ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ» (МГТУ ГА)

Кафедра высшей математики

Е.В. Владова

МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Утверждено редакционно-издательским советом МГТУ ГА в качестве учебного пособия

Москва
ИД Академии Жуковского
2020

УДК 51
ББК 51
В57

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Московского государственного технического университета ГА

Рецензенты:
Дементьев Ю.И. (МГТУ ГА) – канд. физ.-мат. наук, доцент;
Самохин А.В. (Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН) –
д-р техн. наук

Владова Е.В.
В57 Математика [Текст] : учебное пособие / Е.В. Владова. – М. : ИД Академии Жуковского, 2020. – 80 с.

ISBN 978-5-907275-54-6

Пособие содержит теоретический материал по темам: «Линейная и векторная алгебра», «Аналитическая геометрия», «Пределы и Непрерывность», «Производная и её приложения», «Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных», «Неопределенный интеграл», «Определенный интеграл и его приложения», «Кратные и криволинейные интегралы». Ко всем темам прилагаются примеры решения задач.

Данное учебное пособие издаётся в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Математика» по учебному плану для студентов I курса направления подготовки 25.05.05 очной формы обучения.

Рассмотрено и одобрено на заседаниях кафедры 29.08.2020 г. и методического совета 22.09.2020 г.

УДК 51
ББК 51
Св. тем. план 2020 г.
поз. 33

ВЛАДОВА Елена Владиславовна

МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

В авторской редакции

Подписано в печать 07.12.2020 г.
Формат 60x84/16 Печ. л. 5 Усл. печ. л. 4,65
Заказ № 691/1008-УП01 Тираж 90 экз.

Московский государственный технический университет ГА
125993, Москва, Кронштадтский бульвар, д. 20

Издательский дом Академии имени Н. Е. Жуковского
125167, Москва, 8-го Марта 4-я ул., д. 6А
Тел.: (495) 973-45-68 E-mail: zakaz@itsbook.ru

ISBN 978-5-907275-54-6

П е р в ы й с е м е с т р

ГЛАВА 1. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1.1 Основные сведения о матрицах

Матрицей размерности $m \times n$ называется прямоугольная таблица из m строк и n столбцов, содержащая a_{ij} – числа или другие математические объекты, называемые *элементами матрицы* $(i = 1,2,\dots,m; j = 1,2,\dots,n)$. Индекс i означает номер строки, j - номер столбца.

$$A_{m\times n} = \|a_{ij}\| = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

в сокращенной записи, $A=\|a_{ij}\|=(a_{ij})$; $i = 1,2,\dots,m; j = 1,2,\dots,n$.

Например, $A_{2\times3} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$, $B_{2\times2} = \begin{pmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{pmatrix}$.

Две матрицы A и B одного размера называются *равными*, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$для любых $i = 1,2,\dots,m; j = 1,2,\dots,n$.

Виды матриц. Матрица размерности $1 \times n$ называется *матрицей-строкой,* матрица размерности $n \times 1$ называется *матрицей-столбцом*.

Матрица называется *квадратной n-го порядка*, если $m = n$. Элементы квадратной матрицы a_{ii} называются *диагональными* и образуют *главную диагональ* матрицы. Элементы $a_{1n}, a_{2(n-1)}, \dots, a_{n1}$ образуют *побочную диагональ*. Если все элементы квадратной матрицы, кроме диагональных, равны нулю, то матрица называется *диагональной*. Диагональная матрица n-го порядка, все диагональные элементы которой равны единице, называется *единичной* матрицей n-го порядка.

Например, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица третьего порядка.

Треугольной матрицей называется матрица, у которой ниже главной диагонали стоят только нулевые элементы. Матрица любого размера называется *нулевой*, или *нуль-матрицей*, если все ее элементы равны нулю.

1.2 Операции над матрицами

1. ***Умножение матрицы на число***. *Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ на число λ* называется матрица $\lambda A = (b_{ij})$, элементы которой $b_{ij} = \lambda a_{ij}$.

Например, $B = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 5 \\ 15 & 5 & 0 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 5A$. В частности, $0 \cdot A = 0$.

2. ***Сложение матриц***. *Суммой двух матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$* одинакового размера $m \times n$ называется матрица $C = A + B$, элементы которой $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ $(i = 1,2,\dots,m; j = 1,2,\dots,n)$.

Например, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}, C = A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 10 & 7 \end{pmatrix}$.

3. ***Вычитание матриц.*** *Разность двух матриц* одинакового размера определяется через предыдущие две операции: $A - B = A + (-1)B$. ***Умножение матриц.*** Умножение матрицы A на матрицу B определено, если число столбцов первой матрицы равно числу строк второй. П*роизведением матрицы* A *размерности* $(m \times k)$ и матрицы B размерности $(k \times n)$ называется такая матрица C размерности $(m \times n)$, каждый элемент c_{ij} которой равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B.

Пример. Вычислить $A \cdot B$, если $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Решение. а) Умножение матриц возможно, т.к. число столбцов A и число строк B равны. $A_{2\times3} \cdot A_{3\times2} = C_{2\times2}$

б) Найдём элементы $A \cdot B$, вычислив сумму произведений элементов каждой строки матрицы A на соответствующие элементы столбцов B:

$$AB = \begin{pmatrix} 0\cdot4 + 1\cdot3 + 2(-1) & 0\cdot0 + 1\cdot2 + 2\cdot1 \\ 3\cdot4 + 4\cdot3 + 5(-1) & 3\cdot0 + 4\cdot2 + 5\cdot1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 19 & 13 \end{pmatrix}.$$

Свойства операций над матрицами:

1) $A + B = B + A$ (коммутативность сложения).
2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (ассоциативность сложения).
3) $\lambda\,(A + B) = \lambda\, A + \lambda\, B$ (дистрибутивность относительно сложения матриц).
4) $(\lambda + \mu)\, A = \lambda\, A + \mu\, A$ (дистрибутивность относительно сложения чисел).
5) $A\,(B + C) = AB + AC$, $(A + B)C = AC + BC$ (дистрибутивное свойство).
6) $\lambda\,(AB) = (\lambda\, A)\, B = A\,(\lambda\, B)$.
7) $A(BC) = (AB)C$ (ассоциативность умножения).
8) *специфическое свойства*, не имеющие аналогов для чисел: $AB \neq BA$.

4. *Возведение в степень.*

Целой положительной степенью $A^m (m > 1)$ квадратной матрицы A называется произведение m матриц, равных A, т.е. $A^m = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{m \text{ раз}}$.

По определению: $A^0 = E,\ A^1 = A$. Имеет место: $A^n \cdot A^m = A^{n+m}$.

Пример. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Найдём $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Из равенства $A^m = 0$ не следует, что матрица A нулевая.

5. *Транспонирование матрицы* – переход от матрицы A размерности $m \times n$ к матрице A^T размерности $n \times m$, в которой строки и столбцы поменялись местами с сохранением порядка. Матрица A^T называется *транспонированной* относительно матрицы A:

Например, $A_{2\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$; ${A^T}_{3\times2} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Свойства операции транспонирования:

1. $(A^T)^T = A$; 2. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$; 3. $(A + B)^T = A^T + B^T$; 4. $(AB)^T = B^T \cdot A^T$

1.3 Определитель квадратных матриц

Определителем матрицы первого порядка $A = (a_{11})$, или *определителем первого порядка*, называется элемент a_{11}: $\Delta_1 = |A| = a_{11}$.

Определителем второго порядка, называется число, равное разности произведений элементов главной и побочной диагоналей матрицы.

$$\Delta_2 = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \qquad (1)$$

Например, пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, тогда $\Delta_2 = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2.$

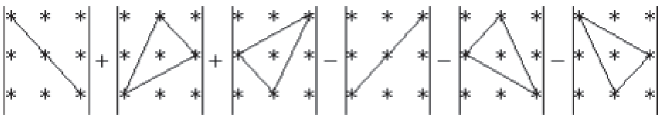
Пусть дана квадратная матрица третьего порядка:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Определитель третьего порядка - число, вычисляемое по формуле:

$$\Delta_3 = |A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11} \qquad (2)$$

Каждое слагаемое содержит по одному элементу из каждой строки и каждого столбца матрицы. Знаки слагаемых в формуле (2) легко запомнить, пользуясь схемой, называемой *правилом треугольников* или *правилом Сарруса*.



Пример. Вычислим определитель третьего порядка $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$

$\Delta = 0 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 4 - 2 \cdot 2 \cdot 1 - 0 \cdot (-1) \cdot 4 - 1 \cdot 3 \cdot 3 = 10.$

Минором M_{ij} элемента a_{ij} матрицы n-го порядка называется определитель $(n-1)$-го порядка, полученный вычеркиванием -й строки и j-го столбца.

Пример. Минором a_{31} матрицы A третьего порядка будет:

$$M_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}.$$

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы называется его минор, взятый со знаком со знаком „+”, если сумма номеров строки и столбца $i + j$ – четное число, и со знаком „–”, если $i + j$ – нечетное число.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Пример. Найти алгебраические дополнения всех элементов матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Решение.

$\mathrm{A}_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1;$ $\mathrm{A}_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -9;$ $\mathrm{A}_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6;$

$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}0&2\\2&3\end{vmatrix}=4; A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&2\\0&3\end{vmatrix}=3; A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&0\\0&2\end{vmatrix}$
$=-2;$

$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}0&2\\1&1\end{vmatrix}=-2;\ A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&2\\3&1\end{vmatrix}=5; A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&0\\3&1\end{vmatrix}$
$=3.$

Теорема Лапласа *Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения:* $\Delta = a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\dots+a_{in}A_{in}=\sum_{s=1}^{n}a_{is}A_{is}$.

Такая сумма называется разложением определителя по элементам i-й строки.

Пример. Вычислить определитель с помощью разложения по элементам первой строки: $\begin{vmatrix}1&0&2\\3&1&1\\0&2&3\end{vmatrix}=1\cdot 1+0\cdot(-9)+2\cdot 6=13.$

Пример. Вычислить определитель четвертого порядка:

$$|A|=\begin{vmatrix}-1&5&4&-3\\3&-2&8&5\\2&0&4&0\\5&-6&3&9\end{vmatrix}.$$

Решение. Умножим, например, элементы 1-го столбца на (-2) и прибавим их соответственно к элементам 3-го столбца. Раскладывая полученный определитель по элементам третьей строки, найдем

$$|A|=\begin{vmatrix}-1&5&4&-3\\3&-2&8&5\\2&0&4&0\\5&-6&3&9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&5&6&-3\\3&-2&2&5\\2&0&0&0\\5&-6&-7&9\end{vmatrix}=2(-1)^4\begin{vmatrix}5&6&-3\\-2&2&5\\-6&-7&9\end{vmatrix}$$
$=230.$

1.4 Обратная матрица

Определение. Матрица A^{-1} называется *обратной* по отношению к квадратной матрице A, если при умножении этой матрицы на данную матрицу (справа или слева) получается единичная матрица:

$$A^{-1}\cdot A=A\cdot A^{-1}=E \qquad (3)$$

A^{-1} существует, если её определитель $|A|\neq 0$, (*невырожденная* матрица).

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\tilde{A} \quad (|A|\neq 0), \qquad (4)$$

Алгоритм вычисления обратной матрицы:

1^0. Вычислить определитель матрицы A.

Если $|A|=0$, то A^{-1} не существует. Если $|A|\neq 0$, то A^{-1} существует.

2^0. Найти матрицу A^T, транспонированную к A.

3^0. Вычислить алгебраические дополнения элементов транспонированной матрицы $({A^T}_{ij}), (i,j=1,\ 2,\ \dots n)$ и составить из них присоединенную матрицу $\tilde{A}=(\tilde{a}_{ij})$, где $\tilde{a}_{ij}={A^T}_{ij}=A_{ji}\ (i,j=1,\ 2,\ \dots n)$.

4^0. Вычислить обратную матрицу по формуле (4).

5^0. Проверить правильность вычисления A^{-1} по формуле $A^{-1}A=AA^{-1}=E$.

Пример. Найти матрицу, обратную данной:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Решение. 1^0. Определитель матрицы $|A| = -20 \neq 0$, т.е. матрица A – невырожденная и обратная матрица A^{-1} существует.

2^0. Найдём матрицу A^T, транспонированную к A:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

3^0. Вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы A^T, учитывая, что ${A^T}_{ij} = A_{ji}$: $\tilde{A} = \begin{pmatrix} -5 & 6 & -3 \\ -5 & -6 & -7 \\ -5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

4^0. Найдём обратную матрицу $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}$:

$$A^{-1} = \frac{1}{-20}\begin{pmatrix} -5 & 6 & -3 \\ -5 & -6 & -7 \\ -5 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/20 & -6/20 & 3/20 \\ 5/20 & 6/20 & 7/20 \\ 5/20 & 2/20 & -1/20 \end{pmatrix}.$$

5^0. Проверим правильность вычисления обратной матрицы по формулам (3):

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$$

Отметим *свойства обратных матриц*:

1. $|\mathrm{A}^{-1}| = \dfrac{1}{|\mathrm{A}|}$; 2. $(\mathrm{A}^{-1})^{-1} = \mathrm{A}$; 3. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$; 4. $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;

1.5 Ранг матрицы

Минором k-го порядка матрицы A размера $m \times n$ называется определитель подматрицы, полученной из A вычеркиванием какой-либо строки и столбца. Заметим: $k \leq min(m; n)$. Например, из матрицы $A_{3\times4}$ можно получить миноры 1, 2 и 3 порядков.

Определение. *Рангом матрицы* A называется наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы.

Ранг матрицы A обозначается $rangA$, или $r(A)$. Из определения следует:

а) ранг матрицы $A_{m\times n}$ удовлетворяет неравенству: $r\ (A) \leq \min(m; n)$;

б) $r(A) = 0$ тогда и только тогда, когда матрица нулевая $A = 0$;

в) для квадратной матрицы n-го порядка $r(A) = n$ тогда и только тогда, когда матрица A – невырожденная.

Пример. Вычислить ранг матрицы (метод окаймляющих миноров)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 7 \\ 1 & -2 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Для матрицы $A_{3\times5}$ $r(A) \leq \min(3; 5) = 3$. Так как элементы отличны от 0, то ранг не может быть меньше 1.

В матрице есть минор 2 порядка, отличный от 0. $\mathrm{M} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Значит, $r(A) \geq 2$. Подсчитаем всевозможные миноры 3 порядка, окаймляющие М. Их три:

$$\begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\2 & 5 & 7\\1 & 1 & 2\end{vmatrix} = 0;\ \begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\2 & -4 & 5\\1 & -2 & 1\end{vmatrix} = 0;\ \begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\2 & 1 & 5\\1 & 8 & 1\end{vmatrix} = 0;$$

Поскольку все миноры третьего порядка нулевые, $r(A) = 2$.

Элементарные преобразованиям матриц:

1) Отбрасывание нулевой строки (столбца).
2) Умножение всех элементов строки (столбца) на число, не равное нулю.
3) Изменение порядка строк (столбцов) матрицы.
4) Сложение элементов строки (столбца) с соответствующими элементами другой строки (столбца), умноженными на любое число.
5) Транспонирование матрицы.

Теорема. *Элементарные преобразования матрицы не изменяют её ранг.*

Пример. Найти ранг матрицы (методом элементарных преобразований)

$$A = \begin{pmatrix}1 & -2 & -2 & 3 & 4\\2 & -4 & 1 & 5 & 7\\1 & -2 & 8 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

1^0. Если a_{11}=0, то перестановкой строк (столбцов) добьёмся того, что $a_{11} \neq 0$, например, поменяем местами строки (столбцы) матрицы.

2^0. Если $a_{11} \neq 0$, то, умножая элементы 2-й и 3-й строк на числа: $\frac{-a_{21}}{a_{11}} = -2$, $\frac{-a_{31}}{a_{11}} = -1$ и прибавляя полученные числа соответственно к элементам 2-й и 3-й строк, добьёмся равенства нулю всех элементы 1-го столбца (кроме a_{11}):

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & -2 & 3 & 4\\2 & -4 & 1 & 5 & 7\\1 & -2 & 8 & 1 & 2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -2 & -2 & 3 & 4\\0 & 0 & 5 & -1 & -1\\0 & 0 & 10 & -2 & -2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -2 & -2 & 3 & 4\\0 & 0 & 5 & -1 & -1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

3°. Заметим, что 2-я и 3-я строки пропорциональны. Умножая вторую на (-2) и складывая с третьей, получим нулевую строку, которую можно отбросить:

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & -2 & 3 & 4\\0 & 0 & 5 & -1 & -1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -2 & -2 & 3 & 4\\0 & 0 & 5 & -1 & -1\end{pmatrix}.$$

Получили матрицу ступенчатого вида, в ней есть миноры 2-го порядка, не равные нулю, например, $\begin{vmatrix}1 & -2\\0 & 5\end{vmatrix} = 5 \neq 0$. Поэтому $r(A) = 2$.

Обозначим строки матрицы A: $e_k = (a_{k_1}\ a_{k_2}\ \dots\ a_{k_n})$.

Две строки матрицы $e_k = e_s$ *равны,* если $a_{kj} = a_{sj}, j = 1,2,\dots,n$.

Арифметические операции над строками матрицы:

$\lambda e_k = (\lambda a_{k_1}\ \lambda a_{k_2}\ \dots\ \lambda a_{k_n})$; $e_k + e_s = (a_{k_1} + a_{s_1}\ a_{k_2} + a_{s_2}\ \dots\ a_{k_n} + a_n)$.

Строка e называется *линейной комбинацией* строк $e_1, e_2, \dots, e_s$ матрицы, если она равна сумме произведений этих строк на действительные числа:

$$e = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_s e_s,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$- любые числа.

Строки матрицы $e_1, e_2, \dots, e_m$ называются *линейно зависимыми*, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, не равные одновременно нулю, что

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_m e_m = \mathbf{0},$$

где **0** = (0, 0, …,0).

Линейная зависимость строк матрицы означает, что хотя бы одна строка матрицы является линейной комбинацией остальных.
Если линейная комбинация строк равна нулю тогда и только тогда, когда все коэффициенты λ_i равны нулю, т.е. $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$, то строки $e_1, \mathrm{e}_2, \ldots, \mathrm{e}_m$ называют *линейно независимыми*.
Теорема (о ранге матрицы). *Ранг матрицы равен максимальному числу ее линейно независимых строк* (*столбцов*), *через которые линейно выражаются все остальные ее строки* (*столбцы*).

ГЛАВА 2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

2.1 Основные понятия и определения

Система m линейных уравнений с n переменными имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (1)$$

где $a_{ij}, b_i (i = 1,2, \ldots, m; j = 1,2, \ldots, n)$ – произвольные числа, называемые соответственно коэффициентами при переменных и свободными членами уравнений. В более краткой записи с помощью знаков суммирования систему можно записать в виде:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \ (i = 1,2, \ldots, m). \qquad (2)$$

Решением системы называется такая совокупность n чисел $(x_1 = k_1, x_2 = k_2, \ldots, x_n = k_n)$, при подстановке которых в (1) каждое уравнение системы обращается в верное равенство. Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если она не имеет решений. Две системы уравнений называются *равносильными*, или *эквивалентными*, если они имеют одно и то же множество решений.
Запишем систему (1) в матричной форме. Обозначим:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}; \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ b_3 \end{pmatrix},$$

где A — *матрица коэффициентов при переменных* (*матрица системы*), X — *матрица-столбец переменных*; B — *матрица-столбец свободных членов.* Так как число столбцов матрицы $A_{m\times n}$ равно числу строк матрицы $X_{n\times 1}$, то их произведение

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

есть матрица-столбец, элементы которого являются левые части системы (1). По определению равенства матриц систему (1) можно записать в виде:

$$AX = B \tag{3}$$

2.2 Матричный метод и метод Крамера

Рассмотрим случай $m = n$. Определитель матрицы коэффициентов при переменных Δ называется *определителем системы*. Пусть определитель $\Delta \neq 0$. В этом случае существует обратная матрица A^{-1}.Умножая слева равенство (3) на матрицу A^{-1}, получим $A^{-1}AX = A^{-1}B$. Слева $A^{-1}AX = (A^{-1}A)X = EX = X$, поэтому решение системы - матрица-столбец

$$X = A^{-1}B. \tag{4}$$

Пусть дана *система двух уравнений* с двумя переменными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{5}$$

в которой хотя бы один из коэффициентов при переменных отличен от нуля.

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Обозначив

$$\Delta_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \Delta_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

система (5) примет вид:

$$\begin{cases} \Delta \cdot x_1 = \Delta_1; \\ \Delta \cdot x_2 = \Delta_2. \end{cases}$$

Если $\Delta \neq 0$, то система (4) имеет единственное решение, определяемое по формулам: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$.

Если $\Delta = 0$, а $\Delta_1 \neq 0$ (или $\Delta_2 \neq 0$), то система (5) несовместна.

Если $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$, то система (5) неопределенная и имеет бесконечное множество решений, т.к. приводится к виду: $\begin{cases} 0 \cdot x_1 = 0; \\ 0 \cdot x_1 = 0. \end{cases}$

Теорема Крамера. Пусть Δ — *определитель матрицы системы А, а* Δ_j— *определитель матрицы, получаемой из матрицы А заменой j -го столбца столбцом свободных членов. Тогда, если* $\Delta \neq 0$, *то система имеет единственное решение, определяемое по формулам:*

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \quad (j = 1,2, \dots, n). \tag{6}$$

Формулы (6) называются *формулами Крамера*.

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 6, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 = -8 \end{cases}$$

а) методом обратной матрицы; б) по формулам Крамера.

Решение. а) Обозначим

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 2\\ 1 & -3 & -1\end{pmatrix};X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}8\\ 6\\ -8\end{pmatrix}$$

Тогда в матричной форме данная система имеет вид: $AX=B$. Найдем определитель $\Delta=|\mathrm{A}| \ = \ 10| \neq 0$, поэтому существует обратная матрица A^{-1}.

$A^{-1}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}7 & -1 & 5\\ 4 & -2 & 0\\ -5 & 5 & -5\end{pmatrix}$. Теперь по формуле (4)

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}7 & -1 & 5\\ 4 & -2 & 0\\ -5 & 5 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8\\ 6\\ -8\end{pmatrix}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}10\\ 20\\ 30\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$$

Решение системы (1; 2; 3).

б) Определитель системы $\Delta=10\neq 0$, система имеет единственное решение. Вычислим определители $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, полученные заменой соответственно первого, второго и третьего столбцов столбцом свободных членов:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}8 & 2 & 1\\ 6 & -1 & 2\\ -8 & -3 & -1\end{vmatrix}=10;\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 8 & 1\\ 2 & 6 & 2\\ 1 & -8 & -1\end{vmatrix}=20;\Delta_3=\begin{vmatrix}1 & 2 & 8\\ 2 & -1 & 6\\ 1 & -3 & -8\end{vmatrix}=30$$

Теперь найдем решение по формулам Крамера (6):

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{10}{10}=1;\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{20}{10}=2;\ x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{30}{10}=3,$$

Решение системы (1; 2; 3).

2.3 Метод Гаусса

Метод Гаусса (метод последовательного исключения переменных) заключается в приведении системы (1) с помощью элементарных преобразований к равносильной системе ступенчатого (или треугольного) вида, из которой последовательно, начиная с последних переменных, находятся все остальные переменные.

Переход системы (1) к равносильной ей системе ступенчатого вида называется *прямым ходом* метода Гаусса, а нахождение переменных из системы, соответствующей ступенчатой матрице, - *обратным ходом*.

Преобразования Гаусса удобно проводить, осуществляя преобразования не с самими уравнениями, а с матрицей их коэффициентов

$$A_1=\left(\begin{array}{cccc|c}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots & .\cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m\end{array}\right)$$

называемой *расширенной матрицей системы* (1).

Пример. Решить систему уравнений: $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=8,\\ 2x_1-x_2+2x_3=6,\\ x_1-2x_2-x_3=-8.\end{cases}$

Решение. Запишем расширенную матрицу: $\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 8\\ 2 & -1 & 2 & 6\\ 1 & -2 & -1 & -8\end{array}\right)$

1) Так как $a_{11} \neq 0$, то умножая первую строку матрицы на числа (-1), (-2) и (-1) и складывая соответственно со второй, третьей строками, исключим переменную x_1, из всех строк, начиная со второй.

2) Заметив, что в новой матрице $a_{22}^{(1)} \neq 0$, умножим вторую строку на (-1) и сложим с третьей, чтобы исключить x_2 из третьего уравнения:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \\ 1 & -2 & -1 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -5 & 0 & -10 \\ 0 & -5 & -2 & -16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -5 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right)$$

3) Используя обратный ход метода Гаусса, найдем из третьего уравнения $x_3 = \frac{-6}{-2} = 3$; из второго $x_2 = \frac{-10}{-5} = 2$; из первого $x_1 = 8 - 2x_2 - x_3 = 1$. Таким образом, решение системы (1; 2; 3).

Теорема Кронекера—Капелли. *Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы этой системы.*

1) Если ранг матрицы совместной системы равен числу переменных $(r = n)$, то система (1) имеет единственное решение.

2) Если ранг матрицы совместной системы меньше числа переменных, т.е. $r < n$, то система (1) неопределенна: имеет бесконечное множество решений.

Пусть $r < n$. r переменных $x_1, x_2, \ldots, x_r$ называются *основными* (*базисными*), если определитель матрицы из коэффициентов при них (т.е. базисный минор) отличен от нуля. Остальные $n - r$ называются *неосновными* (*свободными*).

Решение системы (1), в котором все $n - r$ неосновных переменных равны нулю, называется *базисным*.

Достоинства метода Гаусса: метод менее трудоемкий и позволяет:

- установить совместность/несовместность системы и найти ее решения (единственное или бесконечное множество);
- определить ранг матрицы системы.

2.4 Системы линейных однородных уравнений. *Фундаментальная система решений*

Система m линейных уравнений с n переменными называется системой линейных *однородных* уравнений, если все их свободные члены равны нулю. Такая система имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases} \tag{7}$$

Система линейных однородных уравнений всегда совместна, т.к. она всегда имеет, по крайней мере, нулевое (или тривиальное) решение (0, 0, ..., 0). Если в системе (7) $m = n$, а ее определитель отличен от нуля, то такая система имеет только нулевое решение (это следует из теоремы и формул Крамера). Ненулевые решения возможны лишь в случае, когда число уравнений меньше числа переменных или при их равенстве, но равенстве нулю определителя системы.

