аппаратом квантовых вычислений необходимо овладеть терминологией, используемой в работе. Квантовые вычисления изобилуют терминами из квантовой механики, что дает возможность к быстрой адаптации в работе.

Квантовые вычисления – новая вычислительная модель, которая вместо известного понятия бита, основана на понятии «кубита», то есть квантового бита.

Квантовый бит — это некая квантовая система, которая до измерения находится в произвольной линейной суперпозиции двух базисных квантовых состояний (то есть может принимать бесконечно большое разнообразие возможных значений), а в результате измерения с той или иной вероятностью принимает одно из двух возможных значений. Поэтому он и называется битом, поскольку возможных значений два, но с другой стороны он квантовый, поскольку эти два значений находятся в суперпозиции друг с другом.

Но по-другому кубит можно назвать списком квантовых состояний, хоть это определение достаточно общее. Квантовое состояние – совокупность наименования квантового состояния и приписанного к нему коэффициента – комплексного числа. Запись квантового состояния выглядит следующим образом:

$$\alpha|s\rangle,$$

где α − комплексночисленный коэффициент, s − наименование квантового числ*а*.

Кубит состоит из квантовых состояний, но сумма квадратов всех модулей этих комплексночисленных коэффициентов должна равняться **1**.

Базис – это набор взаимно ортогональных кубитов, он выбирается произвольным образом. Для понимания, базис – набор кубитов $|0\rangle$ и $|1\rangle$, тогда для этих двух базисных кубитов векторное представление будет следующим:

$$|0\rangle = (1\ 0\ )$$

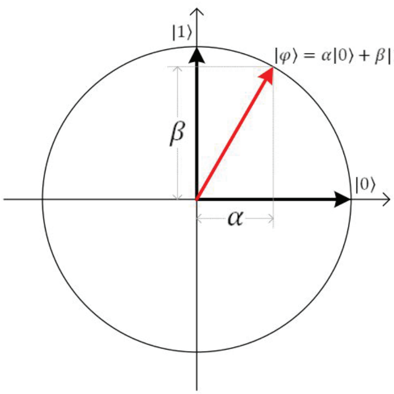
$$|1\rangle = (0\ 1\ )$$

Ортогональность в данном примере определяется как равенство нулю скалярного произведения двух векторных представлений кубитов. Числа **0** и **1** в векторах – это комплексно-численные коэффициенты α при базисных кубитах, поэтому мы можем произвести следующую запись: $|0\rangle = 1|0\rangle + 0|1\rangle$**,** $|1\rangle = 0|0\rangle + 1|1\rangle$. Мы произвели разложение произвольного кубита в базисе, такое разложение будет записываться как $|\varphi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, данные разложение называется линейной суперпозицией базисных состояний. В виде вектора такой кубит представляется как:

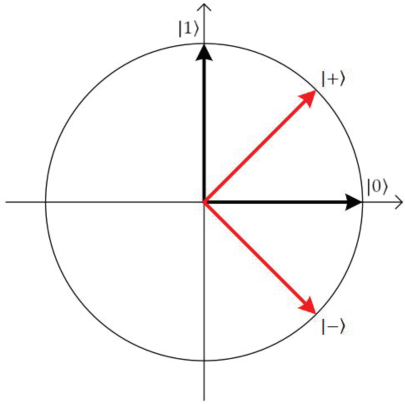
$$(\alpha\ \beta\ )\text{,}$$

где α и β – некоторые комплексные числа, сумма квадратов модулей которых равна строго **1**.

Теоретически базисов, в которых может быть разложен кубит, можно предложить бесконечное множество. Тот базис, о котором шла речь выше, обычно называется стандартным. Для упрощения восприятия используется его графическое представление. В случае если коэффициенты α и β являются действительными числами, оно выглядит следующим образом



В качестве примера приведём ещё один ортогональный базис, в котором можно представить кубит и который используется достаточно часто. Это базис $\{|+\rangle, |-\rangle\}$. Его графическое представление для действительных коэффициентов выглядит следующим образом

