ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ» (МГТУ ГА)

Кафедра основ радиотехники и защиты информации

В.Е. Емельянов

ТЕОРИЯ СИСТЕМ.
ОСНОВЫ СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА

Учебное пособие

Утверждено редакционно-издательским советом МГТУ ГА в качестве учебного пособия

Москва
ИД Академии Жуковского
2020

УДК 519.715:004.056.5
ББК 6Ф6.5
Е60

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Московского государственного технического университета ГА

Рецензенты:
Лутин Э.А. (МГТУ ГА) – д-р техн. наук, профессор;
Колядов Д.В. (ООО «РОДЕ и ШВАРЦ РУС») – д-р техн. наук

Емельянов В.Е.

Е60 Теория систем. Основы системного анализа [Текст] : учебное пособие / В.Е. Емельянов. – М. : ИД Академии Жуковского, 2020. – 76 с.

ISBN 978-5-907275-65-2

Данное учебное пособие издается в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Теория систем. Основы системного анализа» по учебному плану для студентов очного обучения специальности 10.05.02.

В учебном пособии раскрыты все фазы процессов анализа и синтеза сложных систем и показано место триодных конструкций: цели–средства–результаты, приводятся особенности использования рассматриваемых подходов при анализе информационной безопасности телекоммуникационных систем различных типов.

Рассмотрено и одобрено на заседаниях кафедры 05.03.2020 г. и методического совета 05.03.2020 г.

УДК 519.715:004.056.5
ББК 6Ф6.5
Св. тем. план 2020 г.
поз. 29

ЕМЕЛЬЯНОВ Владимир Евгеньевич

ТЕОРИЯ СИСТЕМ. ОСНОВЫ СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА

Учебное пособие

В авторской редакции

Подписано в печать 09.12.2020 г.
Формат 60х84/16 Печ. л. 4,75 Усл. печ. л. 4,42
Заказ № 702/1008-УП07 Тираж 90 экз.

Московский государственный технический университет ГА
125993, Москва, Кронштадтский бульвар, д. 20

Издательский дом Академии имени Н. Е. Жуковского
125167, Москва, 8-го Марта 4-я ул., д. 6А
Тел.: (495) 973-45-68 E-mail: zakaz@itsbook.ru

ISBN 978-5-907275-65-2

Оглавление

Введение

Зачастую специалисты в области защиты информации в телекоммуникационных системах вынуждены принимать решения в условиях полного или частичного отсутствия информации. В свою очередь, термин система,определяемый в философском смысле как целое, состоящее из частей, используется при формировании оценок для принятия решений в условиях определенности, а также в условиях неопределенности.

В сфере управления система управления определяется как совокупность взаимосвязанных элементов-узлов, целей управления,функций,организационно-технических структур,методов и алгоритмов управления. Система управления характеризуется целостностью,управляемостью,упорядоченностью и другими свойствами элементов,отражающих особенности объектов управления и методов управления. Особенно важной становится поиск решения этой задачи по отношению к обеспечению информационной безопасности телекоммуникационных систем. Анализ видов последних с учетом отраслевой специфики приводит к выводу о возрастающей иерархия носит решаемых задач. Для анализа и исследования систем управления широко используются методы системного анализа,теории полезности и теории принятия решений.

Заметим,что при этом некоторые решения должны быть кси алчно приближены к оптимальным, что требует от исполнителя хорошего знания всех методов математического программирования.

В настоящем учебном пособии изложены основные принципы и методы принятия решений.

1. Основные математические понятия

1.1.Множества и операции над ними

Множеством называется однозначно заданное (путем определения условий, признаков и свойств) объединение предметов, данных опыта или объектов мышления.

Мы говорим, например, о множестве целых чисел, о множестве точек круга, о множестве книг в библиотеке. Последнее множество является конечным, два других - бесконечными. Если предмет m принадлежит множеству M, то m есть элемент M, что обозначается

$$\boldsymbol{m \in M} \tag{1.1}$$

В противном случае мы пишем$m \notin M$(m не являетсяэлементом M). Если$\mathfrak{A}$,$\mathfrak{B}$... —условия, определяющие M, то мы записываем

$$M=\{m \mid \mathfrak{A},\mathfrak{B},\ldots\} \tag{1.2}$$

Например,

$$M=\{m \mid m \in C \text{ и } Re(m)=0\} \tag{1.3}$$

если M обозначает множество чисто мнимых чисел (С- множество комплексных чисел, Re-действительная часть). Конечные множества определяются также путем указания их элементов:

$$M=\{m_1,m_2,\ldots,m_n\} \tag{1.4}$$

или

$$M=\{m_\nu, \nu \in I_n\}; I_n=\{1,2,\ldots,n\} \tag{1.5}$$

Последнее обозначение может быть также использовано и в случае бесконечных множеств при соответствующем выборемножества индексов $I_п$. В частном случае$\{m\} \subset M$,$m \in M$.

Следует отметить, что из каждой рассматриваемой зависимости видно, обозначает ли$m \in M$-постоянный элемент из М или это переменная, которая может обозначать тот или иной элемент из М.

Пустое множество («множество», возникающее при невыполнении условий $\mathfrak{A}$,$\mathfrak{B}$,… ни для одного объекта) обозначается Ø. Если M есть множество N или

$$M \subset N \tag{1.6}$$

то из $m \in M$ всегда следует$m \in N$.Например, натуральные числа 1,2,… являются подмножеством целых чисел …, —2, —1, 0, 1, 2, … Если$M \subset N$ и$N \subset M$то мы записываем $M=N$, в противном случае $M \neq N$. В первом случае М и N обозначают равные множества, во втором случае — неравные множества. Всегда справедливо $\emptyset \subset M$

Элементы множества могут сами являться множествами. Такие множества называются системами множеств, которые принято обозначать

$$\boldsymbol{M=\{M_\nu, \nu \in I_n\}}. \quad (1.7)$$

Объединив системы множеств, получим семейства множеств

$$\boldsymbol{m=\{M_\nu, \nu \in I_n\}} \quad (1.8)$$

и т. д.

Особое значение представляет степень множества $\mathfrak{B}(M)$. Оно состоит из множества всех подмножеств данного множества М. По определению, к элементам этой системы множеств $\mathfrak{B}(M)$ относятся также пустое множество Ø и само множество М: $\emptyset \subset M$, $M \subset M$.

Из данных множеств М и N при помощи определенных операций можно образовать новые множества, в частности, объединение множеств $M \cup N$; пересечение множеств $M \cap N$; и разность множеств $M \setminus N$.

$M \cup N$ состоит из всех элементов, принадлежащих по меньшей мере одному из множеств М и N, $M \cap N$ — из всех элементов, относящихся одновременно к обоим множествам М и N.

$M \setminus N$ охватывает все элементы, относящиеся к М, но не к N. На рис. 1.1 изображены указанные выше конструкции множеств с помощью графических схем (диаграмм множеств). Если $M \cap N = \emptyset$ (отсутствуют общие элементы у М и N), то М и N называются непересекающимися (не имеющими общих элементов).

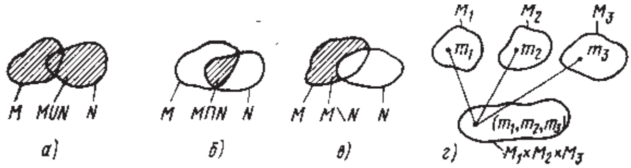

Рис. 1.1. Диаграммы множеств: а — объединение; б — пересечение; в — разность; г — прямое произведение.

Для операций $\cup$, $\cap$ и $\setminus$ выполняются определенные правила, например: $(M \cup N) \cap P = (M \cap P) \cup (N \cap P)$.

Таким образом, по отношению к пересечению множеств образование объединения множеств является дистрибутивным. Операция $\cap$ пересечения по отношению к операции $\cup$ также является дистрибутивной, в чем легко убедиться на основании рассмотрения диаграмм множеств.

Следует также заметить, что $\cup$ и $\cap$ ассоциативны, например,

$$(M_1 \cup M_2) \cup M_3 = M_1 \cup (M_2 \cup M_3).$$

Поэтому можно кратко писать

$$M_1 \cup (M_2 \cup M_3)$$

или

$$\bigcup_{\nu=1}^{3} M_\nu$$

Объединение и пересечение множеств можно применять и к бесконечному числу множеств, что обозначается

$$\bigcup_{i} M_i = M$$

$$M = \bigcap_{\nu} M_\nu$$

Особую важность для всего последующего изложения представляет еще одна конструкция множеств: прямое (декартово) произведение множеств M и N. Для этого прямого произведения записывают

$$\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{N} \tag{1.9}$$

и понимают под этим множество, состоящее из упорядоченных пар элементов (т, п) а именно множество всех возможных пар (т, п) с$m\in M$и$n\in N$.

Соответственно $M_1\times M_2\times\ldots\times M_n$ — множество всехупорядоченныхn-ок $(m_1, m_2,\ldots, m_n)$ с элементами$m_\nu\in M_\nu$(ν= 1, 2, …,n), т. е. всех возможных объединений поn элементов m_ν из n (различных) множеств M_νс учетом их порядка следования (см. рис. 1.1,г).

В качестве примера приведем декартово произведение двух конечных множеств:

$$\{a, b\}\times\{1, 2, 3\}=\{(a, 1), (a, 2), (a, 3),$$
$$(b, 1), (b, 2), (b, 3)\}.$$

В частности, можно рассматривать декартово произведение n одинаковых множеств. Тогда пишем просто M^n вместо $M\times M\times\ldots\times M$. M^n называется декартовой степенью множества (М — основание, n — показатель степени).

1.2.Логические символы

Особые условные обозначения для наиболее часто встречающихся логических соотношений применяются не только с целью более краткого описания, но в первую очередь, для более четкого выделения логической структуры содержания.

Когда высказывание $\mathfrak{B}$ является следствием высказывания $\mathfrak{A}$,

$$\mathfrak{A}\Longrightarrow\mathcal{B}; \qquad (1.10)$$

Если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ имеют равносильное содержание (высказывания, утверждения), записывают

$$\mathfrak{A}\Leftrightarrow\mathfrak{B} \qquad (1.11)$$

Тогда исходя из указанного выше можно записать

$$M=\mathrm{N}\Leftrightarrow M\subset\mathrm{N} \text{ и } \mathrm{N}\subset M,$$

$$\{\mathrm{m}\}\subset M\Leftrightarrow \mathrm{m}\in M$$

или (что легко проверить)

$$M\subset N \text{ и } N\subset\mathrm{P}\Longrightarrow M\subset\mathrm{P},$$

$$M\times N=\{(m,n)\mid m\in M \text{и } n\in N\},\mathfrak{B}(M)=\{N\mid N\subset M\}.$$

1.3. Отношения и операции

Между элементами m множества M могут существовать определенные взаимосвязи (отношения). Если, например, $M=N$ является множеством натуральных чисел 1, 2, 3, ..., то взаимосвязь или отношение «m есть делитель n» возможна для определенных пар элементов (т, п) из M×M (например, для пар (2. 4), (3, 6), (3, 9), а для других нет (например, (4, 5)). Таким образом, упорядоченные пары элементов (m, п), для которых выполняется заданное отношение σ, образуют подмножество $M\times M$. Отсюда получаем общее определение: подмножество $M\times M$ есть (или определяет) (бинарное) отношение σ на множестве М: σ =(M×M),⊂(M×M). $m_1 \in M$находится в отношении σс $m_2 \in M$если (m_1,m_2) является элементом подмножества $(M\times M)$из M×M определенного σ:

$$\boldsymbol{m_1 \sigma m_2 \Leftrightarrow (m_1,m_2) \in (M\times M)_\sigma} \tag{1.12}$$

Соответствующие определения справедливы и в случае многоместных отношений, которые задаются подмножествами $M\times M\times M=M^3$ или в общем случае M^n (n- местные отношения).

Отношения могут иметь различные общие свойства.

Мы говорим:

1) σ рефлексивно, если т σ т выполняется для всех$m \in M$;
2) σ симметрично, если из $m_1\ \sigma m_2$ всегда следует $m_2\ \sigma m_1$ (1.13)
3) σ транзитивно, если из $m_1\ \sigma$ т$_2$ и $m_2\ \sigma m_1$ всегда следует $m_1\ \sigma m_3$;
4) σтождественно, если из $m_1\ \sigma m_2$ и $m_2\ \sigma m_1$ всегда следует $m_1 = m_2$.

Например, отношение⊂: на степени множества$\mathfrak{B}(M)$(M—любое множество) рефлексивно, а на множестве действительных чисел< («меньше чем») транзитивно и ≤(«меньше или равно») тождественно.

Отношения могут быть первоначально выражены языковыми средствами (...«есть делитель» ...; «меньше чем»...), но это не является обязательным. Каждому, выраженному языковыми средствами отношению σ на M ставится в соответствие подмножество из M^n. Всякое подмножество из M^nпредставляет отношение σ на M, независимо от того, может ли быть для σнайдено языковое выражение или нет.

Не идентично формулируемые в разговорной речи отношения могут быть идентичными, а именно тогда, когда соответствующие подмножества M^n одинаковы. Так как множество всех подмножеств M^n конечно (при конечном М), то и в множестве М существует только конечное множество различных n-местных отношений.

В бинарном отношении, заданном на M, все $m \in M$, стоящие в элементах из $M \times M$ на первом месте, образуют область определения $\mathfrak{B}(\sigma)$ отношения σ.

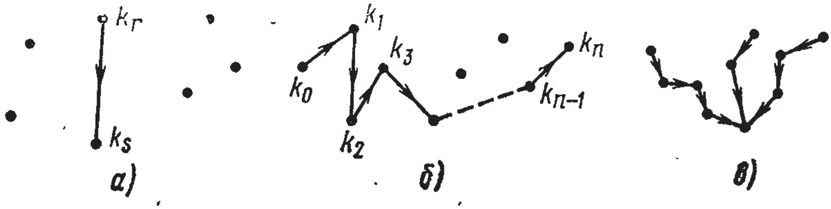

Рис. 1.2. Граф отношения:а — ветвь; б — дуга; в — дерево.

Соответственно все элементы, стоящие в (m, n) на втором месте, образуют область значений $\Re(\sigma)$ отношения σ.При определенных обстоятельствах отношение σ является специальным типа $M_1 \times M_2 (M_1, M_2 \subset M, M_1 \cap M_2 = \emptyset)$

Тогда отношение σ можно рассматривать как отношение на {A,B}($M_1 \subset$A,$M_2 \subset$B). В более общем случае:

$$\sigma = (A \times B)_\sigma \subset A \times B$$

Так как бинарное отношение σ на множестве М характеризуется подмножеством $M \times M$, то можно дать следующее геометрическое изображение σ.

Каждому элементу m_v из M ставят в соответствие точку k_v (узел) на плоскости и соединяют k_r с k_rнаправленным отрезком (ветвью) в том случае, если $(k_r, k_r) \in (M \times M)$ (рис. 1.2,а).

Образованное таким образом геометрическое изображение называется графом отношения σ. Каждому отношению σ на конечном множестве соответствует такой (направленный) граф.

Число ветвей, связанных с одним узлом, называется степенью узла. Различают внутреннюю степень (число ветвей, входящих в узел) и внешнюю (число ветвей, выходящих из узла).

Дуга есть последовательность ветвей (k_0,k_1), (k_1,k_2), . . . , (k_{n-1},k_n), где K_0(исходный узел) имеет внешнюю степень 1 и внутреннюю степень 0, а K_n(конечный узел) —внутреннюю степень 1 и внешнюю степень 0. Все остальные узлы имеют внешнюю и внутреннюю степень, равную 1 (рис.1.2,б).

Циклом называется дуга, у которой начало и конец совпадают.

Дерево — есть система дуг с общим (и только общим) конечным узлом, называемым корнем дерева (рис. 1.2,в).

Граф называется однозначным справа (граф отображения или состояния), если все его узлы имеют, по крайней мере, внешнюю степень, равную 1. Таким образом, дуги и циклы всегда однозначны справа, но и другие подграфы могут также обладать этим свойством (например, деревья).

Отношения, обладающие одновременно тремя первыми свойствами, приведенными в (1,13), называются отношениями эквивалентности и обозначаются знаком ~.

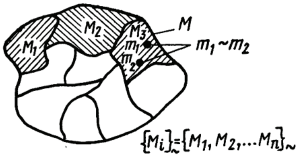

Рис. 1.3 Разбиение на классы.

Если на множестве M определено отношение эквивалентности σ=~, то элементы M можно однозначно подразделить на непересекающиеся классы M_i (подмножества M) таким образом, что два элемента m_1 и m_2будут принадлежать к общему классу (классу эквивалентности) именно тогда, когда они эквивалентны, т. е. когда $m_1 \sim m_2$. И наоборот, каждое подразделение на классы $\{M_\mathrm{i}\}$ множества M (любое разложение Mна непересекающиеся подмножества M_i при условии $\bigcup_i M_i = M$) определяет отношение эквивалентности на M (при котором пары (m_1,m_2), принадлежащие одному и тому же классу, эквивалентны) (рис. 1.3).

Если, например, на множестве натуральных чисел N задано$n_1 \sigma n_2 \Leftrightarrow n_1$ и n_2имеют одинаковый остаток при делении на $a(n_1, n_2, a \in N)$

Имеем

$$\boldsymbol{M_1 \cap M_2 = M_1 \cap M_2 = M_1 \cap M_2 = \emptyset;}$$
$$\boldsymbol{M_1 \cup M_2 \cup M_3 = N}$$

Отношения, для которых одновременно выполняются 1-, 2- и 4-е условия (1.13), называются отношениями порядка (условное обозначение$\prec$)Например$\prec = \leq$, есть отношения порядка на множестве действительных чисел R.

Отношения эквивалентности и порядка принадлежат к основным отношениям математики и ее применений (и характеризуются, как и всякое отношение, подмножествами $M \times M$).

Наряду с отношениями эквивалентности и порядка особо важное значение имеет отношение «отображение», или «функция».

Отношение σ на M называется отображением (функцией), если из $m\sigma n_1$ и $m\sigma n_2$ всегда следует $n_1 = n_2$. Таким образом, каждому$m \in M$всегда может быть поставлен в соответствие самое большее только один элемент $n_1 = n_2 = n$ или (m, n_1) и (m, n_2) ($n_1 \neq n_2$) в-случае отображения никогда одновременно не являются элементами $(M \times M)_\sigma \subset M \times M$; другими словами, $(M \times M)$,— однозначно справа .$n(=n_1=n_2)$назы-вают образом m, m — прообразом n. В качестве условного обозначения отношения принимается знак→и вместо $m\sigma n$ или $(M\times M)_\sigma=\{(m,n)\}_\sigma$, = σ записывают

$$m \to n \text{ или } \{(m, n)\}_\to =\to. \tag{1.14}$$

Вместо (1.14) можно также записать

$$\mathrm{f}m=n \text{ или } \mathrm{f}(m)=n \text{ и } (m,\mathrm{f}(m))\}_\mathrm{f}=\mathrm{f}<\mathrm{f}(\mathrm{m})>, \tag{1.15}$$

где отображение обозначается через f, g, ... Множество всех прообразов, принадлежащих M, образует область определения (область оригиналов)(f)=M_D,а множество всех образов отображения→образует область изображений (область образов)$\mathfrak{R}$(f)=M_W(рис. 1.4).

В общем случае,$M_\mathrm{D}\subset M$,$M_\mathrm{W}\subset M$(M_D,$M_\mathrm{w}\neq M$)

и

$$\mathbf{M_D\cap M_W\neq\emptyset}$$

Важнейшим случаем является $M_\mathrm{D}=M$здесь речь идет об отображении f из M в M, что обозначается

$$f{:}M\longrightarrow M(\mathfrak{B}(f)=M) \tag{1.16}$$

Если также $M_\mathrm{w}=M$, то мы имеем отображение из M на M (сюръективное отображение) $\mathfrak{R}$(f)=M.

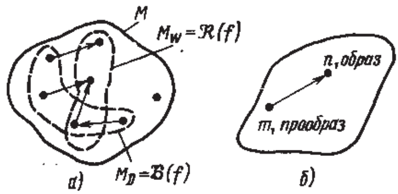

Рис. 1.4. Взаимно-однозначные отношения ((отображения): а — область определения и область значений; б — образ — прообраз.

Возможно, что в некотором отображении не только каждому элементу из M_D в точности соответствует один элемент из M_w, но и, наоборот, каждому элементу из M_w поставлен в соответствие ровно один элемент из M_Dкак прообраз (и без того как минимум один элемент из M_D соответствует каждому элементу из M_w) .Тогда отображение на M называется взаимно-однозначным, и, в частности, инъективным, если $M_\mathrm{D}=M$, и биективным ($M\leftrightarrow M$), если $M_\mathrm{W}=M$.

При этом следует учитывать, что в бесконечных множествах возможно взаимно-однозначное отображение множества M на одно из его (собственных) подмножеств$M_1\subset M$($M_1 \neq M$).

Например, при записи $y=x^z$ множество действительных чисел из интервала [0, 1/2] взаимно-однозначно отображается на подмножество M_1=[0, 1 /4] из M=[0, 1/2] (при этом $y=x^2$ является инъективным отображением из M в M).

Множества, взаимно-однозначно (или, точнее, биективно) отображаемые друг на друга, называются равномощными. Например, из вышеприведенного видно, что множество [0, 1/4] равномощно множеству [0, 1/2].

