ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ» (МГТУ ГА)

Кафедра прикладной математики

Н.И. Овсянникова

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Учебно-методическое пособие
по выполнению лабораторных работ

для студентов III курса
направления 01.03.04
очной формы обучения

Москва
ИД Академии Жуковского
2020

УДК 519.6
ББК 518
О-34

Рецензент:

Лукацкий А.М. – д-р физ.-мат. наук, профессор

Овсянникова Н.И.

О-34 Численные методы [Текст] : учебно-методическое пособие по выполнению лабораторных работ / Н.И. Овсянникова. – М.: ИД Академии Жуковского, 2020. – 48 с.

Данное учебно-методическое пособие издается в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Численные методы» по учебному плану для студентов III курса направления 01.03.04 очной формы обучения.

Рассмотрено и одобрено на заседаниях кафедры 29.08.2020 г. и методического совета 29.08.2020 г.

УДК 519.6
ББК 518

В авторской редакции

Подписано в печать 02.12.2020 г.
Формат 60x84/16 Печ. л. 3 Усл. печ. л. 2,79
Заказ № 688/1008-УМП04 Тираж 90 экз.

Московский государственный технический университет ГА
125993, Москва, Кронштадтский бульвар, д. 20

Издательский дом Академии имени Н. Е. Жуковского
125167, Москва, 8-го Марта 4-я ул., д. 6А
Тел.: (495) 973-45-68
E-mail: zakaz@itsbook.ru

СОДЕРЖАНИЕ

Глава 1. Элементарная теория погрешностей

1.1. Справочный материал по элементарной теории погрешностей

При практических вычислениях обычно используют приближенные значения величин – приближенные числа.

Погрешность приближенного числа *a*, т.е. разность $a - a_0$ между ним и точным значением a_0, как правило, неизвестна.

Под оценкой погрешности приближенного числа *a* понимают установление неравенства вида

$$\left|a - a_0\right| \le \Delta_a \tag{1.1}$$

Число Δ_a называется абсолютной погрешностью (иногда употребляется термин «предельная абсолютная погрешность»). Это число определяется неоднозначно: его можно увеличить. Обычно указывают возможно меньшее число Δ_a, удовлетворяющее неравенству (1.1).

Абсолютные погрешности записывают не более чем с двумя-тремя значащими цифрами (при подсчете числа значащих цифр не учитывают нулей, стоящих слева, например, в числе 0,010030 имеется 5 значащих цифр). В приближенном числе *a* не следует сохранять те разряды, которые подвергаются округлению в его абсолютной погрешности Δ_a.

Относительной погрешностью δ_a приближенного числа *a* называется отношение его абсолютной погрешности Δ_a к абсолютной величине числа *a*, т.е. $\delta_a = \dfrac{\Delta_a}{|a|}$.

Относительная погрешность обычно выражается в процентах, и ее принято записывать не более чем с двумя-тремя значащими цифрами.

Во многих технических приложениях принято характеризовать точность приближенных чисел их относительной погрешностью.

Формулы точного подсчета погрешностей результатов действий над приближенными числами

$$\delta(a \pm b) = \frac{a\delta_a + b\delta_b}{a \pm b}; \quad \Delta(a \pm b) = \Delta_a + \Delta_b;$$

$$\delta(ab) = \delta_a + \delta_b; \quad \Delta(ab) = ab(\delta_a + \delta_b) = b\Delta_a + a\Delta_b;$$

$$\delta\left(\frac{a}{b}\right) = \delta_a + \delta_b; \quad \Delta\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b}(\delta_a + \delta_b) = \frac{b\Delta_a + a\Delta_b}{b^2};$$

$\delta(a^m) = m\delta_a; \quad \Delta(a^m) = ma^{m-1}\Delta_a$, где Δ – абсолютная погрешность приближенного числа, δ – относительная погрешность приближенного числа, m – рациональное число.

Формулы погрешности вычисления значений функции от одной переменной

$\Delta_y = \left|f'(a)\right| \cdot \Delta_a$ – абсолютная погрешность дифференцируемой функции $y = f(x)$, вычисленная в точке $x \approx a$, $x = a + \Delta_a$.

$\delta_y = \dfrac{\Delta_y}{|y|} = \dfrac{|f'(a)| \cdot \Delta_a}{|f(a)|}$ – относительная погрешность дифференцируемой функции $y = f(x)$, вычисленная в точке $x \approx a$.

Рассмотрим правила вычисления без строгого учета погрешностей

Правило 1. Если число слагаемых невелико, то в алгебраической сумме приближенных значений чисел, в записи которых все цифры верны, следует оставлять столько десятичных знаков, сколько их имеет слагаемое с наименьшим числом десятичных знаков. Слагаемые с большим числом десятичных знаков следует предварительно округлить на один десятичный знак больше, чем у выделенного слагаемого.

Правило 2. Если число исходных знаков невелико, то в произведении (частном) приближенных значений чисел следует оставлять столько значащих цифр, сколько их имеет число с наименьшим количеством значащих цифр. Исходные данные с большим числом значащих цифр следует предварительно округлить, оставив на одну значащую цифру больше, чем у выделенного исходного данного.

Правило 3. При возведении приближенного значения числа в квадрат или куб, а также при извлечении квадратного корня или кубического корня в результате следует оставлять столько значащих цифр, сколько их имеет соответственно основание степени или подкоренное выражение.

Правило 4. При выполнении последовательно ряда действий над приближенными значениями чисел следует в промежуточных результатах сохранять на одну цифру больше, чем рекомендуют предыдущие правила. При округлении окончательного результата запасная цифра отбрасывается.