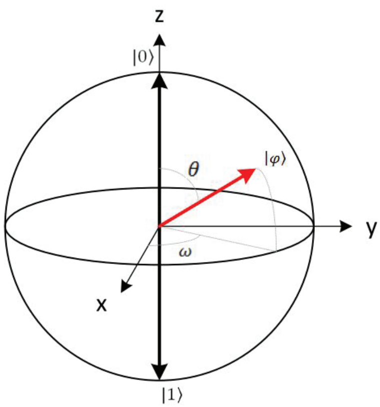


Формулы для пересчёта из стандартного базиса выглядят следующим образом

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

В общем случае коэффициенты α и β - являются комплексными, поэтому обычно графически разложение кубита представляют в виде точки на двумерной сфере, так называемой «сфере Блоха»



коэффициенты α и β в этом случае выглядят следующим образом :

$$\alpha = cos\frac{\theta}{2} + i\, sin\frac{\theta}{2}$$

$$\beta = cos\,\omega\, sin\frac{\theta}{2} + i\, sin\,\omega\, sin\,\frac{\theta}{2}$$

Углы θ и ω однозначно определяют положение кубита на сфере Блоха.

Амплитуда вероятности – это комплексный коэффициент при базисном кубите. Данное понятие обозначает, что при измерении вероятность обнаружения кубита в этом квантовом состоянии равна квадрату модуля его амплитуды. При измерении кубит будет обнаружен либо в том, либо в другом базисном состоянии, поэтому сумма квадратов модулей должна равняться строго **1**.

В данном случае под измерением рассматривается попытка определить, находится ли данный кубит в том или ином квантовом состоянии, а также величины амплитуд вероятности нахождения данного кубита в квантовых состояниях, определяемых выбранным базисом. После измерения кубит переходит в какое-либо состояние из числа входящих в базис, в рамках которого производится измерение, при этом вероятность перехода кубита в это состояние равна как раз квадрату модуля амплитуды при этом состоянии в базисе. Это следует из положений квантовой механики и рассматривается как аксиома.

Понимать смысл вычислений и применять модель квантовых вычислений нам позволяет «нотация Дирака» (скобки $|s\rangle$). $|s\rangle$ – это «кет-вектор», $\langle s|$ – это «бра-вектор». Кет-вектор – это вектор столбец, бра-вектор – это комплексно-сопряженная с соответствующим кет-вектором вектор-строка. Приведем к примеру, следующий кубит

$$|\varphi\rangle = (\alpha\ \beta\ ),$$

его соответствующим бра-вектором будет

$$|\varphi\rangle = (\alpha^*\ \beta^*\ ),$$

где $\alpha^*\ \beta^*$ - комплексные сопряженные чисел $\alpha\ \beta$ соответственно.

Из этого следует простое мнемоническое правило – если соединить бра- и кет-вектор, чтобы получился «бракет», это будет скалярное произведение двух векторов:

$$\langle\varphi|\varphi\rangle = (\alpha^*\ \beta^*\ )(\alpha\ \beta\ ) = \alpha^*\alpha + \beta^*\beta = |\alpha|^2 + |\beta|^2$$

Также мы можем соединить векторы в обратном порядке, в виде «кетбра». Записывается это как $|\varphi\rangle\langle\varphi|$, результатом такого перемножения является матрица, результат при перемножении векторов размерностью **2 X 2** будет выглядить так:

$$|\varphi\rangle\langle\varphi| = (\alpha^*\alpha\ \alpha\beta^*\ \beta\alpha^*\ \beta^*\beta\ )$$

Это – матрица плотности $\rho = |\varphi\rangle\langle\varphi|$. Таким образом, получены два мнемонических правила: $\langle\varphi|\varphi\rangle -$ скалярное произведение и $|\varphi\rangle\langle\varphi| -$ матрица плотности. Мнемонические правила – суть такие, что выполняя преобразования в соответствии с ними, будет получен результат, который соответствует опыту. Причинно-следственные связи реальных физических процессов в данном случае не рассматриваются и не учитываются.