Иначе: *система линейных однородных уравнений имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда ранг ее матрицы коэффициентов при переменных меньше числа переменных, т.е. при* $r(A) < n$.

Пусть $e_1 = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ - решение системы (7). Решения системы линейных однородных уравнений обладают следующими свойствами:

1. Если $e_1 = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ - решение системы (7), то и $\lambda e_1 = (\lambda k_1, \lambda k_2, \dots, \lambda k_n)$ - также решение этой системы.

2. Если строки $e_1 = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ и $e_2 = (l_1, l_2, \dots, l_n)$ - решения системы (7), то при любых c_1 *и* c_2 их линейная комбинация $c_1 e_1 + c_2 e_2 = (c_1 k_1 + c_2 l_1, c_1 k_2 + c_2 l_2, \dots, c_1 k_n + c_2 l_n)$ - также решение данной системы.

Всякая линейная комбинация решений системы линейных однородных уравнений также является решением этой системы. Поэтому представляет интерес найти такие линейно независимые решения системы (7), через которые линейно выражались бы все остальные ее решения.

Определение. Система линейно независимых решений $e_1, e_2, \dots, e_k$ называется ***фундаментальной,*** если каждое решение системы (7) является линейной комбинацией решений $e_1, e_2, \dots, e_k$.

Теорема. *Если ранг* r *матрицы коэффициентов при переменных системы* (7) *меньше числа переменных* n*, то всякая фундаментальная система решений состоит из* $n - r$ *решений.*

Т.е. общее решение системы (7) линейных однородных уравнений имеет вид:

$$c_1 e_1 + c_2 e_2 + \ldots + c_k e_k, \tag{8}$$

где $e_1, e_2, \dots, e_k -$ любая фундаментальная система решений, $c_1, c_2, \dots, c_k -$ произвольные числа, $k = n - r$.

Можно показать, что *общее решение системы* (1) *равно сумме общего решения соответствующей системы однородных линейных уравнений* (7) *и произвольного частного решения этой системы* (1).

ГЛАВА 3. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

3.1. Понятие вектора. Линейные операции над векторами

Вектором называется направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ с начальной точкой A и конечной точкой B (который можно перемещать параллельно самому себе

Обозначения векторов: $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ или $\bar{a} = \overline{AB}$.

Длиной (или модулем) $|\overrightarrow{AB}|$ вектора $\overrightarrow{AB}$ называется число, равное длине отрезка AB, изображающего вектор.

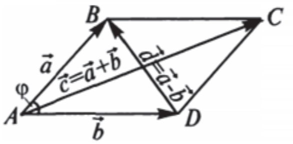
Векторы, лежащие на одной прямой или параллельных прямых, называются *коллинеарными*.

Вектор, начало и конец которого совпадают, называется *нулевым*: $\vec{0} = \overrightarrow{AA}$. Длина нулевого вектора равна нулю: $|\vec{0}\,| = 0$. Направление нулевого вектора произвольно, поэтому считается, что он коллинеарен любому вектору.

Произведением вектора $\vec{a}$ *на число* λ называется вектор $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, имеющий длину $|\vec{b}| = |\lambda||\vec{a}|$, сонаправленный вектору $\vec{a}$ при $\lambda > 0$, и противоположно направленный при $\lambda < 0$.

Противоположным вектором $\vec{a}$ называется произведение вектора $\vec{a}$ на число (-1), т.е. $-\vec{a}$= (-1)$\cdot\vec{a}$

Суммой двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец с концом вектора $\vec{b}$ при условии, что начало вектора $\vec{b}$ совпадает с концом вектора $\vec{a}$ (*правило треугольника*).



Очевидно, вектор $\vec{c}$ представляет диагональ параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (*правило параллелограмма*). *Разностью* двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется сумма вектора $\vec{a}$ и вектора $-\vec{b}$, противоположного $\vec{b}$.

В параллелограмме, построенном на векторах $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$, одна диагональ $\overrightarrow{AC}$ - сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а другая диагональ $\overrightarrow{DB}$ - их разность.

Перенесем вектор $\vec{a}$ так, чтобы его начало совпало с началом координат. *Координатами вектора* $\vec{a}$ называются координаты его конечной точки.

Так, координатами вектора $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ на плоскости Оxy являются два числа: $\vec{a} = (x, y)$ а в пространстве *Oxy*z — три числа: $\vec{a} = (x, y, z)$.

Суммой (разностью) векторов $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ есть векторы $\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2)$. Произведение вектора $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ на число λ есть $\vec{b} = (\lambda x_1, \lambda y_1, z\lambda_1)$.

Длина вектора равна корню квадратному из суммы квадратов его координат:

$$|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2 + c^2} \tag{1}$$

3.3. Базис. Координаты вектора в базисе

Определение. Вектор $\boldsymbol{a}_m$ называется *линейной комбинацией векторов* $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{m-1}$, если $\boldsymbol{a}_m = \lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots \lambda_{m-1}\boldsymbol{a}_{m-1}$, где λ_k - любые действительные числа.

Определение. Векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{m-1}$ называются *линейно зависимыми,* если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}$, не равные одновременно нулю, что

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \lambda_m\boldsymbol{a}_m = 0 \tag{2}$$

Векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{m-1}$ *линейно независимы*, если равенство (2) справедливо лишь при $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$.

Базисом на плоскости (пространстве) называется упорядоченная пара (тройка) неколлинеарных (некомпланарных) векторов.

Любой вектор плоскости (пространства) может быть единственным образом представлен в виде линейной комбинации базисных векторов (разложение вектора по базису). Коэффициенты линейной комбинации называются *координатами вектора* в этом базисе.

Пример. Разложить вектор $\overline{a} = \{2,5\}$ по базису $\overline{e_1} = \{1,4\}, \overline{e_2} = \{1,-3\}$. Требуется разложить вектор: $\overline{a} = \alpha\overline{e_1} + \beta\overline{e_2}$. Найдём коэффициенты разложения: $\begin{cases}\alpha + 4\beta = 2\\ \alpha - 3\beta = 5\end{cases}$ или $\begin{cases}\alpha = -2\\ \beta = 1\end{cases}$. Тогда $\overline{a} = -2\overline{e_1} + \overline{e_2}$.

Определение. *Проекцией* вектора $\overline{AB}$ на ось l называется число, равное длине вектора $\overline{A_1B_1}$, взятое со знаком «+», если направление $\overline{A_1B_1}$ совпадает с направлением оси l, и со знаком «–», если эти направления противоположны (точки A_1, B_1 – проекции точки A, B соответственно на ось). Проекция вектора $\overline{AB}$ на ось равна произведению длины этого вектора на косинус угла φ между осью и вектором $\overline{AB}$: $\text{пр}_l\overline{AB} = \left|\overline{AB}\right| cos\varphi$.

3.2. Скалярное произведение векторов

Определение. *Скалярным произведением* $(\vec{a},\vec{b})$ *двух векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними: $(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a}\ \vec{b} = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right| \cos\varphi$

Выразим скалярное произведение через координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

Из треугольника *ABD*, сторонами которого являются векторы $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ и $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$ по теореме косинусов следует, что $|d^2| = |\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - 2|\vec{a}|\left|\vec{b}\right| \cos\varphi$ откуда

$|\vec{a}|\left|\vec{b}\right| \cos\varphi = \frac{1}{2}(\ |\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - |d^2|)$. Учитывая формулу (1), найдем

$|\vec{a}|^2 = {x_1}^2 + {y_1}^2 + z^2$, $\left|\vec{b}\right|^2 = {x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2$ и

$\left|\vec{d}\right|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$, затем после преобразований получим

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right| \cos\varphi = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2, \qquad (3)$$

т.е. *скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов*.

Скалярный квадрат $(\vec{a}, \vec{a}) = \vec{a}^2$ и $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = {x_1}^2 + {y_1}^2 + z^2$ (4)

В частности, если $A(x_1, y_1, z_1)$ и $(B(x_2, y_2, z_2)$, то длина вектора

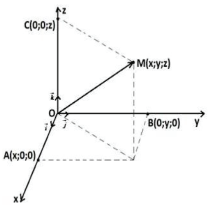
$$AB = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (5)$$

3.4 Декартова и полярная системы координат

Декартова система координат

Определение. *Декартова система координат* в пространстве – это совокупность точки O и базиса $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$. Точка O – *начало координат*, прямые, проходящие через O в направлении базисных векторов, называются *осями координат*.

Определение. Если базис ортонормирован $\{i, j, k\}$, то система называется *прямоугольной декартовой системой координат* $Oxyz$.

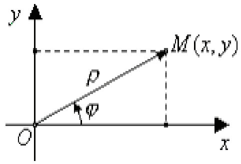


В этой декартовой системе координат: O – начало координат; Ox – ось абсцисс; Oy – ось ординат; Oz – ось аппликат; Oxy, Oxz, Oyz – координатные плоскости. Рассмотрим в этой системе координат точку M. Каждой точке соответствует радиус-вектор $\overline{OM}$. Существует единственное разложение вектора $\overline{OM}$ в базисе $\{i, j, k\}$: $\overline{OM} = xi + yj + zk$ или $\overline{OM} = \{x, y, z\}$, где x, y, z – координаты вектора $\overline{OM}$ в базисе $\{i, j, k\}$.

Определение. *Координатами* точки M в прямоугольной системе координат называются координаты ее радиус-вектора $\overline{OM}$ в базисе $\{i, j, k\}$.

Полярная система координат

На плоскости выберем некоторую точку O, называемую *полюсом*, и



выходящую из этой точки полупрямую, называемую *полярной осью*. Положение точки M на плоскости определяется двумя числами: числом ρ, выражающим расстояние от точки M до полюса O, и числом φ – величиной угла, образованного лучом OM с полярной осью. Положительным направлением отсчета угла φ считается направление против часовой стрелки. Числа ρ и φ называются *полярными координатами точки* M: $\rho \geq 0$ – полярный радиус, φ – полярный угол. При φ в пределах $0 \leq \varphi < 2\pi$ каждой точке плоскости, кроме полюса, соответствует вполне определенная пара чисел ρ и φ. Для полюса $\rho = 0$, φ – произвольное.

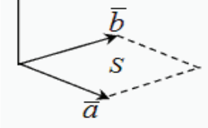
Связь между полярными и прямоугольными декартовыми координатами на плоскости (см. рисунок): $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. $tg\varphi = \frac{y}{x}, x^2 + y^2 = \rho^2$.

3.5 Векторное произведение векторов

Определение. *Векторным произведением векторов* $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c}$, удовлетворяющий условиям:

1. $|\overline{c}| = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \sin\varphi$ где φ есть величина угла между векторами;
2. вектор с перпендикулярен векторам a, b;
3. векторы $\overline{a}, \overline{b}$ и $\overline{c}$ образуют правую тройку, т. е. из конца вектора $\overline{c}$ кратчайший поворот от вектора $\overline{a}$ к вектору $\overline{b}$ виден против часовой стрелки.

Обозначается: $\overline{c} = \overline{a} \times \overline{b}$ или $\overline{c} = [\overline{a}, \overline{b}]$.



Геометрическое приложение векторного произведения: модуль векторного произведения неколлинеарных векторов численно равен площади параллелограмма, построенного на $\overline{a}$ и $\overline{b}$ (если $\overline{a}$ и $\overline{b}$ приведены к общему началу): $S = |[\overline{a}, \overline{b}]| = ab \cdot \sin\varphi$. *Механическое приложение* векторного произведения: $M(F) = [\boldsymbol{r}, \boldsymbol{F}]$, где $\boldsymbol{r} = \overline{OA}$ – радиус-вектор точки A.

***Свойства векторного произведения*:**

1. $[\overline{a},\overline{b}]=0 \Leftrightarrow$ векторы $\overline{a} \parallel \overline{b}$; в частности, $[\overline{a},\ \overline{a}]=0$;

2. $[\overline{a},\overline{b}]=-[\overline{b},\overline{a}]$ (антикоммутативность векторного произведения);

3. $[\alpha\overline{a}+\beta\,\overline{b},\ \overline{c}]=\alpha[\overline{a},\overline{c}]+\beta[\overline{b},\overline{c}]$ (линейность векторного произведения).

4.*Выражение векторного произведение в ортонормированном базисе векторное произведение через компоненты сомножителей*:

$$[\overline{a},\overline{b}]=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\overline{i}\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}-\overline{j}\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}+\overline{k}\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}$$

Пример. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}=3\overline{p}+\overline{q}$ и $\overline{b}=\overline{p}-2\overline{q}$, если $|\overline{p}|=1, |\overline{q}|=2, \varphi=\widehat{(\overline{p},\overline{q})}=\frac{\pi}{6}$. .

Решение. Преобразуем, используя свойства векторного произведения: $[\overline{a},\overline{b}]=[3\overline{p}+\overline{q},\ \overline{p}-2\overline{q}]=3[\overline{p},\overline{p}]+[\overline{q},\overline{p}]-6[\overline{p},\overline{q}]-2[\overline{q},\overline{q}]=7[\overline{q},\overline{p}]$, $S=7|[\overline{q},\overline{p}]|=7|\overline{p}||\overline{q}|sin\varphi=7\cdot2\cdot1\cdot sin\frac{\pi}{6}=7.$

3.6 Смешанное произведение векторов

Определение. *Смешанным произведением векторов* $\overline{a},\overline{b}$ и $\overline{c}$ называется число $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})$, равное скалярному произведению вектора $\overline{a}$ на вектор $[\overline{b},\overline{c}]$. $(\overline{a},\overline{b},\overline{c}):=(\overline{a},[\overline{b},\overline{c}])$.

Геометрический смысл смешанного произведения.

Модуль смешанного произведения численно равен объему параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a},\overline{b}$ и $\overline{c}$. Если векторы $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ образуют правую тройку, то смешанное произведение $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})>0$; если левую, то $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})<0$.

Свойства смешанного произведения:

1. $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})=-(\overline{b},\overline{a},\overline{c})$> (антикоммутативность смешанного произведения);

2. (линейность смешанного произведения);

3. $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})=0$ тогда и только тогда, когда векторы компланарные.

Выражение смешанного произведения в ортонормированном базисе смешанное произведение через компоненты сомножителей:

$$(\overline{a},\overline{b},\overline{c})=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

Пример. Установить, компланарны ли векторы $\overline{a}$={1;3;1}, $\overline{b}$={2;–1;0}, с $\overline{c}$={1;2;–1}.

Решение. Определитель третьего порядка, составленный из координат векторов $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=12\neq0$, поэтому векторы $\overline{a},\overline{b}$ и $\overline{c}$ не компланарны.

ГЛАВА 4. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

4.1. Уравнение линии на плоскости

Определение. *Уравнением линии* (кривой) на плоскости Оxy называется уравнение, которому удовлетворяют координаты x и y каждой точки данной линии и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой линии.

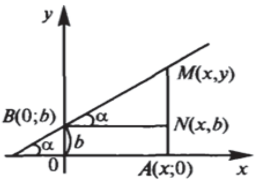
В общем случае уравнение линии может быть записано в виде $F(x, y) - 0$ или (если это возможно) $y = f(x)$, где $F(x, y)$ и $f(x)$ некоторые функции.

Координаты произвольной точки кривой $M(x, y)$ называются *текущими координатами.*

Пример. 1) Уравнение прямой, проходящей через начало координат: $y = kx$.
2) Уравнение $x^2 + y^2 = 0$ определяет одну точку (0; 0).
3) Уравнение $x^2 + y^2 + 1 = 0$ не определяет никакого множества точек.

4.2. Уравнение прямой

а) Уравнение прямой с угловым коэффициентом.



Пусть прямая пересекает ось Oy в точке $B\ (0;\ b)$ и образует с осью Ox угол α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$). Возьмём на прямой текущую точку $M\ (x, y)$. Тогда тангенс угла α наклона прямой MB найдем из ΔMBN:

$$tg\alpha = \frac{MN}{NB} = \frac{y-b}{x} = k, \text{откуда получаем}$$

$$y = kx + b \qquad (1)$$

При $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ формула также остаётся справедливой.

б) Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении.

Пусть прямая проходит через точку $M_1(x_1, y_1)$ и образует с осью $0x$ угол α с осью Ox. Т.к. $M_1\ (x_1, y_1)$ – точка прямой, то ее координаты удовлетворяют уравнению (1), т.е. $y_1 = kx_1 + b$.

Вычитая его из (1), получим уравнение искомой прямой:

$$y - y_1 = k(x - x_1) \qquad (2)$$

в) ***Уравнение прямой, проходящей через точку,*** параллельно ***вектору***.

Пусть $M_0(x_0, y_0) \in l, \overline{a}(a_1, a_2) \parallel l$. Пусть $M\ (x, y)$ – текущая точка прямой. Тогда $\overline{M_0M} \parallel \overline{a}$. Т.е. $\overline{M_0M} = \lambda\overline{a}$ или $x - x_0 = \lambda a_1, y - y_0 = \lambda a_2$. Выражая λ из обоих уравнений, получим:

$$\frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} \qquad (3)$$

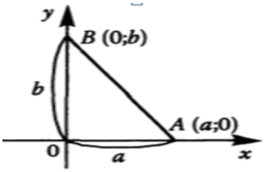
в) Уравнение прямой, проходящей через две данные точки.

Пусть даны две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ и $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$. Вектор $\overline{M_1M_2}$ служит направляющим вектором прямой. Поэтому взяв в качестве начальной точки точку $M_1(x_1, y_1)$, а в качестве направляющего вектора $\overline{M_1M_2}$, получим уравнение прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \qquad (4)$$

г) Уравнение прямой в отрезках.

Найдем уравнение прямой по заданным отрезкам $a \neq 0$ и $b \neq 0$, отсекаемым на осях координат.



Используя уравнение (4) прямой, проходящей через $A(a;\ 0)$ и $B(0;\ b)$, получим $\frac{y-0}{b-0} = \frac{x-a}{0-a}$ или после преобразований:

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 1 \qquad (5)$$

д) Общее уравнение прямой и его исследование.

Рассмотрим уравнение первой степени с двумя переменными в общем виде

$$Ax + By + C = 0 \qquad (6)$$

в котором коэффициенты *A*, *B*, *C* - числа, причём $A^2 + B^2 \neq 0$.

1. Пусть $B \neq 0$. Тогда уравнение (6) можно записать в виде $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$. Обозначим $k = -A/B, b = -C/B$. Если $A \neq 0, C \neq 0$, то получим $y = kx + b$ (уравнение прямой с угловым коэффициентом); если $A \neq 0, C = 0$, то $y = kx$ (уравнение прямой, проходящей через начало координат); если $A = 0, C \neq 0$, то $y = b$ (уравнение прямой, параллельной оси Oy); если $A = C = 0$, то $y = 0$ (уравнение оси Ox).

2. Пусть $A \neq 0, B = 0$. Тогда уравнение (8) примет вид $x = -\frac{C}{A}$. Обозначим $a = -\frac{C}{A}$. Если $C \neq 0$, то получим $x = a$ (уравнение прямой, параллельной оси *Oy*); если C = 0, то $x = 0$ (уравнение оси Oy).

Итак, *при любых значениях коэффициентов A*, *B* (*не равных одновременно нулю) и C уравнение* (6) *есть уравнение некоторой прямой линии на плоскости* Oxy. Уравнение (6) называется общим *уравнением прямой*.

4.3. Метрические задачи теории прямой на плоскости

Расстояние от точки до прямой

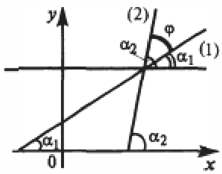
Пусть даны точка $M_0(x_0, y_0)$ и прямая l: $Ax + By + C = 0$. Под расстоянием от точки *M* до прямой ***l*** понимается длина перпендикуляра $d = M_0H$, опущенного из точки *M* на прямую ***l***.

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad (7)$$

Пример. Найти расстояние между параллельными прямыми $3x + 4y - 24 = 0$ и $3x + 4y + 6 = 0$.

Решение. Возьмем на одной из прямых, например, прямой $3x + 4y - 24 = 0$, произвольную точку $A(0; 6)$. Тогда искомое расстояние равно расстоянию от точки A до прямой $3x + 4y + 6 = 0$ равно $d = \frac{|3 \cdot 0 + 4 \cdot 6 + 6|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 6$.

Угол между двумя прямыми



Пусть заданы прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$. Требуется определить угол φ между ними.

Обозначим $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$, причем $k_1 = tg\ \alpha_1, k_2 = tg\ \alpha_2,\ \alpha_1 \neq \pi/2, \alpha_2 \neq \pi/2$. Тогда

$$tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 tg\alpha_2} \text{ или } tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} \qquad (8)$$

Условия параллельности и перпендикулярности прямых

Если прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ параллельны, то $\varphi = 0$ и $tg\varphi = 0$, откуда из формулы (8) $k_1 = k_2$. И наоборот, если $\boldsymbol{k_1 = k_2}$, то по формуле (8) $tg\varphi = 0$, а, значит, $\varphi = 0$ или $\varphi = \pi$, т.е. прямые параллельны.
Таким образом, равенство угловых коэффициентов является необходимым и достаточным условием параллельности двух прямых.
Если прямые перпендикулярны, то $\varphi = \pi/2$, при этом знаменатель в (8) обращается в 0: $1 + k_1k_2 = 0$, откуда $k_1 = -\frac{1}{k_2}$ или $\boldsymbol{k_1k_2 = -1}$. И обратно.
Если прямые заданы общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то, учитывая их угловые коэффициенты $k_1 = -A_1/B_1$ и $k_2 = -A_2/B_2$, условие параллельности прямых примет вид $\boldsymbol{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}}$. Таким образом, *условием параллельности прямых, заданных общими уравнениями, является пропорциональность коэффициентов при переменных.*
Условие перпендикулярности прямых $k_1k_2 = -1$ в этом случае примет вид $\left(-\frac{A_1}{B_1}\right)\left(-\frac{A_2}{B_2}\right) = -1$ или $\boldsymbol{A_1A_2 + B_1B_2 = 0}$, т.е. *условием перпендикулярности двух прямых, заданных общими уравнениями, является равенство нулю суммы произведений коэффициентов при переменных x и y.*

Точка пересечения прямых

Пусть даны две прямые $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Очевидно, координаты их точки пересечения должны удовлетворять уравнению каждой прямой, т.е. они могут быть найдены из системы

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases}$$

Если прямые не параллельны, т.е. $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$, то решение системы дает единственную точку пересечения прямых.

4.3. Кривые второго порядка

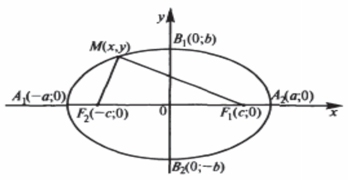
Определение. *Кривой второго порядка* называется кривая, определяемая в декартовой системе координат уравнением второй степени

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

где коэффициенты A, B, C одновременно не равны нулю.
В зависимости от соотношений между коэффициентами кривые 2 порядка подразделяются на: эллиптический, гиперболический и параболический тип: $AC - B^2 > 0$, $AC - B^2 < 0$ и $AC - B^2 = 0$ соответственно.

Эллипс и окружность

Определение. *Эллипсом* называется множество всех точек на плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек этой плоскости, называемых *фокусами*, есть величина постоянная, равная $2a$ $(a > 0)$. $2a > 2c$.



Выберем систему координат, так чтобы фокусы были на оси абсцисс. $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ – координаты фокусов. По определению $F_2M + MF_1 =$

$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$. Преобразуя уравнение и обозначая $b^2=a^2-c^2$, получим каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (9)$$

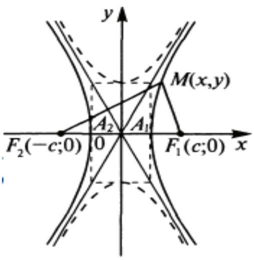
где $a>b$, a – *большая полуось*; b – *малая полуось*. Точки $(\pm a,0)$ $(0,\pm b)$ называется *вершинами* эллипса. Форму эллипса характеризует *эксцентриситет*: отношение $\varepsilon=\frac{c}{a}$. Очевидно, что $0\le\varepsilon\le1$, причем для окружности ε = 0. *Фокальным радиусом* называется расстояние от некоторой точки кривой до фокуса: MF_1, MF_2.

Определение. Прямые $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$, называемые *директрисами эллипса* (d_1 и d_2).

Окружность является частным случаем эллипса $(a=b)$. (множество точек на плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой *центром*. Отрезок, соединяющий любую точку окружности с центром, называется *радиусом*). Каноническое уравнение окружности с центром в точке $O(0,0)$ и радиусом a $x^2+y^2=a^2$. Уравнение окружности с центром $O(x_0,y_0)$ и радиусом R имеет вид: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$

Гипербола и парабола

Определение. *Гиперболой* называется множество всех точек на плоскости, абсолютная величина разность расстояний от которых до двух данных точек этой плоскости, называемых *фокусами*, есть величина постоянная, равная $2a$ $(a>0)$.

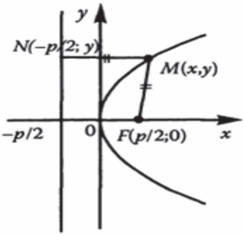


Фокусы гиперболы — точки F_1 (c; 0) и F_2 (—c; 0), где $c=\sqrt{a^2+b^2}$, а ее *эксцентриситет* $\varepsilon=\frac{c}{a}$ принимает любые значения, большие 1. Вершины гиперболы — точки A_1 (a; 0), A_2 (-a; 0), a – действительная полуось, b – мнимая полуось.

$d=|F_2M-MF_2|=2a$. Каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (10)$$

Перепишем уравнение гиперболы (10) в виде $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$. Заметим, что при $x\to\infty$« ветви гиперболы как угодно близки к прямым $y=\pm\frac{b}{a}x$, называемым *асимптотами гиперболы*.



Если фокусы на оси Oy, то получим гиперболу $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$, называемую *сопряженной* с гиперболой $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (на рисунке пунктиром).

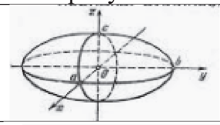
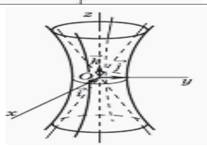
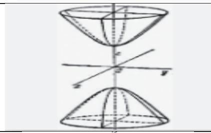
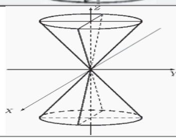
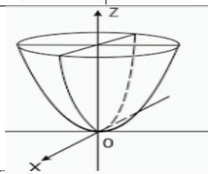
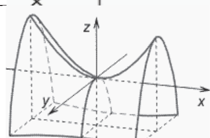
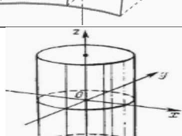
Определение. *Параболой* называется множество точек плоскости, расстояние от которых до данной точки F, называемой *фокусом*, равно расстоянию до данной прямой, называемой *директрисой*.