Рассмотрим примеры вычисления и определения погрешности выражения.

Пример 1.1. Вычислить значение выражения X и определить его погрешность:

$X = \dfrac{m^2 n^3}{\sqrt{k}}$, где $m = 28,3(\pm 0,02)$, $n = 7,45(\pm 0,01)$, $k = 0,678(\pm 0,003)$.

Решение. Вычислим $m^2 = 800,9;$ $n^3 = 413.5; \sqrt{k} = 0,8234;$

$X = \dfrac{800,9 \cdot 413,5}{0,8234} = 402200 = 4,02 \cdot 10^5$.

Далее, имеем $\delta_m = 0,02/28,3 = 0,00071; \delta_n = 0,01/7,45 = 0,00135;$

$\delta_k = 0,003/0,678 = 0,00443$, откуда

$$\delta_X = 2\delta_m + 3\delta_n + 0,5_k = 0,00142 + 0,00405 + 0,00222 = 0,0769,$$

$$\delta_X = 7,7\%, \ \Delta_X = 4,02 \cdot 10^5 \cdot 0,0077 = 3,1 \cdot 10^3.$$

Ответ: $X = 4,02 \cdot 10^5 (\pm 3,1 \cdot 10^3);$ $\delta_X = 0,77\%$.

Пример 1.2. Вычислить значение выражения N и определить его погрешность:

$N = \dfrac{(n-1)(m+n)}{(m-n)^2}$, где $n = 3,0567(\pm 0,0001)$, $m = 5,72(\pm 0,02);$

Решение. Имеем $n - 1 = 2,0567(\pm 0,0001);$

$$m + n = 3,057(\pm 0,0004) + 5,72(\pm 0,02) = 8,777(\pm 0,0204);$$

$$m - n = 5,72(\pm 0,02) - 3,057 \times (\pm 0,0004) = 2,663(\pm 0,0204);$$

$$N=\frac{2,0567\cdot 8,777}{2,663^2}=\frac{2,0567\cdot 8,777}{7,092}=2,545\approx 2,55;$$

$$\delta_N=\frac{0,0001}{2,0567}+\frac{0,0204}{8,777}+2\frac{0,0204}{2,663}=0,000049+0,00233+2\cdot 0,00766=$$

$$=0,00238+0,01532=0,0177=1,77\%;\ \alpha_N=2,55\cdot 0,0177=0,046.$$

Ответ: $N\approx 2,55(\pm 0,046);\ \delta_N=1,77\%$

Пример 1.3. Вычислить, пользуясь правилом подсчета цифр:

$V=\pi h^2(R-\frac{h}{3})$, где $h=11,8$; $R=23,67$.

Решение. Находим

$$V=3,142\cdot 11,8^2(23,67-3,933)=3,142\cdot 11,8^2\cdot 19,737=$$

$$3,142\cdot 139,2\cdot 19,737=437,37\cdot 19,737=8630\approx 8,63\cdot 10^3$$

Ответ: $V\approx 8,63\cdot 10^3$.

1.2. Лабораторная работа №1 Вычисления со строгим и без строгого учета погрешностей

Задания:

1)Вычислить и определить погрешности результата.

2) Вычислить и определить погрешность результата.

3) Вычислить, пользуясь правилами подсчета цифр.

Вариант № 1

1) $x=\frac{ab}{\sqrt[3]{c}}$, $a=3,85(\pm 0,01)$, $b=2,0435(\pm 0,0004)$, $c=962,6(\pm 0,1)$.

2) $X=\left[\frac{(a+b)c}{m-n}\right]^2$, $a=4,3(\pm 0,05)$. $b=17,21(\pm 0,02)$, $c=8,2(\pm 0,05)$, $m=12,417(\pm 0,003)$, $n=8,37(\pm 0,005)$.

3) $S=\frac{h^2(a+b)^2}{18(a^2+4ab+b^2)}$, $a=1,141$, $b=3,156$, $h=1,14$.

Вариант № 2

1) $x=\frac{ab}{\sqrt[3]{c}}$, $a=4,16(\pm 0,005)$, $b=12,163(\pm 0,002)$, $c=55,18(\pm 0,01)$.

2) $X=\left[\frac{(a+b)c}{m-n}\right]^2$, $a=5,2(\pm 0,04)$. $b=15,32(\pm 0,01)$, $c=7,5(\pm 0,05)$, $m=21,823(\pm 0,002)$, $n=7,56(\pm 0,003)$.

3) $S=\frac{h^2(a+b)^2}{18(a^2+4ab+b^2)}$, $a=2,234$, $b=4,518$, $h=4,48$.

Вариант № 3

1) $x = \dfrac{ab}{\sqrt[3]{c}}$, $a = 7,27(\pm 0,001)$, $b = 5,205(\pm 0,002)$, $c = 87,32(\pm 0,03)$

2) $X = \left[\dfrac{(a+b)c}{m-n}\right]^2$, $a = 2,13(\pm 0,01)$, $b = 22,16(\pm 0,03)$, $c = 6,3(\pm 0,04)$, $m = 16,825(\pm 0,004)$, $n = 8,13(\pm 0,002)$.

3) $S = \dfrac{h^2(a+b)^2}{18(a^2+4ab+b^2)}$, $a = 5,813$, $b = 1,315$, $h = 2,56$

Вариант № 4

1) $X = \dfrac{\sqrt{a}\cdot b}{c}$, $a = 228,6(\pm 0,06)$, $b = 86,4(\pm 0,02)$, $c = 68,7(\pm 0,05)$.