Квантовые вычисления — это некоторая математическая модель, формализм, помогающий в теории осуществить решение задач, которые сложно решить в традиционной модели вычислений за приемлемое время. Это достигается «автоматической» параллелизацией вычислительного процесса. На сегодняшний день реализации модели квантовых вычислений ещё не существует. Есть несколько перспективнейших направлений исследований, однако большинство из них упирается пока ещё в непреодолимые технологические ограничения. По мере развития нано-технологий существующие ограничения будут исчезать, и есть надежда на то, что данная модель будет реализована в виде работающего квантового компьютера. Нано-технологии, напомним, это технологические процессы, реализующие операции с объектами, размеры которых сопоставимы с размерами одного атома вещества.

Пример выполнения практического задания.

Задание №1. Пользуясь условием нормировки, определить неизвестные коэффициенты.

A. $|\psi_0\rangle = \alpha|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle$

B. $|\psi_0\rangle = \alpha|0\rangle + |1\rangle$

C. $|\psi_0\rangle = \alpha|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle$

D. $|\psi_0\rangle = |0\rangle + \beta|1\rangle$

Выполнение первой части задания

A. Из условия нормировки, для произвольного квантового состояния

$$|\psi_0\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \text{ имеем } \alpha^2 + \beta^2 = 1,$$

тогда для искомого состояния

$$|\psi_0\rangle = \alpha|0\rangle + \tfrac{1}{2}|1\rangle, \text{ получим } \alpha^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = 1 \text{ откуда } \alpha = \tfrac{\sqrt{3}}{2}.$$

Таким образом

$$|\psi_0\rangle = \tfrac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \tfrac{1}{2}|1\rangle.$$

Далее решение будет представлено короче, так как пояснения к пунктам этого задания аналогичны ваше представленному.

B. $|\psi_0\rangle = \alpha|0\rangle + |1\rangle$, получим $\alpha^2 + (1)^2 = 1$ откуда $\alpha = 0$.

$$|\psi_0\rangle = |1\rangle.$$

C. $\left|\psi_0\right\rangle = \alpha\left|0\right\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle,$ получим $\alpha^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$ откуда $\alpha = \frac{1}{2}$.

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle.$$

D. $\left|\psi_0\right\rangle = \left|0\right\rangle + \beta|1\rangle,$ получим $\beta^2 + (1)^2 = 1$ откуда $\beta = 0$.

$$|\psi_0\rangle = |0\rangle.$$

Выполнение второй части задания. Пользуясь условием нормировки, определить неизвестные коэффициенты и найти вероятность того, что кубит

$$|\psi_0\rangle = \frac{\sqrt{3}}{4}|0\rangle + \beta|1\rangle$$

пройдет через поляризатор, ориентированный под углом

A. 0^o
B. 30^o
C. 90^o

Точно так же, как и в первой части задания, из условия нормировки для произвольного квантового состояния имеем:

$$\left|\psi_0\right\rangle = \alpha\left|0\right\rangle + \beta|1\rangle,\ \text{имеем}\ \alpha^2 + \beta^2 = 1,$$

тогда для искомого состояния

$$|\psi_0\rangle = \frac{\sqrt{3}}{4}|0\rangle + \beta|1\rangle\ ,\ \text{получим}\ \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \beta^2 = 1\ \text{откуда}\ \beta = \frac{\sqrt{13}}{4}.$$

Таким образом

$$|\psi_0\rangle = \frac{\sqrt{3}}{4}|0\rangle + \frac{\sqrt{13}}{4}|1\rangle$$

A. Ориентация поляризатора с углом $\phi = 0^o = 0$ соответствует квантовое состояние прибора измерителя

$$|\chi\rangle = \cos cos\ \phi\ |0\rangle + \sin sin\ \phi\ |1\rangle = \cos cos\ 0\ |0\rangle + \sin sin\ 0\ |1\rangle = |0\rangle$$

Тогда для соответствующего проекционного оператора получим

$$\Pi = |\chi\rangle\langle\chi| = \langle 0|0\rangle$$

После прохождения поляризатора исходный кубит $|\psi_0\rangle$ будет иметь состояние

$$|\psi'\rangle = \prod|\psi\rangle = |\chi\rangle\langle\chi|\psi\rangle$$

Или

$$|\psi'\rangle = |0\rangle\langle 0|\left(\frac{\sqrt{3}}{4}|0\rangle + \frac{\sqrt{13}}{4}|1\rangle\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}|0\rangle\langle 0|0\rangle + \frac{\sqrt{13}}{4}|0\rangle\langle 0|1\rangle$$