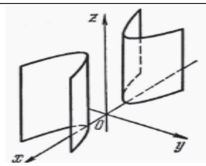
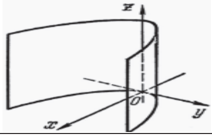
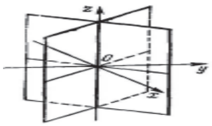
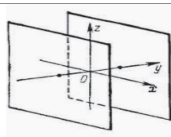
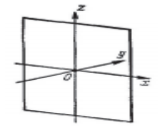
Пусть расстояние от точки F до директрисы равно p. Назовем p *параметром* параболы. Выберем систему координат так, чтобы фокус имел координаты $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ и уравнение директрисы $x=-\frac{p}{2}$. Тогда $MF=x+\frac{p}{2}$. Каноническое уравнение параболы:

$$y^2=2px \tag{11}$$

Точка $O(0,0)$ – вершина параболы. При $p>0$ ветви параболы направлены вправо, при $p<0$ — влево.

4.4. Поверхности второго порядка

Канонические уравнения поверхностей второго порядка		
уравнение	название	рисунок
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	Эллипсоид	
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	Однополостный гиперболоид	
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$	Двуполостный гиперболоид	
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	Конус второго порядка	
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$	Эллиптический параболоид	
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$	Гиперболический параболоид	
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	Эллиптический цилиндр	

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$	Гиперболический цилиндр	
$y^2=2px$	Параболический цилиндр	
$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0$	Пара пересекающихся плоскостей	
$\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(y=\pm b)$	Пара параллельных плоскостей	
$y^2=0$ $(y=0)$	Пара совпадающих плоскостей	

4.5. Уравнение плоскости

Уравнение плоскости, заданной начальной точкой и двумя направляющими векторами

Пусть плоскость Q походит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и векторы $\vec{a}=\{a_1,\ a_2, a_3\}, \vec{b}=\{b_1,\ b_2, b_3\}$ параллельны плоскости Q. Пусть $M(x,y,z)$, тогда векторы $\overrightarrow{MM_0}, \vec{a}, \vec{b}$ компланарны, а, значит, $\left(\overrightarrow{MM_0}, \vec{a}, \vec{b}\right)=0$:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=0 \qquad (12)$$

Уравнение плоскости, проходящей через три точки

Пусть плоскость проходит через точки $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$. Пусть $M(x,y,z)$ - текущая точка прямой. Тогда векторы $\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}$ компланарны, а, значит, их смешанное произведение $\left(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}\right)=0$. То есть

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0 \qquad (13)$$

Уравнение плоскости, заданной начальной точкой и нормальным вектором

Пусть плоскость Q проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = \{A, B, C\}$ (нормальный вектор плоскости).

Пусть $M(x, y, z)$ – текущая точка плоскости. Тогда вектор $\overrightarrow{MM_0} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\} \perp \vec{n} = \{A, B, C\}$. Тогда скалярное произведение $\left(\vec{n}, \overrightarrow{MM_0}\right) = 0$. Полученное уравнение представим в координатной форме:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad (14)$$

Уравнение (14) - *уравнение плоскости*, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = \{A, B, C\}$.

Общее уравнение плоскости

Уравнение вида $Ax + By + Cz + D = 0$, где коэффициенты A, B, C одновременно не обращаются в нуль, называется *общим уравнением плоскости*.

Если $D = 0$, то уравнение $Ax + By + Cz = 0$ определяет плоскость, проходящую через начало координат. Если $A = 0$, то уравнение $By + Cz + D = 0$ определяет плоскость, параллельную оси *Ох*; если $A = D = 0$, то уравнение $By + Cz = 0$ определяет плоскость, проходящую через ось О*х*; если $A = B = 0$, то уравнение $Cz + D = 0$ определяет плоскость, параллельную плоскости *Оху*; если $A = B = D = 0$, то уравнение $Cz = 0$ ($z = 0$) определяет координатную плоскость *Оху.*

Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей

Пусть $\overrightarrow{n_1} = \{A_1, B_1, C_1\}$ и $\overrightarrow{n_2} = \{A_2, B_2, C_2\}$ – нормальные векторы плоскостей. *Условием параллельности двух плоскостей является пропорциональность коэффициентов при одноименных переменных*

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2},$$

а условием их перпендикулярности: $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

4.6. Уравнение прямой в пространстве

Прямая задана как линия пересечения двух плоскостей,

т.е. как множество точек, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Прямая задана начальной точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и направляющим вектором $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$

Уравнение может быть получено из условия коллинеарности векторов $\overrightarrow{MM_0} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$ (где M (x, y, z) — произвольная точка прямой) и $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$:

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3} \qquad (16)$$

Прямая проходит через 2 точки $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$

Пусть $M(x, y, z)$ – текущая точка прямой. Тогда векторы $\overrightarrow{MM_1}, \overrightarrow{MM_2}$ коллинеарны, следовательно, их координаты пропорциональны:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \qquad (17)$$

Угол между прямой и плоскостью

$sin\varphi = \frac{|Aa_1+Ba_2+Ca_3|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$, где $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ – направляющий вектор прямой.

Расстояние от точки $M(x_0, y_0, z_0)$ ***до плоскости*** α: $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$\rho(\mathrm{M}, \alpha) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Пример. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{2} = y + 1 = z$ и плоскости $3x - 2y + z = 0$.

Решение. Параметрические уравнения прямой: $x = 2t + 1, y = t - 1, z = t$. Подставим x, y, z в уравнение плоскости: $3(2t + 1) - 2(t - 1) + t = 0$. Получим $t = -1$. Подставляя в параметрические уравнения найденное значение t, получим точку пересечения $(-1, -2, -1)$.

ГЛАВА 5. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

5.1. Множества

Под *множеством* понимается совокупность объектов произвольной природы, объединенных общим признаком (множество людей, стран, чисел).

Объекты, составляющие множество, называются его *элементами*. Множества обозначаются заглавными латинскими буквами A, B, C, …, элементы множества – строчными буквами a, b, c, ... Если «*a*» принадлежит (не принадлежит) множеству «*A*», то это обозначается: $a \in A$ ($a \notin A$). Множество, не имеющее элементов, называется *пустым* и обозначается $\emptyset$.

Способы задания множеств

1. Перечисление его элементов. Например: $A = \{1,3,5,7,9\}$ – множество нечетных цифр;

2. Указание характеристического свойства, устанавливающего, какие элементы принадлежат и не принадлежат множеству. Например, $A = \{x: x = 2n + 1, n \in \mathbb{N}\}$ – множество нечетных натуральных чисел.

Числовые множества: $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел $\{1,2,3,...\}$; $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел $\{0, \pm1, \pm 2, \pm 3,...\}$; $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$ – множество рациональных чисел, $\mathbb{I}$ – множество иррациональных чисел (не являющихся рациональными); $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел (рациональных и иррациональных).

Геометрически действительные числа изображаются точками числовой прямой (прямой с выбранным началом отсчета, положительным направлением и единицей масштаба). Между множеством $\mathbb{R}$ и числовой прямой существует взаимно однозначное соответствие, т. е. каждому действительному числу соответствует единственная точка на числовой прямой и наоборот.

Множество A называют *подмножеством* множества B, если любой элемент множества принадлежит множеству В, и записывают это: $A \subset \mathrm{B}$ (A содержится в В). Легко видеть, что для любого множества $A \subseteq \mathrm{A}$. Как известно, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ и $I \subset \mathbb{R}$.

Подмножества $\mathbb{R}$ (числовые промежутки):
а) множество $x \in \mathbb{R}$ таких, что $a \leq x \leq b$ называется *отрезком* $[a, b]$;
б) множество $x \in \mathbb{R}$ таких, что $a < x < b$ называется *интервалом* (a, b);
в) множество $x \in \mathbb{R}$ таких, что $a < x \leq b$ (или $a \leq x < b$) называется *полуинтервалом* $(a, b]$ (или $[a, b)$);
г) множество $x \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих неравенствам $x \geq a$ $(x \leq b, x > a, x < b$ называется *лучом*;
д) множество $x \in (-\infty, +\infty)$ называется *числовой прямой*.

Определение. *Абсолютной величиной* (*модулем*) действительного числа x называется само число x, если x неотрицательно, и противоположное число $-x$, если x отрицательно: $|x| = \begin{cases} x, x \geq 0, \\ -x, x < 0 \end{cases}$

Очевидно, что $|x| \geq 0$. Геометрически $|x - y|$ – расстояние между точками x и y на числовой прямой.

Определение. $\varepsilon -$*окрестностью* точки a числовой прямой называется интервал $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$. Обозначается $U_\varepsilon(a)$ (a - центр, ε - радиус окрестности. *Проколотой* $\varepsilon -$*окрестностью* точки a называется окрестность с удаленной точкой a. Обозначается $U_\varepsilon(\dot{a}) = (a - \varepsilon; a) \cup (a, a + \varepsilon)$.

Определение. Множества A и B называют *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов, и пишут $A = B$.

Операции над множествами

1. *Объединением*, или суммой множеств A и B называется множество всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A или B. $A \cup B = \{x: x \in A$ или $x \in B\}$.
2. *Пересечением множеств* A и B называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих каждому из множеств $A \cap B = \{x: x \in A$ и $x \in B\}$.
3. *Разностью множеств* A и B называют множество, состоящее из тех элементов множества A, которые не принадлежат множеству B. Обозначается $A \setminus B = \{x: x \in A \text{ и } x \notin B\}$.

Пример. $A = \{1, 5\}$, $B = \{1,2,3\}$. Найти $A \cup B = \{1,2,3,5\}$, $A \cap B = \{1\}$, $A \setminus B = \{5\}$.

5.2. Функции и их свойства

Пусть каждому элементу x из множества X по некоторому правилу поставлен в соответствие единственный элемент y из множества Y. Тогда говорят, что на множестве X задана функция и пишут $y = f(x)$ или $x \to f(x)$. Множество X называется *областью определения функции* f и обозначается $D(f)$, а множество элементов $f(x)$ называется *множеством значений функции* f и обозначается $E(f)$.

Например, областью определения функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ служит множество $D(f) = (-1; 1)$. Областью значений – $E(f) = [1; \infty)$.

Пусть задано уравнение $F(x, y) = 0$, связывающее переменные x и y. Рассмотрим те значения x и y, которые удовлетворяют уравнению. Пусть множество D состоит из тех $x \in D$, для которых существует хотя бы одно значение y, удовлетворяющее $F(x,y)=0$. Получим функцию f, определённую на D, и удовлетворяющую $F\big(x,f(x)\big)=0$ для любого $x\in D$. Функция $f(x)$ называется *неявной*. Уравнение $x^2+y^2-1=0$ задаёт неявную функцию y от x.

Основные свойства функций

1. <u>*Ограниченность*</u>. Функция $f(x)$ называется *ограниченной сверху* (*снизу*), если область значений функции $E(f)$ является множеством, ограниченным сверху (снизу), т.е. $\exists b\in\mathbb{R}\mid\forall x\in D(f)$ выполняется $f(x)\le b$ $(f(x)\ge b)$. Функция, ограниченная и сверху, и снизу, называется *ограниченной*, т.е. $f(x)$ ограничена, если $\exists a,b\in\mathbb{R}\mid\forall x\in D(f)$ выполняется $a\le f(x)\le b$.

Пример. 1) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ограничена снизу, т.к. $f(x)\ge 1$; 2) $f(x)=-x^2$ сверху, т.к. $f(x)\le 0$.

2. <u>*Четность и нечетность*</u>. Функция $f(x)$ называется *четной* (*нечетной*), если 1) $\forall x\in D(f)\Rightarrow -x\in D(f)$; 2) $f(-x)=f(x)$ $(f(x)=-f(x))$.

Пример. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-$ чётная, $f(x)=sinx-$ нечётная, $f(x)=lnx-$ общего вида (ни чётная, ни нечётная).

3. <u>*Монотонность*</u>. Функция $f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) на множестве X, если $\forall x_1,x_2\in X: x_1< x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$ $(f(x_1)>f(x_2))$. Для нестрогих неравенств $f(x)$ называется соответственно называется соответственно *неубывающей* (*невозрастающей*).

Пример. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ убывает на (-1; 0) и возрастает на (0; 1).

4. <u>*Периодичность*</u>. Функция $f(x)$ называется *периодической*, если существует такое число $T>0$, что для любых $x\in D(f)$ выполняется равенство $f(x+T)=f(x-T)=f(x)$. При этом T называется *периодом* функции.

Пример. $f(x)=sinx, f(x)=cosx$, периодические с $T=2\pi$. $f(x)=tgx$, $f(x)=ctgx$ периодические с $T=\pi$. Функция $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ непериодическая.

Обратная функция

Пусть функция $f(x)$ такова, что для каждого $y\in E(f)$ существует единственный $x\in D(f)$, для которого $f(x)=y$. Это означает, что существует функция $x=\varphi(y)$ с областью определения $E(f)$ и множеством значений $D(f)$, которая называется *обратной функцией* по отношению к $f(x)$. Она обозначается $x=f^{-1}(y)$. При этом $f^{-1}\big(f(x)\big)=x, f\big(f^{-1}(y)\big)=y$.

Сложная функция

Пусть функция $u=\varphi(x)$ с область определения D и множеством значений E, а функция $y=f(u)$ определена на E. Тогда каждому значению $x\in D$ соответствует определённое значение u, а этому значению соответствует определённое y. Таким образом, имеем функцию $y=F(x)=f\big(\varphi(x)\big)$. Она называется *сложной функций* (композицией функций).

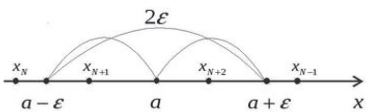
Пример. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ - композицией функций: $y=\frac{1}{u}, u=\sqrt{v}, v=1-x^2$.

5.3. Последовательность и ее предел

Под *числовой последовательностью* понимается функция натурального аргумента, т.е. соответствие, при котором каждому натуральному числу n ставится в соответствие число x_n. обозначается последовательность (x_n) или $\{x_n\}$, где x_n назвается *общим членом последовательности*.
(x_n) называется *ограниченной*, если $\exists\, M > 0 \colon \forall n\ |x_n| \le M$;
(x_n) *возрастает* (*убывает*), если $\forall n\ x_n < x_{n+1}$ $(x_n > x_{n+1})$.
Пример. $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ ограничена, т.к. $\left|\frac{1}{n}\right| \le 1, \forall n$, убывающая, т.к. $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}\ \forall n$.
Определение. Число a называется *пределом последовательности* (x_n), если для любого (сколь угодно малого) положительного числа ε найдется такой номер n_ε (зависящий от ε), начиная с которого все члены последовательности удалены от a меньше, чем на ε:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} |\ \forall n > n_\varepsilon\ |x_n - a| < \varepsilon \qquad (1)$$



Неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ равносильно неравенству $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, что означает, что, начиная с некоторого номера, члены последовательности попадают в интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, т.е. в ε −окрестность точки a: $\forall n > n_\varepsilon\ x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) = U_\varepsilon(a)$.
Последовательность, имеющая конечный предел, называется *сходящейся*. В противном случае – *расходящейся*.
Примеры расходящихся последовательностей: $x_n = (-1)^n, y_n = n$.
Теорема. Если последовательность имеет предел, то он единственный.
Определение. Последовательность, предел которой равен нулю, называется *бесконечно малой*.
Пример. $x_n = \frac{1}{n}$ – бесконечно малая последовательность.

Свойства бесконечно малых последовательностей

1. Сумма и произведение бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.
2. Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную есть бесконечно малая последовательность.

Определение. Последовательность называется *бесконечно большой*, если для любого положительного (сколь угодно большого) числа A найдётся номер n_A (зависящий от A) такой, что при $\forall n > n_A$ выполняется неравенство $|x_n| > A$.

$$\forall A > 0\ \exists n_A \in \mathbb{N} |\ \forall n > n_A\ |x_n| > A \qquad (2)$$

Обозначается $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.
*Пример бесконечно большой п*оследовательности: $x_n = n^2$, $x_n = ln n$.

Связь между бесконечно малыми и бесконечно большими последовательностями

Если последовательность (x_n) – бесконечно большая, то последовательность $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ – бесконечно малая, и наоборот, если (x_n) – бесконечно малая, то последовательность $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ – бесконечно большая.

Свойства сходящихся последовательностей

1. Предел постоянной равен самой постоянной.
2. Сходящаяся последовательность ограничена (обратное не верно).
3. Если последовательность сходится, то сходится и любая её подпоследовательность, причём к тому же пределу.
4. Из всякой бесконечной ограниченной последовательности можно извлечь сходящуюся подпоследовательность (теорема Больцано – Вейерштрасса).
5. Если (x_n), (y_n) сходятся, то сходятся $(x_n \pm y_n)$, (Cx_n), $(x_n y_n)$, $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$, и

$$1.\ \lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty}(x_n) \pm \lim_{n\to\infty}(y_n);\ 2.\ \lim_{n\to\infty}(Cx_n) = C\lim_{n\to\infty}x_n, C = const;$$

$$3.\ \lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty}x_n \cdot \lim_{n\to\infty}y_n;\ 4.\ \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}, \lim_{n\to\infty}y_n \neq 0.$$

6. Если (x_n) и (y_n) сходятся и $x_n < y_n$ при всех n, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} y_n$
7. Если (x_n) и (z_n) сходятся, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ и $\forall n\ x_n \leq y_n \leq z_n$, то последовательность (y_n) сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.
8. Если (x_n) последовательность возрастает (убывает) и ограничена сверху (снизу), то она сходится, причём $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = sup\{x_n\}$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = inf\{x_n\}\right)$.
   Если же она возрастает (убывает) и не ограничена сверху (снизу), то
   $$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty\ \left(\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty\right)$$
9. Если последовательность (x_n) возрастает, (y_n) убывает, $x_n < y_n$ при всех n и $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$, то (x_n) и (y_n) сходятся к одному пределу a.
10. Последовательности (x_n) сходится тогда и только тогда, когда имеет место: $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} |\ \forall n, m > n_\varepsilon\ |x_n - x_m| < \varepsilon$ (критерий Коши).

Виды неопределенностей: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$.

Пример. Вычислить пределы:

$$a)\ \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n} - n\right) = (\infty - \infty) = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+n} - n\right)\left(\sqrt{n^2+n} + n\right)}{\sqrt{n^2+n} + n} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1\right)} = \frac{1}{2};\ \text{б)}\ \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{3}{n}\right)^{2n} = (1^\infty) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{3}{n}\right)^{\frac{n}{3}\cdot 3\cdot 2} = e^6$$

5.4. Предел функции

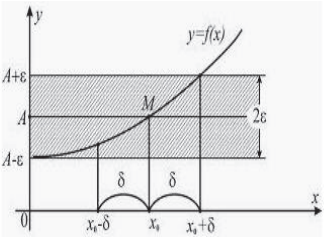
Пусть функция $f(x)$ определена в проколотой окрестности точки a.

Определение. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ *в точке* x_0, если для любого (сколь угодно малого) числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$ (зависящее от ε) что из $0 < |x - x_0| < \delta$ следует $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \forall x: 0 < |x - x_0| < \delta$ выполняется $|f(x) - A| < \varepsilon$ (3)

Неравенство $0 < |x - x_0| < \delta$ означает, что $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta) = \dot{U}_\delta(x_0)$, а неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ означает, что $f(x) \in (A - \varepsilon,\ A + \varepsilon) = U_\varepsilon(A)$. Поэтому на языке окрестностей определение можно сформулировать следующим образом:



«Число A называется *пределом функции* $f(x)$ *в точке* x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$ что как только x попадает в проколотую $\delta -$окрестность точки x_0, соответствующие значения $f(x)$ попадают в $\varepsilon -$окрестность точки A», т.е.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A).$ (4)

Теорема. Если функция имеет предел в точке, то он единственный.

Определение. Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* в окрестности точки x_0 (или при $x \to x_0$), если $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

Пример. Функция $\alpha(x) = 3\frac{(x-2)^2}{x-2}$ является бесконечно малой при $x \to 2$. В самом деле, для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся число $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ такое, что как только $0 < |x - 2| < \frac{\varepsilon}{3}$ будет выполняться неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon$.

Связь между понятиями предела и бесконечно малой функции

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x), \text{где } \lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0.$$

Свойства бесконечно малых функций

1. Сумма, произведение бесконечно малых функций при $x \to a$ есть бесконечно малая функция при $x \to a$.
2. Произведение бесконечно малой в окрестности точи a функции на ограниченную функцию в этой окрестности есть бесконечно малая функция.

Определение. Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* при $x \to a$, если для любого $b > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что из $0 < |x - a| < \delta$ следует $|f(x)| > b$ (то есть в проколотой окрестности точки a имеем: $|f(x)| > b$), т.е. $(\forall b > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x: 0 < |x - a| < \delta)\ |f(x)| > b$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty.$$

Аналогично понимается смысл записей: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty, \lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Пример. Функция $f(x)$ бесконечно большая, т.к. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

Связь между бесконечно малыми и бесконечно большими функциями

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)} = 0.$ Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)} = \infty.$

Предел функции на бесконечности

Определение. Число b называется *пределом функции* $f(x)$ *на бесконечности* (при $x \to \infty$), если $\forall\varepsilon > 0\ \exists c > 0: \forall x: |x| > c\ |f(x) - b| < \varepsilon.$ (5)

Обозначают $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$.

Частные случаи:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b: \forall\varepsilon > 0\ \exists c > 0: \forall x: x > c\ |f(x) - b| < \varepsilon.$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b: \forall\varepsilon > 0\ \exists c > 0: \forall x: x < -c\ |f(x) - b| < \varepsilon.$

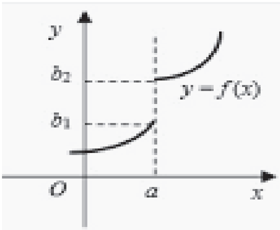
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty: \ \forall b > 0\ \ \exists c > 0: \forall x: |x| > c\ |f(x)| > b.$

Примеры. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2} = 0$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$; 3) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0.$

Односторонние пределы

Односторонние пределы определяются почти так же, как обычные пределы функции в точке, но в определении рассматривается не вся проколотая окрестность точки a, а полуокрестности $a - \delta < x < a$ и $a < x < a + \delta$.

Определение. Число b называется *левосторонним* (*правосторонним*) *пределом* функции $f(x)$ в точке a, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что из $a - \delta < x < a$ ($a < x < a + \delta$) вытекает $|f - b| < \varepsilon$ (6)



обозначается: $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = b$ или

$\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = b$ или $f(a-0) = b$.

$(\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = f(a+0) = b).$

Предел $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ существует $\Leftrightarrow$ когда существуют и равны $f(a-0), f(a+0)$.

Пример. Односторонние пределы в точке $x = \frac{\pi}{2}$ функции $f(x) = tgx$ равны $f\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = +\infty$, $f\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = -\infty$.

Свойства предела функции в точке

1. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b_1$, $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = b_2$ и $b_1 < b_2$, то $\exists\ \dot{U}_\delta(a)$, в которой $f(x) < \varphi(x)$.
2. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b_1$, $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = b_2$ и в $\dot{U}_\delta(a)$ $f(x) < \varphi(x)$, то $b_1 \le b_2$.
3. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = b$ и для любых $x \in \dot{U}_\delta(a)$ выполняется $f(x) \le \Psi(x) \le \varphi(x)$, то $\lim\limits_{x\to a} \Psi(x) = b$.
4. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, то функция $f(x)$ ограничена в $\dot{U}_\delta(a)$.
5. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b_1$, $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = b_2$, то $\lim\limits_{x\to a} (f(x) + g(x)) = b_1 + b_2$.

6. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b_1$, $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = b_2$, то $\lim\limits_{x\to a} (f(x)g(x)) = b_1 \cdot b_2$.
7. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b_1$, то $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{b_1}{b_2}$, $b_2 \neq 0$.

Замечательные пределы

1. <u>*Первый замечательный предел*</u>

В случае неопределённости вида $\frac{0}{0}$ при вычислении пределов тригонометрических и обратных тригонометрических функций применяется

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \qquad (7)$$

Пример. Вычислим предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2sin^2\frac{x}{2}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$.

2. <u>*Второй замечатебльный предел*</u>

Для раскрытия неопределённости вида 1^∞ применяется

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \qquad (8)$$

Введя новую переменную $\frac{1}{x} = t$, получим другой вид формулы:

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e \qquad (9)$$

Пример. Вычислим предел: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x+1}\right)^{4x}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x+1}\right)^{4x} = (1^\infty) = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{2x+1}\right)^{2x+1}\right)^{\frac{4x}{2x+1}} = e^2;$$

б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+sinx)^{ctgx}$

$$\lim_{x\to 0}(1+sinx)^{ctgx} = (1^\infty) = \lim_{x\to 0}(1+sinx)^{\frac{1}{sinx}cosx} = e^{\lim\limits_{x\to 0} cosx} = e.$$

Сравнение бесконечно малых

Пусть $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = \lim\limits_{x\to a}\beta(x) = 0$.

Определение. Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой более высокого порядка* при $x\to a$, если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$.

Обозначается $\alpha(x) = o(\beta(x))$ при $x\to a$ (читается: «$\alpha(x)$ есть о малое от $\beta(x)$ при при $x\to a$».

Запись $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ означает, что $\alpha(x) = \varphi(x)\beta(x)$ где $\varphi(x)\to 0$ при $x\to a$.

Пример. $x^2 = o(x)$ при $x\to 0$, т.к. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x} = 0$.

Если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, то $\beta(x) = o(\alpha(x))$ при $x\to a$, т.к. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0$.

Определение. Говорят, что функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ *одного порядка* при $x\to a$, если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \mathrm{C}$, где $\mathrm{C} = const, C\neq 0$, то пишут $\alpha(x) = O(\beta(x))$ при $x\to a$. (читается: $\alpha(x)$ есть о большое от $\beta(x)$ при $x\to a$).

Пример. $3x^2+2x = O(x)$ при $x\to 0$, т.к. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2+2x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}(3x+2) = 2$.