2) $X = \dfrac{m^3(a+b)}{c-d}$, $a = 13,5(\pm 0,02)$, $b = 3,7(\pm 0,02)$, $m = 4,22(\pm 0,004)$, $c = 34,5(\pm 0,02)$, $d = 23,725(\pm 0,005)$

3) $M = \dfrac{(a+b)h^3}{4} + \dfrac{(a+b)h}{12}$, $a = 8,53$, $b = 6,271$, $h = 12,48$.

Вариант № 5

1) $X = \dfrac{\sqrt{a}\cdot b}{c}$, $a = 315,6(\pm 0,05)$, $b = 72,5(\pm 0,03)$, $c = 53,8(\pm 0,04)$.

2) $X = \dfrac{m^3(a+b)}{c-d}$, $a = 18,5(\pm 0,03)$, $b = 5,6(\pm 0,02)$, $m = 3,42(\pm 0,003)$, $c = 26,3(\pm 0,01)$, $d = 14,782(\pm 0,006)$.

3) $M = \dfrac{(a+b)h^3}{4} + \dfrac{(a+b)h}{12}$, $a = 6,44$, $b = 5,323$, $h = 15,44$.

Вариант № 6

1) $X = \dfrac{\sqrt{a}\cdot b}{c}$, $a = 186,7(\pm 0,04)$, $b = 66,6(\pm 0,02)$, $c = 72,3(\pm 0,03)$.

2) $X = \dfrac{m^3(a+b)}{c-d}$, $a = 11,8(\pm 0,02)$, $b = 7,4(\pm 0,03)$, $m = 5,82(\pm 0,005)$, $c = 26,7(\pm 0,03)$, $d = 11,234(\pm 0,004)$.

3) $M = \dfrac{(a+b)h^3}{4} + \dfrac{(a+b)h}{12}$, $a = 9,05$, $b = 3,244$, $h = 20,18$.

Вариант № 7

1) $X = \dfrac{\sqrt{ab}}{c}$, $a = 3,854(\pm 0,004)$, $b = 16,2(\pm 0,005)$, $c = 10,8(\pm 0,1)$.

2) $X=\dfrac{(a+b)m}{(c-d)^2}$, $a=2,754(\pm 0,001), b=11,7(\pm 0,04)$,

$m=0,56(\pm 0,005)$, $c=10,536(\pm 0,002), d=6,32(\pm 0,008)$.

3) $N=\dfrac{(a+b)^2}{2h}+\dfrac{(a^2+b^2)h}{5}$, $a=0,562, b=0,2518, h=0,68$.

Вариант № 8

1) $X=\dfrac{\sqrt{ab}}{c}$, $a=4,632(\pm 0,003), b=23,3(\pm 0,04), c=11,3(\pm 0,06)$.

2) $X=\dfrac{(a+b)m}{(c-d)^2}$, $a=3,236(\pm 0,002)$, $b=15,8(\pm 0,03)$,

$m=0,64(\pm 0,004)$, $c=12,415(\pm 0,003), d=7,18(\pm 0,006)$.

3) $N=\dfrac{(a+b)^2}{2h}+\dfrac{(a^2+b^2)h}{5}$, $a=0,834, b=0,3523, h=0,74$.

Вариант № 9

1) $X=\dfrac{\sqrt{ab}}{c}$, $a=7,312(\pm 0,004), b=18,4(\pm 0,03), c=20,2(\pm 0,08)$.

2) $X=\dfrac{(a+b)m}{(c-d)^2}$, $a=4,523(\pm 0,003)$, $b=10,8(\pm 0,02)$,

$m=0,85(\pm 0,003)$, $c=9,318(\pm 0,002), d=4,17(\pm 0,004)$.

3) $N=\dfrac{(a+b)^2}{2h}+\dfrac{(a^2+b^2)h}{5}$, $a=0,445, b=0,4834, h=0,87$.

Вариант № 10

1) $X=\dfrac{a^2b}{c}$, $a=3,456(\pm 0,002)$, $b=0,642(\pm 0,0005)$,

$c=7,12(\pm 0,004)$.

2) $X=\dfrac{(a+b)m}{\sqrt{c-d}}$, $a=23,16(\pm 0,02), b=8,23(\pm 0,005)$,

$c=145,5(\pm 0,08)$, $d=28,6(\pm 0,1), m=0,28(\pm 0,006)$.

3) $V=\dfrac{h}{3}S\left(1+\dfrac{a}{A}+\dfrac{a^2}{A^2}\right)$, $a=8,51, A=23,42, S=45,8, h=3,81$.

Вариант № 11

1) $X=\dfrac{a^2b}{c}$, $a=1,245(\pm 0,001)$, $b=0,121(\pm 0,0002)$,

$c=2,34(\pm 0,003)$.

2) $X = \dfrac{(a+b)m}{\sqrt{c-d}}$, $a = 17{,}41(\pm 0{,}01)$, $b = 1{,}27(\pm 0{,}002)$,
$c = 342{,}3(\pm 0{,}04)$, $d = 11{,}7(\pm 0{,}1)$, $m = 0{,}71(\pm 0{,}003)$.

3) $V = \dfrac{h}{3} S\left(1 + \dfrac{a}{A} + \dfrac{a^2}{A^2}\right)$, $a = 5{,}71, A = 32{,}17, S = 51{,}7, h = 2{,}42$.

Вариант № 12

1) $X = \dfrac{a^2 b}{c}$, $a = 0{,}327(\pm 0{,}005)$, $b = 3{,}147(\pm 0{,}0001)$, $c = 1{,}78(\pm 0{,}001)$.