Учитывая, что

$$\langle 0|0\rangle = \langle 1|1\rangle = 1, \ \ \langle 1|0\rangle = \langle 0|1\rangle = 0$$

получим

$$|\psi'\rangle = \frac{\sqrt{3}}{4}|0\rangle$$

Вероятность регистрации кубита в состоянии $|\psi'\rangle$ есть

$$P = \langle\psi'|\psi'\rangle = |\psi'|^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\langle 0|\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{4}|0\rangle\right) \approx 0,1875$$

По существу, данная задача формулируется следующим образом: найти вероятность того, что кубит $|\psi_0\rangle$ будет зарегистрирован в состоянии $|\chi\rangle$ **.** Тогда

$$P = \left|\langle\psi_0|\chi\rangle\right|^2$$

и предыдущая задача решается следующим образом. Мы должны посчитать

$$\langle\psi_0|\chi\rangle = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\langle 0| + \frac{\sqrt{13}}{4}\langle 1|\right)(|0\rangle) = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

тогда

$$P = \left|\langle\psi_0|\chi\rangle\right|^2 = \left|\frac{\sqrt{3}}{4}\right|^2 \approx 0,1875$$

Далее решение будет представлено короче, так как пояснения к пунктам этого задания аналогичны представленному выше.

B. Ориентации поляризатора с углом $\phi = 30^o = \frac{\pi}{6}$ соответствует квантовое состояние прибора измерителя

$$|\chi\rangle = \cos cos\ \phi\ |0\rangle + \sin sin\ \phi\ |1\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle.$$

$$\Pi = |\chi\rangle\langle\chi| = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle\right)\left(\langle 0|\frac{\sqrt{3}}{2} + \langle 1|\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{4}|0\rangle\langle 0| + \frac{\sqrt{3}}{4}|0\rangle\langle 1| + \frac{\sqrt{3}}{4}|1\rangle\langle 0| + \frac{1}{4}|1\rangle\langle 1|$$

$$|\psi'\rangle = \prod |\psi\rangle = |\chi\rangle\langle\chi|\psi\rangle$$

$$|\psi'\rangle = \left(\frac{3}{4}|0\rangle\langle 0| + \frac{\sqrt{3}}{4}|0\rangle\langle 1| + \frac{\sqrt{3}}{4}|1\rangle\langle 0| + \frac{1}{4}|1\rangle\langle 1|\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{4}|0\rangle + \frac{\sqrt{13}}{4}|1\rangle\right) = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{39}}{16}|0\rangle + \frac{3+\sqrt{13}}{16}|1\rangle$$

$$P = \langle\psi'|\psi'\rangle = \left(\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{39}}{16}\langle 0| + \frac{3+\sqrt{13}}{16}\langle 1|\right)\left(\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{39}}{16}|0\rangle + \frac{3+\sqrt{13}}{16}|1\rangle\right) \approx 0.511 + 0.170 \approx 0.681$$

$$P = \left|\langle\psi_0|\chi\rangle\right|^2$$

$$\langle\psi_0|\chi\rangle = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\langle 0| + \frac{\sqrt{13}}{4}\langle 1|\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle\right) = \frac{\sqrt{13}+3}{8}$$

$$P = \left|\langle\psi_0|\chi\rangle\right|^2 = \left|\frac{\sqrt{13}+3}{8}\right|^2 \approx 0,6817$$