В частном случае может быть $M_D \cap M_w = \varnothing$. Тогда M_D и M_w можно рассматривать как самостоятельные множества M и N, и, следовательно, можно говорить о взаимно-однозначном отображении множества M на множество N или множества M на множество N' ($M \to N'$), если N вложено в N' ($N \subset N'$, рис.1. 5). К этому случаю также можно применить понятия «инъективный» и «биективный». В общем случае $f{:}M \to N$ есть некоторое частное подмножество из $M \times N$, а именно некоторое однозначное справа подмножество$(M \times N) \to$

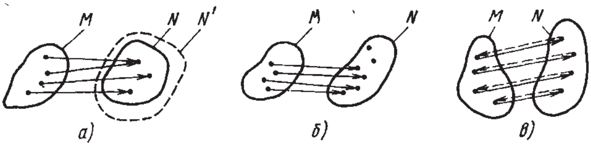

Рис 1.5 Отображения: а — отображения «из ... в»; б — инъективное отображение; в — биективноеотображение.

Пусть $f{:}\ M \to N$ есть отображение из M в N и $g{:}M_1 \to N(M_1 \subset M)$другое отображение из $M_1 \subset M$ в N. Если совпадает с $M_1 \to N$ наM_1, т. е. $f(m)=g(m)$ для всех $m \in M_1$, то $g{:}M_1 \to N$ называется ограничением $f{:}\ M$-+N на множестве $M \to N$и обозначается $g{:}M_1 \to N = f \mid M_1$.

Соответственно для одноэлементного множества $\{m\} \subset M \Leftrightarrow m \in M$

$$\mathbf{f \mid \{m\} = f \mid m (m \in M)}$$

совпадает с одноэлементным множеством $\{(m,n)\} \subset M \times N$ или, что одно и то же, с парой элементов $(m, n) \in M \times N$ где $n=f(m)$.$f \mid M_1$и $f \mid m$ как специальные отношения также являются подмножествами $M \times N$, и, напротив,

$$\mathbf{\Re(f \mid M_1) = N_1 \text{ и } \Re(f \mid m) = \{n\}}$$

естественно, являются только подмножествами $N(\{n\} \subset N \Leftrightarrow n \in N)$. Это обстоятельство следует особенно учитывать при анализе взаимосвязей в теории систем.

Очень важное значение для теории систем имеет объединение отображений.

Пусть

$$\mathbf{g_1{:}M_1 \longrightarrow N(M_1 \subset M),}$$
$$\mathbf{g_1{:}M_2 \longrightarrow N(M_2 \subset M)}$$

И

$$\mathbf{M_1 \cap M_2 = \varnothing}$$

Тогда отображение $g{:}M_1 \cup M_2 \longrightarrow N$, в котором $g \mid M_1 = g_1$, $g \mid M_2 = g_2$, называется объединением $g_1 g_2$ отображений g_1 иg_2 .

В заключение назовем еще один, особенно важный для теории систем класс отображений: интегральные преобразования

$$\boldsymbol{F(p) = \int\limits_{(x)} f(x)h(x,p)dx \binom{x \in X_1}{p \in Y_1}}$$

Здесь речь идет об отображениях отображений, т. е. о соответствиях типа

$$\{(X_1 \longrightarrow X_2)\} \longrightarrow \{(Y_1 \longrightarrow Y_2)\}: \{(X_1 \longrightarrow X_2)\} \times Y_1 \longrightarrow Y_2$$

где X_1, X_2, Y_1 и Y_2 обозначают (взаимосвязанные) подмножества множества действительных или комплексных чисел.

Наиболее важным интегральным преобразованием является преобразование Лапласа

$$\boldsymbol{F(p) = \int\limits_0^\infty f(x)e^{-px}dx = L < f(x) > (h(x,p) = e^{-xp}}$$

f: R→R (непрерывная) с комплексной переменной $p=\sigma+jw$ $(\sigma=Re\{p\}<0)$ в ядре преобразования $h(x,\ p)$ и родственное ему преобразование Фурье

$$\boldsymbol{F(p) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega x}dx(h(x,p) = e^{-j\omega x})}$$

f: R→R(непрерывная), которое при $f(x)=0$ и $x<0$ можно записать в виде

$$\boldsymbol{\int\limits_0^\infty f(x)\, e^{-j\omega x}dx = L < f(x) >_{p=j\omega}}$$

Например, что легко вычислить

$$L<x>=1/p^2, L<\sin\alpha x>=\alpha/(p^2+\alpha^2)$$

т. е. выполняется

$$\boldsymbol{(x \to x)_{x\in R} \to \left(p \to \frac{1}{p^2}\right)_{p\in C}},$$

$$\boldsymbol{(x \to \sin\alpha x)_{x\in R} \to \left(p \to \frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}\right)_{p\in C}}.$$

*М*ножества M и N'=B можно выбирать совершенно произвольно; например, M может означать декартово произведение $A\times A$. Тогда вместо M→B получаем с помощью

$$\boldsymbol{A\times A \to B} \tag{1.17}$$

отображение, при котором упорядоченным парам элементов (a_1, a_2) $(a_1,a_2\in A)$ из $A\times A$ставят в соответствие элементы b из B: $(a_1, a_2)\to b$; $f(a_1, a_2)=b$. Другими примерами отображений являются отображения типа

$$\boldsymbol{A\times A\times B \to A,\ A^n \to B.} \tag{1.18}$$

Такие отображения декартовых произведений в множества называются алгебраическими операциями на множествах A, B, ... Если R есть множество действительных чисел, то $R^n \to R$ совпадает с понятием «функция от n независимых переменных»

Совместно с одной или несколькими операциями (отображениями типа (13)) множества A, B, ... образуют алгебраические структуры.

В простейшем случае алгебраическая структура состоит из одного единственного множества A и одной. бинарной операции типа $A \times A \to A$.

Тогдавместо $(a_1, a_2) \to a_3, (a_\nu \in A, \nu = 1, 2, 3)$ обычно записываются $a_1 o\ a_2 = a_3$, (или $a_1 \star a_2$и т. п.). При этом о есть символ алгебраической операции, ДляA=R, например, о может означать операцию «сложение» ($o=+$) или «умножение»

($o=*$). Сама алгебраическая структура (носитель системы A+операция о) обозначается символом (A, o).

Другой пример алгебраической структуры —($\mathfrak{B}(M), \cup$) (степень множества с операцией объединения).

Если алгебраическая операция о, кроме того, удовлетворяет некоторым общим условиям (например, выполнение закона ассоциативности $(a_1 \text{ o } a_2) \text{o } a_3 = = a_1 \text{ o } (a_2 o\ a_3)$,коммутативного закона $a_1 \text{ o } a_2 = a_2 \text{ o } a_1$), то соответствующие структуры (A, о) имеют принятые в алгебре специальные названия (полугруппа, группа и т. д.).

Полугруппу мы получаем, например, в том случае, если (кроме a, $b \in A \Longrightarrow a\ o\ b \in A$) операция о является ассоциативной.

В качестве элементарного и наиболее важного примера рассмотрим множество $\Phi = \{A \to A\}$ всех отображений $\varphi : A \to A$множества A в себя. Так как носитель алгебраической структуры можно выбирать произвольно, то в качестве элементов он может также содержать и отображения в себя некоторого множества

$$(A \to A = (A \times A) \to \subset A \times A).$$

Определим в $\Phi = \{A \to A\} = \{\varphi\}$ операцию $\varphi_1 * \varphi_2$ (умножение) отображений φ_1и φ_2 как $(\varphi_1 * \varphi_2)a = \varphi_1(\varphi_2, a)$ При этом речь идет о последовательном выполнении отображений: сначала с помощью φ_2 элемент $a \in A$ отображается в $\varphi_2 a = b \in A$, затем b с помощью φ_1отображается в $\varphi_1\ b = c$. Таким образом, из $\varphi_1 \in \Phi$ и $\varphi_2 \in \Phi$ получаем новое отображение $\varphi_1 * \varphi_2 \in \Phi$. В общем случае $\varphi_1 * \varphi_2$

является некоммутативной операцией ($\varphi_1 * \varphi_2 \neq \varphi_2 * \varphi_1$) но ассоциативной:

$$\varphi_1 * \varphi_2 * \varphi_3 = (\varphi_1 * \varphi_2) * \varphi_3$$

Ассоциативность доказывается следующим образом:

$$\varphi_1(\varphi_2 * \varphi_3)a = \varphi_1[(\varphi_2 * \varphi_3)a] = \varphi_1[\varphi_2(\varphi_3 a)] = (\varphi_1 * \varphi_2)\varphi_3 a$$

Если для всех $a \in A \varphi a = a$, то$\varphi = \varphi_e$ — тождественное (нейтральное) отображение.

Таким образом, совместно с произведением отображений множество всех отображений φ: $A \to A$ образует полугруппу (с нейтральным элементом φ_e).

Таким же образом множество всех конечных последовательностей (слов) $a_1, a_2, \ldots, a_n$ из A образует по отношению к операции объединения слов полугруппу.

В заключение заметим, что операцию о на А можно перенести на множество $\{A \to A\}$:

$$(\varphi_1 * \varphi_2)a = \varphi_1 a * \varphi_2 a$$

Как правило, таким образом задаются все алгебраические структуры,элементами носителя которых являются отображения.

Исходя из этих простейших структур, путем введения дальнейших операций или (носителей) множеств, мы переходим к новым алгебраическим фундаментальным структурам (кольца, поля, векторные пространства и т. д.);

Все эти алгебраические структуры задаются аксиоматически, в том смысле, что основные свойства определяемых операций считаются выполненными.

Например, мы получаем определение векторного пространства (линейного пространства), когда выполняются следующие условия:

1) задано множество Vc элементами v_1, v_2, v_3 ,… (векторы) и бинарная операция ($V \times V \to V$;сложение +), которая каждым двум элементам v_1, v_2 из V ставит в соответствие некоторый третий элемент v_3 из V:$v_1 + v_2 = v_3$;

2) $v_1 + v_2 + v_3 = v_1 + v_2 + v_3$;

3) $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$

4) уравнение $v_1 + r = r + v_1 = v_2$имеет единственное решение: $r = v_2 - v_1$;

5) задана операция умножения на скалярную величину ($V \times R \to V$), которая каждому действительному числу $a \in R$ и каждому $v_1 \in V$ ставит в соответствие некоторый$v_2 \in V$:

$$v_1 * a = a * v_1 = v_2$$

6) выполняются соотношения

$$a_1 * (a_2 * v) = (a_1 * a_2) * v$$

$$(a_1 + a_2) * v = a_1 * v + a_2 * v$$

$$a * (v_1 + v_2) = a * v_1 + a * v_2$$

$$1 * v = v$$

Если для структуры (V, +) выполняются только первые четыре условия, то говорят о коммутативной группе, т. е. элементы векторного пространства, согласно определению, являются всегда элементами группы.

Особое значение среди отображений типа $\mathbf{A} \times \mathbf{A} \to$Аимеют отображения типа $\mathbf{A} \times \mathbf{A} \to R^+$ (где R+—множество неотрицательных действительных чисел).

Мы говорим, что множество A образует метрическое пространство, когда каждому элементу (a_1, a_2) из $A \times A$ставится в соответствие элемент $r=\rho(a_1,a_2)$

из R+, обладающий следующими свойствами:

1) $\rho(a_1, a_2) = 0$ только тогда, когда $a_1=a_2$;
2) $\rho(a_1, a_2) = \rho(a_1, a_2)$; (1.19)
3) $\rho(a_1, a_2) + \rho(a_1, a_2) > \rho(a_1, a_2)$.

Множество действительных чисел R с $\rho(r_1, r_2) = |r_1-r_2|$ ($r_1, r_2 \in R$), очевидно, образует метрическое пространство. $\rho(a_1, a_2)$ называется расстоянием между элементами a_1, a_2, принадлежащими A, или метрикой метрического

пространства, образованного A совместно с ρ (A,ρ).Множество всех элементов а из M, которые удовлетворяют неравенству $\rho(a_1, a_2) \leq k$(a_1 фиксировано),образует окрестность a_1.

Метрические пространства являются частным случаем значительно более общей структуры, а именно топологического пространства. Вообще о топологическом пространстве говорят в тех случаях, когда можно каким-либо образом задать «расстояние» и «окрестность», с помощью которых, как будет показано в дальнейшем, можно определить понятие предела.

Если поставить в соответствие каждому натуральному числу 1,2, 3, ... некоторый элемент A (отображение $N \rightarrow A$), то получается последовательность $a_1, a_2, a_3 \ldots = (a_\nu)$ ($a_\nu \in A$). Такая последовательность сходится к пределу $a \in A$, когда $\rho(a_\nu, a)$ стремится к нулю при стремлении ν к бесконечности:

$$\boldsymbol{\rho(a_\nu, a) \rightarrow 0 \text{ при } \nu \rightarrow \infty.} \tag{1.20}$$

В этом случае записывают также

$$\boldsymbol{a_\nu \rightarrow a (\text{при } \nu \rightarrow \infty) \text{ или } \lim a_\nu = a} \tag{1.21}$$

и называют последовательность (a_ν) сходящейся. В этомслучае справедливо следующее утверждение: при выборе произвольного $\varepsilon>0$ всегда можно указать такое $N_0>0$ (которое должно зависеть от ε), что

$$\boldsymbol{\rho(a_\nu,a_\mu)<\varepsilon, \ \text{для всех } \nu,\mu > N_0} \tag{1.22}$$

Обратное не всегда верно. Если для некоторой последовательности (a_ν) элементов a_ν из Авыполняется (1.22), то, возможно, не существует $a \in A$, для которого выполняется (1.20).

Зададим, например, в множестве рациональных чисел R, последовательность$\left(\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu\right)$которая, очевидно, удовлетворяет условию(1.22). Однако при этом не существует никакого рационального числа r_0, обладающего свойством

$$\boldsymbol{\rho\left[\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu\right], r_0 \text{при } \nu \rightarrow \infty}$$

так как

$$\boldsymbol{lim}\left(\mathbf{1}+\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\nu}}\right)^{\boldsymbol{\nu}}=\boldsymbol{e}\notin\boldsymbol{R_0}$$

Последовательность (a_ν) из A, обладающая свойством (1.22), называется сходящейся в себе (фундаментальной последовательностью, последовательностью Коши). Если сходящаяся в себе последовательность (a_ν)изAявляется сходящейся (т. е. a_ν→a при $\nu\to\infty$; a_ν, a∈A), топространство {A,ρ) называется полным (относительно метрики ρ).

Рассмотрим еще отображение метрического пространства (A_1, ρ_1) в метрическое пространство (A_2, ρ_2):

$$A_1\to A_2$$

Или$\mathbf{a_2=f(a_1)(a_1\in A_1,\ a_2\in A_2)}$

Отображение f называется равномерно непрерывным, когда для каждого ε>0 можно найти δ>0 такое, чтодля всехa_1,a'_1∈Aс $\rho_1(a_1,a'_1)<\delta$ справедливо также $\rho_2[f(a_{1)}),f(a'_{1)})]<\varepsilon$.

При равномерно непрерывном отображении $A_1\to A_2$сходящаяся в себе последовательность (a_ν) из A, отображается также в сходящуюся в себе последовательность f(a_y)из A_2.

Топологические структуры могут быть одновременно и алгебраическими структурами, и в этих случаях метрика подобных структур косвенным образом определяется в алгебраических понятиях.

Пусть, например, V— носитель некоторого конечномерного векторного пространства, т. е. каждый v∈V представим в виде

$$\boldsymbol{v}=\sum_{\boldsymbol{\nu}=1}^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{e_\nu v^\nu}(\boldsymbol{e^\nu}\in\boldsymbol{V}) \tag{1.23}$$

где n не может быть выбрано меньшим. В этом случае метрику можно вводить через определение скалярного произведения

$$\boldsymbol{v_1}*\boldsymbol{v_2}=\sum_{\boldsymbol{\nu}=1}^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{v_1^\nu v_2^\nu} \tag{1.24}$$

при помощи

$$\parallel\boldsymbol{v}\parallel=\sqrt{\sum_{\boldsymbol{\nu}=1}^{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{v^\nu})^2}=\sqrt{\boldsymbol{v}*\boldsymbol{v}} \tag{1.25}$$

нормы (длины вектора), которая, очевидно, обладает следующими свойствами:

1)$\|v\|\geq 0$ и $\|v\|=0$ только когда $v=0$;

2)$\|v_1+v_2\|\leq\|v_1\|+\|v_2\|$;

3)$\|r*v\|=|r|\,\|v\|(r\in R)$(1.26)

Тогда

$$\boldsymbol{\rho(v_1,v_2)=||v_1-v_2||=\sqrt{\sum_{\nu=1}^{n}(v_1^{\nu}-v_2^{\nu})^2}} \tag{1.27}$$

очевидно, является метрикой в V.

Введение нормы возможно даже и в том случае, когда векторное пространство является бесконечномерным (когда нельзя представить все векторы из V в виде (1.23)) и, следовательно, нельзя определить скалярное произведение в виде (1.24).

Например, V=C, множество всех непрерывных действительнозначных функций f, определенных на интервале [0, 1], со сложением (вычитанием) $f_1\pm f_2$и умножением r*f, определенным обычным образом:

$$(f_1\pm f_2)(x)=f_1(x)\pm f_2(x);(r*f)(x)=r*f(x)$$

$$r\in R,\ x\in[0,1]$$

также является векторным пространством. В качестве нормы этого пространства можно выбрать

$$\boldsymbol{||f||=\max_{0\leq x\leq 1} f(x)} \tag{1.28}$$

Тогда метрика определяется как

$$\boldsymbol{\rho(f_1,f_2)=||f_1-f_2||=\max_{0\leq x\leq 1}|f_1(x)-f_2(x)|} \tag{1.29}$$

В случае если функции f не являются непрерывными на интервале I, то

$$\boldsymbol{\rho(f_1,f_2)=\sup_{x\in I}|f_1(x)-f_2(x)|=||f_1-f_2||} \tag{1.30}$$

является метрикой и соответственно- $\boldsymbol{\sup_{x\in I}|f(x)|}$— нормой.

На этом закончим предварительное рассмотрение общих математических основ теории систем. Более полное и глубокое изложение затронутых вопросов можно найти в [1,2,3]

1.4. Основные понятия системного анализа

1.4.1.Входные и выходные величины.Переменные состояния

Динамическая система. Понятие динамической системы в зависимости от постановки задачи и практических требований может приобретать более широкое или более узкое значение.

В технике под динамической системой в первую очередь понимаются взаимодействие физических величин x, y, z,…,∈R), возникающих в технических устройствах и приборах и рассматриваемых с определенной точки зрения.

В качестве простейшего примера рассмотрим электрическую цепь (четырехполюсник) (рис. 1.6). Между пятью существующими в этой цепи физическими величинами, четырьмя напряжениями u_1, $и_2$, u_R и u_L и то-

ком iсуществует следующие зависимости:

$$\boldsymbol{u_1 = u_R + u_L,\ u_R = Ri,} \qquad (1.28)$$
$$\boldsymbol{u_2 = u_L,\ u_L = L(di/dt).}$$

При этом предполагается, что индуктивность L и сопротивление R постоянны, т. е. не зависят от тока, напряжения и времени t.

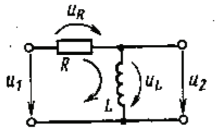

Рис.1.6 Четырехполюсник (электрическая система).

С учетом электротехнических применений данной цепи введенные в этом примере физические величины (переменные системы) подразделяются на:

а — заданную величину u_1(причина, входная величина);

б — величину, предназначенную для некоторой цели u_2 (действие, выходная величина);

в — величины, участвующие в преобразовании u_1вu_2: промежуточные величины u_R, u_L, i (внутренние переменные системы).

В более общих случаях динамическая система может иметь большее число входных и выходных величин (внешних переменных системы), которые совместно с внутренними переменными системы являются функциями времени.

Основной задачей теории систем является вскрытие зависимостей между входными и выходными величинами некоторой динамической системы в наиболее общем, не зависящем от привлечения специальных свойств системы, связанных с ее реализацией (элементная база, структура взаимосвязей отдельных элементов и т. д.)

Переменные состояния. Входные величины в качестве причины определяют изменения во времени всех переменных системы и, в частности, всех выходных величин. Значение этих величин в определенный, заданный момент времени t в общем случае зависит от изменения во времени входных величин на интервале (-∞, t), т. е. значения внутренних переменных системы и ее выходных величин, как правило, определяются всей предысторией изменения входных величин. В случае если предшествующая данному моменту времени эволюция входных величин известна не полностью (изменение входных величин известно только в интервале $[t_0,t]$ $(t_0<t)$, предшествующем моменту времени t, то может оказаться,

что в общем случае этой информации будет недостаточно для определения значений внутренних переменных системы и выходных величин в настоящий момент времени. Однако в том случае, когда имеется дополнительная информация о значениях определенных переменных системы в момент времени t_0, значения внутренних и выходных величин снова могут быть определены полностью. Таким образом, отсутствие информации об изменении входных величин на интервале $(-\infty, t_0)$ можно скомпенсировать тем, что известно значение некоторой переменной систему в момент времени t_0. Такие переменные системы называются переменными состояниями. Проиллюстрируем эти основные для всей теории систем положения, на примере двух реальных систем.