2) $X = \dfrac{(a+b)m}{\sqrt{c-d}}$, $a = 32{,}37(\pm 0{,}03), b = 2{,}35(\pm 0{,}001)$,
$c = 128{,}7(\pm 0{,}02)$, $d = 27{,}3(\pm 0{,}04), m = 0{,}93(\pm 0{,}001)$.

3) $V = \dfrac{h}{3} S\left(1 + \dfrac{a}{A} + \dfrac{a^2}{A^2}\right)$, $a = 7{,}28,\ A = 11{,}71,\ S = 21{,}8,\ h = 5{,}31$.

Вариант № 13

1) $X = \dfrac{ab^3}{c}$, $a = 0{,}635(\pm 0{,}0005), b = 2{,}17(\pm 0{,}002), c = 5{,}843(\pm 0{,}001)$.

2) $X = \dfrac{(a+b)m}{(c+d)^2}$, $d = 4{,}12(\pm 0{,}04), m = 0{,}61(\pm 0{,}002)$
$a = 3{,}233(\pm 0{,}001), b = 15{,}4(\pm 0{,}02), c = 2{,}12(\pm 0{,}01)$.

3) $N = \dfrac{(a-b)^2}{2h} + \dfrac{(a^2+b^2)h}{5}$, $a = 0{,}832, b = 0{,}3521, h = 0{,}72$.

Вариант № 14

1) $X = \dfrac{ab}{\sqrt{c}}$, $a = 2{,}16(\pm 0{,}005)$, $b = 10{,}163(\pm 0{,}001)$, $c = 50{,}18(\pm 0{,}02)$.

2) $X = \dfrac{m^3(a+b)}{c+d}$, $a = 10{,}5(\pm 0{,}01)$, $b = 3{,}5(\pm 0{,}04)$, $m = 4{,}26(\pm 0{,}001)$,
$c = 34{,}2(\pm 0{,}01)$, $d = 23{,}723(\pm 0{,}002)$.

3) $M = \dfrac{(a+b)h^2}{4} + \dfrac{(a+b)h}{12}$, $a = 4{,}52, b = 5{,}24, h = 12{,}46$.

Вариант № 15

1) $x = \dfrac{ab}{\sqrt{c}}$, $a = 2{,}84(\pm 0{,}01)$, $b = 4{,}0435(\pm 0{,}0002)$, $c = 264{,}6(\pm 0{,}2)$.

2) $X = \left[\dfrac{(a+b)c}{m+n}\right]^2$, $a = 5{,}1(\pm 0{,}05)$. $b = 14{,}21(\pm 0{,}01)$, $c = 3{,}2(\pm 0{,}02)$,
$m = 12{,}416(\pm 0{,}002)$, $n = 8{,}36(\pm 0{,}003)$.

3) $S = \dfrac{h^2(a+b)^2}{18(a^2+6ab+b^2)}$, $a = 4{,}141$, $b = 2{,}151$, $h = 2{,}15$.

Вариант № 16

1) $X = \dfrac{a^2 b}{c}$, $a = 4{,}451(\pm 0{,}001)$, $b = 0{,}644(\pm 0{,}0001)$, $c = 6{,}14(\pm 0{,}002)$.

2) $X = \dfrac{(a+b)m}{(c+d)^2}$, $a = 2{,}754(\pm 0{,}002)$, $b = 11{,}7(\pm 0{,}01)$,

$m = 0{,}56(\pm 0{,}004)$, $c = 10{,}536(\pm 0{,}001)$, $d = 6{,}32(\pm 0{,}002)$.

3) $S = \dfrac{h^2(a+b)^2}{18(a^2-4ab+b^2)}$, $a = 6{,}813$, $b = 2{,}315$, $h = 4{,}56$.

Глава 2. Методы решения нелинейных уравнений

2.1. Справочный материал по методам решения нелинейных уравнений

2.1.1. Общие сведения о методах решения нелинейных уравнений

Нелинейные уравнения делятся на два класса – алгебраические и трансцендентные. Алгебраическими называются уравнения, содержащие только алгебраические функции (целые, рациональные, иррациональные). В частности, многочлен является целой алгебраической функцией. Уравнения, содержащие другие функции (тригонометрические, показательные, логарифмические и др.), называются трансцендентными.

Методы решения нелинейных уравнений делятся прямые и итерационные. Прямые методы позволяют записать корни в виде некоторого конечного соотношения (формулы). На практике, как правило, уравнений не решаются такими простыми методами. Для их решения обычно используются итерационные методы, т.е. методы последовательных приближений. Алгоритм нахождения корня уравнения с помощью итерационного метода состоит из двух этапов: а) отыскание приближенного значения корня или содержащего его отрезка; б) уточнения приближенного значения до некоторой заданной степени точности.

Пусть задано уравнение на множестве действительных чисел.

$$f(x) = 0. \qquad (2.1.)$$

Приближенное значение корня (начальное приближение) уравнения (2.1) может быть найдено различными способами: из физических соображений, из решения аналогичной задачи при других исходных данных, с помощью графических методов. Если такие априорные оценки исходного приближения провести не удается, то находят две близко расположенные точки a и b, в которых непрерывная функция $f(x)$ принимает значения разных знаков, т.е. $f(a)f(b)<0$. В этом случае между точками a и b находится, по крайней мере, одна точка, в которой $f(x)=0$. В дальнейшем будем предполагать, что $f'(x)$ и $f''(x)$ сохраняют знак на отрезке $[a; b]$.