C. Ориентация поляризатора с углом $\phi = 90^o = \frac{\pi}{2}$ соответствует квантовое состояние прибора измерителя

$$|\chi\rangle = \cos cos\ \phi\ |0\rangle + \sin sin\ \phi\ |1\rangle = |1\rangle.$$

$$\Pi = |\chi\rangle\langle\chi| = \langle 1|1\rangle$$

$$|\psi'\rangle = \prod |\psi\rangle = |\chi\rangle\langle\chi|\psi\rangle$$

$$|\psi'\rangle = (\langle 1|1\rangle)\left(\frac{\sqrt{3}}{4}|0\rangle + \frac{\sqrt{13}}{4}|1\rangle\right) = \frac{\sqrt{13}}{4}|1\rangle$$

$$P = \langle\psi'|\psi'\rangle = \left(\frac{\sqrt{13}}{4}\langle 1|\right)\left(\frac{\sqrt{13}}{4}|1\rangle\right) \approx 0,8125$$

$$P = \left|\langle\psi_0|\chi\rangle\right|^2$$

$$\langle\psi_0|\chi\rangle = \left(\frac{\sqrt{13}}{4}\langle 0| + \frac{\sqrt{13}}{4}\langle 1|\right)(|1\rangle) = \frac{\sqrt{13}}{4}$$

$$P = \left|\langle\psi_0|\chi\rangle\right|^2 = \left|\frac{\sqrt{13}}{4}\right|^2 \approx 0,8125$$

Задание на практическое занятие:

Пользуясь условием нормировки, определить неизвестные коэффициенты и найти вероятность того, что кубит

$$|\psi_0\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

пройдет через поляризатор, ориентированный под углом $\mathbf{\Omega^0}$, где $\alpha = \boldsymbol{\pi}\ \frac{1}{n}$, **n** - последняя цифра в номере зачётной книжки, $\mathbf{\Omega^0 = (N*10)^0}$, **N** – номер в списке группы.

Контрольные вопросы:

1. Каким принципом кибернетики обосновывается актуальность квантовых моделей и алгоритмов ?
2. Что такое кубит ?
3. Какова сфера применения квантовых алгоритмов на сегодняшний день ?
4. Что такое «нотация Дирака», каковы свойства её составляющих?
5. Во скольких базисах возможно представление кубита ?
6. Приведите примеры наиболее используемых базисов, в которых возможно представление кубита.
7. Каково основное свойство ортогонального базиса ?
8. Что такое матрица плотности ?

Рекомендуемая литература и материалы для самостоятельного изучения :

1. Дмитриев В. Прикладная теория информации, издательство «Высшая школа», 1989 г.-320 стр.
2. Думачев В. Н. «Теория информации и кодирования» Воронеж: Воронежский институт МВД России, 2012. – 248с.
3. Душкин Р. В. «Квантовые вычисления и функциональное программирование» М.: 2014. — 318 с.: ил.
4. Манин Ю.И. " Введение в теорию схем и квантовые группы"Москва:МЦНМО, 2014.-256с.
5. Павлов А.В. "АРХИТЕКТУРА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ"Учебное пособие. Санкт-Петербург: Университет ИТМО , 2016. – 87 стр.

6. Чураков А.Я., Архитектура ЭВМ, Учебное пособие, Мелитопольский Государственный Педагогический Университет Кафедра Информатики

и кибернетики (Конспект лекций)для студентов специальности «Информатика» 2006 г.

7. https://habr.com/post/144886/
8. ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%BE%D0%B7%D0%B8%D1%86%D0%B8%D0%BE%D0%BD%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0_%D1%81%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F
9. ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%B8%D1%82%D0%B0%D0%B9%D1%81%D0%BA%D0%B0%D1%8F_%D1%82%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B5%D0%BC%D0%B0_%D0%BE%D0%B1_%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D0%BA%D0%B0%D1%85
10. Amos Omondi, Benjamin Premkumar, Residue Number Systems: Theory and Implementation, 2007.
11. M. A. Soderstrand, W. K. Jenkins, G. A. Jullien and F. J. Taylor. 1986. Residue Number System Arithmetic: Modern Applications in Digital Signal Processing, IEEE Press, New York.
12. https://faqhard.ru/articles/13/11.php
13. http://www.electrosad.ru/Ohlajd/MetRR.htm
14. http://www.ixbt.com/cpu/ , Кулеры для Socket 478, сезон весна-лето 2002, Виталий Криницин, Опубликовано — 29 июля 2002 г;
15. http://www.ixbt.com/cpu/ , Измерение скоростей воздуха за охлаждающими вентиляторами и кулерами, Александр Цикулин, Алексей Рамейкин, Опубликовано — 30 августа 2002 г.