Например, для цепи, изображенной на рис. 1.6 и описываемой системой уравнений (22), для $t \geq t_0 = 0$ имеем

$$\boldsymbol{i(t) = \left[i(0) + \frac{1}{L} \int_0^1 u_1(\tau)\, e^{\frac{R}{L}\tau} d\tau \right] e^{-\frac{R}{L}t}} \tag{1.29}$$

$$\boldsymbol{u_2(t) = L\frac{di}{dt}} \tag{1.30}$$

Если входная величина$u_1(t)$ на интервале $[0, t_1]=I$непрерывна, то, например, переменная системы $i(t)$ для каждого момента времени $t \in I$ однозначно определяется по значению тока $i(t)$в момент времени $t=0$ и по входной величине $u_1(\tau)$для $0 \leq \tau < t$независимо от того, принимали различные входные величины (или какие-либо другие переменные системы) значения отличныеот нулевых при $t<0$, или нет. Воздействие, оказываемое $u_1(t)$на систему до момента времени $t=0$, например, на изменение $i(t)$ для $t>0$, можно, очевидно, учесть только в одном значении тока в момент времени $t=0$: значение $i(0)$, образно выражаясь, содержит в себе всю предысторию эволюции системы.

То же самое относится и к выходной величине: $u_2(t)$для любого момента времени $t \in I$ также определяется через значение i в момент времени $t=0$ и $u_1(\tau)$для $0 \leq \tau < t$. Приведенные выше соображения, облаченные в символическую форму, задают для цепи, изображенной на рис. 1.6, однозначные отображения

$$\boldsymbol{[i(0), u_1(\tau)] \rightarrow i(t), (0 \leq \tau < t)} \tag{1.31}$$

$$\boldsymbol{[i(0), u_1(\tau)] \rightarrow u_2(t)} \tag{1.32}$$

Из этих свойств (1.31,1.32) следует, что ток i является переменной состояния цепи, изображенной на рис. 1.6.

В более общих случаях динамической системе соответствует более одной переменной состояния, т. е. (1.31) выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} [z^1(0), z^2(0), \dots, z^n(0); x(\tau)] \longrightarrow z^1(t) \\ [z^1(0), z^2(0), \dots, z^n(0); x(\tau)] \longrightarrow z^2(t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ [z^1(0), z^2(0), \dots, z^n(0); x(\tau)] \longrightarrow z^n(t) \end{cases} \quad (1.33)$$

$$(0 \leq \tau < t)$$

а вместо (1.32) имеем

$$[z^1(0), z^2(0), \dots, z^n(0); x(\tau)] \longrightarrow y(t)]\ (0 \leq \tau < t) \quad (1.34)$$

где через x обозначается единственная входная величина, единственная выходная величина обозначается через y, а переменные состояния обозначаются:z^1, z^2, ..., z^n. Рассмотрим динамическую систему, изображенную на рис. 1.7.

Физические величины F (сила), v (скорость массы т), x (отклонение пружины с постоянной упругости k), z (смещение массы) и α (угловое перемещение ролика радиуса r) связаны между собой следующими уравнениями:

$$F = K(x - z), v = \frac{dz}{dt}, F = m\frac{dv}{dt}, \alpha = \frac{z}{r} \quad (1.35)$$

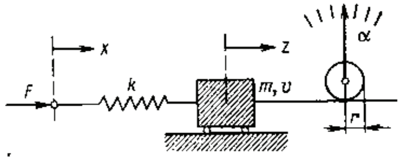

Рис. 1.7 Механическая система.

Если рассматривать x как входную, а α как выходную величину системы, взаимосвязь между ними дляt>0 можно выразить в виде

$$z(t) = \sqrt{\frac{K}{m}}\int_0^t x(\tau) sin\sqrt{\frac{K}{m}}(t-\tau)d\tau + z(0) cos\sqrt{\frac{K}{m}}t + \quad (1.36)$$

$$+v(0)\sqrt{\frac{m}{K}} sin\sqrt{\frac{K}{m}}t, v(t) = \frac{dz}{dt}, \alpha(t) = \left(\frac{1}{r}\right)z(t)$$

Очевидно, что значения z(t), v(t) и α (t) определяются через x{τ), z(0) и v(0). Таким образом, по аналогии с (1.34) имеют место отображения

$$\begin{cases} [z(0), v(0); x(\tau)] \longrightarrow z(t) \\ [z(0), v(0); x(\tau)] \longrightarrow v(t) \\ [z(0), v(0); x(\tau)] \longrightarrow \alpha(t) \end{cases} \quad (1.37)$$

$$0 \leq \tau < t$$

Переменные системы z и v представляют собой переменные состояния для системы, изображенной на рис. 1.7.

Основные уравнения. Из физического содержания соотношений (1.34) следует, что, когда входная величина определена на более общем интервале [t_0, t] вместо $z^v(0)$ (v= 1, 2, n), следует ввести z^v (t_0) ($t_0 \neq 0, t_0 < t$)

В качестве примера рассмотрим еще раз цепь, изображенную на рис.1.6, описываемую уравнениями (1.28). Решение на интервале [to,t), в соответствии со сделанными предположениями, имеет вид

$$\boldsymbol{i(t) = \left[i(t_0) + \frac{1}{L} e^{-(R/L)t_0} \int_{t_0}^{t} u_1(\tau)\, e^{(R/L)\tau} d\tau \right] e^{-R/L(t-t_0)}}$$

$$\boldsymbol{u_2(t) = L\, {di}/{dt}} \qquad (1.38)$$

После введения вектора состояния

$$\boldsymbol{z = \begin{vmatrix} z^1 \\ z^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ z^n \end{vmatrix}} \qquad (1.39)$$

(1.34) можно записать более кратко:

[z(t₀),x(τ)]⟶z(t)

(t₀≤ τ<t) (1.40)

[z(t₀),x(τ)]⟶y(t)

Уравнения (1.39)…(1.41) представляют глобальные основные уравнения динамической системы (с одной входной иодной выходной величинами и конечным числом переменных состояния). Из них следует, что из внутренних величин некоторой динамической системы выбираются п величин z^1, z^2, ..., z^n (переменных состояния) такимобразом, что выполняется следующее: для всех моментов времени t_0 и $t > t_0$ при произвольном характере изменения входной величины x(τ) на интервале$t_0 \le \tau < t$,z^v (t) (v= 1, 2, ..., п) и у (t) являются функциями x(τ) и $z^\mu(t_0)$ (μ= 1,2,...,m) (и только функциями этих величин).

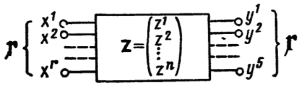

Рис. 1.8 Система с многими входами и выходами (векторная система).

В случае большего числа входных и выходных величин в уравнениях (1.39…1.41) вместо функций x(τ) и y (t) записываются векторы 𝔵(τ) и 𝔶(t),так как в этом более общем случае r входных величин x^μ (τ) и s выходных величин $y^v(\tau)$, так же, как и в (1.39), записываются в виде векторов. Более подробно (1.41) при этом записываются для в виде (рис. 1.8)

$$\boldsymbol{z^\mu(t)=F_\mu[z^1(t_0), \ldots ,z^n(t_0);x^1(\tau),\ldots, x^r(\tau)](\mu=1,2,\ldots,n),} \qquad \boldsymbol{y^K(t)}$$

$$=G_K[z^1(t_0), \ldots , z^n(t_0); x^1(\tau),\ldots, x^r(\tau)](K=1,2,\ldots,s) \quad (1.42)$$

F и G обозначают определенные специальные отображения, осуществляемые данной системой, с определенными областями определений и значений.

Алфавит состояний. Понятие состояния можно представить в геометрическом виде.

Если речь идет о системе только с тремя переменными состояния (z^1, z^2 и z^3), то смысл первого соотношения в (1.40) можно очень наглядно проиллюстрировать с помощью геометрической модели.

Так как в соответствии с (1.39) z^v обозначают координаты трехмерного вектора, то в момент времени $t=t_0$имеем фиксированный вектор $z(t_0)$, проведенный из начала координат и определяющий некоторую фиксированную точку в пространстве (рис.1.9,а). Ситуация справедлива также и для любой точки временного интервала $t=\tau>t_0$, т. е. $z(t)$ описывает как функцию времени некоторую пространственную кривую с начальной точкой $z(t_0)$ и конечной точкой $z(t)$, когда τ изменяется в интервале$t_0\leq \tau \leq t$.Для каждого фиксированного τ значение $z\ (\tau)$ задает состояние динамической системы в момент времени $t=\tau$.МножествоZ^3 всех векторов z образует алфавит состояний динамической системы.

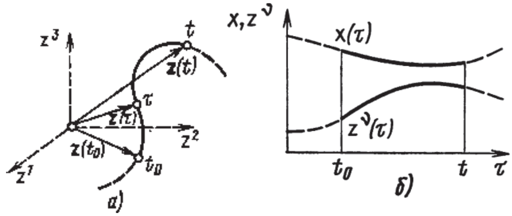

Рис 1.9 Траектория состояния: а-трехмерное пространство состояний;б-координаты состояния и входная величина

Первое соотношение в (1.40) теперь можно описать следующим образом: если динамическая система находилась в состоянии $z(t_0)$ (начальное состояние), то в результате воздействия на нее входной величины $x(\tau)$, определенной на интервале $t_0\leq \tau<t$, она переходит в состояние $z(t)$ (конечное состояние). При этом $z=z(\tau)$ описывает некоторую кривую в алфавите состояний (пространстве состояний, см. рис. 1.9,б), которая называется траекторией состояния системы.

Подобная интерпретация возможна также и в случае большего числа входных и выходных величин. Кроме того, приведенные рассуждения остаются справедливыми, когда динамическая система имеет большее (или меньшее) число переменных состояния.

Следует также отметить, что в основных уравнениях (1.39…1.41) всегда предполагается $t>t_0$.Физически это означает, что из состояния системы в данный момент времени $z(t_0)$ можно сделать заключения о поведении системы только в последующие моменты времени. Таким образом в общем случае не предполагается, что по заданным $z(t_0)$ и $x(\tau)$ можно также определить и $z(t)$ при $t<t_0(t< \tau \le t_0$)Иными словами, если известно конечное состояние $z(t_0)$ и, кроме того, $x(\tau)$на интервале $t< \tau \le t_0$,то начальное состояние системы $z(t)$ остается неопределенным. Те же рассуждения справедливы и для выходной величины $y(t)$.

Будущее поведение некоторой динамической системы зависит от всей ее предшествующей эволюции в той мере, насколько эта предыстория в общих чертах влияет на начальное состояние. Таким образом, динамические системы по определению не обязательно являются обратимыми системами.

1.4.2. Классы систем

Алфавиты и отображения. На примере простейших электрических и электромеханических схем были введены и подробно объяснены основные понятия теории систем, такие как понятия входной и выходной величин и переменных состояния. Теперь займемся формально математическим и алгебраическим анализом структуры систем с более строгой точки зрения, преследуя цель создания основы для теоретической (и практической) классификации систем.

Исходя из основных уравнений динамической системы (1.42) (теперь записанных уже в векторной форме)

$$\mathbf{z(t_1)=F[z(t_0),\mathfrak{x}(\tau)],(t_1>t)} \qquad (1.43)$$

$$\mathbf{H(t_1)G[z(t_0),\eta(\tau)]}$$

можно установить, что для всестороннего описания динамической системы должно быть задано три основных множества:

1) множество X значений входных величин x (входной алфавит);
2) множество У значений выходных величин у (выходной алфавит);
3) множество Z значений переменных состояния z(алфавит состояний).

Вектор z (t_0), принадлежащий алфавиту состояний, и соответственно $z(t_1)$ тогда являются элементами *n*-кратного декартова произведения $Z\times Z\times Z\ldots\times Z=Z^n$, а именно *n*-мерного алфавита состояний системы. Соответственно для s выходных величин $y^\nu(t_1)$ алфавитный вектор $\mathfrak{y}(t_1)$ является элементом s-кратного декартова произведения выходного алфавита Y, который соответственно называется s-мерным выходным алфавитом системы.

До сих пор предполагалось, что X=Y=Z=R. Для того чтобы получить более общее определение системы, под множествами X,У и Z следует понимать множества более общего вида. При таком подходе входная величина $x^\nu(\tau)$ $(t_0\leq\tau<t)$ или как говорят, входное слово из Xуже определяется как отображение некоторого интервала $I=[t_0, t_1)$ действительной временной оси R или в более общем случае множества $T_{01}=I\cap T^\circ$, где временная шкала T° представляет собой произвольное подмножество из R, в множество X:

$$\mathbf{x^\nu(\tau):T_{01}\longrightarrow X,T_{01}=I\cap T^0,T^0\subset R,I=[t_0,t_1)} \qquad (1.44)$$

T_{01} называется интервалом наблюдения величин системы. $x^\nu(\tau)$, естественно, является координатой вектора$\mathfrak{x}(\tau)$входных величин $x^1(\tau)$, $X^2(\tau)$, ...,x^r (τ), который мы также будем называть входным словом, принадлежащим X^r.

Если через

$$\mathbf{\mathfrak{X}=\{ T_{01}\longrightarrow X^r\}} \qquad (1.45)$$

обозначить множество всех отображений всех множеств T_{01}в декартово произведение X^T(или в некоторое подмножество этого множества), то соотношения (1.43) можно записать как отображения вида

$$\mathbf{F{:}Z^{\mathit{n}}\times\mathfrak{X}\longrightarrow Z^{\mathit{n}}} \qquad (1.46)$$
$$\mathbf{G{:}Z^{\mathit{n}}\times\mathfrak{X}\longrightarrow Y^{s}}$$

При этом опять предполагается, что входной алфавит X^r системы r-мерный, выходной алфавит $У^s$s-мерный и алфавит состояний системы *n*-мерный (см. рис. 1.8). Естественно, не следует понимать (1.46) таким образом, что такое отображение имеет место в реальных системах данного класса. Этот момент будет подробно разобран ниже.

Классификация систем. Динамические системы, встречающиеся в практике, описываются математическими моделями, которые^ получаются из (1.46) или за счет уточнения входящих в них выражений, или за счет их обобщения.

Принимая во внимание требования практики, динамические системы различаются по следующим свойствам:

а) по виду временной шкалы T°;

б) по виду множеств (алфавитов) X, Y, Z;

в) по типу отображений F, G.

а) Если T°=R, то система принадлежит к классу систем с непрерывным временем. Наше рассмотрение простейших примеров началось именно с таких систем (см. рис. 1.6 и 1.7).

Системы с дискретным временем возникают в том случае, когда T°=R заменяется на множество G целых чисел. При этом вместо непрерывных функций$\mathfrak{x}(\tau)$имеем «дискретные» функции $\mathfrak{x}(\nu T_0)(\nu=m,\ m+1,\ ...,\ n>1)$, т. е. последовательности или слова

$$\mathbf{<\mathfrak{x}_{\mathit{m}},\mathfrak{x}_{\mathit{m}+1},\ldots,\mathfrak{x}_{\mathit{n}-1}>;\ \mathfrak{x}_{\nu=}\mathfrak{x}(\nu T_0);\tau=\nu T_0(T_0\in R)}$$

которые с теоретико-множественной точки зрения означают то же самое, что

$$\{(\boldsymbol{m},\ (\boldsymbol{m})),(\boldsymbol{m}\mathbf{+1})\ \mathfrak{x}(\boldsymbol{m}\mathbf{+1})),\ldots,(\boldsymbol{n}\mathbf{-1},\ \mathfrak{x}(\boldsymbol{n}\mathbf{-1}))\}$$
$$(\boldsymbol{\nu} \mathrel{\widehat{=}} \boldsymbol{\nu T_0}, \boldsymbol{\nu}=\boldsymbol{m}, \ldots \boldsymbol{n}-\mathbf{1})$$

Если нас интересуют значения $z(t_1)$ только в дискретные моменты времени $t_1=\nu T_0$, то первое уравнение из (1.43) записывается в виде

$$\mathbf{z_n=F[z_m;\ \mathfrak{x}_m,\ \mathfrak{x}_{m+1},\ldots,\mathfrak{x}_{n-1}]\ (n=m+1,m+2\ldots)} \qquad (1.47)$$

и, в частности, для $n=m+1$(в более подробной записи) (1.48)

$$\mathbf{z(\boldsymbol{m}+1)=F[z(\boldsymbol{m});(\boldsymbol{m},\ \mathfrak{x}(\boldsymbol{m}))]=f[z(\boldsymbol{m}),\ \mathfrak{x}(\boldsymbol{m}),\boldsymbol{m}](\boldsymbol{m}\in G)}$$

Соответствующим образом можно записать и второе уравнение из (1.43).

(1.48) представляет собой отображение типа $Z^n\times X^r\times T^0\rightarrow Z^n$, т. е. в более простой форме по сравнению с (1.48) или (1.46). Так как (1.47) можно получить из (1.48), то дискретные системы предпочтительнее описывать с помощью (локальных) основных уравнений (1.48).

б) Если множества X, У, Zбесконечны (в частности, X=Y=Z=R), то система называется системой с бесконечным алфавитом. Однако в современной технике обработки данных особое значение имеют системы с конечными алфавитами, в частности, с дискретным временем, которые называются автоматами. В этом случае отображения F и G задаются таблицами соответствий [3].

Кроме мощности множества X,У и Zможно различать по внутренним алгебраическим и топологическим структурам: X, У, Z могут выступать в качестве носителей групп, колец, полей, векторных пространств, метрических пространств и т. д. В дальнейшем изложении этому обстоятельству будет уделено большое внимание.

в) Наконец, отображения F и G могут наделяться специальными свойствами: например, можно говорить (их еще следует определить) о линейных, инвариантных во времени, непрерывных и других отображениях.

Например, F в (32) называется линейным (точнее, аддитивным), когда справедливо (для соответствующих алгебраических структур) соотношение

$F[z_1(t_0)+z_2(t_0), \mathfrak{r}_1(\tau)+\mathfrak{r}_2(\tau)]=F[z_1(t_0), \mathfrak{r}_1(\tau)]+F[z_2(t_0), \mathfrak{r}_2(\tau)]$ (1.49)

Системы, отображающие функции которых F (и G) обладают такими свойствами, рассмотрены в данной книге особенно подробно.

Наиболее важные свойства отображений рассмотрим с помощью рис. 1.10.

Между названными основными типами динамических систем есть множество промежуточных типов динамических систем (например, с конечными алфавитами X и У и бесконечным алфавитом Z), которые представляют не только теоретический, но и практический интерес.

В заключение следует сказать кратко о двух обобщениях понятия системы.

Первое обобщение имеет дело с расширением понятия временной шкалы T° до более общего понятия пространственно-временной шкалы $R^m \times T°$ ($R \subset R$, m= 1,2,3).

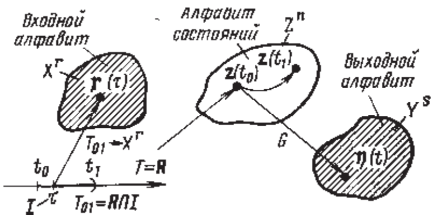

Рис. 1.10. Схема отображений детерминированной системы.

Вместо отображения (1.48) в этом случае имеет место более общее отображение ($r=n=s=1$)

$$\mathbf{z(\mathfrak{r},t+1)=f[<z(\mathfrak{r}_0)>(t),<x(\mathfrak{r}_1)>(t),\ \mathfrak{r}\ ,t]\ t\in G;\mathfrak{r}_{,0},\mathfrak{r}_1\in G} \quad (1.50)$$

которое можно записать в другом виде:

$$\mathbf{f:\{R^{m}\to Z\}\times\{R^{m}\to X\}\times\{R^{m}\to T^{0}\}\to Z}$$

где$\mathfrak{r}_0\in R^{m}$, $\mathfrak{r}_1\in R^{m}$,$\mathfrak{r}\in R^{m}$являются геометрическимиточками на плоскости (m=2) или точками во внутренних областях некоторых пространственных фигур (m=3). На этом пути получается математическая модель решетчатых структур, которые имеют большое значение в первую очередь в технике хранения информации и биокибернетике. Классификация обычных систем с чисто временной шкалой (m=0) переносится на этот случай без каких-либо изменений.

Во втором обобщении детерминированные отображения F и G заменяются стохастическими (случайными)отображениями. При этом входные, выходные величины, а также переменные состояния могут принимать свои значения только с определенными вероятностями.

Например, для дискретных систем с конечными алфавитами вместо (1.48) имеем выражение вида

$$\mathbf{P(z(\mathit{m}+1),z(\mathit{m}),\ \mathfrak{r}(\mathit{m}),\mathit{m})=p} \quad (1.51)$$

которое означает следующее: вероятность того, что в момент времени $t=mT_0$ состояние z (т) и входной вектор $\mathfrak{r}(m)$,имея определенные значения, в момент времени $t=(m+1)$To приведут систему в состояние $z(m+1)$, равна $p(0\leq p\leq 1)$.

И в этом случае специальные свойства функции P отображают поведение наиболее важных классов стохастических систем: например, вместо (1.51) в частном случае можно записать

$$\mathbf{P(z(\mathit{m}+1),z(\mathit{m}),\ \mathfrak{r}(\mathit{m}),\mathit{m})=P(z(\mathit{m}),\ \mathfrak{r}(\mathit{m}),\mathit{m})} \quad (1.52)$$

Более полный и исчерпывающий теоретический анализ понятия состояния можно найти в [4].

Контрольные вопросы

1.Как определяются конечные множества?

2.Раскройте понятие степени множества.

3.Какие операции можно производить над множествами?

4.Какие свойства могут иметь отношения между элементами множества?

5.Приведите определения составляющих графа отношения.

6.Дайте определение отношения «изображение».

7.Приведите примеры интегральных преобразований, относящихся к классу отображений.

8.Каким образом отображения множеств образуют алгебраические структуры?

9.Что такое метрика метрического пространства?

10.Дайте определение динамической системы.

11.Приведите пример основных уравнений, описывающих поведение динамической системы.

12.Какие множества задаются для описания динамической системы.

13.Раскройте понятие алфавита состояний.

14.По каким параметрам можно разделить динамические системы?