2.1.2. Метод половинного деления

Метод половинного деления состоит в разделении отрезка $[a; b]$ пополам точкой $c = \dfrac{a+b}{2}$. Если $f(c) \neq 0$ (что практически наиболее вероятно), то возможны два случая: либо $f(x)$ меняет знак на отрезке $[a; c]$; либо на отрезке $[c; b]$.

Выбирая в каждом случае тот из отрезков, на котором функция меняет знак, и, продолжая процесс половинного деления дальше, можно дойти до сколь угодно малого отрезка, содержащего корень уравнения.

Рассмотренный метод можно использовать как метод решения уравнения с заданной точностью. Действительно, если на каком-то этапе процесса получим отрезок [*c; c'*], содержащий корень, то, приняв приближённо $x=\dfrac{c+c'}{2}$, получим ошибку, не превышающую, значения $\varepsilon=\dfrac{c-c'}{2}$.

2.1.3. Метод хорд

Предположим, что на отрезке [*a; b*] функция *f(x)* удовлетворяет следующим условиям:

$$f(b)f''(b)>0. \tag{2.2}$$

Последовательные приближения точного корня вычисляются по формулам:

$$\begin{cases} x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f(b)-f(x_n)}\cdot(b-x_n) \\ x_0=a \end{cases}. \tag{2.3}$$

Если условие (2.2) не выполняется, а имеет место неравенство

$$f(a)f''(a)>0, \tag{2.4}$$

то последовательные приближения вычисляются по формулам:

$$\begin{cases} x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f(a)-f(x_n)}\cdot(a-x_n) \\ x_0=b \end{cases}. \tag{2.5}$$

2.1.4. Метод касательных

По методу касательных вычисления проводятся по формулам:

$$\begin{cases} x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ x_0=a \end{cases} \tag{2.6}$$

при выполнении условия (2.4).

При выполнении условия (2.2) используются расчетные формулы:

$$\begin{cases} x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ x_0=b \end{cases}. \tag{2.7}$$

Оценка погрешности метода хорд и метода касательных может быть вычислена по формуле:

$\left|x^*-x_n\right|\le\dfrac{\left|f(x_n\right|}{m_1}$, где $m_1\le\min\limits_{[a;b]}\left|f'(x)\right|$, x^* – точный корень, а x_n – приближенный корень уравнения (2.1).

2.1.5. Комбинированный метод хорд и касательных

Комбинированный метод основан на одновременном использовании методов хорд и касательных.

В результате получим две монотонные последовательности $\{x_n\}$, $\{x'_n\}$- приближенные значения корня по недостатку и по избытку соответственно.. Для нахождения корня ξ с заданной степенью точности достаточно ограничится теми значениями $\{x_n\}, \{x'_n\}$, для которых $\left|x_n - x'_n\right| < 2 \cdot \varepsilon$. Так как $\xi \in \left[x_n, x'_n\right]$, то в качестве значения корня следует взять среднее арифметическое чисел x_n, x'_n, т. е. число $\dfrac{x_n + x'_n}{2}$. Легко видеть, что $\left|\xi - \dfrac{x_n + x'_n}{2}\right| < \varepsilon$.

Расчётные формулы:

а) если $f(a) \cdot f''(a) > 0$ на [*a; b*], то:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f(x'_n) - f(x_n)} \cdot (x'_n - x_n), n = 1, 2\ldots \\ x'_{n+1} = x'_n - \dfrac{f(x'_n)}{f'(x'_n)}, n = 1, 2\ldots \\ x_0 = b, \;\; x'_0 = a \end{cases}.$$

б) если $f(b) \cdot f''(b) > 0$ на [*a; b*], то:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f(x'_n) - f(x_n)} \cdot (x'_n - x_n), n = 1, 2\ldots \\ x'_{n+1} = x'_n - \dfrac{f(x'_n)}{f'(x'_n)}, n = 1, 2\ldots \\ x_0 = a, \;\; x'_0 = b \end{cases}.$$

Пример 2.1. Дано уравнение $x^3 + x^2 - 3 = 0$. Исследовать вопрос о существовании и единственности корня ξ на отрезке [0,5; 1,5]. Вычислить три приближения корня уравнения по методу хорд и по методу касательных.

Вычисляем знак выражения $f(0{,}5) \cdot f(1{,}5)$, где $f(x) = x^3 + x^2 - 3$. Т. к. $f(0{,}5) \cdot f(1{,}5) < 0$ и $f(x)$ непрерывная функция на отрезке [0,5; 1,5], то уравнение имеет хотя бы один корень на заданном отрезке.

1. Для доказательства единственности корня вычисляем *f '(x), f ''(x)* и определим их знак на отрезке [0,5; 1,5].

$f'(x) = 3x^2 + 2x$, $f''(x) = 6x + 2$, *f''(x)>0* на отрезке [0; 1], следовательно, *f(x)* монотонно возрастает, и корень уравнения на отрезке [0; 1] единственный; $f''(x) > 0$, следовательно, функция сохраняет на отрезке выпуклость. Т.к. $f(0{,}5) \cdot f''(0{,}5) < 0$, то для вычисления приближенных значений корня по методу хорд используются формулы (2.3), а по методу касательных (2.7).

Используя данные формулы, получаем ответ:

$x_0 = 0{,}5;$ $x_1 = 1{,}012;$ $x_2 = 1{,}130;$ $x_3 = 1{,}166$ – приближенные значения корня по методу хорд; $x'_0 = 1{,}5;$ $x'_1 = 1{,}233;$ $x'_2 = 1{,}181;$ $x'_3 = 1{,}175$ – приближенные значения корня по методу касательных.