$\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \text{C}, C \neq 0$ означает $\exists K > 0: |\alpha(x)| \leq K \cdot |\beta(x)|$ при $x \to a$.
В частности, если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ эквивалентны при $x \to a$.
Обозначается $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Пример. $sinx \sim x, tgx \sim x, arcsinx \sim x, arctgx \sim x, 1 - cosx \sim \frac{x^2}{2}$,
$ln(1 + x) \sim x, e^x - 1 \sim x$ при $x \to 0$

5.5. Непрерывность функции

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, включая её саму.

Определение. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Это означает, что

$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0: \forall x: |x - x_0| < \delta$ выполняется $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ (12)

Обозначим $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ – приращение функции $f(x)$ в точке x_0 ($\Delta x = x - x_0$). Тогда равенство $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) =$ примет вид $\lim\limits_{x\to x_0} \Delta f(x_0) = 0$. (13)

Определение непрерывной функции в точке означает:
1) $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0;
2) Существуют конечные односторонние пределы в точке x_0;
3) $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$.

Все элементарные функции непрерывны в любой точке области определения.

Свойства функций, непрерывных в точке

1. Непрерывная в точке функция ограничена в некоторой её окрестности.
2. Если $f(x)$ непрерывной в точке x_0, $f(x_0) \neq 0$, то в некоторой окрестности этой точки знак $f(x)$ совпадает со знаком $f(x_0)$.
3. Если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то непрерывны в точке x_0 функции $f(x) \pm g(x), f(x)g(x), \frac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x_0) \neq 0)$.
4. Если функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $y = f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $y = f\big(\varphi(x)\big) = F(x)$ непрерывна в точке x_0.

Свойства функций, непрерывных на отрезке

Функция называется *непрерывной на отрезке* $[a, b]$, если она непрерывна в каждой точке отрезка и $f(a + 0) = f(a)$ и $f(b + 0) = f(b)$.

1. Если функция непрерывна на отрезке, то она ограничена на нем.
2. Если функция на отрезке и на его концах принимает значения разных знаков, то найдётся внутри отрезка, по крайней мере, одна точка, в которой функция обращается в нуль.
3. Непрерывная на отрезке функция достигает на нём своего наименьшего и наибольшего значения.
4. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то, каково бы ни было

число μ, заключённое между $f(a)$ и $f(b)$, найдётся внутри отрезка точка с, в которой $f(a) = \mu$.

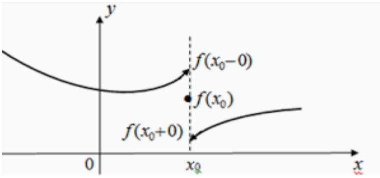
5. Пусть $f(x)$ непрерывна и строго монотонна на $[a, b]$ и область значений Её есть $[f(a), f(b)]$. Тогда на отрезке $[f(a), f(b)]$ существует непрерывная того же характера монотонности обратная функция $x = f^{-1}(y)$.

Точки разрыва

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0.

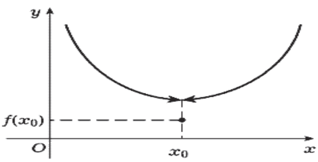
Определение. Точка x_0 называется *точкой разрыва функции* $f(x)$, если $f(x)$ не является непрерывной в этой точке (т.е. либо $f(x)$ не определена в точке x_0, либо не существует хотя бы один из односторонних пределов или бесконечен, либо оба односторонних предела существуют, но не равны между собой). Различают следующие точки разрыва.

Определение. Точка x_0 называется *точкой разрыва* 1-*го рода*, если существуют и конечны оба односторонних предела $f(x)$ в точке x_0. *Скачком функции* называется величина $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$.



Пример. $f(x) = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$ не определена при $x_0 = 0$, значит, $x_0 = 0$ - точка разрыва. Т.к. односторонние пределы существуют, конечны: $f(0-0) = 1, f(0+0) = 0$, то $x_0 = 0$ точка разрыва 1 рода. Скачок функции в этой точке равен -1.

Определение. Точка разрыва 1-го рода называется *устранимой точкой разрыва*, если $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$.



Пример. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ имеет точку разрыва $x_0 = 0$, так как $f(x)$ не определена в ней. Но $f(0-0) = f(0+0) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$. В точке $x_0 = 0$ устранимый разрыв.

Определение. Точка x_0 называется *точкой разрыва* 2-*го рода* функции, если хотя бы один из односторонних пределов $f(x_0 + 0)$ и $f(x_0 - 0)$ не существует или бесконечен.

Пример. $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$ имеет в точке $x_0 = 0$ разрыв 2 рода: $f(0-0) = 0$, $f(0+0) = +\infty$.

ГЛАВА 6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

6.1. Производная и дифференциал

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x.

Определение. *Производной функции* $f(x)$ *в точке* x называется конечный предел отношения приращения функции $\Delta f(x)$ к приращению аргумента Δx при стремлении Δx к нулю:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (1)$$

Другие обозначения: $\frac{df}{dx}, y'(x), \frac{dy}{dx}$. Функция, имеющая конечную производную в точке, называется *дифференцируемой* в этой точке.

Теорема. *Если функция дифференцируема в точке, то она непрерывна в этой точке.*

Обратное неверно. Например, $f(x) = |x|$ непрерывна при любом x, в частности и при $x = 0$. $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = 1$, а $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = -1$, значит, $f'(0)$ не существует, т.е. $f(x) = |x|$ не дифференцируема в точке $x = 0$.

Определение. Функция $f(x)$ называется *дифференцируемой в точке* x, если её приращение при $\Delta x \to 0$ имеет вид:

$$\Delta f(x) = A\Delta x + \alpha(x)\Delta x, \text{где} \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(x) = 0 \qquad (2)$$

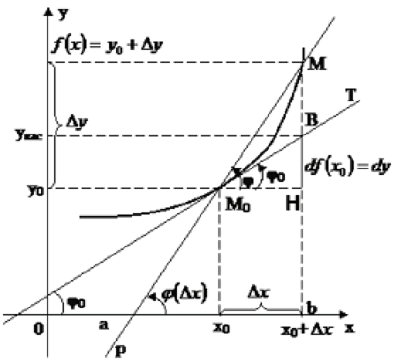
Два определения дифференцируемой функции в точке эквиваленты.

Определение. *Дифференциалом функции* $f(x)$*, дифференцируемой в точке* x, называется главная линейная часть приращения (2).

Обозначается $df(x) = A\Delta x$. Из (1) следует, что $A = f'(x)$. Таким образом, $df(x) = f'(x)\Delta x$. Т.к. дифференциал функции $f(x) = x$ равен $dx = \Delta x$, то

$$df(x) = f'(x)dx \qquad (3)$$

Геометрический и механический смысл производной и дифференциала



Рассмотрим на графике функции $y = f(x)$ точку $M_0(x_0, y_0)$. Пусть абсцисса x_0 получила приращение Δx. На графике точка с абсциссой $x_0 + \Delta x$ есть точка M. Прямая M_0M, называемая секущей, образует угол φ с положительным направлением оси Ox. Устремим $\Delta x \to 0$, тогда $x_0 + \Delta x \to x_0$, а точка $M \to M_0$. Секущая M_0M будет менять своё положение. Прямая, являющаяся предельным положением секущей, называется *касательной* к кривой $y = f(x)$ (на рисунке M_0T). Пусть касательная M_0T образует угол φ_0 с Ox. Тогда при $\Delta x \to 0$ $tg\varphi \to tg\varphi_0$, т.е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} tg\varphi = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{MH}{M_0H} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) = tg\varphi_0$.

Таким образом, производная $f(x)$ в точке x_0:

$$f'(x_0) = tg\varphi_0 \qquad (4)$$

С *геометрической точки зрения производная функции в точке равна угловому коэффициенту касательной, проведённой к графику функции в точке с абсциссой* x_0.

Уравнение касательной: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ (5)

В ΔM_0BH катет $BH = tg\varphi_0 \cdot M_0H$, т.е. $BH = f'(x_0)\Delta x = df(x_0)$.

С *геометрической точки зрения дифференциал функции в точке равен приращению ординаты точки касательной прямой, которое соответствует приращению абсциссы* Δx.

Рассмотрим механический смысл производной и дифференциала. Пусть точка движется по прямой. Зависимость $s = f(t)$ - закон движения точки. Пусть за время Δt точкой пройден путь Δs. Средняя скорость точки $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$. Чтобы получить мгновенную скорость точки, нужно устремить $\Delta t \to 0$. Тогда

$$v_{\text{мгн}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t) \qquad (6)$$

Механический смысл производной: *производная от пути по времени равна мгновенной скорости прямолинейного движения*.

При равномерном движении со скоростью $v = v_{\text{мгн}}$ путь $s'(t)\Delta t = ds$. Т.е. *дифференциал равен пути, который прошла бы точка, если бы она двигалась равномерно и прямолинейно со скоростью, равной* $v_{\text{мгн}}$.

Таблица производных

1. $C' = 0$;
2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$;
3. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$;
4. $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;
5. $(a^x)' = a^x lna$;
6. $(e^x)' = e^x$;
7. $(log_a x)' = \frac{1}{xlna}$;
8. $(lnx)' = \frac{1}{x}$;
9. $(sinx)' = cosx$;
10. $(cosx)' = -sinx$;
11. $(tgx)' = \frac{1}{cos^2 x}$
12. $(ctgx)' = -\frac{1}{sin^2 x}$;
13. $(shx)' = chx$;
14. $(chx)' = shx$;
15. $(thx)' = \frac{1}{ch^2 x}$;
16. $(cthx)' = -\frac{1}{sh^2 x}$;
17. $(arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
18. $(arccosx)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
19. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$;
20. $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Правила дифференцирования

Если $u(x)$ $v(x)$ дифференцируемы в точке x функции, то дифференцируемы в точке функции $u(x) \pm v(x), u(x)v(x), Cu(x)$ $(C = const), \frac{u(x)}{v(x)}$, причём

1. $\left(u(x) \pm v(x)\right)' = u'(x) \pm v'(x)$;
2. $\left(u(x)v(x)\right)' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$;
3. $(Cu(x))' = Cu'(x), C = const$;
4. $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}, v(x) \neq 0.$

Пример. а) $\left(4\sqrt{x} - \frac{3}{x}\right)' = \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2}$; б) $(e^x lnx)' = e^x lnx + \frac{e^x}{x} = \frac{e^x(xlnx+1)}{x}$;

в) $\left(\frac{sinx}{arcsinx}\right)' = \frac{cosx \cdot arcsinx - sinx\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{arcsin^2 x} = \frac{cosx \cdot arcsinx\sqrt{1-x^2} - sinx}{arcsin^2 x\sqrt{1-x^2}}$.

Производная сложной функции

Пусть функция $u=\varphi(x)$ дифференцируема в точке x_0, а функция $y=f(u)$ дифференцируема в точке $u_0=\varphi(x_0)$, тогда сложная функция $y=F(x)=f\big(\varphi(x)\big)$ дифференцируема в точке x_0, причём

$$\Big(f\big(\varphi(x)\big)\Big)'=f'\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)$$

Пример. а) $\big(ln(sinx)\big)'=\frac{1}{sinx}cosx=ctgx$;

б) $\left(\frac{1}{3x^2+2x-1}\right)'=-\frac{1}{(3x^2+2x-1)^2}(6x+2)=-\frac{6x+2}{(3x^2+2x-1)^2}$.

Производная обратной функции

Пусть функция $y=f(x)$ определена и строго монотонна в окрестности точки x_0. Если существует $f'(x_0)$ и $f'(x_0)\neq 0$, то обратная функция $x=\varphi(y)$ имеет в точке $y_0=f(x_0)$ производную $\varphi'(y_0)$, причём

$$\varphi'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)} \tag{7}$$

Пример. Найти $(arcsinx)'$. Функция $x=siny$ определена и строго монотонна в окрестности точки $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. $(siny)'=cosy\neq 0$ $(arcsinx)'=\frac{1}{(siny)'}=\frac{1}{cosy}=\frac{1}{\sqrt{1-sin^2y}}=\frac{1}{\sqrt{1-sin^2(arcsinx)}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Производная функции, заданной параметрически

Пусть функция $y=f(x)$ задана параметрически уравнениями $x=x(t), y=y(t)$, где $t\in[t_0,T]$ и $x(t)$, $y(t)$ дифференцируемы в точке *t, а функция* $t=\Phi(x)$ также имеет производную. Тогда $y=f(x)$ можно рассматривать как сложную функцию $y=y(t), t=\Phi(x)$, где t – промежуточный аргумент. По правилу дифференцирования сложной функции $y'_x=y'_t(t)\Phi'_x(x)$. По теореме о производной обратной функции $\Phi'_x(x)=\frac{1}{x'_t(t)}$. Получим тогда

$$y'_x=\frac{y'_t(t)}{x'_t(t)} \tag{8}$$

Пример. Найти производную $\begin{cases}x=alnt\\ y=asht\end{cases}$. $y'_x=\frac{y'_t(t)}{x'_t(t)}=\frac{(asht)'}{(alnt)'}=tcht$.

Производная неявной функции

Если функция $y=f(x)$ задана неявно уравнением $F(x,y)=0$, то не требуется выражать переменную y. Нужно продифференцировать тождество по x, помня, что переменная является функцией от x.

Пример. Найти производную неявно заданной функции: $y^3-y^2+3x^2=0$. Дифференцируем по x: $3y^2y'-2yy'+6x=0$, откуда выражаем производную: $y'=-\frac{6x}{3y^2-2y}$.

Логарифмическое дифференцирование

применяют для дифференцирования показательно-степенной функции $y=u(x)^{v(x)}$ и функций, заданных в виде произведения других функций.

Пример. Вычислить производную функции: а) $y = (x+1)^{x^2}$.
Прологарифмируем: $lny = x^2 ln(x+1)$, продифференцируем, учтя, что $y(x)$: $\frac{1}{y}y' = 2xln(x+1) + \frac{x^2}{x+1}$. После чего выразим y', подставляя вместо y данную функцию: $y' = (x+1)^{x^2}\left(2xln(x+1) + \frac{x^2}{x+1}\right)$.

6.2. Производные и дифференциалы высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на некотором промежутке. Производная $f'(x)$ является функцией от x. Производная $\left(f'(x)\right)'$ называется *производной второго порядка* (*второй производной*) функции $f(x)$ и обозначается $f''(x)$ или $\frac{d^2f}{dx^2}$. Вообще, *производная n-го порядка* функции f:

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x).$$

Пример. Найти производную 3-го порядка функции $f(x) = \frac{1}{x+1}$.
Вычислим: $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$; $f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$; $f'''(x) = -\frac{6}{(x+1)^4}$.

Дифференциал функции: $dy = f'(x)dx$. Дифференциал от дифференциала функции называется *дифференциалом второго порядка* (*вторым дифференциалом*) и обозначается d^2y. Найдём его.

$$d^2y = d(dy) = (f'(x)dx)'dx = f''(x)dx^2.$$

Дифференциал n-го порядка функции $f(x)$ равен:

$$d^ny = f^{(n)}(x)dx^n.$$

Инвариантность первого дифференциала

Пусть имеется сложная функция $y = F(u), u = \varphi(x)$. Найдём дифференциал $dy = \left(F\left(\varphi(x)\right)\right)' dx = F'\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)dx = F'(u)du$. Заключаем, что дифференциал сложной функции имеет тот же вид (*свойством инвариантности первого дифференциала*). Найдём второй дифференциал:

$$d^2y = d\left(F'(u)\right)du + F'(u)d(du) = F''(u)du^2 + F'(u)d^2u, d^2u = \varphi''(x)dx^2.$$

Второй дифференциал свойством инвариантности не обладает.

Производные высших порядков параметрически заданных функций

Пусть функция задана параметрически $x = x(t), y = y(t)$, где $t \in [t_0, T]$ и $x(t)$, $y(t)$ дифференцируемы в точке t, причем $x(t)$ имеет на $[t_0, T]$ имеет обратную функцию $t = \Phi(x)$. Первая производная: $y'_x = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)}$. Найдём вторую производную: $\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{y'_t(t)}{x'_t(t)}\right)'_t \cdot t'_x = \frac{y''_t(t)x'_t(t) - x''_t(t)y'_t(t)}{\left(x'_t(t)\right)^2} \cdot \frac{1}{x'_t(t)}$, т.е.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y''_t(t)x'_t(t) - x''_t(t)y'_t(t)}{\left(x'_t(t)\right)^3}.$$

Пример. Найти производную второго порядка функции $\begin{cases} x = lnt \\ y = sht \end{cases}$. $x'_t(t) = \frac{1}{t}, y'_t(t) = chx$. Первая производная $y'_x = tcht$. $\frac{d^2y}{dx^2} = (tcht)'_t \frac{1}{x'_t(t)} = \frac{cht + tsht}{1/t}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = tcht + t^2 sht.$

Механический смысл второй производной

Пусть точка движется прямолинейно по закону пути $s = f(t)$. Скорость точки в момент времени t: $v = s'(t)$. Среднее ускорение точки за время Δt: $a_{\text{ср}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$.
Ускорением в данный момент времени называется предел

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

То есть $a = v'(t) = s''(t)$. *Ускорение прямолинейного движения равно второй производной от пути по времени.*

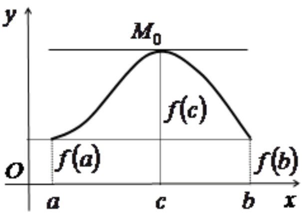
6.3. Основные теоремы дифференциального исчисления

Точка $(x_0, f(x_0))$ называется точкой *локального максимума* (*минимума*), если для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ выполняется неравенство $f(x) - f(x_0) \leq 0$ ($f(x) - f(x_0) \geq 0$). Точки локального максимума и минимума называются точками *локального экстремума*.

***Теорема* 1 (*Ферма*).** *Если функция $f(x)$ имеет локальный экстремум в точке x_0 и дифференцируема в этой точке, то*

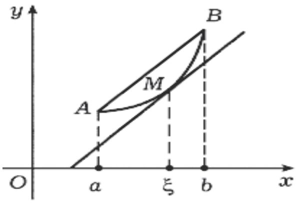
$$f'(x_0) = 0 \qquad (9)$$

<u>*Геометрический смысл теоремы Ферма*</u>: касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке локального экстремума $(x_0, f(x_0))$ параллельна оси Ox.



***Теорема* 2. (*Ролля*).** *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке* $[a,b]$, *дифференцируема на интервале (a, b), на концах отрезка принимает равные значения $f(a) = f(b)$, то существует точка $c \in (a, b)$ такая, что $f'(c) = 0$.*

<u>*Геометрический смысл теоремы Ролля*</u>: при выполнении условий теоремы 2 существует такая точка $c \in (a, b)$, что касательная к графику функции в точке $(c, f(c))$ параллельна оси Ox.



***Теорема* 3. (*Лагранжа*).** *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b), то в этом интервале найдётся хотя бы одна точка ξ такая, что*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a) \qquad (10)$$

или $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$, из которого следует <u>*геометрический смысл теоремы Лагранжа*</u>: при выполнении условий теоремы 3 существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $(\xi, f(\xi))$ параллельна секущей, соединяющей точки $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$.

Следствие. *Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале* (*a*, *b*) *и $f'(x) = 0$ для всех $x \in (a, b)$, то $f(x) = C = const, x \in (a, b)$.*

Теорема 4. (***Коши***). *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$, дифференцируемы на интервале (a,b), причем $g'(x) \neq 0$ во всех точках этого интервала, то найдется хотя бы одна точка $\xi \in (a,b)$ такая, что*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \qquad (11)$$

Замечание. Теорема Лагранжа - частный случай теоремы Коши $(g(x) = x)$.

6.4. Формула Тейлора

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

Теорема 1. *Пусть существует δ такое, что функция $f(x)$ имеет в δ-окрестности точки x_0 и производные до $(n+1)$-го порядка включительно. Тогда для любого $\forall x \in U_\delta(x_0)$ найдётся такая точка ξ, принадлежащая интервалу с концами x_0 и x, такая, что*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Формула называется формулой Тейлора, а функция $r_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ называется *остаточным членом* формулы Тейлора *в форме Лагранжа*.

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

Теорема 2. *Если существует $f^{(n)}(x_0)$, то*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n), x \to x_0 \qquad (12)$$

Формулу (12) называют *формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано* или локальной формулой Тейлора.

Разложить функцию $f(x)$ по формуле Тейлора в окрестности точки x_0 до $0((x-x_0)^n)$— значит представить ее в виде (12).

Разложения элементарных функций по формуле Тейлора $(x_0 = 0, x \to 0)$

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n);\ cosx = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1});\ sinx = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2});$$

$$lnx = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + o(x^n);\ (1+x)^m = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!} x^k + o(x^n)$$

6.5 Правило Лопиталя

1. *Неопределенность вида* $\frac{0}{0}$.

Теорема 1. *Пусть функции* $f(x)$ и $g(x)$ *определены и дифференцируемы в некоторой проколотой окрестности точки* a (*конечной или бесконечной*) *и* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, причём $\lim\limits_{x\to a} g'(x) \neq 0$ в этой окрестности.

Тогда, если существует $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$, то существует и $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

Пример. Найти предел

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^{10}-2x^5-1}{x^3-4x^2+3} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{30x^9-10x^4}{3x^2-8x} = \frac{20}{-5} = -4.$$

Замечание. 1) Теорема остается справедливой при $x \to a-0$ и $x \to a+0$

2)Теорема остается в силе и для случая, когда $a = +\infty$ (или $a = -\infty$).

1. *Неопределенность вида* $\frac{\infty}{\infty}$.

Теорема 2. *Пусть функции* $f(x)$ и $g(x)$ *дифференцируемы при* $x > \alpha$, *причем* $g'(x) \neq 0$ при $x > \alpha$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \infty$ и существует конечный $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$. Тогда существует $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$, т. е.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Пример. 1) Доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0$, если $\alpha > 0$ и $a > 1$

Пусть $m =[\alpha] + 1$, тогда $\alpha - m < 0$. Применим правило Лопиталя m раз:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha x^{(\alpha-1)}}{a^x \ln a} = \cdots = \lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-m+1)x^{\alpha-m}}{a^x \ln^m a} = 0.$$

2) Доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ln^\alpha x}{x^\beta} = 0$, если $\alpha > 0$ и $\beta > 0$.

Полагая $ln\, x = \frac{t}{\beta}$, получаем $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln^\alpha x}{x^\beta} = \frac{1}{\beta^\alpha} \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{t^\alpha}{e^t} = 0$.

Итак, при $x \to +\infty$ логарифмическая функция растет медленнее степенной функции x^α, а степенная функция растет медленнее показательной $a^x, a > 1$.

6.6 Исследование функций с помощью производных

Возрастание и убывание функции

а) *Критерий возрастания (убывания) функции на интервале.*

Теорема 1. *Для того чтобы дифференцируемая на интервале* (a,b) *функция* $f(x)$ *была возрастающей (убывающей) на нём, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$ при всех $x \in (a, b)$.

б) *Достаточное условие строгой монотонности функции.*

Теорема 2. Если $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ для всех $x \in (a, b)$, то функция $f(x)$ строго возрастает (строго убывает) на (a, b).

Пример. Функция $y = shx$ строго возрастает на всей числовой прямой, т.к. $(shx)' = chx > 0$ для любых x.

Экстремумы функции

а) *Необходимые условия экстремума.*

Точки, в которых производная данной функции равна нулю, называют *стационарными точками* этой *функции,* а точки, в которых функция непрерывна, а ее производная либо равна нулю, либо не существует, называются *критическими точками.* Все точки экстремума функции содержатся среди ее критических точек.

б) *Достаточные условия экстремума*.

Точка x_0 - *точка строгого максимума* функции $f(x)$, если

$$\exists\delta > 0: \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) \to f(x) < f(x_0) \tag{16}$$

Аналогично, x_0 называют *точкой строгого минимума функции* $f(x)$, если

$$\exists\delta > 0: \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) \to f(x) > f(x_0). \tag{17}$$

***Теорема* 3.** (*первое достаточное условие строгого экстремума*). Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0, и непрерывна в точке x_0.
Тогда: а) если $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс при переходе через точку x_0, т. е. существует $\delta > 0$ такое, что

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \to f'(x) < 0, \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \to f'(x) > 0 \qquad (18)$$

то x_0 — точка строгого минимума функции f;
б) если $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус при переходе через точку x_0, то x_0 — точка строгого максимума функции f.Обратное не верно.
***Теорема* 4.** (*второе достаточное условие экстремума*).
Пусть x_0 — стационарная точка функции $f(x)$, т. е. $f'(x_0) = 0$, и пусть существует $f''(x_0)$. *Тогда:*

а) *если* $f''(x_0) > 0$, *то* x_0 — *точка строгого минимума функции* $f(x)$;

б) *если* $f''(x_0) < 0$, *то* x_0 — *точка строгого максимума функции* $f(x)$.

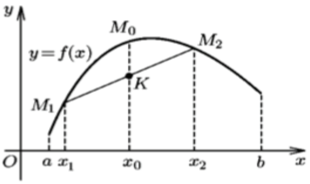
Пример. $f(x) = x^2$, то $f'(0) = 0, f''(0) = 2$, и поэтому $x_0 = 0$ — точка строгого минимума функции $f(x) = x^2$.
Замечание. Если $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) = 0$, то в точке x_0 функция f может иметь экстремум ($f(x) = x^4, x_0 = 0$), а может и не иметь ($f(x) = x^3, x_0 = 0$).
***Теорема* 5.** (*третье достаточное условие строгого экстремума*).
Пусть существует $f^{(n)}(x_0)$, *где* $n > 2$, и выполняются условия

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) \neq 0 \qquad (19)$$

Тогда если n – четное число, то x_0 – точка экстремума $f(x)$, а именно точка строгого минимума, если $f^{(n)}(x_0) < 0$ и точка строгого максимума при $f^{(n)}(x_0) > 0$. Если n – нечетно, то x_0 не является точка экстремума $f(x)$.
Пример. Является ли точка $x_0 = 0$ точкой экстремума $f(x) = chx + cosx$?
$f'(x) = shx - sinx, f'(0) = 0, f''(x) = chx - cosx, f''^{(0)} = 0,$
$f'''(x) = shx + sinx, f'''(0) = 0, f^{IV}(x) = chx + cosx, f^{IV}(0) = 2 \neq 0.$
Первая отличная от нуля производная чётного порядка, значит, $x_0 = 0$ точка экстремума $f(x)$. Т.к. $f^{IV}(0) = 2 > 0$, то $x_0 = 0$ является точкой минимума.

Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Функция, непрерывная на отрезке, по теореме Вейерштрасса, принимает на этом отрезке наибольшее и наименьшее значения. В случае, когда непрерывная функция $f(x)$ имеет экстремумы на отрезке $[a, b]$ в точках $x_1, x_2, \dots, x_n$, то наибольшее и наименьшее значения следует искать среди $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ и $f(a), f(b)$.
Пример. $f(x) = cos2x + 2x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Т.к. $f'(x) = 2 - 2sin2x = 2(1 - sin2x) \geq 0$, то $f(x)$ возрастает на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Следовательно, наименьшее значение на левом конце отрезка: $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\pi - 1$, а наибольшее – на правом конце: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi - 1$.



Выпуклость функции и точки перегиба

а) Понятие выпуклости

Непрерывная функция $y = f(x)$ называется *выпуклой вверх* $[a, b]$ если для любых точек x_1 и x_2 отрезка $[a, b]$ выполняется неравенство

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \qquad (20)$$

Аналогично, $y = f(x)$ называется *выпуклой вниз* на отрезке $[a, b]$ если для любых точек x_1и x_2 отрезка $[a, b]$ выполняется неравенство

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \qquad (21)$$

Пример. Функция $f(x) = x^2$ строго выпукла вниз на любом отрезке.

В самом деле, при $x_1 \neq x_2$ неравенство $(\frac{x_1+x_2}{2}) < \frac{x_1^2+x_2^2}{2}$ равносильно неравенству $(x_1 - x_2)^2 > 0$.

б) Достаточные условия выпуклости

Теорема 6. *Пусть $f'(x)$ существует на отрезке $[a, b]$, а $f''(x)$ – на интервале (a, b). Тогда*: а) *если $f''(x) \geq 0$ при всех $x \in (a, b)$, то функция $y = f(x)$ выпукла вниз на отрезке $[a, b]$*; б) *если $f''(x) > 0$ при $x \in (a, b)$, то функция $y = f(x)$ строго выпукла вниз на отрезке $[a, b]$.*

При выполнении на (a, b) условия $f''(x) \leq 0$ ($f''(x) < 0$) функция $y = f(x)$ выпукла вверх (строго выпукла вверх) на отрезке $[a, b]$.

Замечание. Условие $f''(x) > 0$ не является необходимым условием строгой выпуклости вниз функции $y = f(x)$. Например, для $f(x) = x^4$ условие $f''(x) > 0$ нарушается при $x = 0$, но функция строго выпукла вниз.

в) Понятие токи перегиба

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и имеет в этой точке либо конечную, либо бесконечную производную ($f'(x_0) = \pm\infty$). Тогда, если эта функция при переходе через точку x_0 меняет направление выпуклости, т.е. существует $\delta > 0$ такое что на одном из интервалов $(x_0 - \delta, x_0)$, $(x_0, x_0 + \delta)$ она выпукла вверх, а на другом выпукла вниз, то x_0 называют *точкой перегиба* функции $f(x)$, а точку $(x_0, f(x_0))$ – точкой перегиба графика функций $y = f(x)$.

Пример. Для функций $y = x^3$ и $y = x^{1/3}$ $x = 0$ – точка перегиба.

б) Необходимое условие наличия точки перегиба

Теорема 7. *Если x_0 – точка перегиба функции $f(x)$ и если функция $f(x)$ имеет в некоторой окрестности точки x_0 вторую производную, непрерывную в точке x_0, то $f''(x_0) = 0$*

в) Достаточные условия наличия точки перегиба

Теорема 8 (первое достаточное условие). *Если функция f непрерывна в точке x_0 имеет в этой точке конечную или бесконечную производную и если функция $f''(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то x_0 – точка перегиба функции $f(x)$.*

Пример. Для функции $f(x) = arctgx$ точка $x = 0$ – точка перегиба, так как $f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$ меняет знак при переходе через точку $x = 0$.

***Теорема* 9** (<u>*второе достаточное условие*</u>). *Если* $f^{(2)}(x_0) = 0, f^{(3)}(x_0) \neq 0,$ *то* x_0 *– точка перегиба функции* $f(x)$.

Пример. Для функции $f(x) = sinx$ точка $x = 0$ – точка перегиба, так как $f^{(2)}(0) = 0,\ f^{(3)}(0) = -1$.

Асимптоты

а) <u>*Вертикальная асимптота*</u>. Если выполнено хотя бы одно из условий

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to x_0+0} f(x) = \infty$$

то прямую $x = x_0$ называют *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$**.**

Пример. Прямая $x = 0$ – вертикальная асимптота графиков функций $y = \frac{1}{x}, y = \lg x^2, y = \frac{1}{x^2}, y = cth\, x$. Прямая $x = -1$ – вертикальная асимптота для $y = \frac{3-2x}{x+1}$, прямые $y = \frac{\pi}{2} + \pi k\ (k \in \mathbb{Z})$– вертикальные асимптоты $y = tgx$.

б) <u>*Невертикальная асимптота*</u>. Прямая $y = kx + b$ называется *невертикальной асимптотой* графика функции $f(x)$ при $x \to +\infty$, если

$$\lim_{x\to+\infty}\big(f(x) - (kx + b)\big) = 0.$$

Если $k \neq 0$ – *наклонная*, если $k = 0$ – *горизонтальная*.

Аналогично вводится понятие асимптоты при $x \to -\infty$.

Пример. Прямая $y = 0$ – горизонтальная асимптота функции $y = \frac{1}{x}$ при $x \to \pm\infty$, а функции $y = e^x$ при $x \to -\infty$.

***Теорема* 10**. *Для того чтобы прямая* $y = kx + b$ *была асимптотой графика функции* $y = f(x)$ при $x \to \pm\infty$, *необходимо и достаточно*, *чтобы существовали конечные пределы*:

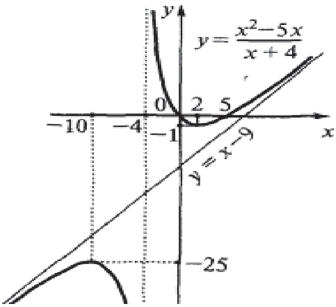
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = k,\ \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx) = b \tag{22}$$

Общее исследование функции и построение графика

1. Найти область определения функции и выяснить чётность/нечётность и периодичность.
2. Найти точки пересечения с координатными осями и определить промежутки знакопостоянства функции.
3. Исследовать функцию на наличие асимптот графика. Сделать эскиз.
4. Исследовать на промежутки монотонности и экстремум.
5. Исследовать выпуклость графика функции и точки перегиба.
6. Построить график функции.

Пример. Исследовать и построить график функции $f(x) = \frac{x^2-5x}{x+4}$.

1. $D(f) = (-\infty; -4) \cup (-4; +\infty)$. 2. Ни чётная, ни нечётная, непериодическая.



3.Точки пересечения с осями: (0,0) и (5,0). $f(x) < 0$ при $x < -4;\ \ 0 < x < 5;$ 4. Прямая $x = -4$ - вертикальная асимптота, т.к. $\lim\limits_{x\to-4-0} \frac{x^2-5x}{x+4} = -\infty,\ \lim\limits_{x\to-4+0} \frac{x^2-5x}{x+4} = +\infty.$

5.Прямая $y = x - 9$ – наклонная асимптота, т.к $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-5x}{x^2+4x} = 1,\ \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2-5x}{x+4} - x\right) = -9.$

6. $f'(x) = \frac{(2x-5)(x+4)-(x^2-5x)}{(x+4)^2} = \frac{x^2+8x-20}{(x+4)^2}.$

Решим уравнение $f'(x) = 0$. Стационарные точки: $x = -10, x = 2$.
$f'(x) > 0$ при $x < -10;\ \ x > 2$. Это промежутки возрастания $f(x)$.
$f'(x) < 0$ при $-10 < x < -4;\ -4 < x < 2$. Это промежутки убывания функции $f(x)$. Точка $(-10, -25)$ – точка максимума, точка $(2, -1)$ – точка минимума $f(x)$.

2. $f''(x) = \frac{72}{(x+4)^3}$. При $x < -4$ $f''(x) < 0$, следовательно, функция выпукла вверх. При $x > -4$ $f''(x) > 0$, на этом промежутке функция выпукла вниз. Точка $x = -4$ не является точкой перегиба, т.к. в ней $f(x)$ не определена.

ГЛАВА 7. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

7.1. Понятие функции нескольких переменных

Определение. Если каждой совокупности значений переменных $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ соответствует определённое значение переменной w, то будем называть w *функцией n независимых переменных* $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и записывать $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Множество значений независимых переменных, при которых имеет смысл $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, называется *областью определения функции*.

Пример. 1) $z = x + y$ определена при любых значениях x, y. Следовательно, $D(f) = \mathbb{R}^2$.

2) $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$. Здесь u функция трёх переменных, удовлетворяющих соотношению $1 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0$. Следовательно, область определения – единичный шар $x^2 - y^2 - z^2 \leq 1$.

Рассмотрим функцию $z = f\ (x, y)$, определенную в области Oxy. Геометрическое место точек М, координаты которых удовлетворяют уравнению $z = f\ (x, y)$, называется *графиком функции* двух переменных.

Пример. График функции $z = x^2 + y^2$ служит параболоид вращения.

Уравнение $z = f\ (x, y)$ в пространстве определяет некоторую поверхность, поэтому график функции двух переменных есть поверхность, проектирующаяся на $D(f) \subset Oxy$. Каждый перпендикуляр к плоскости Oxy пересекает поверхность $z = f\ (x, y)$ не более чем в одной точке.

Пусть в пространстве (x, y, z) имеется область D, в которой задана функция $u = u(x, y, z)$.Точки области D, в которых $u(x, y, z) = C$, образуют некоторую поверхность. Такие поверхности называются *поверхностями уровня.*

Рассмотрим $z = f(x, y)$. Назовём частным приращением по x величину

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y) \qquad (1)$$

Аналогично, частным приращением по y:

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y) \qquad (2)$$

Сообщим аргументу x приращение Δx, а аргументу у – приращение Δy, получим для z новое приращение Δz, которое называется *полным приращением функции* z и определяется формулой:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \qquad (3)$$

Надо заметить, что, вообще говоря, полное приращение не равно сумме частных приращений т.е. $\Delta_z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$

7.2 Предел и непрерывность функции нескольких переменных

Окрестностью радиуса r точки M_0 (x_0, y_0) называется совокупность всех точек (x, y), удовлетворяющих неравенству $\sqrt{(x - x_0)^2 + ((y - y_0))^2} < r$ т.е. совокупность всех точек, лежащих внутри круга радиуса r с центром в точке M_0 (x_0, y_0).

Определение. Число A называется *пределом функции* $f(x, y)$ при стремлении точки $M(x, y)$ к точке $M_0(x_0, y_0)$, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $r > 0$, что для всех точек $M(x, y)$, для которых выполняется неравенство $\overline{MM_0} < r$ имеет место неравенство $|f(x, y) - A| < \varepsilon$.

Если число A является пределом функции $f(x, y)$ при стремлении точки $M(x, y) \to M_0(x_0, y_0)$, то пишут:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$$

Определение. Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит области определения функции $f(x, y)$. Функция $z = f(x, y)$ называется *непрерывной в точке* $M_0(x_0, y_0)$, если имеет место равенство

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0) \qquad (4)$$

причём точка $M(x, y)$ стремится к точке $M_0(x_0, y_0)$ произвольным образом, оставаясь в $D(f)$. Подставляя $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$ в (4), получим

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) \qquad (5)$$

Или, учтя обозначения (3),

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} (f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0 \qquad (6)$$

Обозначим $\Delta\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Если $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, то $\Delta\rho \to 0$, и обратно, если $\Delta p \to 0$, то $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$. Тогда (6) примет вид:

$$\lim_{\Delta p \to 0} \Delta z = 0 \qquad (7)$$

Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области называется *непрерывной в области*.

Если в некоторой точке $N(x_0, y_0)$ не выполняется условие (4) то точка $N(x_0, y_0)$ называется *точкой разрыва* функций $z = f(x, y)$. Условие (4) может не выполняться в следующих случаях:

1) $f(x, y)$ определена во всех точках некоторой окрестности точки $N(x_0, y_0)$, за исключением самой точки $N(x_0, y_0)$;
2) $f(x, y)$ определена во всех точках окрестности точки (x_0, y_0), но не существует предел в точке (x_0, y_0);
3) $f(x, y)$ определена во всех точках окрестности точки (x_0, y_0), существует предел $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$, но $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) \neq f(x_0, y_0)$

Пример. 1) Функция $z = x + y$ непрерывна в любой точке (x, y), т.к. $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z =$

$\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} ((x + \Delta x + y + \Delta y) - (x + y)) = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} (\Delta x + \Delta y) = 0.$

2) $z = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ определена всюду, кроме точки $(0,0)$. Будем рассматривать точки $(x, y) \to (0,0)$, где $y = kx$. Значения функции на прямой $y = kx$: $z = \frac{xkx}{x^2 + k^2x^2} = \frac{k}{1 + k^2} = const$. В окрестности $(0,0)$ z принимает различные значения в зависимости от k. Поэтому функция не имеет предела в точке $(0,0)$. Значит, она не является непрерывной в точке $(0,0)$.

Свойства функций, непрерывных в замкнутой ограниченной области:

1. Непрерывная функция в замкнутой ограниченной области достигает в ней своего наибольшего значения M и наименьшего значения m.
2. Если функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ непрерывна в замкнутой и ограниченной области D, M и m – наибольшее и наименьшее значение функции f в области D, то для любого числа μ удовлетворяющего условию $m < \mu < M$ найдется в области такая точка P, в которой $f(P) = \mu$.
3. Если функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ непрерывна в замкнутой ограниченной области и принимает как положительные, так и отрицательные значения, то внутри области найдутся точки, в которых функция f обращается в нуль.

7.3 Дифференцирование функции двух переменных

Определение. *Частной производной* по x функции $z = f(x, y)$ называется предел отношения частного приращения $\Delta_x z$ по x к приращению Δx при стремлении Δx к нулю:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

Аналогично определяется частная производная $f(x, y)$ по переменной y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

Пример. Вычислить частные производные следующих функций:

1) $z = x^3 \cos y$; $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 \cos y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -x^3 \sin y$

2) $z = x^y$; $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$.

3) $u = x^3 - 3y^2 z + 4xy$; $\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 4y$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -6yz + 4x$, $\frac{\partial u}{\partial z} = -3y^2$.

7.4 Полный дифференциал функции

Пусть $f(x, y)$ в рассматриваемой точке (x, y) имеет непрерывные частные производные. Пусть приращение $f(x, y)$ в точке (x, y) имеет вид:

$$\Delta z = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \Delta y + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y \qquad (7)$$

Сумма двух последних слагаемых правой части является бесконечно малой высшего порядка относительно $\Delta\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Действительно, отношение $\frac{\gamma_1 \Delta x}{\Delta \rho} \to 0$ при $\Delta\rho \to 0$ как произведение бесконечно малой величины γ_1 при $\Delta\rho \to 0$ на ограниченную величину $\left(\text{т. к.} \left|\frac{\Delta x}{\Delta \rho}\right| \le 1\right)$.

Аналогично проверяется, что $\frac{\gamma_2 \Delta y}{\Delta \rho} \to 0$.

Сумма первых двух слагаемых есть выражение линейное относительно Δx и Δy. При $f'_x(x, y) \neq 0$ и $f'_y(x, y) \neq 0$ это выражение представляет собой главную часть приращения, отличаясь от Δz на бесконечно малую высшего порядка относительно $\Delta\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Определение. Функция $z = f(x, y)$, полное приращение Δz которой в данной точке (x, y) может быть представлено в виде (7): суммы линейного относительно Δx и Δy слагаемого и бесконечно малой величины высшего порядка относительно $\Delta\rho$, называется *дифференцируемой в данной точке*, а линейная часть приращения - *полным дифференциалом* dz или df.

Из равенства (7) следует, что если функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные в данной точке, то она дифференцируема в этой точке и имеет полный дифференциал

$$dz = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy \qquad (8)$$

Приближённые вычисления с помощью дифференциала

Равенство (7) можно переписать в виде

$$\Delta z = dz + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y$$

И с точностью до бесконечно малых высшего порядка относительно Δp можно написать следующее приближенное равенство

$$\Delta z \approx dz$$

Производная сложной функции

Предположим, что в уравнении $z = F(u, v)$ переменные u и v являются функциями независимых переменных x и y: $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$.
В этом случае z есть сложная функция от аргументов x и y.
Пусть функция $F(u, v,$ $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ имеет непрерывные частные производные по всем своим аргументам. Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (9)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \qquad (10)$$

Пример. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = ln(u^2 + v)$, $u = e^{x+y^2}$, $v = x^2 + y$.

$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2u}{u^2+v}$, $\frac{\partial z}{\partial \vartheta} = \frac{1}{u^2+v}$, $\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x+y^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2ye^{x+y^2}$, $\frac{\partial v}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 1$

Используя (9) и (10), затем подставляя вместо u и v $e^{x+\,y^2}$ и $x^2 + y$, имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2u}{u^2+v}e^{x+y^2} + \frac{1}{u^2+v}2x = \frac{2}{u^2+v}\left(ue^{x+y^2} + x\right) = \frac{2(e^{2(x+y^2)}+x)}{e^{2(x+y^2)}+x^2+y},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2u}{u^2+v}2ye^{x+y^2} + \frac{1}{u^2+v} = \frac{1}{u^2+v}\left(4uye^{x+y^2} + 1\right) = \frac{4e^{2(x+y^2)}+1}{e^{2(x+y^2)}+x^2+y}.$$

Если задана функция $z = F(x, y)$, где $y = y(x)$, то z является функцией только одного переменного x. Найдём $\frac{dz}{dx}$. По формуле (9) получаем:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

Пример. Найти полный дифференциал сложной функции $z = u^2v^3$, если $u = x^2 siny\,, v = x^3e^y$.

Решение. По формуле (8) имеем: $dz = 2uv^3du + 3u^2v^2dv =$
$2uv^3(2xsinydx + x^2cosydy) + 3u^2v^2(3x^2e^ydx + x^3e^ydx + x^3e^ydy)$ или
$dz = (2uv^3 \cdot 2xsiny + 3u^2v^2 \cdot 3x^2e^y)dx + (2uv^3x^2cosy + 3u^2v^2x^3e^y)dy =$
$= \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$

Производная от функции, заданной неявно

Теорема. *Пусть непрерывная функция* $y(x)$ *задается неявно уравнением* $F(x, y) = 0$, *где* $F(x, y), F'_x\,(x, y), F'_y\,(x, y)$ – *непрерывные функции в некоторой области D, содержащей точку* (x, y), *координаты которой удовлетворяют уравнению, кроме того, в этой точке* $F'_y\,(x, y)\ \neq 0$. *Тогда функция* $y(x)$ *имеет производную.*

$$y'_x = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} \qquad (11)$$

Пример. Дана неявная функция $y(x)$ уравнением $e^y - e^x + xy = 0$.
Здесь $F(x, y) = e^y - e^x + xy$. Вычислим частные производные $F(x, y)$:
$\frac{\partial F}{\partial x} = -e^x + y$, $\frac{\partial F}{\partial y} = e^y + x$. По формуле (11) получаем: $\frac{dy}{dx} = -\frac{-e^x+y}{e^y+x} = \frac{e^x-y}{e^y+x}$.
Рассмотрим теперь уравнение $F(x, y, z) = 0$. Если каждой паре чисел x и y из

некоторой области соответствует одно или несколько значений z, удовлетворяющих уравнению, то это уравнение неявно определяет одну или несколько функций z от x, y.

Найдём частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ неявной функции z от x, y. Используем (11), где в качестве функции $y(x)$ считаем $z(x)$, то

$$z'_x = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}},\ z'_y = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \qquad (12)$$

Здесь $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$. Аналогично для функций большего числа переменных.

Пример. Вычислить честные производные функции $e^z + x^2y + z - 1 = 0$. *Решение*. $F(x, y, z) = e^z + x^2y + z - 1$. Вычислим частные производные $F(x, y, z)$ по x, y, z: $\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy, \frac{\partial F}{\partial y} = x^2, \frac{\partial F}{\partial z} = e^z + 1$. По формулам (12):

$z'_x = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{2xy}{e^z+1}, z'_y = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{x^2}{e^z+1}$.

Частные производные высших порядков

Пусть дана функция $z = f(x, y)$. Частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ - функции переменных x, y. Поэтому можно находить частные производные от $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y), \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y), \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y), \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y)$.

Вообще, производная n-го порядка по переменной есть производная по этой переменной от частной производной $(n-1)$-го порядка.

Пример. Найти частные производные второго порядка функции двух переменных: $z = x^3y + xy^2 - 2x + 3y$.

Решение. Сначала найдём $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y + y^2 - 2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 + 2xy + 3$.

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6xy$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 3x^2 + 2y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 3x^2 + 2y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x$.

Теорема*. Если функция $z = f(x, y)$ и её частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ определены в точке $M(x, y)$ и в некоторой её окрестности, то в этой точке $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.*

7.5 Производная по направлению. Градиент

Пусть точка $M(x, y, z)$ лежит в области D и функция $u = u(x, y, z)$ определена в D. Проведём вектор $\overline{MM_1} = \overline{s}$, где $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$, направляющие косинусы $\overline{s}$ равны $cos\alpha$, $cos\beta$, $cos\gamma$. Длина вектора $\overline{s}$ равна $\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$.

Предположим, что $u(x, y, z)$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные по всем аргументам в области D. Полное приращение функции: $\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y + \varepsilon_3\Delta z$, где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ стремятся к нулю при $\Delta s \to 0$. Разделив обе части на Δs, получим

$\frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta s} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta s} + \varepsilon_1\frac{\Delta x}{\Delta s} + \varepsilon_2\frac{\Delta y}{\Delta s} + \varepsilon_3\frac{\Delta z}{\Delta s}$, далее, учитывая, что $\frac{\Delta x}{\Delta s} = cos\alpha, \frac{\Delta y}{\Delta s} = cos\beta, \frac{\Delta z}{\Delta s} = cos\gamma$, получим формулу для $\frac{\Delta u}{\Delta s}$:

$$\frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial u}{\partial x}cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}cos\gamma + \varepsilon_1 cos\alpha + \varepsilon_2 cos\beta + \varepsilon_3 cos\gamma \quad (13)$$

Определение. Предел $\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta s}$ называется *производной по направлению* $\overline{s}$ функции $u = u(x, y, z)$ в точке (x, y, z) и обозначается $\frac{\partial u}{\partial s}$.

Из (13) вытекает формула для вычисления производной по направлению:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}cos\gamma \quad (14)$$

Пример. Найти производную функции $u = xy + z$ в точке $M(1,1,-1)$ по направлению вектора $\overline{s} = \overline{i} - 2\overline{j} + 2\overline{k}$.

Решение. Вычислим частные производные $u(x, y, z)$: $\frac{\partial u}{\partial x} = y, \frac{\partial u}{\partial y} = x, \frac{\partial u}{\partial z} = 1$.

В точке $M(1,1,-1)$: $\frac{\partial u}{\partial x}|_M = 1$, $\frac{\partial u}{\partial y}|_M = 1$, $\frac{\partial u}{\partial z}|_M = 1$. Найдём направляющие косинусы: $cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}} = \frac{1}{3}, cos\beta = -\frac{2}{3}, cos\gamma = \frac{2}{3}$. По формуле (14): $\frac{\partial u}{\partial s} = 1\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) + 1\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

Рассмотрим в области D вектор, проекциями которого на координатные оси служат частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ функции $u(x, y, z)$ в точке (x, y, z). Этот вектор называется *градиентом функции* $u(x, y, z)$.

$$gradu = \frac{\partial u}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\overline{k} \quad (15)$$

Теорема. *Пусть дано скалярное поле* $u(x, y, z)$ *и в каждой точке задан* $gradu$ (*определено поле градиентов*). *Тогда* $\frac{\partial u}{\partial s}$ *равна проекции вектора* $gradu$ *на вектор* $\overline{s}$.

Свойства градиента

1. $\frac{\partial u}{\partial s}$ в данной точке по направлению вектора $\overline{s}$ имеет наибольшее значение, если направление вектора $\overline{s}$ совпадает с направлением градиента.
2. $\frac{\partial u}{\partial s} = 0$, где $\overline{s} \perp gradu$.

7.6 Локальный и глобальный экстремум функции двух переменных

Необходимое условие локального экстремума

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в окрестности точки $M(x_0, y_0)$.

Определение. Точка $M(x_0, y_0)$ называется *точкой максимума* (*минимума*) функции $f(x, y)$, если для любых точек (x, y) из некоторой окрестности этой точки выполняется неравенство

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y) \ (f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \quad (16)$$

Максимумы и минимумы функции называются её *локальными экстремумами*, а точка $M(x_0, y_0)$ – *точкой локального экстремума*. Если неравенства (16) строгие, то имеет место строгий экстремум.

Пример. Функция $z = x^2 + y^2$ имеет минимум в точке $(0,0)$, так как $x^2 + y^2 > 0$ для любых точек (x, y) из некоторой окрестности точки $(0,0)$.
Теорема (*необходимое условие экстремума*). Если функция $z = f(x, y)$ достигает экстремума при в точке $M(x_0, y_0)$, то обе частные производные первого порядка функции $f(x, y)$ обращается в нуль или не существует.
Это условие не является достаточным условием экстремума.
Пример. Частные производные $z = x^2 - y^2$: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \frac{\partial z}{\partial y} = -2y$ равны нулю в точке $(0,0)$. Но f не имеет экстремума в $(0,0)$, т.к. в любой окрестности $(0,0)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Достаточные условия локального экстремума

Теорема. *Пусть в некоторой области, содержащей* $M(x_0, y_0)$, *функция* $f(x, y)$ *имеет непрерывные частные производные до третьего порядка включительно, и* $M(x_0, y_0)$ *– стационарная точка функции* $f(x, y)$, *т.е.* $\frac{\partial z(x_0,y_0)}{\partial x} = 0, \frac{\partial z(x_0,y_0)}{\partial y} = 0$. *Тогда в точке* $M(x_0, y_0)$ *функция* $f(x, y)$:
1) *имеет максимум*, *если* $AC - B^2 > 0, A < 0$;
2) *имеет минимум*, *если* $AC - B^2 > 0, A > 0$;
3) *не имеет экстремума*, *если* $AC - B^2 < 0$;
4) *может иметь и не иметь экстремума*, *если* $AC - B^2 = 0$,

где $A = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}, B = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y}, C = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}$.

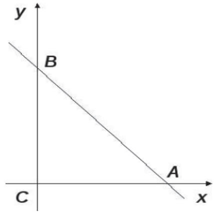
Пример. Исследовать функцию $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$ на экстремум.