2. Принципы и методы анализа систем

2.1.Принципы системного анализа и принятия решений

В соответствии с методологическими принципами общей теории управления в системах управления выделяются объект управления и управляющая среда.Применительно к задачам управления информационной безопасностью телекоммуникационных систем систему управления можно определить как совокупность организационно технических мер и средств взаимосвязанных элементов-объектов, целей, функций, организационных структур управления, методов управления, персонала кадров управления и подсистем управляющей системы, разрешающих проблемы защиты информации на целевом, структурном, алгоритмическом и других уровнях.

При управлении деятельностью в области защиты информации необходимо определять критерии безопасности,которые должны быть определены с целью задания риска потери(перехвата) информации.

Деятельность в сфере защиты информации можно определять как деятельность,позволяющую создать телекоммуникационные системы в защищенном исполнении.Таким образом к критериям информационнойбезопасности можно отнести совокупность новых законов,явлений,принципов или технологических методов,использованных для создания новых ТКС в защищенном исполнении.

Отдельные компоненты системы управления взаимодействую между собой и участвуют в том или ином виде в процессе взаимодействия на объекты управления(управляемые подсистемы)для достижения главной,основных и других целей системы.Как следует из этого определения,целесообразно вводить различные типы структур обеспечения информационной безопасности-иерархические,матричные(сетевые) и другие типы

В исчерпывающей совокупности эти элементы можно представить в виде триадной характеристики - «дерева целей, дерева средств и дерева результатов», которые в исчерпывающей совокупности описывают ситуации при анализе и исследовании систем обеспечения информационной безопасности. При изучении методов системного анализа и синтеза систем обеспечения информационной безопасностью используется ряд понятий,рассматриваемых ниже

Абстракция (от лат. abstractio - отвлечение) представляет собой мысленный процесс отвлечения от некоторых свойств и отношений рассматриваемых объектов, которые рассматриваются при проведении исследования как несущественные и второстепенные.

Аксиома- это исходное положение или утверждение, принимаемое без доказательства и лежащее в основе других положений научной теории или взаимодействия субъектов и объектов управления.

Анализ - всестороннее рассмотрение и метод научного исследования путем рассмотрения отдельных сторон, свойств, составных частей процесса (явления) или составную часть любого исследования, а также функции управления.

Аналогия (от греч. analogia - сходство, соответствие) - умозаключение, позволяющее на основе сходства или подобия двух объектов по некоторым их свойствам и отношениям сделать соответствующие вероятностные выводы.

Апостериори и априори (от лат. aposteriori - из последующего и apriori - из предшествующего) - философские категории, служащие для обозначения полученных из опыта (апостериори) и предшествующих ему (априори) знаний.

Аргументация (от лат. argumentation - приведение аргументов) - способ убеждения на основе суждений и доказательств какого-либо определенного тезиса.

Верификация (от лат. verificatio - подтверждение, доказательство) - процесс установления истинности научных утверждений путем их эмпирической проверки.

Гипотеза - предварительное и предположительное научное представление о познаваемом объекте исследования, основанное на ранее полученных данных и знаниях.

Дедукция (лат. deductio - выведение) - умозаключение, основанное на логике и здравом смысле от общего к частному, то есть от общих рассуждений и посылок к частным или другим общим выводам.

Идеализация - мысленный процесс создания идеальных объектов посредством изменения свойств реальных предметов.

Индукция (от лат. inductio - побуждение, наведение) - умозаключение, основанное на логическом рассуждении и здравом смысле от единичных, частных положений, явлений и фактов к общим выводам и обобщениям.

Интуиция (от лат. intuitio - пристальное всматривание, созерцание) - способность непосредственного постижения истины без логического обоснования и доказательства.

Исследование - научный труд, вид научной деятельности; научное изучение и процесс познания; процесс изучения какого- либо объекта и получения на этой основе новых знаний о нем.

В основе методов анализа и исследования систем управления лежит принцип идеализации как мыслительный процесс создания идеальных объектов посредством изменения свойств реальных предметов. Идеализированные свойства систем управления формализуются в виде комплекса системно-аналитических технологий, включающих философские, математические, физические, химические и другие технологии, адекватные модели и методы системного анализа и принятия решений.

Важными элементами исследования являются подходы, основанные на декомпозиции и агрегировании. Декомпозиция - аналитический или численный метод исследования на основе разделения сложного целого (систем, подсистем и т.п.) на более простые составные части, используя для этого определенные критерии.

В системном анализе широко используется «триадные модели» (триады), включающие задание целей, средств и результатов. «Дерево целей» - структурированная и построенная по иерархическому принципу ранжированная по уровням совокупность целей системы, программы, плана, в которой выделены: главная цель («вершина дерева»), подчиненные ей подцели первого, второго и т.д. уровней («ветви дерева»). Аналогично можно ввести обобщенные понятия средств достижения целей. Тогда «дерево средств» можно определить как иерархическую совокупность средств, согласованно распределенных по уровням иерархической или другой структуры системы управления. При этом можно задать оператор или совокупность операторов, позволяющих обеспечить достижение необходимых целей. В итоге можно сформулировать «дерево результатов».

Системно-аналитические технологии можно сформулировать как основные методологические приемы, которые целесообразно использовать при решении задач системного анализа. Применение методов системного анализа при принятии решений в условиях неопределенности требует формулировки алгоритмов (схем) обработки вариантных экспертных оценок.

«Системный анализ» предполагает разделение проблемы на подпроблемы с последующим рассмотрением этих подпроблем. Общая характеристика принципов системного анализа дается в виде схемы. Рассмотрим основные качественные характеристики принципов.

1) Структурный принцип. Данный принцип предусматривает рассмотренные задач с позиций полного сохранения качественных характеристик всей системы в целом. При этом необходимо обеспечивать полноту анализа проблемы, чтобы не потерять качественные или количественные свойства при разделении или объединении частей целого.

Декомпозиция проблемы и агрегирование подпроблем является одним из важнейших принципов:

- декомпозиция предполагает анализ и получение оценки проблемы на основе изучения свойств ее частей;
- агрегирование - метод исследования на основе объединения подзадач в единую задачу.

Примером декомпозиции может служить разделение сложной динамической системы на подсистемы и анализ ее по частям. Пример агрегирования - объединение совокупности координат в агрегаты (сборки) координат, что позволяет упростить анализ. Пример агрегирования в динамических системах - квадратичные функции Ляпунова, линейные формы и другие типы агрегатов. Каждый подход порождает эффективные процедуры анализа, а применительно к динамическим системам обусловливает создание метода векторных функций Ляпунова.

2)Взаимосвязанность и согласованность подпроблем необходима для учета всех свойств целого, разделенного на части. Обычно свойства частей определяются соответствующими характеристиками или параметрами, свойства связей определяют условия для достижения целей или выполнения ограничений. Взаимные связи могут порождать соответствующие принципы учета при управлении:

- принцип согласования взаимодействий;
- принцип развязывания взаимодействий;
- принцип прогнозирования взаимодействий.

3) Принцип целеполагания и ограничения. Целеполагание относительно проблемы и подпроблем является важным принципом, обуславливающим необходимость задания цели при выполнении системного анализа проблемы. Заданные цели, а также множества целей в случае рассмотрения подпроблем позволяют осознать существо решения проблем, ограничения и направленность в принятии решения. Методика формулировки целей неразрывно связана с заданием ограничений. Цели и ограничения - главные категории принципа целеполагания, используемые для формулировки задач.

Разрешимость проблемы и подпроблем - важный принцип системного анализа, который предполагает необходимость рассмотрению вопроса о существовании решения до начала решения проблемы. Весьма важно решить проблему существования решения в случае использования принципов и методов системного анализа. Естественно, что в случае декомпозиции и агрегирования проблема анализа разрешимости принимает специфические формы, для которых должны использоваться соответствующие методы. Достаточно вспомнить метод декомпозиции Данцига-Вульфа и другие варианты метода декомпозиции.

4)Принцип допустимости, рациональности и оптимальности. Этот принцип позволяет анализировать проблемы, исходя из достижения все более сложных целей и задач. Однако при этом на первом этапе важно сформулировать условия допустимости для того или иного разделения проблемы на полпроблемы.

Достижение оптимальности не всегда является возможным на практике, и в такой ситуации следует иметь в виду, что конструктивным часто бывает обеспечение рациональности, или, другими словами, приемлемости решений. Рациональное (приемлемое) решение, обладающее свойства грубости (сохранения свойств при изменении условий), бывает предпочтительное оптимальному решению, которое может не являться грубым.

5)Принцип ориентации на качественный результат. Этот принцип позволяет определить качественные свойства проблемы или подпроблемы и направить процессы анализа или синтеза в требуемое направление. Характерно, что понимание значимости качественного результата на практике встречается не всегда. Это связано с высокими требованиями к специалистам, которые могут получить качественные результаты, позволяющие сделать надежные выводы без многочисленных экспериментов. Вместе с тем получение качественных результатов невозможно без использования соответствующих методов. Важное место здесь занимает ассоциирование формальных методов содержательных задач.

6)Интегрированный триадный принцип - «целеполагание-средство-результат» и его варианты. Данный принцип требует рассмотрения проблемы в обобщенном варианте, когда анализируется соответствия между главными составляющими схемами принятия решений. Характерно, что в эффективном варианте имеет место согласование целей, средств и результата. В противном случае могут иметь место следующие ситуации:

- соответствие целей и средств достижения целей;
- несоответствие целей и средств достижения целей;
- соответствие целей и результатов;
- несоответствие целей и результатов;
- соответствие средств и результатов;
- несоответствие средств и результатов.

Рассмотренная группа ситуаций является относительно полной в выбранной «триадной конструкции» - «цели-средства - результаты». В «парной конструкции» принятия решений совокупность ситуаций существенно возрастает, что приводит к усложнению процесса принятия решений. В этом случае, как и в «триадной» схеме, возможно применение матричных характеристик схемы принятия решений. Анализ согласованности между отдельными элементами схемы принятия решений является основным инструментом корректности процедуры принятия решений в целом. В этой связи необходимо дополнить следующим принципом.

7)Принцип идентификация согласованности целей- средств-результатов. Идентификация необходима для обеспечения корректности схемы принятия решений. В противном случае могут рассматриваться несогласованные элементы, когда цели не соответствуют средствам, либо средства не согласованы с целями. В ряде случаев возможны следующие ситуации:

- соответствие целей средствам, которые требуется идентифицировать;
- соответствие средств необъявленным целям, которые необходимо идентифицировать для обеспечения корректности схемы принятия решений с учетом идентифицированных целей;
- ситуации несогласованности, которые поддаются идентификации или формированию вариантов целей и средств.

Последние рассуждения поясняют смысл предлагаемого принципа идентификации, применение которого позволяет раскрыть необъявленные, но реальные цели, средства, предлагаемые при принятии решений.

Рассмотренные принципы будут использованы при изложении методов системного анализа, причем последние будут играть двойную роль:

- с одной стороны, они могут выступать как методы непосредственного анализа;
- с другой стороны, служить инструментом при получении исходных системных оценок для различных вариантов решений.

Однако общая процедура обработки оценок может основываться на изложенные принципы, составляющие определенную «философию» процедур принятия решений.

Анализ информационной безопасности ТКС является важной составляющей современного исследования. В настоящее время наука рассматривает развивающиеся системы, все процессы в которой взаимосвязаны. Этому представлению соответствует новая тенденция в процессе познания - целостное, или системное, мышление, которая развивается, в частности и в менеджменте, в виде концепции системного управления. Проблемы управления в настоящие время нельзя решить на основе жестких дисциплинарных подходов, так как они носят системный характер и требуют применения адекватной парадигмы.

Суть системного подхода для анализа и исследования систем управления инновационной безопасностью состоит в последовательном учете того, что активные системы - интегрированные целостности, свойства которых не идентичны свойствам составляющих систем. Более того, системные свойства разрушаются, если система разделяется на составляющие элементы. Отдельные составляющие активных систем взаимозависимы и взаимодействуют между собой. В результате этого взаимодействия и взаимозависимости частей формируют специфику целостности системы. Следовательно, современный системный подход требует познания отдельных элементов на основе анализа динамики системы в целом. Фокус изучения переносится с элементарных блоков на фундаментальные принципы организации, иными словами, происходит смещение интереса к изучению целого, но при сохранении интереса к изучению частей. Современная концепция системного управления предполагает использования ряд положений, базирующихся на общих свойствах активных систем:

8)Принцип стабильности и изменчивости. Свойство активных систем - высокая стабильность, которая достигается не жесткими, а гибкими нелинейными обратными связями. В социальных системах вариативность (как способность к изменениям) - основополагающие свойства, которые, согласно принципу социального дарвинизма, обеспечивают гибкость и адаптивность, необходимые для приспособляемости к условиям внешней среды.

Способы взаимодействия, методы работы и установившиеся связи формирует уникальный стиль организации, ее индивидуальность. Стремление поддерживать устойчивые взаимоотношения с постоянно меняющейся внешней средой невозможно без адекватных изменений во внутренней структуре организации. Из этого рассуждения следует: чтобы сохранить свою индивидуальность, необходимо адаптироваться в соответствии с целями личности.

Таким образом, можно сказать, что активные системы обретают стабильность в процессе постоянных изменений, поскольку сохраняют себя как целое путем адаптации к окружающей среде через изменение составляющих элементов и взаимодействий.

9)Стратегический принцип разрешения конфликтов. Социальным системам (в частности, организациям) присущи принципиально не разрешимые в пользу одной из сторон конфликты, например:

- «стабильность - перемены»,
- «свобода - порядок»,

- «традиции - инновации»,
- «планирование - невмешательство».

Концепция системного управления подразумевает решение этих конфликтов не жесткими мерами, а путем установления динамического баланса между конфликтующими частями системы. При возникновении конфликта системный подход требует от специалиста изучения позиций сторон и поиска решений, обеспечивающих баланс интересов. К оценке и выбору решений следует привлекать группы экспертов, имеющих различные точки зрения.

Таким образом, методы системного управления проявляются в изменении базовых установок и мировоззрения системного специалиста. Специалист нового типа вносит вклад в долгосрочное процветание организации, используя различные факторы, включая интуицию, использование потенциала сотрудников, расширение их способностей и самообучения, гибкость организации для достижения целей.

Важнейшим инструментом в работе современного специалиста является методология системного анализа, без которого немыслимы значимые, современные решения проблем развития и выживания организации. *М*ожно выделить три основных момента практической пользы применения методов системного анализа:

- работа по постановке задачи и полная и неполная формализуемость;
- неполная формализуемость требует систематического применения неформальных знаний и методов;
- «системный анализ - это прикладная диалектика», позволяющая в той или иной мере учесть динамику анализируемой системы.

Каждая организация, рассматриваемая как открытая система, характеризуется определенным набором переменных. Эти переменные можно разделить на внутренние и внешние. На системной модели организации видно, что внутренними переменными являются цели, задачи, структура, люди и технологии. Все переменные взаимосвязаны. Внешние переменные подразделяются на прямые и косвенные, образуя внешние среды прямого и косвенного воздействия.

Подготовка кадров по системному анализу и управлению возможна на основе изучения и освоения совокупности научных областей знаний, являющихся частями знаниевого компонента системного аналитика и специалиста по управлению:

- детерминированный математический анализ и синтез;
- вероятностно-статистический анализ и синтез;

- численный анализ и синтез и синтез;
- физический анализ и синтез;
- химический и нанохимический анализ и синтез;
- экологический анализ и синтез;
- теоретико-механический анализ и синтез;
- электротехнический анализ и синтез;
- теоретико-управленческий анализ и синтез;
- вычислительно-аппаратный анализ и синтез;
- функционально-аналитический анализ и синтез;
- теоретико-технологический программистский анализ и синтез;
- теоретико-информационный анализ и синтез процессов в телекоммуникационных системах;

Перечисленные компоненты содержания образования в области системного анализа и управления определяют их адаптационные возможности. Важнейшим компонентом адаптационных возможностей организации является эффективность инновационной деятельности, т.е. инновационный потенциал менеджмента. К техническому университету как научному и методическому центру подготовки кадров в этом отношении предъявляются повышенные требования.

2.2. **Методы системного анализа**

Методы системного анализа и принятия решений базируются на комплексе математических методов, которые используются в условиях полной или неполной определенности об объекте управления. В условиях полной определенности используются методы математического программирования в конечномерных или бесконечномерных пространствах.

Математическое программирование используется для принятия решений в условиях полной определенности о структуре и параметрах математической модели. Для получения оценок качества систем инновационного управления можно использовать методы вариационного исчисления для соответствующих классов задач.

При отсутствии полной информации используются методы теории принятия решений. Качественные признаки ситуации позволяют развить теорию оценок для построения методов управления инновационной деятельностью.

Исходя из общей цели разработки систем защиты информации,можно сформулировать ряд средств достижения поставленных целей, опираясь на методологию методов математического программирования. К ним относятся различные целевые установки:

-пар «целей-средств»;

-Триад «целей-средств-результатов»;

-деревьев «целей-средств-результатов»

и других важных построений - ограничений задач математического программирования.

Основными категориальными признаками теории принятия решений, в пространстве которых должны строиться оценки, являются следующие компоненты:

-варианты решений;

-условия принятия решений.

Приведенная схема описывает общую ситуацию, может быть представлена «матричными структурами» различных размерностей, что позволяет использовать эффективные методы создания новых изделий путем погружения задачи в процедуры принятия решений. В этом случае остается ряд нерешенных проблем, среди них способы получения оценок, учитывающих комплекс следующих необходимых характеристик: долговечность, экономичный эффект, полезность или рациональность, надежность (живучесть).

Естественно, что возможны различные «оценки, носящие технический или экономический характер». Вид оценок зависит от принципов их формирования.

В частности, процесс построения матрицы системных оценок (решающих матриц) на этапе отбора решений по защите информации может проводиться на основе теории долговечности, теории надежности, а также на основе экономических теорий или теорий полезности. Это фиксирует роль общетехнических или специальных областей технического, экономического или организационного знаний в формировании матрицы системных оценок.

Характерно, что процедура построения матрицы системных оценок в общем случае может носить более сложный характер, т. е формирование матрицы системных оценок предполагает иерархическую технологию последовательного формирования оценок - от областей технического знания к организационному управлению, а далее - к экономическим оценкам.

Следует заметить, что области технического значения можно рассматривать как исходные для получения системных оценок для обработки и управления процессами агрегации систем защиты информации. В ряде случаев - это готовые к непосредственному применению оценки. В общем случае для принятия решений необходимо формирование оценок. В этом смысле процедура построения оценок является определенной надстройкой над первичными понятиями и результатами в предметной области. Достоинством предлагаемых схем обработки данных - это возможно принятия решений на основе качественных характеристик стратегий. Это позволяет использовать стратегии:

- «стратегии оптимизма»;
- «стратегии пессимизма»;
- «минимаксные стратегии»;
- «стратегии нейтралитета».

Для реализации перечисленных стратегий используются соответствующие процедуры, что позволяет лицу, принимающему решение, достаточно четко определить свое отношение и степень доверия к выбранному решению, выбрать подходы на основе методов системных (решающих) матриц теории риска, комбинаторной аппроксимации ,теории нечетких множеств и других методов]

2.3. **Детерминированные системы**

В настоящем подразделе рассмотрим линейные, непрерывные системы, инвариантные во времени.

В качестве наиболее наглядной и целесообразной модели динамической системы можно указать схемы, которые можно реализовать также и техническими средствами. Схемы приводятся для каждого класса рассматриваемых систем.

Названные выше системы рассматриваются как системы с непрерывным временем и бесконечными алфавитами, а именно с алфавитами X=Y=Z=R. После этого довольно легко можно перейти к системам с дискретным временем как с бесконечными, так и с произвольными конечными алфавитами.

На первый план всегда выдвигается физический аспект теории, а алгебраический или в более общем случае структурно-математический аспект теории систем играет вспомогательную роль.

Обозначения и терминология. Дополним рассмотрение основных уравнений динамических систем, уточнив обозначения и способы записи этих уравнений.

В соотношениях (1.38…1.41) z (t_0), z(t)и y(t) обозначали определенные значения величин z и y в момент времени t_0или t(z∈R^n, y∈R); наоборот, x(τ) является функцией τ(x(τ)∈{I→R}) из интервала (t_0 ≤ τ<t)= I. Однако это обстоятельство при принятой до сих пор форме записи недостаточно очевидно. Поэтому в теории динамических систем договорились величины x, y, z,..., рассматриваемые в отдельные определенные моменты времени t,всегда обозначать через x(t), y(t), z(t),... Функции, имеющие в качестве аргумента время из интервала t_0 ≤ τ<tнаоборот, обозначаются как $x_{t_0t_1}, y_{t_0t_1}, z_{t_0t_1}$(или также через <x(t)>, <y(t)> и т. д.). Если x_{t0t1} представляет собой временную функцию (входную величину), то значение функции $\boldsymbol{x_{t_0t_1}}$в момент времени τ (t_0≤ τ<t)обозначается через$\Re x_{t_0t_1}|\tau \subset x(\tau)$**,** . Временная функция, которая согласуется с x_{t0t1} на интервале $[\tau_0,\tau_1)$ (t_0≤ τ_0< τ_1 ≤t_1)т. е. функция $x_{\tau0\tau1}$, ограниченная интервалом $[\tau_0,\tau_1)$, обозначается таким же образом при помощи символа x_{t0t1} | $[\tau_0,\tau_1)$= $x_{\tau0\tau1}$

Например, $z(\tau) = \Re z_{t_0t_1}|\tau$является некоторым фиксированным вектором состояния, принадлежащим траектории изменения состояния z_{t0t1},$a z_{t_0t_1}|[\tau_0\tau_1) = z_{\tau_0\tau_1}$обозначает часть траектории изменения состояния (изображенной пространственной кривой).