2.1.6. Метод простой итерации

Для использования этого метода исходное нелинейное уравнение записывается в виде

$$x = f(x). \tag{2.8}$$

Пусть известно начальное приближение корня $x=x_0$

Подставляя это значение в правую часть уравнения (2.8), получаем новое приближение: $c_1=f(c_0)$. Подставляя каждый раз новое значение корня в правую часть уравнения (2.8), получаем последовательность значений:

$$x_{n+1} = f(x_n), \ \ n = 1, 2, ... \tag{2.9}$$

Итерационный процесс прекращается, если результаты двух последовательных итераций близки $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$.

Достаточным условием сходимости метода простой итерации является условие $0 < |f'(x)| < 1$ на множестве действительных чисел.

Достаточным условием сходимости метода простой итерации на отрезке [a; b] является условие $0 < |f'(x)| < 1$, $f(x_n) \in [a; b]$.

Для более точной оценки погрешности используются формулы:

$$|x^* - x_n| \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha}|x_1 - x_0|,$$

$$|x^* - x_n| \le \frac{\alpha}{1-\alpha}|x_n - x_{n-1}|$$

где $\alpha = \max(|f'(x)|$, на множестве [a; b].

Пример 2.2. Вычислить четыре приближения методом простой итерации для уравнения $x = \sqrt[4]{x+10}$.

Для исследования выберем отрезок [0; 3].

1) Функция $f(x) = \sqrt[4]{x+10}$ определена и имеет в каждой точке x из отрезка [0; 3] производную: $f'(x) = \dfrac{1}{4\sqrt[4]{(x+10)^3}}$.

2) Значения функции удовлетворяют неравенству:

$\sqrt[4]{10} \le \sqrt[4]{x+10} \le \sqrt[4]{13} < 2$, т.е. все значения функции содержатся в отрезке[0; 3].

3) Производная функции удовлетворяет неравенству:

$\dfrac{1}{4\sqrt[4]{13^2}} \le \dfrac{1}{4\sqrt[4]{(x+10)^3}} \le \dfrac{1}{4\sqrt[4]{10^2}} < \dfrac{1}{4\sqrt[4]{625}} = \dfrac{1}{20}$, т. е. существует $\alpha = \dfrac{1}{20} < 1$ такое, что для всех x из отрезка [0; 3] имеет место неравенство: $|f'(x)| \le \alpha$. Следовательно, выполнено достаточное условие применимости метода простой итерации на отрезке.

Выберем произвольно x_0 из отрезка [0; 3], например $x_0 = 1$. Используя формулу (2.9), получаем четыре приближенных значения корня:

$$x_1 = f(x_0) = \sqrt[4]{11} = 1{,}82116, \ x_2 = f(x_1) = \sqrt[4]{1{,}82116} = 1{,}85423,$$

$$x_3 = f(x_2) = \sqrt[4]{1{,}85423} = 1{,}85553, \ x_4 = f(x_3) = \sqrt[4]{1{,}85553} = 1{,}85558.$$

Оценим погрешность четвертого приближения:

$$\left|x^* - x_4\right| \le \left(\frac{1}{20}\right)^4 \cdot \frac{1}{1-0,05}\left|1,862116-1\right| < 0,6\cdot 10^{-5}.$$

2.2. Лабораторная работа №2 Графический и аналитический способы отделения корней нелинейного уравнения. Уточнение корней методом половинного деления.

Задания:

1) Исследовать уравнение *f(x)=0* на отрезке [*a; b*] на существование и единственность корня, используя аналитический и графический методы.

2) Вычислить три приближения корня методом половинного деления и оценить погрешность последнего приближения.

Варианты заданий к лабораторной работе № 2

№ 1. $f(x) = x^2 - 2x - 5,\ a = 1,\ b = 3.$

№ 2. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 10,\ a = 1,\ b = 2.$

№ 3. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 10,\ a = 3,\ b = 4.$

№ 4. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2,\ a = -1,\ b = 0.$

№ 5. $f(x) = x^4 - 5x^3 - 4x^2 - 3x + 12,\ a = -4,\ b = -3.$

№ 6. $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 12,\ a = -1,\ b = 0.$

№ 7. $f(x) = x^4 - 8x^3 - 2x^2 + 16x - 3,\ a = 0,\ b = 1.$

№ 8. $f(x) = x^4 - 5x^3 - 4x^2 - 3x + 12,\ a = 1,\ b = 2.$

№ 9. $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 12,\ a = 2,\ b = 3.$

№ 10. $f(x) = x^4 - 8x^3 - 2x^2 + 16x - 3,\ a = -2,\ b = -1.$

№ 11. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 7,\ a = -2,\ b = -1.$

№ 12. $f(x) = x^3 - 0,2x^2 + 0,5x + 1,5,\ a = -1,\ b = 0.$

№ 13. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 7,\ a = 1,\ b = 2.$

№ 14. $f(x) = x^5 + 2x + 5,\ a = -2,\ b = 0.$

№ 15. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 7,\ a = 2,\ b = 3.$

№ 16. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 20,\ a = 2,\ b = 3.$

2.3. Лабораторная работа № 3 Решение нелинейных уравнений методами хорд, касательных, комбинированным методом хорд и касательных

Задания:

1) Найти три приближения корня для уравнения *f(x)=0* на отрезке [*a; b*] а) методом хорд; б) методом касательных. Вычислить погрешность третьего приближения для каждого метода.