Найдём стационарные точки функции: $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y - 2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -x + 2y + 1 = 0 \end{cases}$

Решив систему, получим: $x_0 = 1, y_0 = 0$, т. е. $M_0(1,0)$ – стационарная точка функции. Вычислим в ней частные производные второго порядка:
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$. Таким образом, $A = 2, B = -1, \mathrm{C} = 2$. Определим знак выражения $\Delta = AC - B^2 = 2 \cdot 2 - (-1)^2 = 3 > 0$. Значит, точка $M_0(1,0)$ является точкой экстремума данной функции. А т.к. $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 > 0$, то $M_0(1,0)$ является точкой минимума. Минимум функции: $z_{min} = f(1,0) = -1$.

Наибольшее и наименьшее значения функции
(глобальный экстремум функции двух переменных)

Пусть функция $z = f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области. Тогда она достигает в этой области наибольшего и наименьшего значения. Чтобы их определить, нужно найти стационарные точки внутри области, вычислить значение функции в них и найти наибольшее и наименьшее значения на границе области и из этих значений выбрать наибольшее и наименьшее.
Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции
$z = x^2 - xy + x + y + 1$ в области $D: x = 0, y = 0, y = 5 - x$.



Найдём стационарные точки функции: $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y + 1 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -x + 1 = 0 \end{cases}$. Получим точку $M_0(1{,}3)$, принадлежащую области D. Значение функции в ней: $f(1{,}3) = 1^2 - 1 \cdot 3 + 1 + 3 + 1 = 3.$ На границе:

1. Уравнение CB: $x = 0, 0 \le y \le 5$. Функция на границе: $z = y + 6$. Стационарных точек нет: $z' = 1$, $0 \le y \le 5$, $f(0; 0) = 1,$ $f(0; 5) = 6.$ 2. Уравнение границы BA: $y = 5 - x,\ \ 0 \le x \le 5$. Функция на границе: $z = x^2 - x(5 - x) + x + (5 - x) + 1 = 2x^2 - 5x + 6, z' = 4x - 6 = 0$. Стационарная точка: $x = 1{,}5$. Значения функции в ней: $f(1{,}5; 3{,}5) = 3$, на концах отрезка $0 \le x \le 5$: $f(0; 5) = 6, f(5; 0) = 31$.

3. Уравнение CA: $y = 0, 0 \le x \le 5$. Функция на ней: $z = x^2 + x + 1$. Производная: $z' = 2x + 1$. Стационарная точка $x = -0{,}5$ не принадлежит области. На концах отрезка $[0{,}5]$ значения z уже найдены. Выберем из всех значений $z_{\text{наим}} = z(0; 0) = 1, z_{\text{наиб}} = z(5; 0) = 31$.

В т о р о й с е м е с т р

Глава 1. НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1.1 Понятие неопределённого интеграла

Задача восстановления функции по её производной

Пусть известна скорость v движения точки, движущейся по прямой, в момент времени t: $v = 2t$. Найдем выражение для координаты $x(t)$ точки в момент времени t. Так как $v = \frac{dx}{dt}$, то $\frac{dx}{dt} = 2t$. Значит, $x(t) = t^2$ или в общем виде: $x(t) = t^2 + C,\ \ C = const$.

Первообразная функции. Неопределенный интеграл, его геометрический смысл и свойства

Определение. Пусть на промежутке X задана функция $f(x)$. Функция $F(x)$ называется *первообразной функции* $f(x)$ на промежутке X, если

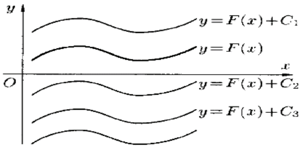
$$F'(x) = f(x),\ \forall x \in X$$

Теорема. *Если* $F(x)$ *– первообразная* $f(x)$ *на* X, *то* $\Phi(x) = F(x) + C$, где $C = const$, также *являются первообразными* $f(x)$ *на* X. *И обратно, любая первообразная* $\Phi(x)$ *функции* $f(x)$ *на* X *имеет вид*: $\Phi(x) = F(x) + C$, *где* $C = const$, *а* $F(x)$ *– одна из первообразных* $f(x)$ *на* X.

Определение. *Неопределенным интегралом* функции $f(x)$ называется множество всех первообразных на промежутке X.

$$\int f(x)\,dx := \{F(x) + C\}, \text{ где } C = const \qquad \textbf{(1)}$$

$f(x)$ *– подынтегральная функция*, x *– переменная интегрирования*, $\int -$ знак неопределённого интеграла. Вычисление неопределённого интеграла называется *интегрированием*. Выясним *геометрический смысл* интеграла.



Пусть $F(x)$ является первообразной для $f(x)$. Угловой коэффициент касательной в каждой точке кривой $F(x)$ равен $F'(x) = f(x)$. Правая часть (1) - семейство кривых, получаемых при параллельном переносе вдоль оси ординат.

Свойства неопределённого интеграла

1. $\int\big(f(x) + g(x)\big)\,dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$;
2. $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$;
3. $(\int f(x)\,dx)' = f(x)$;
4. $d(\int f(x)\,dx) = f(x)dx$;
5. $\int dF(x) = F(x) + C$

Таблица неопределённых интегралов

1. $\int 0dx = C$;	11. $\int shxdx = chx + C$;
2. $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\,,\ \alpha \neq -1;$	12. $\int \frac{dx}{ch^2x} = thx + C;$
3. $\int \frac{dx}{x} = ln\lvert x\rvert + C$;	13. $\int \frac{dx}{sh^2x} = -cthx + C$;
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{lna} + C$;	14. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\begin{array}{l} arcsinx + C \\ -arccosx + C \end{array}\right.$
5. $\int e^x dx = e^x + C$;	15. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \left[\begin{array}{l} arcsin\frac{x}{a} + C \\ -arccos\frac{x}{a} + C \end{array}\right.$
6. $\int cosxdx = sinx + C$;	16. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \left[\begin{array}{l} arctgx + C \\ -arcctgx + C \end{array}\right.$
7. $\int sinxdx = -cosx + C$;	17. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C \\ -\frac{1}{a}arcctg\frac{x}{a} + C \end{array}\right.$
8. $\int \frac{dx}{cos^2x} = tgx + C$;	18. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}ln\left\lvert\frac{x+a}{x-a}\right\rvert + C$;
9. $\int \frac{dx}{sin^2x} = -ctgx + C$;	19. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$;
10. $\int chxdx = shx + C$;	20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + C$

1.2 Методы интегрирования

I. ***Непосредственное интегрирование*** – интегрирование с помощью свойств и таблицы неопределённых интегралов.

Пример. Вычислить неопределённые интегралы:

1) $\int \frac{3\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}-2}{x}dx = \int\left(\frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{2}{x}\right)dx = 3\int x^{-\frac{1}{2}}dx + \int x^{-\frac{2}{3}}dx - 2\int\frac{dx}{x} =$

$3\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} - 2ln\lvert x\rvert + C = 6\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} - 2ln\lvert x\rvert + C$;

2) $\int\ \sin^2 x\cdot\cos x\,dx = \int\ \sin^2 x\,d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} + C$;

II. ***Интегрирование по частям*** – с помощью формулы (2):

$$\int u dv = uv - \int v du \qquad (2)$$

где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – дифференцируемые функции.

Пример. Вычислить неопределённые интегралы

1) $\int (3x+1)2^x dx = \left| \begin{matrix} u = 3x+1 & du = 3dx \\ dv = 2^x dx & v = \frac{2^x}{ln2} \end{matrix} \right| = (3x+1)\frac{2^x}{ln2} - \frac{3}{ln2}\int 2^x dx =$

$= (3x+1)\frac{2^x}{ln2} - \frac{3\cdot 2^x}{ln^2 2} + C.$

2) $\int e^x \cdot \cos x\, dx = \left| \begin{matrix} u = e^x & du = e^x dx \\ dv = cosxdx & v = sinx \end{matrix} \right| = e^x sinx - \int e^x sinxdx =$

$= \left| \begin{matrix} u = e^x & du = e^x dx \\ dv = sinxdx & v = -cosx \end{matrix} \right| = e^x\, sinx - (-e^x\, cosx + \int e^x\, cosxdx) =$

$= e^x\,(sinx + cosx) - \int e^x\, cosxdx + C$; перенесём в левую часть:

$2\int e^x \cdot \cos x\, dx = e^x\,(sinx + cosx) + C,$ откуда

$\int e^x \cdot \cos x\, dx = \frac{e^x\,(sinx + cosx)}{2} + C.$

С помощью формулы (2) доказывается рекуррентная формула:

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} = \frac{x}{2na^2(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} \qquad (3)$$

Пример. Применяя формулу (3), вычислить интеграл

$\int \frac{dx}{(x^2+4)^3} = \frac{x}{16(x^2+4)^2} + \frac{3}{16}\int \frac{dx}{(x^2+4)^2} = \frac{x}{16(x^2+4)^2} +$

$\frac{3}{16}\left(\frac{x}{8(x^2+4)} + \frac{1}{8}\int \frac{dx}{x^2+4}\right) = \frac{x}{16(x^2+4)^2} + \frac{3x}{128(x^2+4)} + \frac{3}{256} arctg\frac{x}{2} + C.$

III. ***Замена переменной*** (***метод подстановки***) – с помощью формулы

$$\int f(x)dx = \int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt \qquad (4)$$

где $\varphi(t)$ - непрерывно дифференцируемая функция.

Пример. Вычислить неопределённый интеграл

1) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}} = \left| \begin{matrix} \sqrt{x} = t \\ x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{matrix} \right| = \int \frac{2t\,dt}{t^2+t} = 2\int \frac{t\,dt}{t(t+1)} = 2\int \frac{d(t+1)}{t+1} = 2ln|t+1| + C =$

$= 2ln\left|\sqrt{x}+1\right| + C.$

2) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{matrix} x = sint \\ \sqrt{1-x^2} = cost \\ dx = costdt \end{matrix} \right| = \int \frac{costdt}{sintcost} = \int \frac{dt}{sint} = \int \frac{sint}{sin^2 t} dt =$

$= -\int \frac{d(cost)}{1-cos^2 t} = -\frac{1}{2} ln\left|\frac{cost+1}{cost-1}\right| + C = \frac{1}{2} ln\left|\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-x^2}+1}\right| + C.$

1.3 Интегрирование рациональных функций

Рациональные функции (рациональной дроби): $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m}$

Интегрирование простейших дробей

I. $\int \frac{A}{x+a}dx = A\int \frac{d(x+a)}{x+a} = Aln|x+a| + C.$

II. $\int \frac{A}{(x+a)^n}dx = A\int (x+a)^{-n}d(x+a) = A\frac{(x+a)^{-n+1}}{-n+1} + C$

III. $\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q} = \left| \begin{array}{c} B, C, p, q - \text{постоянные и } q - \frac{p^2}{4} > 0 \\ x^2 + px + q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + a^2, \text{где } a^2 = q - \frac{p^2}{4} \\ t = x + \frac{p}{2} \\ dx = dt \end{array} \right| =$

$= \int \frac{B\left(t-\frac{p}{2}\right)+C}{t^2+a^2}dt = \int \frac{Bt+\left(-\frac{Bp}{2}+C\right)}{t^2+a^2}dt = \frac{B}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2} + \left(C - \frac{Bp}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2} =$

$\frac{B}{2}ln|t^2+a^2| + \frac{2C - Bp}{2a}arctg\frac{t}{a} + C = \frac{B}{2}ln(x^2+px+q) + \frac{2C - Bp}{2a}arctg\frac{2x+p}{2a} + C$

IV. $\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}dx = \left| \begin{array}{c} B, C, p, q, n - \text{постоянные и } q - \frac{p^2}{4} > 0 \\ x^2 + px + q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + a^2, \text{где } a^2 = q - \frac{p^2}{4} \\ t = x + \frac{p}{2} \\ dx = dt \end{array} \right| =$

$\int \frac{B\left(t-\frac{p}{2}\right)+C}{(t^2+a^2)^n}dx = \frac{B}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^n} + (C - \frac{Bp}{2})\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n},$

Далее к последнему интегралу применяется рекуррентная формула.

Пример. Вычислить

1) $\int \frac{3x+2}{x^2+2x+3}dx = 3\int \frac{x+\frac{2}{3}}{(x+1)^2+2}dx = 3\int \frac{(x+1)-\frac{1}{3}}{(x+1)^2+2}dx = 3\int \frac{(x+1)dx}{(x+1)^2+2} -$
$\int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+2} = \frac{3}{2}ln|(x+1)^2+2| - \frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$

2) $\int \frac{(x+2)\,dx}{(x^2+6x+10)^2} = \int \frac{(x+3)-1}{((x+3)^2+1)^2}dx = \int \frac{(x+3)dx}{((x+3)^2+1)^2} - \int \frac{dx}{((x+3)^2+1)^2} =$
$-\frac{1}{2((x+3)^2+1)} - \frac{x+3}{((x+3)^2+1)} - \frac{1}{2}arctg(x+3) + C.$

Интегрирование правильных дробей

$\int R(x)dx$, где $R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, $P_m(x), Q_n(x)$ – многочлены m – й и n – й степени соответственно, $m < n$. Пусть многочлен $Q_n(x)$ имеет действительные корни $x_1, \dots, x_k$ – действительные корни кратности $l_1, l_2, \dots, l_k$ соответственно, а квадратные трёхчлены $x^2 + p_jx + q_j, j = \overline{1, r}$ не имеют действительных корней. Тогда $Q_n(x)$ можно разложить на множители:
$Q_n(x) = (x-x_1)^{l_1}(x-x_2)^{l_2} \dots (x-x_k)^{l_k}(x^2+p_1x+q_1)^{s_1} \dots (x^2+p_rx+q_r)^{s_r}$, где l_i, s_j $(i = 1,2, \dots, k\,; j = 1,2, \dots, r)$ – натуральные числа. Дробь $R(x)$ представима в виде суммы простейших дробей:

Тогда $R(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{A_1}{(x-x_1)^{l_1}}+\frac{A_2}{(x-x_1)^{l_1-1}}+\cdots+\frac{A_{l_1}}{x-x_1}+\frac{B_1}{(x-x_2)^{l_2}}+\frac{B_2}{(x-x_2)^{l_2-1}}+$ $\cdots+\frac{B_{l_2}}{x-x_2}+\cdots+\frac{L_1}{(x-x_k)^{l_k}}+\frac{L_2}{(x-x_k)^{l_k-1}}+\cdots+\frac{L_{l_k}}{x-x_k}+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+p_1x+q_1)^{S_1}}+$ $\frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_1x+q_1)^{S_1-1}}+\cdots+\frac{M_{S1}x+N_{S1}}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{T_1x+U_1}{(x^2+p_rx+q_r)^{Sr}}+\frac{T_2x+U_2}{(x^2+p_rx+q_r)^{Sr-1}}+\cdots+$ $\frac{T_{Sr}x+U_{Sr}}{x^2+p_rx+q_r}$, где $A_1,\ldots,A_{l_1},B_1,\ldots,B_{l_2},L_1,\ldots,L_{l_k},M_1,\ldots,M_{S1},N_{1,\ldots},N_{S1},\ldots,U_1,\ldots,U_{Sr}$ – не определённые пока коэффициенты, находятся из системы, получающейся после приведения простейших дробей к общему знаменателю путём приравнивания коэффициентов многочлена в числителе полученной дроби коэффициентам $P_m(x)$ при одинаковых степенях x.

Интегрирование неправильных дробей

Если подынтегральная функция – неправильная дробь:
$\int R(x)dx$, где $R(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}, m\geq n,$ то сначала нужно выделить целую часть, разделив числитель на знаменатель: $R(x)=T(x)+\frac{S_k(x)}{Q_n(x)}$, где $k<n$. Тогда интеграл от $T(x)$ вычисляется легко (как от многочлена), а дробь $\frac{S_k(x)}{Q_n(x)}$ интегрируется как в предыдущем пункте.

Пример.

$$\int\frac{x^4+x-2}{x^3+x^2+x}dx=\int(x-1)dx+\int\frac{x^2+x-2}{x(x^2+x+1)}dx=$$

$$=\left|\begin{array}{c}\frac{x^2+x-2}{x(x^2+x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}\\ x^2+x-2=x^2(A+B)+x(A+C)+A\end{array}\right|=\begin{array}{c}x^2\\x\\x^0\end{array}\left|\begin{cases}A+B=1\\A+C=1\\A=-2\end{cases}\begin{cases}A=-2\\B=3\\C=3\end{cases}\right|=$$

$$=\int(x-1)dx-2\int\frac{dx}{x}+3\int\frac{(x+1)dx}{x^2+x+1}=\frac{(x-1)^2}{2}-2ln|x|+\frac{3}{2}\int\frac{(2x+1)+1}{x^2+x+1}dx=$$

$$=\frac{(x-1)^2}{2}-2ln|x|+\frac{3}{2}\int\frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1}+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{(x-1)^2}{2}-$$

$$-2ln|x|+\frac{3}{2}ln|x^2+x+1|+\sqrt{3}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$$

1.4. Интегрирование иррациональной функции

I. ***Интегралы вида*** $\int \boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{x};\sqrt[n]{\frac{\boldsymbol{ax+b}}{\boldsymbol{cx+d}}}\right)\boldsymbol{dx}$, где a,b,c,d– константы, $ad-bc\neq 0$; $n\in N$. Подстановкой $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+b}}=t$ интеграл от иррациональной функции сводится к интегралу от рациональной функции:
$\int R\left(x;\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx=\int R_1(t)dt$, где $R_1(t)$ – рациональная функция от t. После интегрирования, нужно заменить $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+b}}$. В общем случае:

$$\int R\left(x;\left(\frac{ax+d}{cx+d}\right)^{\frac{r_1}{s_1}},\left(\frac{ax+d}{cx+d}\right)^{\frac{r_2}{s_2}},\dots,\left(\frac{ax+d}{cx+d}\right)^{\frac{r_k}{s_k}}\right)dx=\left|\begin{array}{c} n=HOK\{s_1,s_2,\dots,s_k\} \\ \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+b}}=t \end{array}\right|$$

Пример. Вычислить неопределённый интеграл

$$\int\frac{\sqrt[4]{x-3}}{\sqrt{x-3}+\sqrt[3]{x-3}}dx=\left|\begin{array}{c} HOK\{2,3,4\}=12 \\ \sqrt[12]{x-3}=t \\ x=t^{12}+3 \\ dx=12t^{11}dt \end{array}\right|=\int\frac{t^3}{t^6+t^4}12t^{11}dt=$$

$$12\int\frac{t^{10}}{t^6+t^4}dt=12\int\left(t^8-t^6+t^4-t^2+1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=\frac{4}{3}t^9-\frac{12}{7}t^7+$$

$$+\frac{12}{5}t^5-4t^3+12\,t-arctgt+C=\frac{4}{3}\sqrt[4]{(x-3)^3}-\frac{12}{7}\sqrt[12]{(x-3)^7}+$$

$$+\frac{12}{5}\sqrt[12]{(x-3)^5}-4\sqrt[4]{x-3}+12\sqrt[12]{x-3}-arctg\sqrt[12]{x-3}+C.$$

II. *Интегралы вида* $\boldsymbol{\int R\left(x;\sqrt{a^2\pm x^2}\right)dx;\int R\left(x;\sqrt{x^2-a^2}\right)dx}$.

а) $\int R\left(x;\sqrt{a^2-x^2}\right)dx=\left|\begin{array}{c} x=asint\ (\text{или } x=acost) \\ dx=acostdt \\ \sqrt{a^2-x^2}=acost \end{array}\right|=\int R_1(sint,cost)dt$

б) $\int R\left(x;\sqrt{a^2+x^2}\right)dx=\left|\begin{array}{c} x=atgt \\ dx=\frac{dt}{cos^2t} \\ \sqrt{a^2+x^2}=\frac{a}{cost} \end{array}\right|=\int R_1(sint,cost)dt;$

в) $\int R\left(x;\sqrt{x^2-a^2}\right)dx=\left|\begin{array}{c} x=\frac{a}{cost} \\ dx=\frac{asint}{cos^2t} \\ \sqrt{x^2-a^2}=atgt \end{array}\right|=\int R_1(sint,cost)dt$

где $R_1(sint,cost)$ – рациональная функция от $sint$ и $cost$.

Пример. Вычислить интеграл:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}=\left|\begin{array}{c} x=2tgt \\ dx=\frac{2dt}{cos^2t} \\ \sqrt{(4+x^2)^3}=\frac{8}{cos^3t} \end{array}\right|=\frac{1}{4}\int costdt=\frac{sint}{4}+C=\frac{x}{4\sqrt{4+x^2}}+C.$$

1.5. Интегрирование трансцендентных функций

I. Интегралы вида $\boldsymbol{\int R(sinx,cosx)dx}$.

Такие интегралы сводятся к интегралам от рациональных функций с помощью *универсальной подстановки*: $\boldsymbol{tg\frac{x}{2}=t}$

Тогда $sinx=\frac{2t}{t^2+1}$, $cosx=\frac{1-t^2}{t^2+1}$, $dx=\frac{2dt}{t^2+1}$, и интеграл сводится к интегралу от рациональной функции $R_1(t)$:

$$\int R(sinx, cosx)dx = \int R_1(t)dt.$$

Пример. Вычислить интеграл:

$$\int \frac{dx}{2sinx+3cosx+4} = \left| \begin{matrix} tg\frac{x}{2} = t \\ x = 2arctgt \\ 2sinx + 3cosx + 4 = \frac{t^2+4t+7}{t^2+1} \\ dx = \frac{2dt}{t^2+1} \end{matrix} \right| = 2\int \frac{dt}{t^2+4t+7} = 2\int \frac{dt}{(t+2)^2+3} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} arctg\frac{t+2}{\sqrt{3}} + C = \frac{2}{\sqrt{3}} arctg\frac{tg\frac{x}{2}+2}{\sqrt{3}} + C.$$

Замечание. Иногда удобнее использовать другие подстановки:

1. Если $R(sinx, cosx) = -R(-sinx, cosx)$, то $\boldsymbol{cosx = t}$;
2. Если $R(sinx, cosx) = -R(sinx, -cosx)$, то $\boldsymbol{sinx = t}$;
3. Если $R(sinx, cosx) = -R(-sinx, -cosx)$, то $\boldsymbol{tgx = t}$.

Пример. Вычислить интеграл:

$$\int \frac{(1+cos)^2dx}{sin^3xcosx} = \left| \begin{matrix} cosx = t \\ x = 2arccost \\ sinx = \sqrt{1-t^2} \\ dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \end{matrix} \right| = -\int \frac{dt}{(1-t)^2t} = -\int \frac{(1-t)+t}{(1-t)^2t}dt =$$

$$\int \frac{dt}{t^2-t} - \int \frac{dt}{(1-t)^2} = \int \frac{dt}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} + \int \frac{d(1-t)}{(1-t)^2} = ln\left|\frac{t-1}{t}\right| - \frac{1}{t-1} + C$$

$$= ln\left|\frac{cosx-1}{cosx}\right| - \frac{1}{cosx-1} + C.$$

II. Интегралы вида $\int \boldsymbol{sin^m xcos^n xdx}$, где $m, n \in \mathbb{N}$.

1. Пусть хотя бы один из показателей степени m, n есть нечётное число, например, $n = 2k + 1$. Тогда

$$\int sin^m xcos^n xdx = \int sin^m xcos^{2k} xcosxdx = \int sin^m x(1 - sin^2x)^k d(sinx),$$

который вычисляется как интеграл от степенной функции аргумента $sinx$.

2. Если m, n оба чётны, то применяются формулы понижения степени

$$sin^2x = \frac{1-cosx}{2}, cos^2x = \frac{1+cosx}{2}.$$

Пусть $m = 2l, n = 2k$, $(k > l)$ тогда $2k = 2l + 2r$ и интеграл примет вид

$$\int sin^m xcos^n xdx = \int sin^{2l}x \cdot cos^{2k}xdx = \int (sin^{2l}x \cdot cos^{2l})cos^{2r}xdx =$$

$$\frac{1}{2^{2l}}\int sin^{2l}2x\left(\frac{1+cos2x}{2}\right)^r dx = \frac{1}{2^{2l+r}}\int (1 - cos^2 2x)^l(1 + cos2x)^r dx$$

Далее, применяя формулы бинома Ньютона, сводим интеграл к интегралу от степенной функции аргумента $sinx$ или $cosx$.

Пример. Вычислить интеграл

$$\int sin^2xcos^4xdx = \int (sin^2xcos^2x)cos^2xdx = \frac{1}{4}\int sin^2 2x\left(\frac{1+cos2x}{2}\right)dx =$$

$\frac{1}{8}\int\frac{1-cos4x}{2}dx+\frac{1}{16}\int sin^2 2xd(sin2x)=\frac{1}{16}\left(x-\frac{sin4x}{4}\right)+\frac{sin^3 2x}{48}+C$

III. Интегралы вида $\int \boldsymbol{sinmx\cdot cosnxdx}$, $\int \boldsymbol{cosmx\cdot cosnxdx}$, $\int \boldsymbol{sinmx\cdot sinnxdx}$. Применяются тригонометрические формулы:
$sin\alpha\cdot cos\beta=\frac{1}{2}\big(sin(\alpha-\beta)+sin(\alpha+\beta)\big)$, $cos\alpha\cdot cos\beta=\frac{1}{2}\big(cos(\alpha-\beta)+cos(\alpha+\beta)\big)$, $sin\alpha\cdot sin\beta=\frac{1}{2}\big(cos(\alpha-\beta)-cos(\alpha+\beta)\big)$.

Пример. Вычислить интеграл

$\int sin3xsin\,x=\frac{1}{2}\int(cos2x-cos4x)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{sin2x}{2}-\frac{sin4x}{4}\right)+C.$

IV. Интегралы вида $\int R(e^x)dx$.

Используется подстановки $e^x=t$. Тогда $x=lnt, dx=\frac{dt}{t}$.

$$\int R(e^x)dx=\int R_1(t)dt$$

Пример. Вычислить интеграл

$\int\frac{e^x-1}{e^x+1}dx=\begin{vmatrix}e^x=t\\ x=lnt\\ dx=\frac{dt}{t}\end{vmatrix}=\int\frac{t-1}{t(t+1)}dt=\int\frac{2t-(t+1)}{t(t+1)}dt=2\int\frac{dt}{t+1}-$

$-\int\frac{dt}{t}=2ln|t+1|-ln|t|+C=ln\left|\frac{(t+1)^2}{t}\right|=ln\frac{(e^x+1)^2}{e^x}+C.$

Интегралы, не выражающиеся через элементарные функции

Существуют так называемые «неберущиеся» интегралы, т.е. интегралы, которые не выражаются через элементарные функции с помощью конечного числа арифметических действий и композиций функций.