В дальнейшем величины $x_{t_0t_1}$, $y_{t_0t_1}$, $z_{t_0t_1}$и др. краткобудем обозначать x, y, zв тех случаях, когда положение интервала определения не представляет интереса в связи с рассматриваемыми вопросами или остается неизменным на протяжении всего изложения.

В соответствии со сказанным основные уравнения (1.40) динамической системы можно теперь записатьв виде

$$\begin{aligned} \boldsymbol{z}(\boldsymbol{t_1}) &= \boldsymbol{F}[\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t_0}), \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{t_0 t_1}}] \\ \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t_1}) &= \boldsymbol{G}[\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t_0}), \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{t_0 t_1}}] \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$(\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R^n}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}, \boldsymbol{x} \in \{\boldsymbol{T^0} \to \boldsymbol{R}\}, \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{t_0 t_1}} = \boldsymbol{x}|[\boldsymbol{t_0}, \boldsymbol{t_1}))$$

Fназывается оператором переходов, *а*Gоператором выходов динамической системы. Более точная характеристика этих операторов и является одной из основных задач теории систем.

Fи Gможно привести в еще более короткой записи

$$\mathbf{z'} = \mathbf{F}\ (\mathbf{z},\ \mathbf{x},\ \mathbf{t_0},\ \mathbf{t_1}), \quad (2.2)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{G}(\mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{t_0},\ \mathbf{t_1})$$

где zобозначает начальное, *а*z' — конечное состояния.

В некоторых случаях целесообразно рассматривать выходные величины не для фиксированного момента времени t,а одновременно на всем интервале $t_0 \leq t < t_1$. В этом случае, кроме x, выходная величина y также представляется как функция τ на интервале $t_0 \leq \tau < t_1$и вместо второго соотношения из (2.1) можно записать

$$\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{t_0 t_1}} = \boldsymbol{H}[\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t_0}), \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{t_0 t_1}}] \quad (2.3)$$

Следует всегда четко различать x{t), y (t),... и др. и понятия $x_{t0t1}, y_{t0t1}, \ldots, x(t), y(t)$, … следует интерпретировать как величины, определенные в момент времени t, и обращаться с ними как с числами (характеризующими некоторые измеряемые величины), а не как с упорядоченными парами элементов (t, x), (t, y) и т. д.

Величины x_{t0t1}, y_{t0t1}, … и др. являются множествами упорядоченных пар элементов (τ, x), (τ, y), … и т. д.

Основные свойства. Пусть на данную динамическую систему с отображениями F и G воздействует входная величина x, неизвестная точно до момента времени $t=t_0$. Если по результатам измерений становится известно, что x во временном интервале $t_0 \leq t < t_1$описывается временной функцией x_{t0t1}и что вектор состояния в начальной точке временного интервала t_0принимает значение $z(t_0)$, то можно вычислить значение, которое принимает вектор состояния и выходная величина к конечной точке интервала t_1(уравн. 2.1, рис. 2.1):

$$\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t_1}) = \boldsymbol{F}[\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t_0}), \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{t_0 t_1}}]\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t_1}) = \boldsymbol{G}[\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t_0}), \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{t_0 t_1}}] \quad (2.4)$$

В любой другой момент времени, принадлежащий заданному интервалу, вектор состояния и выходная величина принимают значения

$$\boldsymbol{z(t) = F[z(t_0), x_{t_0t_1}]} \qquad (2.5)$$
$$\boldsymbol{y(t) = G[z(t_0), x_{t_0t_1}]}$$

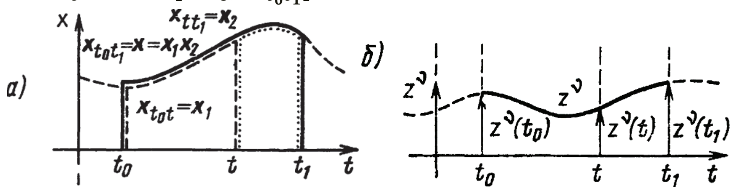

Рис. 2.1. Объединение слов:*а*— входное слово; б — слово состояний.

Здесь$x_{t_0t_1}$обозначает наблюдаемое изменение входной величины на интервале [t_0, t),т. е. функцию $x_{t_0t_1}$ограниченную интервалом [t_0, t_1).

Экспериментатор, который начинает свои измерения x и zначиная с момента времени t>t_0, естественно, должен получить те же значения zи y в момент времени t = t_1. При значении z(t),имеющем место в момент времени t, в соответствии с (2.5) и при наличии функции $\boldsymbol{x_{t_0t_1}}$ограниченной интервалом

[t,t_1),которая обозначается как x_{tt1},получаем так же,как и в (2.1),(см.рис.2.1)

$$\boldsymbol{z(t_1) = F\big[z(t), x_{tt_1}\big] = F\{F\big[z(t_0), x_{t_0t}\big], x_{tt_1}\}} \qquad (2.6)$$

И

$$\boldsymbol{y(t_1) = G\big[z(t), x_{tt_1}\big] = G\{F\big[z(t_0), x_{t_0t}\big], x_{tt_1}\}} \qquad (2.7)$$

где учитывается, как и в предыдущем, уравнение (2.5).

Чтобы упростить формулы, будем обозначать функции x_{t0t}и x_{tt1},определенные на смежных интервалах [t_0 ,t)и [t ,t_1) через x, и x_2. Через x_1x_2 обозначим объединенную функцию на интервале [t_0, t_1), которая на интервале [t_0,t_1)совпадает с x_{t0t} ,а на интервале [t,t_1)соответственно с x_{tt_1}(см. рис. 2.1).

Определенные таким образом x_{t0t}и x_{tt1} можно рассматривать как самостоятельные, ограниченные элементы из {T^0 →R}, объединение которых дает функцию $x_{t_0t_1}$= x_{t_0t}×x_{tt_1}.В момент времени τ, таким образом, функция x=x_1x_2принимает значения

$$\boldsymbol{x_1 \text{ при } t_0 \le \tau < t,} \qquad (2.8)$$
$$\boldsymbol{x_2 \text{ при } t \le \tau < t_1}$$

С учетом сформулированных в (2.6…2.7) свойств отображений и с учетом (2.6) можно записать:

оператор переходов

$$\mathbf{F(z_0,x_1x_2)=F[F(z_0,x_1),x_2]} \qquad (2.9)$$

оператор выходов

$$\mathbf{G(z_0,x_1x_2)=G[F(z_0,x_1),x_2]} \qquad (2.10)$$

Таким же образом легко получить для (2.3)

$$\mathbf{H(z_0,x_1x_2)=H(z_0,x_1)H[F(z_0,x_1),x_2]} \qquad (2.11)$$

где z (t_0) кратко обозначается z_0, и в соответствии с (2.8) y_{t0t1}можно записать в виде $y_{t_0t}y_{tt_1}$или y_1y_2(y_{t_0t}=y_1,y_{tt_1}=y_2 ,t_0<t<t_1).

При помощи (2.9…2.11) выражаются наиболее общие свойства соотношений между входными и выходными величинами, реализуемых динамической системой.

Рассмотрим соотношение (2.9) на примере схемы, изображенной на рис. 1.6.

Из (2.9) следует (u_{0t_1} = $u_1(\tau)$ в интервале [0, t_1), что

$$\boldsymbol{i(t_1) = F\left[i(o), u_{0t_1}\right] = \left[i(0) + \frac{1}{L}\int_0^{t_1} u_1\,(\tau)e^{\frac{R}{L}\tau}d\tau\right]e^{-\frac{R}{L}t_1}} \qquad (2.9)$$

В промежуточной точке мы также имеем (0 <t<t_1)

$$\boldsymbol{i(t) = F[i(o), u_{0t}] = \left[i(0) + \frac{1}{L}\int_0^{t} u_1\,(\tau)e^{\frac{R}{L}\tau}d\tau\right]e^{-\frac{R}{L}t}} \qquad (2.10)$$

Из предыдущих соотношений следует, что

$$\boldsymbol{i(t_1) = F\left[i(o), u_{0t}u_{0t_1}\right] = \left[i(0) + \frac{1}{L}\int_0^{t} u_1\,(\tau)e^{\frac{R}{L}\tau}d\tau + \frac{1}{L}\int_0^{t_1} u_1\,(\tau)e^{\frac{R}{L}\tau}d\tau\right]e^{-\frac{R}{L}t_1}}$$

$$\boldsymbol{= \left[i(0) + \frac{1}{L}\int_0^{t} u_1\,(\tau)e^{\frac{R}{L}\tau}d\tau\right] \times e^{-\frac{R}{L}t}e^{-\frac{R}{L}(t_1-t)} + \left[\frac{1}{L}\int_t^{t_1} u_1\,(\tau)e^{\frac{R}{L}\tau}d\tau\right]e^{\frac{R}{L}t_1}}$$

$$\boldsymbol{= i(t)e^{-\frac{R}{L}(t_1-t)} + \frac{1}{L}e^{-\frac{R}{L}t_1}\int_t^{t_1} u_1\,(\tau)e^{\frac{R}{L}\tau}d\tau}$$

$$\boldsymbol{= \left[i(t) + \frac{1}{L}e^{-\frac{R}{L}t}\int_t^{t_1} u_1\,(\tau)e^{\frac{R}{L}\tau}d\tau\right]e^{-\frac{R}{L}(t_1-t)}} \qquad (2.11)$$

Из (1.38) следует, что последняя строка (2.11) представляет наиболее общий вид отображения F (Fв (2.9) — это частный случай при t=0). Следовательно, можно положить

$$\boldsymbol{i(t_1) = F\left[i(0), u_{0t}u_{0t_1}\right] = F\left[i(t), u_{tt_1}\right] = F[F(i(0), u_{0t}), u_{tt_1}]}$$

что и требовалось показать.

2.4. Линейные детерминированные системы

Основные свойства. Линейные системы представляют наиболее важный класс динамических систем. Динамическая система называется линейной, когда ее основные уравнения (2.1) обладают следующими двумя свойствами, описываемыми уравнениями:

1-е свойство: пусть x' = $x'_{t_0 t}$ и x" =$x''_{t_0 t}$— входные величины, z'_0 = z' (t_0)и z"=z"(t_0)— начальные состояния. Тогда выполняются следующие соотношения ((x'+x") — входная величина, (z'_0+z''_0) —начальное состояние):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{z(t)} &= \boldsymbol{F\left(z_0' + z_0'', x' + x''\right) = F\left(z_0', x'\right) + F(z_0'', x'')} \\ \boldsymbol{y(t)} &= \boldsymbol{G\left(z_0' + z_0'', x' + x''\right) = G\left(z_0', x'\right) + G(z_0'', x'')} \end{aligned} \tag{2.12}$$

2-е свойство: пусть xи *k*x — входные величины, z_0и kz_0 — начальные состояния. Тогда выполняются следующие соотношения (z_0 = z(t_0), x =$\boldsymbol{x_{t_0 t}}$):

$$\begin{aligned} &\mathbf{z(t)=F(}k\mathbf{z_0,}k\mathbf{x)=}k\mathbf{F(z_0,x)} \\ &\mathbf{y(t)=G(}k\mathbf{z_0,}k\mathbf{x)=}k\mathbf{G(z_0,x)} \end{aligned} \tag{2.13}$$

*k*обозначает некоторую константу (*k*∈R).

Например, схемы, приведенные на рис. 1.6 и 1.7, являются линейными системами. Проведем доказательство этого положения для рис.1.6. Из (1.38) следует

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{F\left[i'(t_0) + i''(t_0), u_1'(\tau) + u_1''(\tau)\right]} \\ &\quad = \boldsymbol{\left[i'(t_0) + i''(t_0) + \frac{1}{L} e^{-\frac{R}{L}t_0} \int_{t_0}^{t} [u_1'(\tau) + u_1''(\tau)] e^{\frac{R}{L}\tau} d\tau\right] e^{-\frac{R}{L}(t_1 - t)}} \\ &\quad = \boldsymbol{\left[i'(t_0) + \frac{1}{L} e^{-\frac{R}{L}t_0} \int_{t_0}^{t} u_1'(\tau) e^{\frac{R}{L}\tau} d\tau\right] e^{-\frac{R}{L}(t_1 - t)}} \\ &\quad + \boldsymbol{\left[i''(t_0) + \frac{1}{L} e^{-\frac{R}{L}t_0} \int_{t_0}^{t} u_1''(\tau) e^{\frac{R}{L}\tau} d\tau\right] e^{-\frac{R}{L}(t_1 - t)}} \\ &\quad = \boldsymbol{F\left[i'(t_0), u_1'(\tau)\right] + F\left[i''(t_0), u_1''(\tau)\right]} \end{aligned}$$

Аналогично можно доказать справедливость соотношения

$$\mathbf{F[}k\mathbf{i(t_0),}k\mathbf{u_1(\tau)]=}k\mathbf{F[i(t_0),u_1(\tau)]}$$

В случае линейных систем соответствующими свойствами должно обладать и уравнение (1.3).

Если ввести упорядоченную пару элементов (z_0, x), которую назовем положением системы и обозначим

s=(z_0, x) (2.14)

и ввести операции

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{s' + s'' = \left(z_0', x'\right) + \left(z_0'', x''\right) = (z_0' + z_0'', x' + x'')} \\ &\qquad \boldsymbol{\left(s' = \left(z_0', x'\right), s'' = \left(z_0'', x''\right)\right)} \end{aligned} \tag{2.15}$$

и

$$\boldsymbol{k}\mathbf{s}=\boldsymbol{k}(\mathbf{z_0 x})=(\boldsymbol{k}\mathbf{z_0},\boldsymbol{k}\mathbf{x}) \quad (2.16)$$

то свойство линейности динамической системы, описанное в (2.12…2.13), станет еще более наглядным

$$\begin{gathered}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{s}' + \boldsymbol{s}'') = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{s}') + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{s}''), \boldsymbol{F}(\boldsymbol{ks}) = \boldsymbol{kF}(\boldsymbol{s}) \\ \boldsymbol{G}(\boldsymbol{s}' + \boldsymbol{s}'') = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{s}') + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{s}''), \boldsymbol{G}(\boldsymbol{ks}) = \boldsymbol{kG}(\boldsymbol{s})\end{gathered} \quad (2.17)$$

Системы, которые удовлетворяют только условию (2.12), называются аддитивными, а системы, удовлетворяющие только условию (2.13), — однородными. Следовательно, линейные системы являются одновременно и аддитивными, и однородными. Знак сложения, стоящий между двумя функциями или векторами, следует понимать в обычном смысле, так же как и умножение на константу k

Свободные состояния. Если в соответствии с (2.12) положить

$$(\mathbf{z_0},\mathbf{x})=(\mathbf{z_0},\mathbf{O})+(\mathfrak{o},\mathbf{x}) \quad (2.18)$$

то из приведенных выше определений следует, что основные уравнения аддитивной (и в первую очередь линейной) системы можно записать следующим образом

$$\begin{gathered}\mathfrak{o}+\mathbf{z}=\mathbf{z},\mathbf{O}+\mathbf{x}=\mathbf{x}: \\ \mathbf{z}=\mathbf{F}(\mathbf{z_0},\mathbf{x})=\mathbf{F}(\mathbf{z_0},\mathbf{O})+\mathbf{F}(\mathfrak{o},\mathbf{x})=\mathbf{z_1}+\mathbf{z_2} \\ \mathbf{y}=\mathbf{G}(\mathbf{z_0},\mathbf{x})=\mathbf{G}(\mathbf{z_0},\mathbf{O})+\mathbf{G}(\mathfrak{o},\mathbf{x})=\mathbf{y_1}+\mathbf{y_2}\end{gathered} \quad (2.19)$$

С учетом [3] можно записать ($z_0= z(t_0)$, $x = x_{t_0 t}$):

$$\begin{gathered}\mathbf{z_2}=\mathbf{z_2}(\mathbf{t})=\mathbf{F}(\mathfrak{o},\mathbf{x})=\mathbf{F_2}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{z_1}=\mathbf{z_1}(\mathbf{t})=\mathbf{F}(\mathbf{z_0},\mathbf{O})=\mathbf{F_1}(\mathbf{x_0},\mathbf{t_0},\mathbf{t}) \\ \mathbf{y_2}=\mathbf{y_2}(\mathbf{t})=\mathbf{G}(\mathfrak{o},\mathbf{x})=\mathbf{G_2}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{y_1}=\mathbf{y_1}(\mathbf{t})=\mathbf{G}(\mathbf{z_0},\mathbf{O})=\mathbf{G_1}(\mathbf{x_0},\mathbf{t_0},\mathbf{t})\end{gathered} \quad (2.20)$$

Следовательно, в аддитивных системах (и, в частности, в линейных) конечное состояние $z(t)$разлагается на сумму двух конечных состояний $z_1(t)$и $z_2(t)$.Конечное состояние $z_2(t)$ достигается в том случае, когда в начальный момент времени $t=t_0$входная величина $x = x_{t0t}$ воздействует не на рассматриваемое начальное состояние системы $z_0 = z(t)$, а на систему, находящуюся в нулевом состоянии $\mathfrak{o}$. $z_1=z(t_0)$ представляет конечное состояние, которое получается в результате воздействия нулевой входной величины $o_{t_0 t}$:на заданное начальное состояние системы $z(t_0)$.Такие же рассуждения справедливы и по отношению к выходной величине $y(t)$или же для выходной величины $y_{t_0 t}$.$z_1(t)$ называется свободным состоянием (состояние при нулевых входах),

$az_2(t)$— вынужденным состоянием (вызванным x) аддитивной или линейной системы.

Соответственно $y_1(t)$называется свободной выходной величиной, $ay_2(t)$— вынужденной выходной величиной.

Следовательно, если рассматриваемая динамическая система является линейной, то в (2.19…2.20) имеем

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{k_1 z_0'} + \boldsymbol{k_2 z_0''}, \boldsymbol{k_1 x'} + \boldsymbol{k_2 x''}) &= \boldsymbol{F}[\boldsymbol{k_1 z_0'}, \boldsymbol{k_1 x'}] + \boldsymbol{F}[\boldsymbol{k_2 z_0''}, \boldsymbol{k_2 x''}] \\ &= \boldsymbol{F}[\boldsymbol{k_1}(\boldsymbol{z_0'}, \boldsymbol{x'})] + \boldsymbol{F}[\boldsymbol{k_2}(\boldsymbol{z_0''}, \boldsymbol{x''})] \\ &= \boldsymbol{k_1 F}(\boldsymbol{z_0'}, \boldsymbol{x'}) + \boldsymbol{k_2 F}(\boldsymbol{z_0''}, \boldsymbol{x''}) \end{aligned} \quad (2.21)$$

в частности, ($z'_0 = z_0''=\mathfrak{o}$)

$$\boldsymbol{F}(\mathfrak{o}, \boldsymbol{k_1 x'} + \boldsymbol{k_2 x''}) = \boldsymbol{k_1 F}(\mathfrak{o}, \boldsymbol{x'}) + \boldsymbol{k_2 F}(\mathfrak{o}, \boldsymbol{x''})$$

или с учетом (2.20)

$$\boldsymbol{F_2}(\boldsymbol{k_1 x'}, \boldsymbol{k_2 x''}) = \boldsymbol{k_1 F_2}(\boldsymbol{x'}) + \boldsymbol{k_2 F_2}(\boldsymbol{x''}) \quad (2.22)$$

Соответствующие соотношения выполняются вследствие (2.21) для F_1, G_2 и G_1, где опять вместо $x_{t_0 t}$: или $z(t_0)$ пишем кратко x или z_0:

$$\boldsymbol{F_1}(\boldsymbol{k_1 z_0'} + \boldsymbol{k_2 z_0''}, \boldsymbol{t_0}, \boldsymbol{t}) = \boldsymbol{k_1 F_1}(\boldsymbol{z_0'}, \boldsymbol{t_0}, \boldsymbol{t}) + \boldsymbol{k_2 F_1}(\boldsymbol{z_0''}, \boldsymbol{t_0}, \boldsymbol{t})$$

$$\boldsymbol{G_2}(\boldsymbol{k_1 x'} + \boldsymbol{k_2 x''}) = \boldsymbol{k_1 G_2}(\boldsymbol{x'}) + \boldsymbol{k_2 G_2}(\boldsymbol{x''})$$

$$\boldsymbol{G_1}(\boldsymbol{k_1 z_0'} + \boldsymbol{k_2 z_0''}, \boldsymbol{t_0}, \boldsymbol{t}) = \boldsymbol{k_1 G_1}(\boldsymbol{z_0'}, \boldsymbol{t_0}, \boldsymbol{t}) + \boldsymbol{k_2 G_1}(\boldsymbol{z_0''}, \boldsymbol{t_0}, \boldsymbol{t}) \quad (2.23)$$

В линейных системах, как следует из сказанного выше, всегда

F(𝔬,O)= и G(𝔬,O)=0 или **𝔬**

Свободные матрицы переходов и выходов.