2) Найти приближенный корень уравнения корень уравнения $f(x) = 0$ на отрезке [*a; b*] с точностью до $\varepsilon = 10^{-4}$ комбинированным методом хорд и касательных.

Использовать варианты заданий для лабораторной работы № 2.

2.4. Лабораторная работа № 4 Метод простой итерации для нелинейных уравнений

Задание:

Методом простой итерации вычислить корень уравнения с точностью до $\varepsilon = 10^{-3}$. Отрезок, на котором корень существует и единственный, выделить самостоятельно.

Варианты заданий к лабораторной работе № 4

№ 1. $4x + e^x = 0$. № 2. $\lg x = 6 - 2x$.

№ 3. $x - 1,2\cos\dfrac{x}{3} = 0$. № 4. $(0,2x)^3 = \cos x$.

№ 5. $\ln x - \dfrac{1}{1+x^2} = 0$. № 6. $\arccos x^2 - x = 0$.

№ 7. $arctg\left(\dfrac{1}{x}\right) - x^2 = 0$. № 8. $x - arctg\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$.

№ 9. $2 - x = \ln x$. № 10. $x + \lg x = 0,5$.

№ 11. $\cos x^2 - 10x = 0$. № 12. $\arccos(e^x - 3) - x = 0$.

№ 13. $\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2} - e^{-x^2} = 0$. № 14. $e^x - arctgx = 0$.

№ 15. $\arccos x^2 - x^3 = 0$. № 16. $x - 1 - arctg\dfrac{x}{10} = 0$.

Глава 3. Решение систем линейных и нелинейных уравнений

3.1. Справочный материал по численным методам решений систем линейных уравнений

3.1.1. Метод Гаусса с выбором главного элемента для системы линейных уравнений

Система из *n* линейных уравнений с *n* неизвестными вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{3.1}$$

имеет единственное решение при условии: $\Delta_A \neq 0$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$ матрица коэффициентов a_{ij} системы (3.1)

К точным методам относится метод Гаусса с выбором главного элемента. Среди элементов a_{ij} матрицы *A* выберем наибольший по модулю, называемый главным элементом. Пусть им будет элемент a_{pq}. Строка с номером p, содержащая главный элемент, называется главной строкой. Далее вычисляем множители: $m_i = \dfrac{a_{iq}}{a_{pq}}$ для всех $i \neq p$. Затем преобразуем матрицу следующим образом: из каждой неглавной строки вычитаем почленно главную строку, умноженную на m_i . В результате получим матрицу, у которой все элементы q-го столбца, за исключением a_{pq}, равны нулю. Отбрасываем этот столбец и главную строку и получаем новую матрицу A_1 с меньшим на единицу числом строк и столбцов. Над матрицей A_1 повторяем аналогичные операции, после чего получаем матрицу A_2 и т. д.

Такие преобразования продолжаем до тех пор, пока не получим матрицу, содержащую одну строку, которую считаем тоже главной. Затем объединяем все главные строки, начиная с последней. После некоторой перестановки они образуют треугольную матрицу, эквивалентную исходной. На этом заканчивается этап вычислений, называемый прямым ходом. Решив систему с полученной треугольной матрицей коэффициентов, найдём последовательно значения неизвестных $x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$. Этот этап вычислений называется обратным ходом.

Смысл выбора главного элемента состоит в том, чтобы сделать достаточно малым число m_i и тем самым уменьшить погрешность вычислений.

3.1.2. Вычисление обратной матрицы для системы линейных уравнений

Пусть дана невырожденная матрица $A = (a_{ij})$, где (i, j = 1, 2,…, n). Для нахождения элементов обратной матрицы $A^{-1} = (x_{ij})$, где (i, j = 1, 2,… n) воспользуемся основным соотношением:

$A \cdot A^{-1} = E$, где E – единичная матрица.

Перемножая матрицы A и A^{-1} и используя равенство их матрице E, получим n систем линейных уравнений вида:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_{kj} = \delta_{ij} \text{ (} i = 1, 2, \ldots, n; j \text{ – фиксировано), где } \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

Полученные n систем линейных уравнений имеют одну и ту же матрицу A и различные столбцы свободных членов. Эти системы можно решать методом Гаусса (см. п. 3.1.1). В результате решения систем получаем единичную матрицу A.

3.1.3. Метод простой итерации для систем линейных уравнений

Метод простой итерации даёт возможность получить последовательность приближённых значений, сходящуюся к точному решению системы.

Преобразуем систему (3.1) к нормальному виду:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j + \beta_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \cdot \tag{3.2}$$

Правая часть системы (3.2) определяет отображение:

$F : y_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j + \beta_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$, преобразующее точку $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, n-мерного метрического пространства в точку $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ того же пространства.

Выбрав начальную точку $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)})$, можно построить итерационную последовательность точек n - мерного пространства: $x^{(0)}, \quad x^{(1)} = F(x^{(0)}), ..., \quad x^{(n+1)} = F(x^{(n)}) ...$.

При определённых условиях данная последовательность сходится.

Так, для исследования сходимости таких последовательностей используется принцип сжимающих отображений, который состоит в следующем.

Если F – сжимающее отображение, определённое в полном метрическом пространстве с метрикой $\rho(x, y)$, то существует единственная неподвижная точка x^*, такая, что $x^* = F(x^*)$. При этом итерационная последовательность, $\{x_n\}$, полученная с помощью отображения F с любым начальным членом $x^{(0)}$, сходится к x^*.