Примеры таких интегралов: $\int\frac{sinx}{x}dx, \int\frac{cosx}{x}dx, \int\frac{e^x}{x}dx, \int\frac{x}{lnx}dx, \int sinx^2dx$, $\int\sqrt{sinx}dx$. Первообразные этих функций не являются элементарными функциями.

Глава 2. Определенный интеграл

2.1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла

1. ***Задача о площади криволинейной трапеции***

Пусть на отрезке $[a,b]$ *задана неотрицательная непрерывная функция* $f(x)$ $(f(x)\geq 0\ \forall x\in[a,b])$. *Рассмотрим фигуру* G, *ограниченную отрезком* $[a,b]$, *прямыми* $x=a$, $x=b$ *и графиком функции* $y=f(x)$ *и называемую криволинейной трапецией.* $G=\{(x,y): a\leq x\leq b, 0\leq y\leq f(x)\}$. *Требуется найти площадь фигуры* G.

Разобьем отрезок $[a,b]$ точками: $x_1<x_2<\dots<x_{n-1}$ на n произвольных отрезков $[x_{k-1},x_k]$. Назовем их частичными отрезками. Обозначим $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$, $(x_0=a, x_n=b)$ длину частичного отрезка. Возьмем на каждом отрезке $[x_{k-1},x_k]$ произвольную точку ξ_k, $k=1,2,\dots,n$. Проведем через точки ξ_k прямые, параллельные оси *Oy*. Получим ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников с основаниями Δx_k и высотами $f(\xi_k)$. Площадь ступенчатой фигуры равна сумме σ площадей прямоугольников,

составляющих ее: $\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$. Будем настолько увеличивать число точек разбиения, чтобы длина наибольшего отрезка $\lambda = \max\limits_{1\le k\le n}\{\Delta x_k\}$ стремилась к нулю. Тогда площадь криволинейной трапеции G равна:

$$S_{\text{кр.тр.}} = \lim_{\lambda\to 0}\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

2. ***Задача о пути, пройденном материальной точкой***

Пусть точка М движется по прямой с известной скоростью $v = v(t)$, $t \in [t_0, T]$. *Найдем путь* $x(t)$, *пройденный за указанный промежуток времени.*

Разделим отрезок времени $[t_0, T]$ на n произвольных частей точками: $t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = T$. Обозначим $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ – промежуток времени, $k = 1, 2, \ldots, n$. На каждом отрезке $[t_{k-1};\ t_k]$ выберем произвольные точки τ_k, $k = 1, 2, \ldots, n$. Искомый путь $S \approx \sigma = \sum_{k=1}^{n} v(\tau_k)\Delta t_k$. Обозначим $\lambda = \max\limits_{1\le k\le n}\{\Delta t_k\}$, тогда

$$S = \lim_{\lambda\to 0}\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} v(\tau_k)\Delta t_k$$

Обе задачи приведи к вычислению предела суммы $\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta x_k$. Возникла необходимость в новом понятии – определенного интеграла

2.2 Понятие определенного интеграла

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция $f(x)$ и пусть $\{x_k,\}, (k = \overline{0, n})$ - совокупность точек, образующих разбиение отрезка $[a, b]$:

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Пусть $\lambda = \max\limits_{1\le k\le n}\{\Delta t_k\}$, где $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ (Δx_k – длина частичного отрезка). Назовем λ параметром разбиения. Возьмем на каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ произвольную точку ξ_k, $(k = \overline{1, n}\,)$ и составим сумму $\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$, называемую интегральной суммой функции $f(x)$: Сумма σ зависит от разбиения отрезка $[a, b]$ и от выбора точек ξ_k.

Определение. Число I называется *определенным интегралом* функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, если существует конечный предел σ при $\lambda \to 0$, то есть для любого ε существует такое число δ, что для любого разбиения с параметром $\lambda < \delta$ выполняется неравенство $|\sigma - I| < \varepsilon$.

$$I = \lim_{\lambda\to 0}\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

Обозначается $I = \int_a^b f(x)dx$, $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, x – *переменной интегрирования*, a и b – *нижним и верхним пределами* интегрирования. Заметим, что I не зависит ни от разбиения отрезка $[a, b]$, ни от выбора точек ξ_k. Если существует число I, определяемое условиями определения, то функцию $f(x)$ называют *интегрируемой* (по Риману) на отрезке $[a, b]$. Отметим геометрический и механический смысл определённого интеграла. Площадь криволинейной трапеции, $G = \{(x, y): a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ равна определенному интегралу от этой функции по отрезку $[a, b]$.

$$S_{\text{кр.тр.}} = \int_a^b f(x)dx$$

Путь, пройденный за промежуток времени $[a, b]$ точкой, движущейся прямолинейно, равен определенному интегралу от скорости по $[a, b]$:

$$x(t) = \int_a^b v(t)dt$$

Теорема (*необходимое условие интегрируемости функции*).
Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке.

Замечание. Ограниченность функции не является достаточным условием ее интегрируемости. *Например*, функция Дирихле $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$ ограничена на $[0, 1]$ (в самом деле, $|D(x)| \leq 1, , \quad \forall x \in [0, 1]$), но не интегрируема на отрезке $[0, 1]$, поскольку не существует конечного предела интегральной суммы $\sigma = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$ функции $D(x)$ на отрезке $[0, 1]$.

Классы интегрируемы функций

Теорема 1 *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на нем.*

Теорема 2. *Если функция $f(x)$ определена и монотонна на отрезке, то она интегрируема на этом отрезке.*

2.3 Свойства определенного интеграла

1. Положим по определению:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \quad \text{и} \quad \int_a^a f(x)dx = 0$$

2. *Если функции $f(x)$* и *$g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$, то для любых чисел α* и *β функция $\alpha f(x) + \beta g(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и*

$$\int_a^b \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$$

3. *Если функция интегрируема на отрезке $[d, e]$, то для любых $a, b, c \in [d, e]$:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b g(x)$$

4. *Если $f(x) \geq 0$ и интегрируема на отрезке $[a, b]$, то*

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

5. *Если функции* $f(x)$ и $g(x)$ *интегрируемы на отрезке* $[a,b]$ *и для любых* $x \in [a,b]$ *выполняется* $f(x) \geq g(x)$, *то*

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

6. *Если функция* $f(x)$ *интегрируема на отрезке* $[a,b]$, *то функция* $|f(x)|$ *также интегрируема на этом отрезке и справедливо неравенство*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

7. *Если* m и M *наименьшее и наибольшее значения* $f(x)$ *на* $[a,b]$, *то*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

8.(*теорема о среднем*). *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке,* $[a,b]$ *то на этом отрезке найдется такая точка* ξ, *что справедливо равенство*

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

2.4 Интеграл с переменным верхним пределом

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то существует интеграл для любого $x \in [a,b]$, называемый *интегралом с переменным верхним пределом:*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

Теорема. *Производная интеграла с переменным верхним пределом существует и равна значению подынтегральной функции в верхнем пределе*:

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x) \qquad (1)$$

2.5 Формула Ньютона – Лейбница

Теорема. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$, *а* $F(x)$ *– какая-либо первообразная функции* $f(x)$ *на отрезке* $[a,b]$, *то имеет место*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad (2)$$

Формула (2) называется *формулой Ньютона – Лейбница*.

Пример. $\int_0^{0,5} \frac{dx}{1+4x^2} = \frac{1}{2} arctg(2x)\Big|_0^{0,5} = \frac{1}{2}(arctg1 - arctg0) = \frac{\pi}{8}$.

2.6 Методы интегрирования в определенном интеграле

1. *Замена переменной в определенном интеграле*

Теорема 1. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, а функция $x=\varphi(t)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[\alpha,\beta]$, причем $\varphi(t)\in[a,b]$ при всех $t\in[\alpha,\beta]$, $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$. Тогда справедлива формула:*

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (1)$$

Формула (1) называется *формулой замены переменной.*

Пример. Вычислить определенный интеграл

$$\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1}\frac{dx}{1-\sqrt{1-x^2}}=\left|\begin{matrix} x=sint\\ dx=costdt\\ \sqrt{1-x^2}=cost\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\le x\le 1\\ \frac{\pi}{3}\le t\le\frac{\pi}{2}\end{matrix}\right|=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{costdt}{1-cost}=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-2sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{2sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}dt=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\left(\frac{t}{2}\right)}{sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}-$$

$$-\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{2}}dt=\left(-ctg\frac{t}{2}-t\right)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=-1-\frac{\pi}{2}+\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}-1-\frac{\pi}{6}.$$

2. *Интегрирование по частям в определенном интеграле*

Теорема 2. *Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют на отрезке $[a,b]$ непрерывные производные, то справедлива формула интегрирования по частям:*

$$\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu \qquad (4)$$

Пример. Вычислить определенный интеграл

$$\int_1^e xlnxdx=\left|\begin{matrix} u=lnx & du=\frac{dx}{x}\\ dv=xdx & v=\frac{x^2}{2}\end{matrix}\right|=\frac{x^2}{2}lnx\Big|_1^e-\int_1^e\frac{x^2dx}{2x}==\frac{e^2}{2}-\frac{x^2}{4}\Big|_1^e=$$

$$=\frac{e^2-1}{4}.$$

2.6 Несобственные интегралы

Несобственные интегралы первого рода (*на бесконечном промежутке*)

Пусть функция $f(x)$ определена при $x\ge a$, где a - заданное число, и интегрируема на отрезке $[a,\xi]$ при любом $\xi\ge a$.

Определение. Будем называть несобственным интегралом первого рода от функции $f(x)$ на промежутке $[a,+\infty)$ предел $\lim\limits_{\xi\to+\infty}\int_a^\xi f(x)dx$.

Если предел конечный, то интеграл называется *сходящимся* на промежутке $[a,+\infty)$, в противном случае – *расходящимся*.

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx=\lim_{\xi\to+\infty}\int_a^\xi f(x)dx.$$

Аналогично определяется несобственный интеграл на промежутке $(-\infty, a]$:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{\xi\to-\infty} \int_{\xi}^{a} f(x)dx.$$

Определим несобственный интеграл на промежутке $(-\infty, +\infty)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{\xi\to-\infty\\ \eta\to+\infty}} \int_{\xi}^{\eta} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx\,.$$

Пример. 1) Показать, что сходится несобственный интеграл и вычислить его.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\xi\to-\infty} \int_{\xi}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{\xi\to+\infty} \int_{0}^{\xi} \frac{dx}{1+x^2}dx = \lim_{\xi\to-\infty} arctgx\Big|_{\xi}^{0} +$$

$$\lim_{\xi\to+\infty} arctgx\Big|_{0}^{\xi} = \left(arctg0 + \frac{\pi}{2}\right) + \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \pi,$$

Следовательно, несобственный интеграл сходится. И его значение равно: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$.

2) Исследовать сходимость интеграла: $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x}$.

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{\xi\to+\infty} \int_{1}^{\xi} \frac{dx}{x} = \lim_{\xi\to+\infty} lnx\Big|_{1}^{\xi} = +\infty,$$

следовательно, несобственный интеграл расходится.

Замечание. Для краткости записи можно использовать обобщенную формулу Ньютона – Лейбница: $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_{a}^{+\infty} = F(+\infty) - F(a)$, где $F(+\infty) = \lim_{\xi\to+\infty} F(\xi)$.

3) Исследовать на сходимость интеграл $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$.

При $\alpha \neq 1$ $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_{1}^{+\infty} = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1}, & \text{если } \alpha > 1 \\ +\infty, & \text{если } \alpha < 1 \end{cases}$

При $\alpha = 1$ интеграл расходится (см. пример 2).

Таким образом, интеграл сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

Несобственный интеграл второго рода (от неограниченной функции)

Пусть функция $f(x)$ определена на конечном промежутке $[a, b)$ и интегрируема на отрезке $[a, \xi]$ при любом $\xi \in [a, b)$. Пусть $x = b$ - особая точка $f(x)$ (функция не ограничена вблизи нее).

Определение. Будем называть несобственным интегралом второго рода от функции $f(x)$ на промежутке $[a, b)$ предел $\lim_{\xi\to b-0} \int_{a}^{\xi} f(x)dx$.

Если предел конечный, то интеграл называется *сходящимся* на промежутке $[a, b)$, в противном случае – *расходящимся.*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\xi\to b-0}\int_a^{\xi} f(x)dx.$$

Аналогично определяется несобственный интеграл на промежутке $(a,b]$ ($x = a$ - особая точка $f(x)$ (функция не ограничена вблизи нее)).

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\xi\to a+0}\int_{\xi}^{b} f(x)dx.$$

Если и $x = a,$ и $x = b$ – особые точки $f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\xi\to a+0\\ \eta\to b-0}}\int_{\xi}^{\eta} f(x)dx.$$

Если особая точка внутри промежутка $[a,b]$ (точка $x = \text{c}$ - особая точка $f(x)$, $a \le \text{c} \le b$), то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{\text{c}} f(x)dx + \int_{\text{c}}^b f(x)dx = \lim_{\xi\to \text{c}-0}\int_a^{\xi} f(x)dx + \lim_{\xi\to \text{c}+0}\int_{\xi}^{b} f(x)dx.$$

Пример. 1) Вычислить интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\xi\to 1-0}\int_0^{\xi}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\xi\to 1-0} arcsinx|_0^{\xi} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

2) Вычислить интеграл или установить его расходимость:

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\xi\to 1-0}\int_0^{\xi}\frac{dx}{(x-1)^2} + \lim_{\xi\to 1+0}\int_{\xi}^{2}\frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\xi\to 1-0}\frac{1}{x-1}|_0^{\xi} -$$

$$-\lim_{\xi\to 1+0}\frac{1}{x-1}|_{\xi}^{2} = +\infty.$$

3) Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p} = \lim_{\xi\to b-0}\int_a^{\xi}\frac{dx}{(b-x)^p} = \lim_{\xi\to b-0}\frac{(b-x)^{1-p}}{1-p}|_a^{\xi} = \begin{cases}\dfrac{(b-x)^{1-p}}{1-p}, p<1\\ \quad = \infty, p>1\end{cases}$$

При $p = 1$ $\int_a^b \frac{dx}{b-x} = -\lim_{\xi\to b-0} ln|b-x||_a^{\xi} = +\infty.$

Таким образом, данный интеграл $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$ сходится при $p < 1$ и расходится при. $p \ge 1$.

Признаки сходимости несобственных интегралов от неотрицательных функций

1. *<u>Несобственные интегралы 1 рода</u>*.

Пусть *функция* $f(x) \ge 0$ на луче $[a,+\infty)$, тогда $\int_a^x f(x)dx$ возрастает на луче $[a,+\infty)$, поэтому этот интеграл имеет предел, если он ограничен, т.е. нашлось бы такое число М, что $\int_a^x f(x)dx \le M$ для всех $x \in [a, +\infty)$. Часто бывает сложно найти такое число, проще применить достаточный признак.

Теорема. Если на луче $[a, +\infty)$ имеет место неравенство $0 \le f(x) \le g(x)$ и интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$, то сходится и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$. Из расходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ вытекает расходимость интеграла $\int_a^{+\infty} g(x)dx$.

<u>Пример</u>. Исследовать на сходимость интеграл:

1) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$. На луче $[1, +\infty)$ выполняется $\frac{1}{1+x^3} \le \frac{1}{x^3}$. А интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2}\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{2}$, сходится. Поэтому сходится и данный интеграл.

2) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$. Так как $\frac{1}{1+\sqrt{x}} > \frac{1}{3\sqrt{x}}$ при $x \ge 1$, а интеграл $\frac{1}{3}\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}}{3}\Big|_1^{+\infty} = +\infty$, расходится. Значит, и данный интеграл расходится.

2. *<u>Несобственные интегралы 2 рода</u>*.

Пусть функция $f(x) \ge 0$ на $[a, b)$ и $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = +\infty$. Тогда

$\int_a^b f(x)dx$ сходится, если при $p < 1$ существует $\lim\limits_{x \to b-0} (b-x)^p f(x) = k$;

$\int_a^b f(x)dx$ расходится, если при $p \ge 1$ $\lim\limits_{x \to b-0} (b-x)^p f(x)$, конечный или бесконечный.

Пример. Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$.

Рассмотрим $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^3}} = \frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+x+x^2)}}$;

$\lim\limits_{x \to b-0} (1-x)^{1/2} f(x) = \lim\limits_{x \to b-0} (1-x)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{(1+x+x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Так как предел конечен и $p = 1/2 < 1$, то данный интеграл сходится.

ГЛАВА 3. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА

3.1 Вычисление площади фигуры

Квадрируемые фигуры

Плоскую фигуру назовем *элементарной*, если ее можно представить в виде объединения конечного числа многоугольников без общих внутренних точек. Пусть задано множество точек на плоскости – плоская фигура Ф, ограниченная замкнутой линией (контур). Рассмотрим множество $\underline{Ф}$ элементарных фигур, содержащихся в фигуре Ф, и множество $\overline{Ф}$, содержащих в себе фигуру Ф. Заметим, что $S(\underline{Ф}) \le S(\overline{Ф})$. Таким образом, множество $\{S(\underline{Ф})\}$ ограничено сверху, а $\{S(\overline{Ф})\}$ ограничено снизу. Обозначим $S_*(Ф) = sup\{S(\underline{Ф})\}$, $S^*(Ф) = inf\{S(\overline{Ф})\}$. Эти числа назовем *внутренней* и *внешней мерой* фигуры Ф. Очевидно, $S_*(Ф) \le S^*(Ф)$.

Определение. Фигура Ф называется *квадрируемой* (*измеримой по Жордану*), если $S_*(Ф) = S^*(Ф) = S(Ф)$, а $S(Ф)$ называется *площадью* (*мерой Жордана*).

Теорема. *Для того чтобы фигура* Φ *была квадрируемой, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *существовали две элементарные фигуры* $\underline{\Phi}$ и $\overline{\Phi}$ *такие, что* $\underline{\Phi} \subset \Phi \subset \overline{\Phi}$ *и* $S(\overline{\Phi}) - S(\underline{\Phi}) < \varepsilon$.

Свойства квадрируемых фигур

1. (аддитивность площади). *Если плоские фигуры* Φ_1 и Φ_2 *квадрируемы и не имеют общих внутренних точек, то фигура* $\Phi_1 \cup \Phi_2$ *тоже квадрируема и* $S(\Phi_1 \cup \Phi_2) = S(\Phi_1) + S(\Phi_2)$.

2. (монотонность площади). *Если плоские фигуры* Φ_1 и Φ_2 *квадрируемы и* $\Phi_1 \subset \Phi_2$, *то* $S(\Phi_1) \leq S(\Phi_2)$.

а) Площадь в декартовых координатах

Теорема. Криволинейная трапеция $\Phi = \{(x, y): a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ – квадрируемая фигура и ее площадь выражается формулой:

$$S = \int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $y = \sqrt{4 - x^2}$, прямой $x = 1$ и осями координат $(x \geq 0, y \geq 0)$

$$S = \int_0^1 \sqrt{4 - x^2}dx = \left| \begin{matrix} x = 2sint \\ \sqrt{4 - x^2} = 2cost \\ dx = 2costdt \end{matrix} \right| = 4\int_0^{\pi/6} cos^2tdt = 2\int_0^{\pi/6} (1 + cos2t)dt$$

$$= 2\left(t + \frac{1}{2}sin2t\Big|_0^{\pi/6}\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

б) *фигура, ограниченной кривой, заданной параметрическими уравнениями*

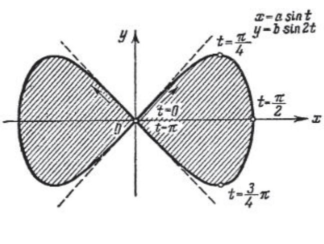
Пусть фигура ограничена кривой, заданной параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \text{ где } \alpha \leq t \leq \beta \text{ и } \varphi(\alpha) = a, \psi(\beta) = b. \tag{2}$$

Если уравнения (2) определяют функцию $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$, то площадь фигуры: $S = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b ydx$. Выполнив замену переменной: $x = \varphi(t), dx = \varphi'(t)dt$, получим

$$S = \int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt \tag{3}$$

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $x = acost, y = bsin2t$.



Решение. Кривая симметрична относительно осей координат. Переменные x и y одновременно неотрицательны только при изменении t на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, поэтому при $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ получается часть кривой в первой четверти.

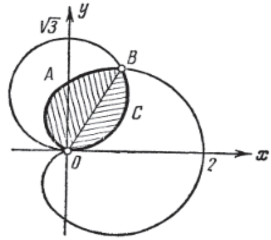
$$S = 4\int_0^{\pi/2} y(t)\cdot x'(t)dt = 2\int_0^{\pi/2} bsin2t\cdot acostdt = 4ab\int_0^{\pi/2} cos^2t\cdot sintdt =$$

$$-4ab\int_0^{\pi/2} cos^2td(cost) = -4ab\left(\frac{cos^3t}{3}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{8}{3}ab.$$

в) в полярных координатах

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi \qquad (3)$$

Пример. Найти площадь фигуры, вырезаемой окружностью $\rho = \sqrt{3}sin\varphi$ из кардиоиды $\rho = 1 + cos\varphi$.



Решение. Найдем точки пересечения кривых. $\begin{cases} \rho = \sqrt{3}sin\varphi \\ \rho = 1 + cos\varphi \end{cases}$ $0 \le \varphi \le \pi$, откуда $\varphi = \pi/3$ и $\varphi = \pi$.

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} 3sin^2\varphi d\varphi + \frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{\pi}(1 + cos\varphi)^2 d\varphi =$$

$$\frac{3}{2}\int_0^{\pi/3} \frac{1 - cos2\varphi}{2}d\varphi + +\frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{\pi}(1 + 2cos\varphi + cos^2\varphi)d\varphi = \frac{3}{4}\left(\varphi - \frac{sin2\varphi}{2}\bigg|_0^{\pi/3}\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\varphi + 2sin\varphi + \frac{\varphi}{2} + \frac{sin2\varphi}{4}\bigg|_{\pi/3}^{\pi}\right) = \frac{3}{4}\left(\pi/3 - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\pi - 9\sqrt{3}/8\right).$$

3.2 Вычисление длины дуги кривой

а) Понятие спрямляемой кривой и длины кривой.

Пусть кривая γ задана параметрическими уравнениями:

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), \text{ где } \alpha \le t \le \beta, \qquad (1)$$

и функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$. Разобьем отрезок на части точками t_k, $(k = \overline{1,n})$, такими, что $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = \beta$. Каждому числу t_k соответствует точка $M_k\big(\varphi(t_k), \psi(t_k)\big)$ кривой γ. Соединяя соседние точки отрезками $M_{k-1}M_k$, $(k = \overline{1,n})$, получим ломаную Г, вписанную в кривую γ. Обозначим ее длину $l(\Gamma)$.

Определение. Кривая γ (1) называется *спрямляемой* (имеющей длину), если множество $\{l(\Gamma)\}$ длин всевозможных ломаных, вписанных в кривую γ, ограничено сверху. Точная верхняя грань l этого множества называется *длиной кривой*.

$$l = sup\{l(\Gamma)\}.$$

Длина l обладает: 1) свойством монотонности: если спрямляемые кривые γ_1 и γ таковы, что $\gamma_1 \subset \gamma$, то их длины связаны неравенством $l_1 \le l$.

2) свойством аддитивности: если кривые γ_1 и γ_2 спрямляемые и $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, то $l = l_1 + l_2$.

Теорема. *Если кривая задана уравнениями* (1), *где* $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ *имеют непрерывные производные на отрезке* $[\alpha, \beta]$, *то она спрямляема и ее длина вычисляется по формуле*

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2} dt \qquad (2)$$

Пример. Найти длину астроиды $x = acos^3t, y = asin^3t, 0 \leq t \leq 2\pi$.

Решение. Кривая симметрична относительно координатных осей, поэтому найдём длину четверти кривой при $0 \leq t \leq \pi/2$. Вычислим $\varphi'(t) = (acos^3t)' = -3acos^2tsint$, $\psi'(t) = (asin^3t)' = 3asin^2tcost$, преобразуем $\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2} = 3acostsint\sqrt{cos^2t + sin^2t} = 3acostsint$. Тогда длина астроиды равна:

$$l = 4 \cdot 3a \int_0^{\frac{\pi}{2}} costsintdt = 6a \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin2tdt = -3acos2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a.$$

б) Длина кривой в декартовых координатах

Пусть кривая γ задана уравнением $y = f(x), a \leq x \leq b$, где $f(x)$ непрерывно дифференцируемая на $[a, b]$ функция. Кривую γ зададим параметрическими уравнениями: $x = t, y = f(t)$, где $a \leq t \leq b$. Тогда $\varphi'(t) = 1, \psi'(t) = f'(t)$. И формула длины кривой (2) примет вид:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} dx \qquad (3)$$

в) Длина кривой в полярных координатах

Пусть кривая γ задана уравнением $\rho = \rho(\varphi), \alpha \leq \varphi \leq \beta$, причем функция $\rho(\varphi)$ имеет на отрезке $[\alpha, \beta]$ непрерывную производную. Используя формулы, выражающие декартовы координаты через полярные: $x = \rho cos\varphi,\ y = \rho sin\varphi$, придем к первому случаю $(t = \varphi)$.

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\rho'(\varphi)\right)^2 + \left(\rho(\varphi)\right)^2} d\varphi \qquad (4)$$

3.3 Вычисление объема тела

а) Кубируемые тела, объём тела

Произвольное ограниченное множество точек пространства будем называть *телом*. Назовем тело *элементарным*, если его можно представить как объединение конечного числа непересекающихся параллелепипедов вида $\Omega = \{(x, y, z): a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq f\}$, а также получаемых из Ω удалением границы или ее части. Объёмом параллелепипеда назовем число

$(b-a)(d-c)(f-e)$, а объёмом элементарного тела – сумму объемов составляющих его параллелепипедов.

Определение. Назовем тело T *кубируемым*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся элементарные тела P и Q такие, что $P \subset T \subset Q, 0 \leq V(Q) - V(P) < \varepsilon$.

Можно доказать, что существует единственное число $V(T) = V$, такое, что $V(P) \leq V(T) \leq V(Q)$. Число $V = sup\{V(P)\} = inf\{V(Q)\}$ называется *объёмом тела* T.