Используя свойства (2.22…2.23), мы хотели бы преобразовать уравнения (2.19….2.20). Для этого свяжем векторы z_1 и z_0с ортогональным базисом ($\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$) следующим образом:

$$\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{z^1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{z^n} \end{pmatrix} = \boldsymbol{z^1} \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \boldsymbol{z^2} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \cdots + \boldsymbol{z^n} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} = \sum_{\mu=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{z}^{\mu} \overline{\boldsymbol{e}_{\mu}}, \overline{\boldsymbol{e}_{\mu}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{1} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \ldots\ \mu \quad (2.24)$$

Как следствие получим из (2.19…2.20) и (2.22…2.23) следующее новое представление:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{z_1}(\boldsymbol{t}) = \sum_{\mu=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{z_1^{\mu}}(\boldsymbol{t}) \overline{\boldsymbol{e_{\nu}}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{z_0}, \boldsymbol{t_0}, \boldsymbol{t}) = \boldsymbol{F_1} \left[\sum_{\mu=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{z}^{\mu}(\boldsymbol{t_0}) \overline{\boldsymbol{e}_{\mu}}, \boldsymbol{t_0}, \boldsymbol{t} \right] \\ = \sum_{\mu=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{z}^{\mu}(\boldsymbol{t_0}) \boldsymbol{F_1}[\overline{\boldsymbol{e}_{\mu}}, \boldsymbol{t_0}, \boldsymbol{t}] \end{aligned} \quad (2.25)$$

Если связать с базисом $(\bar{e}_1,\dots,\bar{e}_n)$ также и векторы $z^{\mu}=F_1[\bar{e}_{\mu},\ t_0,t]$, то, учитывая ,(2.19…2.20) и (2.25)

$$F_1[\overline{e_{\mu}},t_0,t]=\sum_{\nu=1}^{n}\Phi_{\nu\mu}(t_0,t)\overline{e_{\nu}}$$

$$\boldsymbol{z_1(t)=\sum_{\nu=1}^{n}z_1^{\nu}(t)\overline{e_{\nu}}=F_1(z_0,t_0,t)=\sum_{\mu=1}^{n}z^{\mu}(t_0)\sum_{\nu=1}^{n}\Phi_{\nu\mu}(t_0,t)\overline{e_{\nu}}} \tag{2.26}$$

$$\boldsymbol{=\sum_{\nu=1}^{n}\overline{e_{\nu}}\left[\sum_{\mu=1}^{n}z^{\mu}(t_0)\Phi_{\nu\mu}(t_0,t)\right]}$$

Сравнивая отдельные координаты, получаем

$$\boldsymbol{z_1^{\nu}(t)=\sum_{\mu=1}^{n}z^{\mu}(t_0)\Phi_{\nu\mu}(t_0,t)\ (\nu=1,2,\dots,n)} \tag{2.27}$$

что можно записать в матричном виде следующим образом:

$$\boldsymbol{z_1(t)=\begin{pmatrix}z_1^1(t)\\ z_1^2(t)\\ \vdots\\ z_1^n(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Phi_{11}(t_0,t)\Phi_{12}(t_0,t)\dots\ \Phi_{1n}(t_0,t)\\ \Phi_{21}(t_0,t)\Phi_{22}(t_0,t)\dots\ \Phi_{2n}(t_0,t)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \Phi_{n1}(t_0,t)\Phi_{n2}(t_0,t)\dots\ \Phi_{nn}(t_0,t)\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}z_1^1(t_0)\\ z_1^2(t_0)\\ \vdots\\ z_1^n(t_0)\end{pmatrix}} \tag{2.28}$$

Таким же образом для $y_1(t)$ получаем выражение

$$\boldsymbol{y_1(t)=\sum_{\mu=1}^{n}z^{\mu}(t_0)\Psi_{\mu}(t_0,t)}$$

и аналогично (2.26)

$$\boldsymbol{G_1[\overline{e_{\mu}},t_0,t]=\Psi_{\mu}(t_0,t)}$$

Если система имеет несколько выходных величину$y^1,y^2,\ \dots\ ,\ y^s$, то (2.29) можно записать аналогично (2.28):

$$\mathfrak{y}_1(t)=\begin{pmatrix}y_1^1(t)\\ y_1^2(t)\\ \vdots\\ y_1^s(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Psi_{11}(t_0,t)\Psi_{12}(t_0,t)\dots\ \Psi_{1n}(t_0,t)\\ \Psi_{21}(t_0,t)\Psi_{22}(t_0,t)\dots\ \Psi_{2n}(t_0,t)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \Psi_{s1}(t_0,t)\Psi_{s2}(t_0,t)\dots\ \Psi_{sn}(t_0,t)\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}z^1(t_0)\\ z^2(t_0)\\ \vdots\\ z^n(t_0)\end{pmatrix} \tag{2.31}$$

Матрица

$$\boldsymbol{\Phi=(\ \Phi_{\mu\nu}(t_0,t))=\ \Phi(t_0,t)} \tag{2.32}$$

в (2.28) называется свободной матрицей переходов или фундаментальной матрицей; она переводит состояние $z(t_0)$в состояние $z(t)$,причем при нулевых входных величинах, что очевидно из (2.19).

Матрица

$$\boldsymbol{\Psi}=(\boldsymbol{\Psi}_{\mu\nu}(t_0,t))=\boldsymbol{\Psi}(t_0,t) \tag{2.32}$$

Или

$$\boldsymbol{\Psi}=(\boldsymbol{\Psi}_1(t_0,t),\boldsymbol{\Psi}_2(t_0,t),\ldots,\boldsymbol{\Psi}_n(t_0,t))=\boldsymbol{\Psi}(t_0,t) \tag{2.33}$$

в (2.29…2.30) называется свободной матрицей выходов линейной системы, так как Ψ(совместно с начальными состояниями) определяет выходные величины (результат) при нулевых входных величинах.

Если объединить понятия, введенные в (2.19),(2.20), (2.27) и(2.28), то получим следующие основные уравнения линейной динамической системы:

$$\boldsymbol{z(t)=z_1(t)+z_1(t)=F\left(z_0,O_{t_0t}\right)+F\left(\mathfrak{o},x_{t_0t}\right)} \tag{2.35}$$

$$\boldsymbol{=\Phi(t_0,t)z(t_0)+F_2(x_{t_0t})}$$

$$\boldsymbol{y(t)=y_1(t)+y_1(t)=G\left(z_0,O_{t_0t}\right)+G\left(\mathfrak{o},x_{t_0t}\right)}$$

$$\boldsymbol{=\Psi(t_0,t)z(t_0)+G(x_{t_0t})}$$

В этих уравнениях Φ $(t_0,\ t)$и Ψ$(t_0,\ t)$определяются по (2.32)(2.33)(2.34)

Смысл элементов $\Phi_{\mu\nu}$ и $\Psi_{\mu\nu}$ Как следует из сказанного выше, смысл этих величин можно определить непосредственно. Если в (2.27) продифференцировать

$$\boldsymbol{z_1^{\nu}(t)=\varphi[z^1(t_0),z^2(t_0),\ldots,z^n(t_0)]}$$

по $z^{\mu}(t_0)$,то получим

$$\boldsymbol{\frac{\partial z_1^{\nu}(t)}{\partial z^{\mu}(t_0)}=\Phi_{\nu\mu}(t_0,t)} \tag{2.36}$$

Таким же образом из (2.29) следует

$$\boldsymbol{\frac{\partial y_1(t)}{\partial z^{\mu}(t_0)}=\Psi_{\mu}(t_0,t)} \tag{2.37}$$

Таким образом, $\Phi_{\nu\mu}(t_0,\ t)$определяет, как изменяется конечное состояние $z^{\nu}{}_1(t)$при начальном состоянии $z^{\mu}(t_0)$ и фиксированных моментах времени t, t_0:

$$\boldsymbol{dx_1^{\nu}(t)=\sum_{\mu=1}^{n}\Phi_{\nu\mu}(t_0,t)dz^{\mu}(t_0)=\Phi_{\nu\mu}(t_0,t)dz^{\mu}(t_0)\ \ (dz^s(t_0)} \tag{2.38}$$

$$\boldsymbol{=0} \text{ при } \boldsymbol{s\neq\mu})$$

Такое же значение имеет и (2.37).

Геометрический смысл следует непосредственно из (2.26), а именно:

$$\boldsymbol{F_1[\overline{e_{\mu}},t_0,t]\overline{e_{\nu}}=F\left(\overline{e_{\mu}},O_{t_0t}\right)\overline{e_{\nu}}=\Phi_{\nu\mu}(t_0,t)} \tag{2.39}$$

Таким образом, $\Phi_{\nu\mu}(t_0,\ t)$можно определить как проекциювектора состояния $F(\bar{e}_{\mu},\ O_{t_0t})$,который получается из специального вектора состояния $\bar{e}_{\mu}$(базисный вектор состояния алфавита состояний) в моменты времени от t_0до tпри нулевых значениях входных величин, на направлениебазисного вектора состояния $\bar{e}_{\nu}$.Для случая трехмерного пространства состояний все сказанное выше можно изобразить наглядно (рис. 2.2).

В соответствии с этим из (2.27) следует

$$z_1^{\nu}(t) = \Phi_{\nu\mu}(t_0, t)$$
$$z^{\nu}(t_0) = t \text{при } \nu \neq \mu \qquad (2.40)$$
$$z^{\mu}(t_0) = 1$$

когда в $z^{\nu}{}_1(t)$ только элемент $z^{\mu}(t_0) = 1$ отличается от нуля.

Такой же геометрический смысл имеют и элементы $\Psi_{\mu}(t_0, t)$ и $\Psi_{\mu\nu}(t_0, t)$

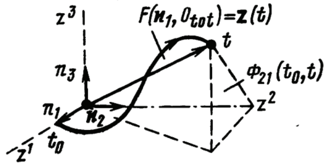

Рис. 2.2 Иллюстрация к переходной матрице линейной системы.

В качестве примера рассмотрим фундаментальную матрицу линейной системы (см. рис. 1.7). Из (1.36) следует

$$z(t) = z(0)cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + v(0)\sqrt{\frac{m}{k}}sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

$$v(t) = -z(0)\sqrt{\frac{k}{m}}sin\sqrt{\frac{k}{m}}t + v(0)\,cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

(2.41)

Следовательно,

$$\Phi(t_0, t) = \Phi(0, t) = \begin{pmatrix} cos\sqrt{\frac{k}{m}}t & \sqrt{\frac{m}{k}}sin\sqrt{\frac{k}{m}}t \\ -\sqrt{\frac{k}{m}}sin\sqrt{\frac{m}{k}}t & cos\sqrt{\frac{k}{m}}t \end{pmatrix} \qquad (2.42)$$

В этом примере $\Phi(t_0, t)$не зависит от t_0, поэтому выбираем t_0=0. Если все же учитывать t_0, то вместо (1.36) получим

$$z(t) = \sqrt{\frac{k}{m}}\int_{t_0}^{t} x(\tau)\,sin\sqrt{\frac{k}{m}}(t-\tau)d\tau + z(t_0)cos\sqrt{\frac{k}{m}}(t-t_0) \qquad (2.43)$$

$$+ v(t_0)\sqrt{\frac{m}{k}}sin\sqrt{\frac{k}{m}}(t-t_0)$$

и фундаментальная матрица $\Phi(t_0, t)$ получается, из (2.41…2.42) при замене tна $(t-t_0)$. В данном случае $\Phi(t_0, t)$ является функцией $(t-t_0)$. При дальнейшем рассмотрении мы увидим, что это обстоятельство не обязательно выполняется для всех линейных динамических систем.

Следует отметить, что для линейных систем оператор переходов Fраспадается на два оператора: Φ и F_2. То же самое относится и к G.

Контрольные вопросы

1. Раскройте понятие «триадной» характеристики и приведите примеры ее составляющих.
2. Какие составляющие рассматриваются при проведении системного анализа сложных систем?
3. В чем состоит суть системного анализа процесса управления информационной безопасностью?
4. Какие положения включает концепция системного управления информационной безопасностью?
5. На чем базируются методы системного анализа и принятия решений
6. Дайте определение детерминированной системе.
7. Как задаются основные уравнения динамических систем?
8. Раскройте основные свойства уравнений,описывающих динамические системы.
9. Приведите пример построения основных уравнений для какой-либо динамической системы,заданной в виде схемной реализации.
10. Дайте определение линейной динамической систмы.
11. Что такое положение системы?
12. Раскройте понятия свободной и вынужденной выходных величин.
13. Что представляет собой фундаментальная матрица переходов?
14. Каким образом можно получить проекцию выбора состояния сложной системы и с какой целью?
15. Приведите пример геометрической интерпретации переходной матрицы линейной системы

3.**Исследование систем методами теории диффузионных решений.**

3.1. Стохастические системы

Телекоммуникационные системы наряду с системами обеспечения информационной безопасностью безусловно относятся к сложным системам,функционирующим в условиях случайных воздействий.Последние имеют как внутреннюю,так и внешнюю природу возникновения.В связи с исследованиями таких систем возникают многочисленные статические задачи.

Это обстоятельство объясняется главным образом тем, что основным источником сведений о характеристиках сложных систем и особенно их элементов является наблюдение над реально функционирующей системой.

Среди возможных постановок статистических задач мы выделяем две наиболее распространенные: 1) проверка статистических гипотезосоответствии характеристик системы некоторым заранее сформулированным требованиям и 2) оценка количественных характеристик системы по результатам наблюдения. Вместе с тем, часто встречаются и комбинированные постановки задачи.

Относительно условий получения экспериментальных данных обычно могут быть сделаны следующие предположения: 1) наблюдения ведутся в естественных условиях функционирования системы, 2) наблюдения находятся в ведении экспериментатора, т. е. возможна постановка специальных экспериментов.

Общая схема статистической оценки сложной системы, состоящей из некоторого числа подсистем, выглядит следующим образом.

Во-первых, мы задаемся математическими моделями подсистем как некоторых агрегатов. Первой возникающей при этом задачей является задача проверки статистической гипотезы о том, что та или иная подсистема может быть описана соответствующим агрегатом. Одним из вопросов при решении этой задачи является вопрос об отсутствии взаимного влияния подсистем иначе, чем посредством передачи сигналов, предусмотренной моделью функционирования агрегатов.

Коль скоро гипотеза принята, мы можем пойти дальше — оценивать параметры и распределения, характеризующие агрегат. Пусть параметры или функции распределения, характеризующие i-й агрегат, представляются точкой x_i некоторого пространства X_i.Тогда, на основании аналитических расчетов или статистического моделирования, мы назначаем такие области $D_i \subset X_i$ что если все $x_i \in D_i$ то система считается удовлетворяющей заданным требованиям. Таким образом, задача статистической проверки системы сводится к проверке совокупности гипотез $H_i = \{ x_i \in D_i \}$.

Пусть имеется агрегат со входом и выходом. Ставится задача: по наблюдениям над тем и другим найти показатели, которые характеризуют этот агрегат в некотором классе агрегатов (например, в классе кусочно-линейных агрегатов).

В зависимости от условий можно различать следующие постановки задачи:

1. На вход агрегата можно посылать произвольные сигналы в произвольные моменты времени; наблюдается как вход, так и выход.
2. Вход не управляем, но наблюдаем. Выход наблюдаем.
3. Вход не управляем и не наблюдаем; однако известно, какому классу процессов принадлежит входной процесс. Наблюдается только выход. В некоторых случаях можно считать наблюдаемыми внутренние состояния исследуемой системы.

Легко видеть, что дальнейшее усложнение ситуации не имеет особого смысла: если мы откажемся от использования информации о классе случайного процесса на входе, то задача всегда будет обладать тривиальным решением: можно всегда представить себе агрегат, на выход которого поступают входные сигналы с постоянной задержкой т. Если о входном процессе ничего не известно, то любой выходной процесс может быть совместим с гипотезой о том, что агрегат принадлежит только что описанному типу. Однако утверждение, что в этом случае выходной процесс несет в себе нулевую информацию об устройстве агрегата, было бы неверным. В самом деле, для данного агрегата существуют недопустимые или маловероятные выходы при любом входе.

Например, какой бы поток ни посылать на вход системы массового обслуживания, выходящий поток всегда будет обладать интенсивностью, не превосходящей n/τ, где п — число обслуживающих приборов, τ — средняя длительность обслуживания одного требования. Поэтому наблюдение выходящего потока позволяет ограничить множество допустимых агрегатов и иногда выбирать между несколькими гипотезами; однако всегда будет сохраняться многозначность.

Ниже мы рассмотрим некоторые статистические задачи, связанные с оценкой сложных систем по экспериментальным данным.

3.1.1. Оценка параметров сложной системы

Предположим, что испытывается сложная система, причем целью испытаний является оценка некоторого параметра $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$, где $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ — числовые параметры. Эти параметры непосредственно измерить невозможно, зато можно наблюдать некоторый случайный процесс

$$\tilde{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) + \Delta \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) \tag{3.1}$$

где y (t)— среднее значение процесса, зависящее от параметра α; Δy(t)- ошибка измерения, имеющая известный закон распределения. Процесс ỹ(t) может быть векторным: $\tilde{y}(t) = (\tilde{y}(t_1), ..., \tilde{y}(t_r))$

где

$$\tilde{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{t}) + \Delta \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{1} \leq \boldsymbol{i} \leq \boldsymbol{r}$$

Спрашивается: как оценить параметр α по наблюдению y (t)?

Если известна зависимость y (t)от α, тогда задача может быть решена аналитически, например методом максимального правдоподобия. Так, пусть α принимает значения из множества A. Тогда для любого α∈A можно определить p (x; α), где p (x; a) — многомерная плотность вероятности случайного вектора наблюдений $(\tilde{y}(t_1), \tilde{y}(t_2), \dots, \tilde{y}(t_s))$ в предположении, что процесс наблюдался в моменты $t_1, t_2, ..., t_s$. Теперь ищется α_0, обращающее в максимум выражение μ(α) p(ỹ;α),где

$$\tilde{\boldsymbol{y}} = \tilde{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{t_1}), \tilde{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{t_2}), \dots, \tilde{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{t_s}))$$

μ(α) — априорная весовая функция, часто приравниваемая 1 для всех α∈A.

Специфика испытаний сложных систем состоит в том, что, как правило, явной зависимости y (t) от α, которая была бы доступна в вычислительном отношении, не существует. Вместо этого, однако, существует математическая модель, реализованная на ЭВ*М*, позволяющая для любого α∈Aвычислить y (t) с некоторой погрешностью, так что наблюдается

$$\hat{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{\delta y}(\boldsymbol{t}) \tag{3.2}$$

где $\hat{y}(t) = (\hat{y}(t_1), \hat{y}(t_2), \dots, \hat{y}(t_s))$При этом имеется возможность в принципе неограниченное число раз воспроизводить процесс моделирования при произвольных значениях a. Возникает вопрос об оптимальной оценке параметра по результатам моделирования.

Исходя из конкретного вида множества A, множества моментов наблюдения процесса ỹ(t), а также законов распределения ошибок Δ y(t) и заданной функции убытка от ошибки в определении a, во многих случаях можно выбрать такой функционал ρ[ỹ;ŷ] что минимизация этого функционала означает (точно или с допустимой степенью приближения) минимизацию среднего убытка от неточности оценки α.

Для иллюстрации этого принципа рассмотрим следующий элементарный пример. Допустим, что параметр α является числом и может принимать *N*возможных значений $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, ..., \alpha^{(N)}$ с равными априорными вероятностями. Предположим также, что имеется единственное наблюдение $\tilde{y} = \tilde{y}(t_1)$, r = 1, и как ошибки измерений на системе, так и ошибки модели являются нормальными с нулевыми математическими ожиданиями. Итак,

$$\tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{y} + \Delta\boldsymbol{y}$$

$$\hat{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{\delta y} \qquad (3.3)$$

где случайные величины Δy и δy имеют распределения $N(0, \sigma_1^2)$ и $N(0, \sigma_2^2)$ соответственно. При этом $y = y(\alpha)$. Обозначим также $y_i = y(\alpha^{(i)})$, $1 \le i \le N$.

Пусть на модели получено Nнезависимых реализаций, по одной для каждой точки $\alpha^{(i)}$.Итак, имеем

$$\hat{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{1}} = \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{1}} + \boldsymbol{\delta y}_{\boldsymbol{1}}, \quad \dots \quad , \quad \hat{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{N}} = \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{N}} + \boldsymbol{\delta y}_{\boldsymbol{N}}$$

В качестве функции убытка $W(\alpha, \beta)$ возьмем $W(\alpha, \beta) = c > O$ при $\alpha \ne \beta, W(\alpha, \alpha)= 0$. Очевидно, в качестве наилучшей оценкинужно взять $\alpha^{(i)}$, для которого $|y_i — y|$ минимально. Итак, в данном случае расстояние ρ есть обычное евклидово расстояние двух точек. Важно подчеркнуть, что минимизируется на самом деле математическое ожидание убытка$W(\alpha, \hat{\alpha})$где α — истинное значение параметра, $\bar{\alpha}$ — его оценка; однако оказывается, что минимум этого математического ожидания соответствует минимуму расстояния между $\tilde{y}$ и y.

В зависимости от конкретных условий задачи, от того, каким образом выбрана функция убытка, а следовательно, и определяемое ею расстояние р, задача оценки параметра а приобретает тот или другой конкретный вид, а сама оценка — тот или иной статистический смысл (например, эффективные оценки, оценки максимального правдоподобия и др.). *М*ы не будем останавливаться на случаях, когда сформулированная задача сводится к известным задачам математической статистики случайных величин или случайных процессов. В равной мере мы не готовы дать достаточно общую и строгую формулировку этой задачи и тем более предложить общие методы ее решения. Цель настоящего параграфа — познакомить читателя с некоторыми частными случаями, важными с практической точки зрения.

Рассмотрим случай, когда параметры системы $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ представляют собой числовые константы; характеристики $\tilde{y}_i(t)$измеряются в фиксированные моменты времени $t_l, l= 1, 2, \dots, L$, результаты этих измерений обозначим $\tilde{y}_i(t_l)$; в нашем распоряжении находятся результаты измерений $\tilde{y}_i(t)$по каждой из конечного числа Nреализаций процесса $y_t(t) = \tilde{y}_{in}(t_l)$, п $= 1, 2, \dots, N$.Будем считать, что интервалы $t_{l+1} - t_l$— времени достаточно велики, а корреляционные функции случайных процессов$y_i(t)$ быстро убывают с ростом $t_{l+1} - t_l$поэтому корреляцией между $y_i(t_{l+1})$и $y_i(t_l)$можно пренебречь для всех $l= 1, 2, \dots, L$.Результаты моделирования находятся в нашем распоряжении, поэтому есть возможность вывести их на печать для тех же моментов времени t_iи для нужного числа реализаций N.Ошибки измерений Δy_i (t)представляют собой независимые случайные величины с математическими ожиданиями, равными нулю, и дисперсиям σ^2_{il}

Для рассматриваемого случая в качестве расстояний можно принять функционалы r, Rи ρ, квадраты которых имеют вид

$$r^2[\tilde{y}_n(t_l)-\hat{y}_n(t_l)]=\sum_{i=1}^{r}\frac{[\tilde{y}_{in}(t_l)-\hat{y}_{in}(t_l)]^2}{\sigma_{il}^2} \tag{3.4}$$

$$R^2[y_n(t)-\hat{y}_n(t)]=\sum_{l=1}^{L}\sum_{i=1}^{r}\frac{[\tilde{y}_{in}(t_l)-\hat{y}_{in}(t_l)]^2}{\sigma_{il}^2} \tag{3.5}$$

$$\rho^2[\{\tilde{y}\}-\{\hat{y}\}]=\sum_{n=1}^{N}\sum_{l=1}^{L}\sum_{i=1}^{r}\frac{[\tilde{y}_{in}(t_l)-\hat{y}_{in}(t_l)]^2}{\sigma_{il}^2} \tag{3.6}$$

Оценки α_1, α_2, ..., α_k ,полученные из условия минимума (3.6), имеют ясный статистический смысл, так как ρ^2 в выражении (3.6) пропорционально среднему квадрату нормированной разности между соответствующими опытными характеристиками и характеристиками, полученными по результатам моделирования. Кроме того, выражение (3.6) обладает известными аналитическими преимуществами. Тем не менее, на практике встречаются случаи, когда вместо квадратов разностей используются абсолютные величины разностей (с соответствующей заменой нормирующего множителя).

Для других условий, когда опытные данные представляют собой записи $\tilde{y}_{in}(t)$ для всех t,принадлежащих некоторому интервалу (0, T), в качестве R^2 часто используется функционал вида

$$R^2[y_n(t)-\hat{y}_n(t)]=\int_0^T\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{\overline{\sigma}^2(t)}[\tilde{y}_{in}(t)-\hat{y}_{in}(t)]^2dt \tag{3.7}$$

где интеграл (3.7) конечен; здесь $\overline{\sigma}^2(t)$— обобщенная дисперсионная функция, вычисленная с учетом корреляционных характеристик случайных процессов $y_i(t)$. Тогда

$$\rho^2[\{\tilde{y}\}-\{\hat{y}\}]=\sum_{n=1}^{N}\int_0^T\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{\overline{\sigma}^2(t)}[\tilde{y}_{in}(t)-\hat{y}_{in}(t)]^2dt \tag{3.8}$$

В выражениях (3.7) и (3.8) обычно в качестве $\hat{y}_{ni}$ (t)используется кусочно-постоянная функция, которая при $t= t_l$равна $\hat{y}_{ni}$ (t_l).

На практике встречаются и другие случаи, на которых мы за недостатком места останавливаться не можем.

При любом конкретном $\rho\ [(\tilde{y}), (\hat{y})]$ задачу оценки параметров, как это следует из (3.8), можно сформулировать как задачу выпуклого программирования относительно искомых параметров $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, при которых функционал ρ имеет минимум при некоторых весьма общих ограничениях.

Рассмотрим кратко методы решения задачи оценки параметров $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$.Во многих случаях оказывается удобным метод последовательных приближений в следующем виде. Представим параметры α_j в виде сумм

$$\boldsymbol{\alpha_j = \alpha_j^0 + \Delta\alpha_j} \tag{3.9}$$

где α^0_j— так называемое нулевое приближение параметра α_j, определяемое грубо по непосредственным измерениям или каким-нибудь косвенным данным, а $\Delta\alpha_j$ — поправка. В этом случае функционал ρ будет функцией k переменных:

$$\boldsymbol{\rho = \rho(\Delta\alpha_1, \Delta\alpha_2, \ldots, \Delta\alpha_k)} \tag{3.10}$$

а результаты моделирования $\hat{y}_{in}\{t_l\}$,а также и $\{\hat{y}\}$будут зависеть от α^0_j.

Итак, первоначально в нашем распоряжении находятся: опытные данные $\{\tilde{y}\}$, математическая модель системы вместе со средствами ее реализации на ЭВ*М*, и параметры нулевого приближения $\alpha^0 = (\alpha_1^0, \alpha_2^0, \ldots, \alpha_k^0)$.Реализуя модель при $\alpha = \alpha^0$, мы получаем совокупность результатов моделирования $\{\hat{y}(\alpha^0)\}$, соответствующую совокупности опытных данных $\{\tilde{y}\}$. Затем, располагая этими результатами, решаем задачу на минимум $\rho\ [\{\tilde{y}\}, \{\hat{y}(\alpha^0)\}]$ и определяем так называемые поправки первого приближения $\Delta^{(1)}\alpha_j$. Наконец, вычисляем первые приближения параметров $\alpha_j^{(1)} = \alpha_j^0 + \Delta\alpha_j^{(1)}$; $\alpha^{(1)} = (\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \ldots, \alpha_k^{(1)})$. На этом первая итерация заканчивается.

Переходя ко второй итерации, мы должны реализовать модель при $\alpha = \alpha^{(1)}$и получить совокупность $\{\hat{y}(\alpha^{(1)})\}$, соответствующую тем же опытным данным $\{\tilde{y}\}$, решить задачу на минимум $\rho\ [\{\tilde{y}\}, \{\hat{y}(\alpha^1)\}]$ и определить поправки второго приближения $\Delta^{(2)}\alpha_j$;вычислить $\alpha_j^{(2)} = \alpha_j^1 + \Delta\alpha_j^{(2)}$и т. д.

В настоящее время имеются примеры, когда процесс последовательных приближений быстро сходится и для достижения точности, вытекающей из требований практики, можно ограничиться двумя-тремя приближениями. Для широкого круга практических задач сходимость можно оценить, исходя из принципа сжатых соображений.

Заметим, что поправки $\Delta\alpha_j$ (особенно второго и последующих приближений), как правило, оказываются достаточно малыми. Это обстоятельство может быть использовано для упрощения процедуры последовательных приближений, а в некоторых случаях и самой модели системы. В частности, хорошие результаты дает линеаризация соотношений $\hat{y}_i(t) = y_i(t, \alpha^\circ, \Delta\alpha)$ — приближенное представление их в виде линейной части степенного ряда по $\Delta\alpha$:

$$\widehat{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{t}) \approx \widehat{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{0}}) + \sum_{\boldsymbol{j}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{k}} \frac{\partial \widehat{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{j}})}{\partial \boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{i}}} \Delta \boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{j}} \qquad (3.11)$$

Значения частных производных (если таковые существуют) приближенно вычисляются по результатам моделирования на каждой стадии последовательных приближений.

Как показывают расчеты, удовлетворительные с практической точки зрения оценки могут быть получены даже в случае весьма грубых способов измерения $\tilde{y}_{in}$ (t_1), если число опытных данных достаточно велико.

3.1.2.Объединение разнородной информации при построении толерантных пределов для характеристики сложных систем

Одной из главных задач статистики сложных систем является объединение разнородной информации для выводов относительно данной системы.

Известно, что современные сложные системы состоят из многих элементов. Элементы проходят стадии разработки, лабораторных испытаний, доработки, заводских испытаний, далее испытаний в собранном виде и т.п. На каждой из этих стадий собирается определенная статистика относительно характеристик элементов Общий объем статистического материала оказывается весьма впечатляющим; в то же время, поскольку при переходе от стадии к стадии элементы претерпевают изменение, нельзя непосредственно объединять результаты наблюдений над характеристиками элементов на различных стадиях создания системы.

С другой стороны, возможности экспериментирования с готовой системой зачастую весьма ограниченны. Путь преодоления указанной трудности состоит в том, чтобы извлекать информацию о характеристиках системы даже в условиях, когда законы распределения этих характеристик изменяются в процессе ее создания.

В настоящем параграфе будет дана простая процедура построения толерантных пределов для случайных величин на основании разнородной информации

Предположим, что имеется случайная выборка (ξ_1, ..., ξ_n) независимых наблюдений над случайной величиной | с неизвестной функцией распределения F(x); требуется построить толерантный интервал, т. е. статистику $\varphi=\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ со свойством

$$\mathbf{P}\{\ \xi>\varphi\ (\ \xi_1,\ \ldots,\ \xi_n)\}\leq \varepsilon \tag{3.12}$$

где ε > 0 — заданное число. Весьма часто мы находимся в ситуации, когда объем рассматриваемой выборки мал, так что либо построение толерантного интервала по одной этой выборке вообще невозможно либо получается недопустимо широкий интервал. В этом случае можно привлечь дополнительные наблюдения над интересующей нас характеристикой, произведенные в других условиях, и, следовательно, при ином виде закона распределения

Пусть, помимо ξ_1, ..., ξ_n, можно построить т независимых выборок:

$$\begin{array}{l} \xi_{11},\ \ldots,\ \xi_{1n},\ \xi_{1,n+1} \\ \xi_{21},\ \ldots,\ \xi_{2n},\ \xi_{2,n+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \qquad \xi_{m1},\ \ldots,\ \xi_{mn},\ \xi_{m,n+1} \tag{3.13}$$

где $\xi_{i,j}$обладает функцией распределения $F(x,\theta_i)$; θ_i— неизвестный параметр произвольной природы, принадлежащий множеству Θ Допустим, что существует семейство функций

$$\boldsymbol{\varphi(x_1,\ldots,x_n;\rho),-\infty<x_i<\infty,1\le i\le n,-\infty<\rho<\infty,}$$

со следующими свойствами

1.$\varphi(x_1,\ldots,x_n;\ \rho)$ не убывает по ρ и $\varphi(x_1,\ldots,\ x_n;\ \rho\ )\to\infty$ при $\rho\to\infty$.

2.Если ξ_i — независимые случайные величины с функцией распределения $F(x,\ \theta)$, то вероятность $\Phi(\rho) = P\{\xi_{n+1}>\varphi(\xi_1,\ldots,\xi_n;\rho)\}$ определена и независит от $\theta\in\Theta$.

Приведем пример. Пусть $\theta = (\alpha,\sigma)$, где $-\infty<\alpha<\infty$, $\sigma> 0$, и

$$\boldsymbol{F(x;\theta) = F(x;\alpha,\sigma) = F\left(\frac{x-\alpha}{\sigma}\right)} \quad (3.14)$$

Положим

$$\boldsymbol{\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\,;\, s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2} \quad (3.15)$$

$$\boldsymbol{\varphi(x1,\ldots,xn;\rho) = \overline{x}+\rho s} \quad (3.16)$$

Тогда свойства 1 и 2, очевидно, выполняются, если $F(x)$— непрерывная функция.

Поставленная задача в общем случае решается следующим образом. Обозначим

v_i

$$\boldsymbol{v_i} = \begin{cases} \boldsymbol{1}, \text{если } \boldsymbol{\xi_{i,n+1} > \varphi(\xi_{i1},\ldots,\xi_{in};\rho)} \\ \boldsymbol{0}\text{в противном случае} \end{cases} \quad (3.17)$$

и, далее,

$$\boldsymbol{\eta(\rho) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} v_i(\rho)} \quad (3.18)$$

Зададимся некоторым $\varepsilon'> 0$ и найдем максимальное $\delta> 0$, для которого выполняется неравенство

$$\boldsymbol{P\{B_{m,\varepsilon}\le m\,\delta\}\le \varepsilon',} \quad (3.19)$$

где $B_{m,\varepsilon}$— случайная величина, имеющая биномиальное распределение с параметрами т, ε. Далее обозначим через ρ_0 наименьшее значение ρ, для которого

$$\boldsymbol{\eta(\rho)\le\delta.} \quad (3.20)$$

Справедливо следующее утверждение

Теорема. Соотношение (3.12) выполняется с вероятностью, не меньшей $1 - \varepsilon'$, если положить

$$\rho\ (\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n)=\varphi(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n;\rho_0) \tag{3.21}$$

Доказательство. Обозначим

$$A=\{\rho: M\eta(\rho)>\varepsilon\} \tag{3.22}$$

Возможны два случая: 1) A = (-∞,ρ], 2) A = (-∞,ρ),где ρ— некоторое конечное число. В первом случае

$$P\ \{\ \rho_0 \in A\} \le P\{\eta(\rho) \le \delta\} \le P\ \{B_{m,\varepsilon} \le m\delta\} \le \varepsilon'. \tag{3.23}$$

Во втором случае возьмем последовательность $\rho_n \uparrow \rho$.Имеем:

$$P\{\rho_0 \in A\} = P\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty}(\eta(\rho_n) \le \delta)\right\} \tag{3.24}$$

Ввиду того, что

$$\{\eta(\rho_n) \le \delta\} \subset \{\eta(\rho_{n+1}) \le \delta\}, n \ge 1 \tag{3.25}$$

$$P\{\rho_0 \in A\} = \lim_{n\to\infty} P\{\eta(\rho_n) \le \delta\} \tag{3.26}$$

Однако вследствие того, что $\rho_0 \in A$ при любом $n \ge 1$,

$$P\{\eta(\rho_n) \le \delta\} \le P\{B_{m,\varepsilon} \le m\delta\} \le \varepsilon'$$

отсюда находим, что неравенство

$$P\{\rho_0 \in A\} \le \varepsilon' \tag{3.27}$$

выполняется также во втором случае.

Далее,

$$P\{\rho_0 \in A\} = P\{M(\rho_0) \le \varepsilon\} = P\{P\{\xi > \varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n)\} \le \varepsilon\} \tag{3.28}$$

откуда

$$P\{P\{\xi > \varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n)\} \le \varepsilon\} \ge 1 - \varepsilon' \tag{3.29}$$

что и требовалось доказать.

3.1.3. Об оптимальном планировании испытаний для оценки параметров сложной системы

В настоящем параграфе будет описана одна математическая схема, связанная с оптимизацией оценки параметров сложной системы.

Пусть система характеризуется некоторым набором числовых параметров $x_1, x_2, \ldots x_n$, подлежащих статистической оценке, и задан набор показателей эффективности системы y_x, y_2, ..., $y_т$, известным образом зависящих от этих параметров

$$\begin{aligned} &\mathbf{y_1=\varphi_1(x_1,x_2,\ldots x_n)} \qquad\qquad \mathbf{y_m=\varphi_m(x_1,x_2,\ldots x_n)} \\ &\mathbf{y_2=\varphi_2(x_1,x_2,\ldots x_n)} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{3.30}$$

Обозначим через $\widehat{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{i1}}, \ldots, \widehat{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{in}}$ некоторые статистические оценки x_1, x_2, ... x_n соответственно, и предположим, что в качестве оценок показателей эффективности системы используются значения функций φ_i при подстановке в них $\widehat{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{ij}}$ вместо x_j.

$$\widehat{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{i}} = \boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{i}}(\widehat{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{i1}}, \ldots, \widehat{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{in}}), \mathbf{1} \leq \boldsymbol{i} \leq \boldsymbol{m} \tag{3.31}$$

Допустив, что функции φ_i достаточно гладки, а ошибки статистических оценок могут рассматриваться как малые величины, найдем:

$$\boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{i}} \approx \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{i}} + \sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}} \frac{\boldsymbol{\partial\varphi}_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{x}_{\mathbf{1}}, \boldsymbol{x}_{\mathbf{2}}, \ldots, \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}})}{\boldsymbol{\partial x}_{\boldsymbol{j}}} \boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{ij}} \tag{3.32}$$

где обозначено

$$\boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{i}} = \widehat{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{i}} - \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{i}}, \boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{ij}} = \widehat{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{ij}} - \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{j}} \tag{3.33}$$

Будем считать, что приближенные значениях x_1, x_2, ... x_n,известны наоснованиипредварительного эксперимента или расчетов. Поэтому значения производных можно приближенно заменить некоторыми известными константами a_{ij}:

$$\frac{\boldsymbol{\partial\varphi}_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{x}_{\mathbf{1}}, \boldsymbol{x}_{\mathbf{2}}, \ldots, \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}})}{\boldsymbol{\partial x}_{\boldsymbol{j}}} = \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{ij}} \tag{3.34}$$

и тогда получим

$$\boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{i}} \approx \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{i}} + \sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{ij}}\, \boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{ij}}, \mathbf{1} \leq \boldsymbol{i} \leq \boldsymbol{n} \tag{3.35}$$

Для дисперсий оценок $\widehat{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{i}}$ имеем следующие приближенные формулы:

$$\boldsymbol{D}\widehat{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{i}} \approx \sum_{\boldsymbol{j,k}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{ij}}\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{ik}}\boldsymbol{cov}(\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{ij}}, \boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{ik}}) \tag{3.36}$$

где, в частности, $\boldsymbol{cov}(\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{ij}}, \boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{ik}}) = \boldsymbol{D\xi}_{\boldsymbol{ij}}$.

Пусть, далее, имеется Nтипов испытаний. В результате проведения испытаний r-го типа, $1 \le r \le N$, получаем несмещенные оценки $\boldsymbol{\hat{x}_{rj}}$параметров $x_j, 1 \le j \le n$, причем

$$\boldsymbol{cov(\hat{x}_{rj}, \hat{x}_{rk}) = b_{rjk}\ , 1 \le r \le N\ , 1 \le\ I \le n\ , 1 \le j \le n} \tag{3.37}$$

Числа b_{rjk}мы считаем заданными. При различных r оценки указанного вида считаем некоррелированными.

Решим вначале задачу построения по совокупности $\{\boldsymbol{\hat{x}_{rj}}\}$ линейных несмещенных оценок $\boldsymbol{\hat{x}_{ij}}$параметров x_j,при которых линейный член (3.35) обладает наименьшей дисперсией. Оценки x_j будем искать в виде

$$\boldsymbol{x_j = \sum_{r=1}^{N} p_{jr}\, \hat{x}_{rj},\ \ \sum_{r=1}^{N} p_{jr} = 1} \tag{3.38}$$

(В действительности p_{jr}зависят также от i,однако этот индекс мы будем считать фиксированным; поэтому для упрощения обозначений будем писать p_{jr}вместо P_{ijr}.)Итак, по формуле (3.35)

$$\boldsymbol{\eta_i \approx \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \sum_{r=1}^{n} p_{jr}\, \xi_{rj}} \tag{3.39}$$

Где

$$\boldsymbol{\xi_{rj} = \hat{x}_{rj} - x_j} \tag{3.40}$$

Отсюда

$$\boldsymbol{D\hat{y}_i \approx \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ij}a_{ik} \sum_{r=1}^{N}\sum_{s=1}^{N} p_{jr}p_{ks}\, cov(\hat{x}_{rj}, \hat{x}_{sk})} \tag{3.41}$$

$$\boldsymbol{= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \sum_{r=1}^{N} p_{jr}p_{kr}\, b_{rjk}}$$

Теперь нужно найти минимум квадратической формы [обозначим ее $\boldsymbol{A(\{p_{jr}\})}$]при условии

$$\boldsymbol{\sum_{r=1}^{N} p_{jr} = 1, \qquad 1\ \le\ j\ \le\ n.}$$

Для этоговведем функцию Лагранжа

$$\boldsymbol{\Phi(\{p_{jr}\}) = A(\{p_{jr}\}) - 2\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} \sum_{r=1}^{N} p_{jr}} \tag{3.42}$$

Использовав формулу (3.41), найдем:

$$\boldsymbol{\Phi} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ij}a_{ik}\sum_{j=1}^{N} p_{jr}p_{kr}\, b_{rjk} - \sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}\sum_{r=1}^{N} p_{jr} \tag{3.43}$$

Уравнение экстремума имеет следующий вид:

$$a_{ij}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\sum_{r=1}^{N} b_{rjk}p_{kr} = \lambda_{ij}, \sum_{i=1}^{N} p_{jr} = 1, 1 \le r \le N, 1 \le i \le n. \tag{3.44}$$

Решив эти уравнения, найдем выражения $D\hat{y}_i$через $\{ b_{rjk} \}$:

$$D\hat{y}_i = G_i(\{b_{rjk}\}) \tag{3.45}$$

Предположим теперь, что с r-м типом испытаний, 1 ≤r≤ N,связывается некоторая стоимость t_r(зависящая, например, от продолжительности испытаний), причем известны зависимости

$$b_{rjk} = b_{rjk}(t_r), 1 \le r \le N, 1 \le j \le n\,, 1 \le k \le n \tag{3.46}$$

В таком случае можно поставить задачу об оптимизации плана испытаний при удовлетворении заданных требований к точности оценки показателей системы. Эта задача формулируется следующим образом.

Требуется определить $t_1, t_2, \ldots, t_N$при условии минимума суммы $t_1 + t_2 + \ldots + t_N$inи ограничениях

$$D\hat{y}_i \le A_i, 1 \le i \le m \tag{3.47}$$

если $D\hat{y}_i$определяются правой частью формулы (3.41), где p_{jr}находится вместе с постоянными λ_{ij}из системы уравнений (3.44), причем b_{rjk}связаны с t_rуравнениями (3.46).

Решение задачи в случае некоррелированных оценок.