б) Вычисление объёма тела по площадям параллельных сечений

Пусть требуется найти объём тела *T*, для которого известна площадь любого сечения плоскостью, перпендикулярной оси *Ox*. Предположим, что площадь сечения $Q(x)$ непрерывная функция. Проведем плоскости $x = a = x_0$, $x = x_1, x = x_2, \dots, x = x_n = b$. В каждом промежутке $[x_{k-1}; x_k]$ выберем произвольную точку ξ_k и для $k = \overline{1, n}$ построим элементарные цилиндры с площадью основания $Q(\xi_k)$ и высотой Δx_k равен $Q(\xi_k)\Delta x_k$. Объем V_n всех n цилиндров равен: $V_n = \sum_{k=1}^{n} Q(\xi_k)\Delta x_k$.

Обозначив через $\lambda = \max\limits_{1 \leq k \leq n}\{\Delta x_k\}$ и перейдя к пределу при $\lambda \to 0$, получим $V = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} Q(\xi_k)\Delta x_k$, где сумма $\sum_{k=1}^{n} Q(\xi_k)\Delta x_k$ является интегральной суммой функции $Q(x)$ на отрезке $[a;\ b]$. Но $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} Q(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b Q(x)dx$. Поэтому объём тела определяется по формуле:

$$V = \int_a^b Q(x)dx \qquad (5)$$

Пример. Вычислить объём пирамиды с площадью основания *S* и высотой *H*.

Решение. Так как $\frac{Q(x)}{S} = \frac{x^2}{H^2}$, то $Q(x) = \frac{S}{H^2}x^2$. Следовательно,

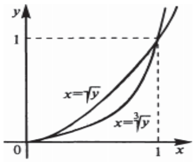
$$V = \int_0^H \frac{S}{H^2}x^2 dx = \frac{S}{H^2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^H = \frac{1}{3}SH.$$

в) Вычисление объема тела вращения

Рассмотрим тело, образованное вращением криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью *Ox*, прямыми $x = a, x = b$ вокруг оси *Ox*. Сечение тела плоскостью перпендикулярной оси *Ox*, есть круг, площадь которого $Q(x) = \pi y^2 = \pi f^2(x)$. Подставим $Q(x)$ в формулу (5), получим:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx \qquad (6)$$

Пример. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной кривыми $y = x^2$ и $y = x^3$ вокруг оси *Oy*



Решение. Искомый объём равен разности двух объёмов тел, образованных вращением вокруг оси ординат фигуры, ограниченной линиями $x = \sqrt[3]{y}, x = 0, y = 1$, и фигуры, ограниченной линиями $x = \sqrt{y}, x = 0, y = 1$.

$$V = \pi \int_0^1 \left(\sqrt[3]{y}\right)^2 dy - \pi \int_0^1 \left(\sqrt{y}\right)^2 dy = \pi \left(\frac{3y^{\frac{5}{3}}}{5} - \frac{y^2}{2} \Bigg|_0^1 \right) = \frac{3\pi}{5} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{10}.$$

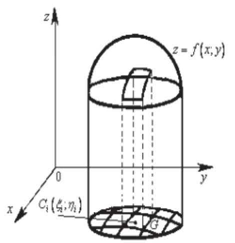
ГЛАВА 4. КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

4.1 Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла

Задача об объёме цилиндрического тела

Рассмотрим тело, ограниченное, сверху поверхностью $z = f(x, y)$, где $f(x, y) \geq 0$, снизу – плоской фигурой $D \subset Oxy$, с боков – цилиндрической поверхностью, образующая которой параллельна оси Oz.

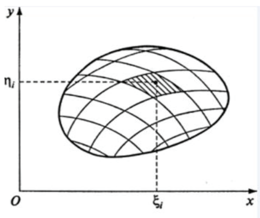
Разобьём D сетью кривых на ячейки с площадями $\Delta\sigma_k (k = 1,2, \dots, n)$. B каждой ячейке возьмём точку $C_k(\xi_k, \eta_k)$ и найдём $f(\xi_k, \eta_k)$. Рассмотрим столбики с высотами $f(\xi_k, \eta_k)$, которые приближённо *будем* считать цилиндрами. Объёмы таких цилиндров равны $V_k = h \cdot S_{\text{осн}} = f(\xi_k, \eta_k)\Delta\sigma_k$. Объём всего тела равен $V \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\, \Delta\sigma_k$. Обозначим $\lambda = \max\limits_{1 \leq k \leq n} \{d_k\}$ где d_k - диаметры ячеек $(k = 1,2, \dots, n)$. Тогда объём цилиндрического тела:



$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\, \Delta\sigma_k.$$

Задача о массе тонкой пластинки

Найти массу тонкой пластики, которую будем рассматривать как плоскую фигуру в плоскости Oxy с плотностью $\rho(x, y)$.



Разобьём D сетью кривых на ячейки с площадями $\Delta\sigma_k$, $(k = 1,2, \dots, n)$. Возьмём в каждой ячейке произвольную точку (ξ_k, η_k). Плотность в ячейках будем считать постоянной, равной $\rho(\xi_k, \eta_k)$. Тогда масса ячеек равна $m_k = \rho(\xi_k, \eta_k)\, \Delta\sigma_k$. Масса всей пластины:

$$m \approx \sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k, \eta_k)\, \Delta\sigma_k$$

Обозначим $\lambda = \max\limits_{1 \leq k \leq n} \{d_k\}$, где d_k - диаметры ячеек $(k = 1,2, \dots, n)$. Тогда масса пластины равна

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k, \eta_k)\, \Delta\sigma_k.$$

4.2 Определение двойного интеграла

Пусть в замкнутой квадрируемой области $D \subset Oxy$ задана функция $z = f(x, y)$. Разобьём D сетью кривых на ячейки с площадями $\Delta\sigma_k$, $(k = 1,2, \dots, n)$ Выберем в каждой ячейке произвольную точку (ξ_k, η_k) и найдём $f(\xi_k, \eta_k)$. Составим сумму $\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\, \Delta\sigma_k$, которая называется *интегральной суммой* функции $f(x, y)$ *в* области D.

Определение. Конечный предел суммы σ при $\lambda \to 0$, где $\lambda = \max\limits_{1 \le k \le n} \{d_k\}$, d_k - диаметры ячеек, называется *двойным интегралом* функции $f(x,y)$ по области D

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \lim_{\lambda \to 0} \left(\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\, \Delta\sigma_k \right)$$

Геометрический смысл: двойной интеграл от неотрицательной функции $f(x,y)$, равен объему цилиндрического тела с основанием D, ограниченного поверхностью $z = f(x,y)$: $\iint_D f(x,y)dxdy = V$.

Если, в частности, $f(x,y) = 1$, то $\iint_D dxdy = S$ - площадь плоской фигуры D.

Физический смысл двойного интеграла: двойной интеграл по области D от неотрицательной функции $f(x,y)$ равен массе пластины D с плотностью, равной $f(x,y)$: $\iint_D f(x,y)dxdy = m$.

Свойства двойного интеграла

1. $\iint_D \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)dxdy = \alpha \iint_D f(x,y)dxdy + \beta \iint_D f(x,y)dxdy$
2. Если $D = D_1 + D_2$ *и* $f(x,y)$ интегрируема в области D, то
3. $\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy$
4. Если $f(x,y) \ge 0\ \forall x \in D$, то $\iint_D f(x,y)dxdy \ge 0$;
5. Если $f(x,y)$ интегрируема в D *и* $m \le f(x,y) \le M$, то $m \cdot S \le \iint_D f(x,y)dxdy \le M \cdot S$, где S – площадь D
6. (Теорема о среднем). Если функция $f(x,y)$ непрерывна в области D, то найдётся хотя бы одна внутренняя точка (a,b) такая, что $\iint_D f(x,y)dxdy = f(a,\ b) \cdot S$, где S – площадь области D.
7. $\left|\iint_D f(x,y)dxdy\right| \le \iint_D |f(x,y)|dxdy$.

4.3 Вычисление двойного интеграла

а) случай прямоугольной области интегрирования

Теорема 1. *Пусть функция $f(x,y)$ интегрируема в области D: прямоугольнике со сторонами $x = a, x = b, y = c, y = d$, и при $\forall x \in [a,b]$ существует интеграл $\varphi(x) = \int_c^d f(x,y)dy$. Тогда существует повторный интеграл $\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx$ и*

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy \right) dx \tag{3}$$

Замечание. Аналогично, если при $\forall x \in [\mathrm{c}, d]$ существует интеграл $\psi(y) = \int_a^b f(x,y)dx$, то аналогично можно доказать, что существует повторный интеграл $\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy$ и $\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy$ (4)

2) если существуют интегралы $\varphi(x) = \int_c^d f(x,y)dy$, $\psi(y) = \int_a^b f(x,y)dx$, то

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dy \tag{5}$$

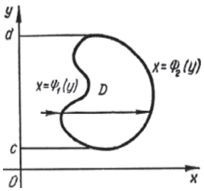
Пример. Вычислить $\iint_D x^2ydxdy$, если D: прямоугольник со сторонами $x = 1,\ x = 2,\ y = 1,\ y = 3$.

$$\iint\limits_D x^2ydxdy = \int\limits_1^2 x^2dx \int\limits_1^3 ydy = \int\limits_1^2 x^2\left(\int\limits_1^3 ydy\right)dx = \int\limits_1^2 x^2\left(\frac{y^2}{2}|_1^3\right)dx = 4\frac{x^3}{3}|_1^2 = \frac{28}{3}.$$

б) случай произвольной области интегрирования

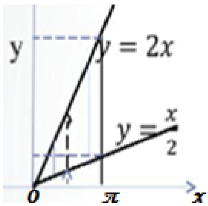
Пусть функция $f(x,y)$ интегрируема в области D, ограниченной контуром Г, который пересекает прямые, параллельные оси Oy, не более чем в двух точках. Пусть A - самая левая, а B - самая правая точка контура Г с абсциссами соответственно a и b. Пусть уравнение кривой, находящейся выше (ниже) прямой AB: $y = \varphi_1(x)$ ($y = \varphi_2(x)$). Тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x\,,y)dy \qquad (6)$$



Аналогично:

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \int\limits_a^b dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x\,,y)dx \qquad (7)$$



Пример. Вычислить $\iint_D sinydxdy$, *если* D: $\frac{x}{2} \le y \le 2;$ $0 \le x \le \pi$**.**

Решение. Изобразим область интегрирования и найдем пределы интегрирования по x (для внешнего интеграла) и по y (для внутреннего интеграла):

$$0 \le x \le \pi, \quad \frac{x}{2} \le y \le 2x$$

Решение. $\iint_D sinydxdy = \int_0^\pi dx \int_{\frac{x}{2}}^{2x} sinydy = -\int_0^\pi cos2xdx + \int_0^\pi cos\frac{x}{2}dx =$

$$= \left(-\frac{1}{2}sin2x + 2sin\frac{x}{2}\right)|_0^\pi = 2.$$

4.4 Замена переменных в двойном интеграле.

Пусть функция $f(x,y)$ определена и непрерывна в области D.

Теорема. *Пусть функции* $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$, *задающие биекцию между областями* D' *и* D, *непрерывны и имеют непрерывные частные производные в области* D' *и* $J(u,v) \ne 0$. *Тогда имеет место следующая формула:*

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(x(u,v),y(u,v))|J(u,v)|dudv \qquad (1)$$

Двойной интеграл в полярных координатах

Учитывая связь декартовых координат с полярными: $\begin{cases} x = \rho cos\varphi \\ y = \rho sin\varphi \end{cases}$, вычислим якобиан: $J(\rho,\varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} cos\varphi & -\rho sin\varphi \\ sin\varphi & \rho cos\varphi \end{vmatrix} = \rho$. Подставим его в (1), формула замены переменной (1) примет вид:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(\rho cos\varphi, \rho sin\varphi)\rho \, d\rho \, d\varphi \qquad (2)$$

Пример. *Вычислить* $\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy$, $D: x^2 + y^2 = a^2$

Решение. Перейдём к полярным координатам: $x = \rho cos\varphi$, $y = \rho sin\varphi$ $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \rho \le a$. Используем формулу (2):

$$\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a e^{-\rho^2}\rho d\rho = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left(\int\limits_{10}^{a} e^{-\rho^2} d(-\rho^2) \right) =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot e^{-\rho^2}\Big|_0^a = \pi\left(1 - e^{-a^2}\right).$$

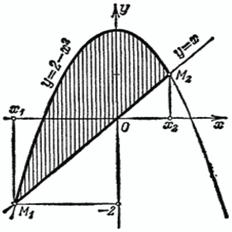
4.5 Приложения двойного интеграла

а) <u>Геометрические приложения:</u>

1. Объем тела: $V = \iint_D f(x,y)dxdy$.
2. Площадь плоской фигуры $S = \iint_D dxdy$.
3. Площадь поверхности: P = $\iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2} \; dxdy$.

б) <u>Физические приложения:</u>

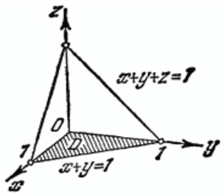
1. Масса тонкой пластинки: $m = \iint_D \rho(x,y)dxdy$.
2. Статические моменты плоской фигуры:
$M_x = \iint_D y\rho(x,y)dxdy$ $M_y = \iint_D x\rho(x,y)dxdy$.
3. Координаты центра масс плоской фигуры:
$x_c = \frac{\iint_D x\rho(x,y)dxdy}{\iint_D \rho(x,y)dxdy}$, $y_c = \frac{\iint_D y\rho(x,y)dxdy}{\iint_D \rho(x,y)dxdy}$
4. Моменты инерции фигуры:
$I_x = \iint_D y^2\rho(x,y)dxdy$, $I_y = \iint_D x^2\rho(x,y)dxdy$, $I_0 = \iint_D (x^2+y^2)\rho(x,y)dxdy$.



Пример. 1. *Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми* $y = 2 - x^2$ и $y = x$.

Решение. Найдём абсциссы точек пересечения кривых. Решим систему уравнений: $\begin{cases} y = 2 - x^2 \\ y = x \end{cases}$, получим уравнение $x^2 + x - 2 = 0$, решим его: $x = -2$; $x = 1$. Тогда площадь равна:

$$S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_{-2}^{1} \left(\int\limits_x^{2-x^2} dy \right) dx = \int\limits_{-2}^{1} \left(y\Big|_x^{2-x^2} \right) dx = \int\limits_{-2}^{1} (2 - x^2 - x)dx = \frac{9}{2}.$$



2. *Вычислить объём тела, ограниченного плоскостями*: $x = 0,\ y = 0, z = 0,\ x + y + z = 1$.

Решение. Применим формулу для объёма тела $V = \iint_D f(x, y)dxdy$. Поверхностью $z = f(x, y)$ является плоскость $x + y + z = 1$. Выразим переменную $z = 1 - x - y$, тогда

$$V = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (1 - x - y)dy \right) dx == \int_0^1 \left((1 - x)y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{1-x} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - x)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\frac{(1 - x)^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

4.6 Криволинейные интегралы первого рода

Задача, приводящая к понятию криволинейного интеграла первого рода

Пусть на плоскости дана простая кривая, вдоль которой расположены массы, причем $\rho(M)$ – плотность в точках M кривой. Определим массу кривой. Возьмем на кривой AB произвольные точки $A = A_0, A_1, A_2, \dots, A_n = B$. На дуге $A_{k-1}A_k$ выберем произвольную точку M_k, вычислим плотность $\rho(M_k)$. Предположим, что плотность та же в остальных точках дуги $A_{k-1}A_k$. Обозначая $\overset{\frown}{A_{k-1}A_k} = \Delta l_k$. Тогда масса дуги: $m_k \approx \rho(M_k)\Delta l_k$, а всей кривой: $m \approx \sum_{k=0}^{n-1} \rho(M_k)\Delta l_k$. Пусть $\lambda = \max\limits_{1 \le k \le n} \{\Delta l_k\}$, тогда

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho(M_k)\Delta l_k$$

Определение криволинейного интеграла первого рода

Пусть L- простая, спрямляемая кривая, заданная уравнениями:

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), \alpha \le t \le \beta \qquad (1)$$

и пусть на кривой определена функция $f(x, y)$. Разобьём отрезок $[\alpha, \beta]$ на части точками $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = \beta$. При этом кривая L разобьётся на дуги точками $A = A_0, A_1, \dots, A_n = B$. Обозначим $\overset{\frown}{A_{k-1}A_k} = \Delta l_k$, выберем на каждой дуге $A_{k-1}A_k$ некоторую точку $N_k(\xi_k, \eta_k)$ и составим интегральную сумму $\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta l_k$. Обозначим $\lambda = \max\limits_{1 \le k \le n} \{\Delta l_k\}$.

<u>Определение</u>. *Число I называется пределом интегральных сумм при $\lambda \to 0$*, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ такое, что для любого разбиения кривой, для которого $\lambda < \delta$ и для любой точки $N_k(\xi_k, \eta_k)$ выполняется $|\sigma - I| < \varepsilon$.

Если существует $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma = I$, то число называется ***криволинейным интегралом первого рода*** *от функции $f(x, y)$ по кривой L и обозначается*

$$\int_L f(x, y)dl \qquad (2)$$

<u>Замечание</u> 1. Из определения следует, что криволинейный интеграл первого рода не зависит от направления обхода кривой:

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{BA} f(x,y)dl$$

2. Если $f(x,y) = 1$, то $\int_L dl = l$, где l – длина кривой L.

Вычисление криволинейного интеграла первого рода

Простая кривая L, заданная уравнениями (1), называется *гладкой* (*кусочно-гладкой*), если функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ имеют непрерывные (кусочно-непрерывные) производные, одновременно не обращающиеся в нуль на $[\alpha,\beta]$ (за исключением конечного числа точек). Функция $f(x,y)$, определённая на кривой L, называется *непрерывной вдоль кривой* L, если $\lim\limits_{\substack{M\to M_0\\ M\in L}} f(M) = f(M_0)$ $\forall M_0 \in L$. Если условие выполнено в каждой точке кривой, кроме конечного числа точек разрыва 1 рода, то функция $f(x,y)$ называется *кусочно-непрерывной вдоль кривой* L.

Теорема. *Если* L *- кусочно-гладкая кривая, заданная уравнениями* (1), *и функция* $f(x,y)$ *кусочно-непрерывна вдоль кривой* L, *то существует криволинейный интеграл* (2) *и справедливо равенство*

$$\int\limits_L f(x,y)dl = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}dt \qquad (3)$$

1. Если кривая L задана уравнением $y = y(x), a \le x \le b$ и $y(x)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[a,b]$, то существует интеграл (2) и справедливо равенство

$$\int\limits_L f(x,y)dl = \int_a^b f\big(x,y(x)\big)\sqrt{1 + (y'(x))^2}dx \qquad (4)$$

2. Если кривая L задана в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi), \alpha \le \varphi \le \beta$, то существует интеграл (2) и имеет место равенство:

$$\int\limits_L f(x,y)dl = \int_\alpha^\beta f(\rho(\varphi)cos\varphi,\rho(\varphi)sin\varphi\sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2}d\varphi \qquad (\mathbf{5})$$

Интеграл обладает свойствами линейности, аддитивности, имеет место формула среднего значения.

4. *Физические приложения криволинейных интегралов первого рода*.

Пусть L – материальная плоская кривая с линейной плотностью $\rho(x,y)$. Тогда справедливы следующие формулы:

а) $m = \int_L \rho(x,y)dl$ - масса кривой;

б) $M_x = \int_L y\rho(x,y)dl$ и $M_y = \int_L x\rho(x,y)dl$ - статические моменты кривой L относительно осей *Ox* и Oy*;*

в) $I_x = \int_L y^2\rho(x,y)dl$, $I_y = \int_L x^2\rho(x,y)dl$, $I_0 = \int_L (x^2 + y^2)\rho(x,y)dl$ -

- моменты инерции кривой относительно осей *Ox*, *Oy* и начала координат.

4.7 *Криволинейные* интегралы второго рода

Задача, приводящая к понятию криволинейного интеграла второго рода

Пусть точка $P(x, y)$ движется вдоль некоторой плоской кривой от точки A до точки B. Действует сила: $F = P(x, y)i + Q(x, y)j$. Вычислим работу силы при перемещении точки P из точки A в точку B. Для этого разобьём кривую AB на n частей точками $A = M_0 < M_1 < \ldots < M_n = B$ в направлении от A к B и пусть $\Delta s_k = \overrightarrow{M_{k-1}M_k}$. Величину силы F в точке M_k обозначим через F_k. Пусть $F_k = P(\xi_k, \eta_k)i + Q(\xi_k, \eta_k)j$, $\Delta s_k = \Delta x_k i + \Delta y_k j$. Тогда работа силы F вдоль дуги $\overset{\frown}{M_{k-1}M_k}$ приближённо равна: $A \approx \sum_{k=1}^{n} F(\xi_k, \eta_k)\Delta s_k = \sum_{k=1}^{n} P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k$. Обозначим $\lambda = \max\limits_{1 \le k \le n}\{|\Delta s_k|\}$. Тогда

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k$$

Определение криволинейного интеграла второго рода

Пусть L-простая спрямляемая кривая: $x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in [\alpha, \beta]$ (6)
Тогда точки имеют координаты $A = A\big(\varphi(\alpha), \psi(\alpha)\big)$, $B = B\big(\varphi(\beta), \psi(\beta)\big)$.
Пусть на кривой L заданы две функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$. Разобьём отрезок $[\alpha, \beta]$ на части точками $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots << t_n = \beta$. При этом кривая $L =$ AB разобьётся на части точками $A = M_0 < M_1 < \ldots < M_n = B$ в направлении от A к B. Обозначим $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$, где (x_k, y_k) – координаты точек M_k и $\Delta s_k = \overset{\frown}{M_{k-1}M_k}$, а $\lambda = \max\limits_{1 \le k \le n}\{|\Delta s_k|\}$. На каждой дуге возьмём точки $N_k(\xi_k, \eta_k)$ и составим две интегральные суммы $\sigma_1 = \sum_{k=1}^{n} P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k$ и $\sigma_2 = \sum_{k=1}^{n} Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k$.
Определение. Число I_k $(k = 1,2)$ называется *пределом интегральных сумм* σ_k при $\lambda \to 0$, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ такое, что для любого разбиения кривой, для которого $\lambda < \delta$ и для любой точки $N_k(\xi_k, \eta_k)$ выполняется $|\sigma_k - I_k| < \varepsilon$.
Если существует $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma_k = I_k$, *то* I_1 и I_2 *называются криволинейными интегралами второго рода от функции* $P(x, y)$ *и* $Q(x, y)$, *обозначаются*

$$\int_L P(x, y)dx \quad \text{и} \quad \int_L Q(x, y)dy \qquad (7)$$

Сумма $I_1 + I_2$ называется общим криволинейным интегралом и обозначается

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

Из определения $\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = -\int_{BA} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$.
Если кривая замкнутая, то направление обхода, при котором область, лежащая внутри контура, остаётся слева по отношению к движущейся по контуру точке, назовём *положительным*, а противоположное ему – *отрицательным*. Интеграл по замкнутому контуру L в положительном направлении обозначают так:

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

Существование и вычисление криволинейного интеграла второго рода

Теорема. *Пусть кривая АВ кусочно-гладкая кривая, заданная уравнениями* (6), *и функция* $f(x,y)$ *кусочно-непрерывна. Тогда существует криволинейный интеграл* $\int_{AB} P(x,y)dx$ *и имеет место равенство*:

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f\big(\varphi(t),\psi(t)\big)\varphi'(t)dt \qquad (8)$$

Формула Грина

Теорема. *Пусть функции* $P(x,y), Q(x,y)$ *и их частные производные* $\frac{\partial P}{\partial x}$ и $\frac{\partial Q}{\partial y}$ *непрерывны в простой области G. Тогда справедливо формула Грина:*

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy, \qquad (9)$$

где криволинейный интеграл берётся по границе L области G в положительном направлении.

Пример. Вычислить $\oint_L 2ydx + 3xdy,\ L: x^2 + y^2 = 1$. По формуле Грина:

$$\oint_L 2ydx + 3xdy = \iint_D (3-2)dxdy = \iint_D dxdy = S_{\text{кр}} = \pi.$$

При $P(x,y) = -y,\ Q(x,y) = x$ из (9) получим формулу площади фигуры:

$$S = \frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx \qquad (10)$$

Определение. Область *D* на плоскости называется *односвязной*, если для любого замкнутого контура в этой области ограниченная им часть плоскости целиком принадлежит области *D*.

Теорема 1. *Пусть функции* $P(x,y), Q(x,y)$ *непрерывны в области D. Тогда следующие три условия эквивалентны:*

1. $\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$.
2. $\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ *не зависит от пути интегрирования* AB, *расположенного в области D*.
3. *Выражение* $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ *является полным дифференциалом некоторой функции, т.е. в D существует такая функция* $u(x,y)$, *что* $du = Pdx + Qdy$, *и* $\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = u(B) - u(A)$.

Теорема 2. *Пусть D - односвязная область, а функции* $P(x,y),\ Q(x,y)$ *имеют в области непрерывные частные производные* $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$. *Тогда каждое из условий 1-3 теоремы 1 эквивалентно следующему условию: в области D выполняется равенство* $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ (функция $u(x,y)$ *называется потенциалом векторного поля* $\overline{a} = grad\, u$).

Функция $u(x,y)$ из условия 3 может быть найдена по формуле:

$$u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + C \qquad (11)$$

Пример. Убедиться, что векторное плоское поле потенциально и найти его потенциал, если $\overline{a} = (2xy+1)\overline{i} + (x^2+3y^2)\overline{j}$.

Решение. Проверим $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial(2x+1)}{\partial y} = 2x$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial(x^2+3y^2)}{\partial x} = 2x$. Т.к. $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, то поле потенциально. Интеграл не зависит от пути интегрирования, в силу (11) $u(x,y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} (2xy+1)dx + (x^2+3y^2)dy = \int_0^x (2\cdot 0+1)dx +$
$+\int_0^y (x^2+3y^2)dy = \ x + x^2y + y^3 + C.$

Рекомендуемая литература

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс. Издательство Айрис-пресс, 2013.
2. Шипачев В.С. Начала высшей математики. Издательство Лань, 2013.
3. Шипачев В.С. Задачник по высшей математике. М.: Высшая школа, 2011.
4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. Т.1, Учебное пособие для втузов. М.: Наука, 1985.

СОДЕРЖАНИЕ