Предположим, что

$$b_{rjk} = cov(\hat{x}_{rj}, \hat{x}_{rk}) = \begin{cases} B_{rj} & \text{при } j = k \\ 0 & \text{при } j \ne k \end{cases} \tag{3.41}$$

Тогда уравнения экстремума (3.44) примут следующий вид:

$$a_{ij}^2 B_{rj} p_{jr} = \lambda_{ij},$$

$$\sum_{r=1}^{n} p_{jr} = 1, 1 \le r \le N, 1 \le j \le n \tag{3.49}$$

*М*ы видим, что эти уравнения решаются непосредственно, а именно:

$$p_{jr} = \frac{1}{B_{rj}}\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{B_{sj}}\right)^{-1} \tag{3.50}$$

Приближенное выражение дисперсии $\widehat{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{i}}$примет вид

$$D\widehat{y}_i \approx \sum_{r=1}^{n} a_{ij}^2 \left(\sum_{r=1}^{N} B_{rj}^{-1} \right)^{-1} \tag{3.51}$$

Предположим, что дисперсии оценок $\widehat{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{rj}}$обратно пропорциональны стоимости наблюдений. Тогда можно записать:

$$B_{rj}^{-1} = \beta_{rj} t_r \tag{3.52}$$

где $\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{rj}}$— некоторые константы, и формула (3.51) примет вид

$$D\widehat{y}_i = \sum_{r=1}^{n} a_{ij}^2 \left(\sum_{r=1}^{N} \beta_{rj} t_r \right)^{-1} \tag{3.53}$$

Таким образом, задача формулируется как задача минимизации суммы $t_1+t_2+\ldots+t_N$при условиях

$$\sum_{r=1}^{n} a_{ij}^2 \left(\sum_{r=1}^{N} \beta_{rj} t_r \right)^{-1} \leq A_i, 1 \leq i \leq m \tag{3.54}$$

и дополнительных условиях

$$t_r \geq 0, 1 \leq r \leq N \tag{3.55}$$

Отметим случай, когда эта задача является задачей линейногопрограммирования.Пусть

$$a_{ij}^2 = \begin{cases} c_i & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases} \tag{3.59}$$

Тогда условия (3.54) будут иметь вид

$$c_i \left(\sum_{r=1}^{N} \beta_{rj} t_r \right)^{-1} \leq A_i, 1 \leq i \leq m \tag{3.57}$$

или, что то же,

$$\sum_{r=1}^{N} \beta_{rj} t_r \geq \frac{c_i}{A_i}, 1 \leq i \leq m \tag{3.58}$$

Все же остальные условия и в общем случае являются линейными. Условие (3.57) выполняется, если задаются ограничения не на $\boldsymbol{D\widehat{y}_i}$,а непосредственно на $\boldsymbol{D\widehat{x}_j}$.

3.2.Диффузионные уравнения

Выше уже неоднократно говорилось о том, что основной целью анализа сложных систем вообще и телекоммуникационных в частности является исследование поведения различных функционалов от процесса функционирования системы. Сами процессы функционирования являются случайными и имеют весьма сложную природу. Поэтому, по-видимому, бесполезно надеяться получить необходимую информацию о системе, рассматривая изучаемый процесс во всей его сложности. К счастью, для практических целей бывает достаточно изучить поведение указанных функционалов лишь при некоторых «предельных» режимах работы системы. Для таких режимов могут быть доказаны предельные теоремы, суть которых заключается в том, что в этих случаях исходные сложные по структуре случайные процессы можно заменить более простыми так, что искомые функционалы от исходных процессов будут близки в каком-либо вероятностном смысле к таким же функционалам от этих простых процессов.

В качестве таких процессов весьма часто выступают хорошо изученные диффузионные процессы, хотя могут встретиться и другие варианты. Примером могут служить хорошо известные в теории массового обслуживания предельные теоремы о сходимости последовательности сумм «слабых» потоков общего вида к пуассоновскому, о сходимости редеющих потоков и т. д. Ниже будет рассмотрен лишь случай сходимости к диффузионным процессам, вернее будет дан беглый обзор полученных к настоящему времен результатов.

Рассмотрим процесс случайного блуждания на прямой, которую обозначим через R.Пусть в моменты h,2h,... частица меняет свое положение z^h. При этом, если $z^{(h)}(t) = z$, то $z^{(h)}(t+h)$ является случайной величиной с распределением$\boldsymbol{P_z^{(h)}(E,t) = P\{z^{(h)}(t+h) \in E \subset R / z^{(h)}(t) = z\}}$. Покажем теперь, что при естественных предположениях при $h \to 0$ процесс случайного блуждания сходится к диффузионному процессу. Предположим, что при любом бусеченные моменты (сами моменты могут не существовать) распределения $\boldsymbol{P_z^{(h)}(E,t)}$имеют вид:

$$\int\limits_{|y-z|\le\delta} (y-z)\, P_z^{(h)}(dy,t) = f_1(t,z)h + o(h),$$

$$\int\limits_{|y-z|\le\delta} (y-z)^2\, P_z^{(h)}(dy,t) = f_2(t,z)h + o(h),$$

$$\int\limits_{|y-z|\le\delta} \boldsymbol{P_z^{(h)}}\,(\boldsymbol{dy},\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{o}(\boldsymbol{h})$$

где величины o(h)/h→ 0 равномерно относительно z.

Обозначим P(h){τ, z;t,E} $\mathrm{P}^{(h)}\{\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{z};\boldsymbol{t},\boldsymbol{E}\} = \boldsymbol{P}\{\boldsymbol{z}^{(h)}(\boldsymbol{t}+\boldsymbol{h}) \in \boldsymbol{E} \subset \boldsymbol{R}/\boldsymbol{z}^{(h)}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{z}$. В силу уравнения Колмогорова — Чепмена имеем для $\tau < t$.

$$\mathrm{P}^{(h)}\{\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{z};\boldsymbol{t},\boldsymbol{E}\} = \int\limits_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{P_z^{(h)}}\,(\boldsymbol{dy},\boldsymbol{t})\mathrm{P}^{(h)}\{\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{h},\boldsymbol{y},\boldsymbol{t},\boldsymbol{E}\} =$$

$$\int\limits_{|y-z|\le\delta} \boldsymbol{P_z^{(h)}}\,(\boldsymbol{dy},\boldsymbol{t})\mathrm{P}^{(h)}\{\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{h},\boldsymbol{z},\boldsymbol{t},\boldsymbol{E}\} + \boldsymbol{o}(\boldsymbol{h}) =$$

$$\int\limits_{|y-z|\le\delta} \boldsymbol{P_z^{(h)}}\,(\boldsymbol{dy},\boldsymbol{t})\Bigg[\mathrm{P}^{(h)}\{\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{h},\boldsymbol{z},\boldsymbol{t},\boldsymbol{E}\} + (\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})\frac{\boldsymbol{\partial}\mathrm{P}^{(h)}\{\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{h},\boldsymbol{z},\boldsymbol{t},\boldsymbol{E}\}}{\boldsymbol{\partial z}} + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}[(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})^2 + \boldsymbol{o}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})^2]\frac{\boldsymbol{\partial}^2\mathrm{P}^{(h)}\{\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{h},\boldsymbol{z},\boldsymbol{t},\boldsymbol{E}\}}{\boldsymbol{\partial z^2}}\Bigg] + \boldsymbol{o}(\boldsymbol{h})$$

Разделим обе части полученного равенства на hи перейдем к пределу при h→0. Затем устремим δ→0. В результате получим

$$-\frac{\boldsymbol{\partial P}\{\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{h},\boldsymbol{y},\boldsymbol{t},\boldsymbol{E}\}}{\boldsymbol{\partial\tau}} = \boldsymbol{f_1}(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{z})\frac{\boldsymbol{\partial P}\{\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{z},\boldsymbol{t},\boldsymbol{E}\}}{\boldsymbol{\partial z}} + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{f_2}(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{z})\frac{\boldsymbol{\partial^2 P}\{\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{z},\boldsymbol{t},\boldsymbol{E}\}}{\boldsymbol{\partial z^2}} \qquad (3.59)$$

где $P\{\tau,z,t,E\} = P\{z(t) \in E/z(\tau) = z\}$, az(t) — процесс, получающийся из исходного приh→0. Но (3.59) есть не что иное, как уравнение Колмогорова для диффузионных процессов. Таким образом, при сделанных предположениях процесс случайного блуждания сходится к диффузионному (отметим, что хотя в математическом отношении проделанные переходы не являются безупречными, они обладают достаточной наглядностью). При этом величина $f_1(\tau, z)$ характеризует среднюю тенденцию в эволюции случайного процесса z(τ) и называется коэффициентом сноса. Величина $f_2(\tau, z)$ характеризует среднее квадратичное отклонение процесса z(τ) от его среднего значения и называется коэффициентом диффузии.

В качестве простейшего примера применим полученные результаты к анализу системы массового обслуживания, состоящей из одного прибора. Пусть w_n— время ожидания начала обслуживания n-го поступившего требования,ξ_n — разность между временем обслуживания n-го требования и интервалом, прошедшим с момента поступления п-го требования до момента поступления (п + 1)-го требования. Очевидно,

$$w_{n+1} = max[w_n + \xi_n, 0]$$

Если { ξ_n} является последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин, то, как показано в [], функция распределения случайной величины w_nсовпадает с распределением величины

$$\max_{k \le n} X_k,$$

где случайные величины $X_п$ связаны соотношением

$$X_{n+1}=X_n + \xi_n. \qquad (3.60)$$

Рассмотрим поэтому поведение цепи *М*аркова, описываемой соотношением (3.60). Если система нагруженная, то это означает, что $M\xi_n$=-$a_1\varepsilon$, где $0 < \varepsilon < 1$. Пусть D ξ_n= σ^2. Для того чтобы изучить предельное поведение (при $\varepsilon \to 0$) рассматриваемой цепи, положим $y_п = \varepsilon X_п$. Как следует из (3.60),

$$y_{n+1} = y_n + \eta_n$$

где $M\eta_n = a_1 \varepsilon^2, D\eta_n = \sigma^2 \varepsilon^2$.

Если теперь считать, что изменения состояния цепи происходят через промежутки времени длительности ε^2, то процесс в пределе (при $\varepsilon \to 0$) перейдет в диффузионный с коэффициентом сноса a_1и коэффициентом диффузии σ^2. Анализ этого процесса не сложен. Подобным образом можно исследовать более сложные системы. Соответствующие примеры можно найти в работах[8…10].

3.3.Некоторые предельные соотношения.

Невозможно упомянуть все имеющиеся к настоящему времени работы, изучающие предельное поведение различных случайных процессов. Поэтому мы ограничимся обзором лишь тех из них, которые, как представляется, скорее всего могут использоваться при анализе изучаемых систем. Вместе с тем следует отметить, что в большинстве этих работ используется весьма сложный математический аппарат, и поэтому изложение применяемых в них методов, а иногда и строгая формулировка полученных результатов нецелесообразна в рамках данной книги. Большое количество работ посвящено изучению поведения систем массового обслуживания в условиях большой загрузки [7,9]

При этом, как правило, изучались случаи сходимости случайных процессов, описывающих систему, к винеровскому процессу. Приведем ряд результатов, следуя работе [7].

Рассмотрим следующий процесс обслуживания. В систему поступает т $\geq$ 1 потоков требований, причем в j-м потоке (j = 1, ..., т) требования поступают группами случайного объема η_jчерез интервалы τ_j. Упомянутые случайные величины и образованные ими последовательности независимы. Требования в порядке поступления (с точностью до произвольного порядка внутри групп) становятся в общую очередь и ждут обслуживания. Обслуживание происходит на M — т приборах, которые будут нумероваться от т + 1 до M, группами случайного размера. Именно, в j-м приборе (j= т + 1, ..., M) группа объема

$-\eta_j > 0$ (или меньшего объема, если длина очереди меньше $-\eta_j$) обслуживается время τ_j, $\tau_j > 0$. Случайные величины τ_j, η_j и образуемые ими последовательности независимы. Кроме этого определены правила (возможно, рандомизированные), не зависящие от времени и длины очереди, устанавливающие дисциплину занятия свободных приборов, если в некоторый момент окажется, что их несколько.

Рассматриваются приборы двух типов. Приборы 1-го типа не начинают обслуживания, если отсутствует очередь; при появлении хотя бы одного требования мгновенно начинает действовать один из свободных приборов, выбор которого определяется установленной дисциплиной. Приборы 2-го типа начинают процесс обслуживания в моменты времени, разделенные случайными промежутками τ_j, независимо от наличия требований в очереди. Назовем систему обслуживания системой i-го (i= 1, 2) типа, если она содержит лишь приборы i-готипа. Если в системе есть приборы обоих типов, то назовем ее системой 3-го типа.

Предположим, что $M\,|\eta_i| < \infty, M\tau_j < \infty, j = 1, \ldots, M$. Рассмотрим величину $\delta = -\sum_{j=1}^{M} M\eta_i / M\tau_j$, характеризующую загрузкусистемы. Очевидно, Sпредставляет собой разность между средним количеством требований, которые система может обслуживать за единицу времени при бесконечной очереди и средним количеством требований, поступающим в систему за единицу времени. Как это обычно делается при изучении предельных случаев, предположим, что рассматривается последовательность систем, «управляемых» случайными величинами $\tau_j(\delta)$ и $\eta_j(\delta)$, зависимыми от δ, и

$$-\sum_{j=1}^{M}\left({M\boldsymbol{\eta_i(\delta)}} \big/ {M\boldsymbol{\tau_j(\delta)}} \right) = \boldsymbol{\delta}$$

Пусть $\nu_\delta(T)$ — длина очереди в момент T при некотором фиксированном начальном значении $\nu_\delta(0)$. Кроме того, начальное состояние системы будем характеризовать следующими величинами: $t_{j0} \geq 0$, $j = 1, \ldots, m$,— моментами поступления первой группы требований в j-м потоке, $t_{j0} \geq 0$, $j = m + 1, \ldots, M$, — моментами начала работы j-го прибора.

Теорема. Пусть при $\delta \to 0$ (безразлично, $\delta < 0$ или $\delta > 0$)

$$\sum_{j=1}^{M}\left[\frac{\boldsymbol{D\eta_j}}{\boldsymbol{M\tau_j}} + \frac{\boldsymbol{(M\eta_j)^2 D\tau_j}}{\boldsymbol{(M\tau_j)^3}}\right] \to \boldsymbol{\sigma^2 > 0}$$

и при некотором $\gamma > 0$ моменты

$$\boldsymbol{M\tau_j, M\left|\frac{\tau_j - M\tau_j}{\sqrt{D\tau_j}}\right|^{2+\gamma}}, \qquad \boldsymbol{\frac{M\left|\eta_j - M\eta_j\right|^{2+\nu}}{D\tau_j}}$$

равномерно по δ ограничены. Предположим, что для начальных условий $\nu_\delta(0), \boldsymbol{t_{j0}^{\delta}}$,j=1,…,M, выполняется

$$\boldsymbol{(\delta T)^{-1} \max_j\left(\nu_\delta(0), \frac{t_{j0}^{\delta}}{M\tau_j(\delta)}\right) \underset{p}{\to} 0}\text{при } \boldsymbol{\delta \to 0}, \text{если } \boldsymbol{\delta\sqrt{T} \geq 1};$$

$$\boldsymbol{T^{-1/2} \max_j\left(\nu_\delta(0), \frac{t_{j0}^{\delta}}{M\tau_j(\delta)}\right) \underset{p}{\to} 0}\text{при } \boldsymbol{\delta \to 0}, \text{если } \boldsymbol{\delta\sqrt{T} < 1},$$

где $\underset{p}{\to}$означает стремление по вероятности (начальные условия могутбыть и случайными, но не зависящими от последовательностей $\{\boldsymbol{\tau_j^k}\}, \{\boldsymbol{\eta_j^k}\}$).

Тогда для системы любого из трех типов предельное распределение $\nu_\delta(T)$при $\delta \to 0$, $T \to \infty$ описывается следующими соотношениями.

А. Если $\boldsymbol{\delta\sqrt{T} \to 0}$, то

$$\lim_{\delta\to 0} P\left\{\nu_\delta(T) < \frac{x\sqrt{T}}{\nu_\delta(0)}, t_{j0}^{\delta}(j = 1,2,\dots,M)\right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{x/\sigma} e^{-t^2/2}dt$$

Б. Если $\delta\sqrt{T} \to -\infty$, то

$$\lim_{\delta\to 0} P\left\{\nu_\delta(T) < -\delta T + \frac{x\sqrt{T}}{\nu_\delta(0)}, t_{j0}^{\delta}(j = 1,2,\dots,M)\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x/\sigma} e^{-t^2/2}dt$$

В. Если $\delta\sqrt{T} \to u$, то

$$\lim_{\delta\to 0} P\left\{\nu_\delta(T) < \frac{x}{|\delta|}/\nu_\delta(0), t_{j0}^{\delta}(j = 1,2,\dots,M)\right\} = P\left(\frac{x}{\sigma}, \sigma \operatorname{sign}\delta, u^2\right)$$

где $P(a, b, u^2) = P\{w(t) < a + \frac{t}{b}, 0 \le t \le u^2\}$— вероятность непересечения стандартным винеровским процессом $w\{t\}$прямой a=t/bдо момента u^2.

Аналогичные предельные соотношения справедливы для времени ожидания. Заметим, что можно не только получить вид предельных законов для рассматриваемых случаев, но и найти асимптотические разложения функций распределения, к примеру, величин $\nu_\delta(T)$по степени параметра δ, где главным членом являются найденные в теореме предельные законы.

В последнее время получены новые результаты, развивающие рассматриваемый подход и дающие условия сходимости не только к винеровскому процессу, но и к диффузионным процессам более общего вида, в том числе и с условиями на границе [7]. Рассматриваемые в этих работах случайные процессы имеют достаточно общую природу и с их помощью можно описать широкий класс реальных систем. Налагаемые на процессы требования позволяют назвать их обобщенными регенерирующими процессами. Именно, требуется существование такого возвратного множества Dсостояний процесса, чтобы:

1. время возвращения в Dимело равномерно ограниченный момент порядка $1 + \gamma$, $\gamma > 0$,
2. «выбросы» траектории процесса за время возвращения в Dимели равномерно ограниченный момент порядка $2 + \gamma$,
3. среднее и дисперсия приращения процесса за «большой» промежуток времени после попадания в Dмало зависели от истории процесса, предшествовавшей его попаданию вD,именно, требуется, чтобы указанные величины были ограничены функциями, зависящими только от времени, прошедшими с момента последнего попадания в D, и принадлежащими специальному семейству функций.

Ряд из сформулированных условий, по-видимому, может быть ослаблен. Следует отметить, что при доказательстве предельных теорем в последнем случае нет необходимости знать конкретные вероятностные законы, от которых зависит рассматриваемый процесс, а нужно проверить лишь ряд условий общего характера.

Контрольные вопросы

1. Какие задачи рассматриваются при анализе стохастических систем?
2. Каким образом можно оценить наблюдаемый параметр системы, если задача имеет аналитическое решение?
3. В чем состоит специфика испытаний сложной системы?
4. Как выбирается функция убытка при оценке параметров сложной системы?
5. К какому классу задач относятся задачи оценки параметров сложной системы? Приведите примеры.
6. Раскройте сущность метода последовательных уменьшений.
7. В чем состоит смысл процедуры построения толерантных пределов?
8. Каким образом можно получить оптимальные оценки параметров сложной системы?
9. В чем смысл критерия минимизации среднеквадратической ошибки?
10. Раскройте физическую сущность процессов, описываемых диффузионными уравнениями.
11. Приведите пример анализа системы массового обслуживания.
12. Дайте обзор предельных соотношений, используемых при системном анализе.

Заключение

В настоящее время используется большое число математических моделей различных реальных телекоммуникационных систем. Причём необходимо отметить, что ТКС, используемые в гражданской авиации, отличаются как существенным разнообразием, так и характеристиками информационных потоков, формируемых ими. Сами модели, так и алгоритмические процедуры их анализа представляют собой весьма разнообразное сочетание математических схем и методов. Это обстоятельство в определенной мере затрудняет типизацию задач анализа систем,вызывая нежелательные явления на этапе эксплуатации ТКС,образующих сети и системы связи.

Тем не менее,специалисты в области информационной безопасности телекоммуникационных систем должны уверенно ориентироваться в методах анализа сложных систем,позволяющих оптимальным образом разрешать многочисленные задачи по обеспечению информационной безопасности ТКС, например таких, как определение политики безопасности предприятия, оценка рисков, выбор минимальной и достаточной совокупности технических средств защиты информации,оптимизации технической эксплуатации и технического обслуживания средств защиты информации и др.

Литература

1. Новосельцев В.Н., Тарасов Б.В., Голиков В.К., Демин Б.Е. Теоретические основы системного анализа. *М*.: Горячая линия-Телеком,2006.
2. Романов В.Н. Основы системного анализа. СПб.:СЗПИ,1998.
3. Вунш Г. Теория систем. *М*.:Сов.радио,1998.
4. Козлов В.Н. Системный анализ, оптимизация и принятие решений. *М*.:Проспект,2010.
5. Есинов Б.А. *М*етоды исследования операций. *М*.: Лань,2010.
6. Петровский А.Б. Теория принятия решений. *М*.: «Академия»,2009.
7. Боровков А.А. Теория вероятностей. *М*.:Наука,1976.
8. Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов. В 3-х томах. *М*.:Наука,1973.
9. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. К.: Наукова Думна,2011
10. Бусленко *М*.П., Калашников В.В., Коваленко И.Н. Лекции по теории сложных систем. *М*.:Сов.радио,1973.