Оценка расстояния между неподвижной точкой x^* отображения F и приближением $x^{(\kappa)}$ даётся формулами:

$$
\begin{aligned}
&\rho(x^*, x^{(k)}) \le \frac{\alpha^k}{1-\alpha} \rho(x^{(0)}, x^{(1)}), \\
&\rho(x^*, x^{(k)}) \le \frac{\alpha}{1-\alpha} \rho(x^{(k-1)}, x^{(k)}),
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

где α – множитель, определяемый достаточными условиями сжимаемости отображения F. Значение множителя α, определяется выбором метрики, в которой проверяется сходимость последовательности значений x_i. Рассмотрим достаточные условия сходимости итерационной последовательности $\{x_n\}$. Практически, для применения метода итерации систему линейных уравнений удобно "погрузить" в одну из трёх следующих метрик:

$$
\begin{aligned}
&a) \quad \rho_1(x, y) = \max_{1 \le i \le n} |x_i - y_i|; \\
&b) \quad \rho_2(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|; \\
&c) \quad \rho_3(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

Для того, чтобы отображение F, заданное в метрическом пространстве соотношениями (3.2), было сжимающим, достаточно выполнение одного из следующих условий:

а) в пространстве с метрикой ρ_1: $\alpha_1 = \max\limits_{1 \le i \le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |\alpha_{i,j}| < 1$, т. е. максимальная из сумм модулей коэффициентов в правой части системы (3.2), взятых по строкам, должна быть меньше единицы.

б) в пространстве с метрикой ρ_2: $\alpha_2 = \max\limits_{1 \le j \le n} \sum\limits_{i=1}^{n} |\alpha_{i,j}| < 1$, т. е. максимальная из сумм модулей коэффициентов в правой части системы (3.2), взятых по столбцам, должна быть меньше единицы.

в) в пространстве с метрикой ρ_3: $\alpha_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{i,j}^2} < 1$, т. е. сумма квадратов при неизвестных в правой части системы (3.2) должна быть меньше единицы

Пример 3.1. Вычислить два приближения методом простой итерации. Оценить погрешность второго приближения. В качестве начального приближения выбрать $x^{(0)} = (0;0;0)$.

$$\begin{cases} 9,2x_1 + 2,5x_2 - 3,7x_3 = -17,5 \\ 0,9x_1 + 9,0x_2 + 0,2x_3 = 4,4 \\ 4,5x_1 - 1,6x_2 - 10,3x_3 = -22,1 \end{cases}$$

Так как диагональные элементы системы являются преобладающими, то приведем систему к нормальному виду:

$$\begin{cases} x_1 = -0,2717x_2 + 0,4022x_3 - 1,9022 \\ x_2 = -0,1000x_1 - 0,0222x_3 + 0,4889 \\ x_3 = 0,4369x_1 - 0,1553x_2 + 2,1456 \end{cases}$$

Последовательные приближения будем искать по формулам:

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = -0,2717x_2^{(k-1)} + 0,4022x_3^{(k-1)} - 1,9022 \\ x_2^{(k)} = -0,1000x_1^{(k-1)} - 0,0222x_2^{(k-1)} + 0,4889 \\ x_3^{(k)} = 0,4369x_1^{(k-1)} - 0,1553x_2^{(k-1)} + 2,1456 \end{cases}$$

Получаем:

$x^{(1)} = (-1,9022;0,4889;2,1456)$, $x^{(2)} = (-1,1720;0,6315;1,2389)$.

Для оценки погрешности в метрике ρ_1 вычисляем коэффициент

$$\alpha_1 = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}\left|\alpha_{i,j}\right| = 0,6739 < 1.$$

Вычисляем погрешность:

$$\rho_1(x^*, x^{(2)}) \le \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}\rho(x^{(1)}, x^{(2)}) = \frac{0,6739}{1-0,6739}\cdot 0,9067 \le 1,8877$$

3.1.4. Метод Зейделя для систем линейных уравнений

Метод Зейделя является модификацией метода простой итерации. Вычисление $x^{(k+1)}$ проводится по следующим формулам:

$$x_1^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j} x_j^{(k)} + \beta_1,$$

$$x_2^{(k+1)} = \alpha_{21} x_1^{(k+1)} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_{2j} x_j^{(k)} + \beta_2,$$

....

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^{n} \alpha_{ij} x_j^{(k)} + \beta_i,$$

....

$$x_n^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{nj} x_j^{(k+1)} + \alpha_{nn} x_n^{(k)} + \beta_n.$$

Достаточные условия сходимости итерационной последовательности приближенных решений системы и оценка погрешности проводятся по тем же формулам, что и в методе простой итерации.

Пример 3.2. Рассмотрим вычисление двух приближений по методу Зейделя для примера, решенного выше для метода простой итерации и оценим погрешность.

Вычисления будем проводить по формулам:

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = -0,2717 x_2^{(k-1)} + 0,4022 x_3^{(k-1)} - 1,9022 \\ x_2^{(k)} = -0,1000 x_1^{(k)} - 0,0222 x_2^{(k-1)} + 0,4889 \\ x_3^{(k)} = 0,4369 x_1^{(k)} - 0,1553 x_2^{(k)} + 2,1456 \end{cases}$$

Выбираем начальное приближение: $x^{(0)} = (0;0;0)$ и получаем:

$x^{(1)} = (-1,9022; 0,6791; 1,2091)$, $x^{(2)} = (-1,6004; 0,6291; 1,3498)$.

$$\rho_1(x^*, x^{(2)}) \le \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1} \rho(x^{(1)}, x^{(2)}) = \frac{0,6739}{1-0,6739} \cdot 0,6791 \le 1,4034.$$

3.1.5 Метод Ньютона для систем нелинейных уравнений.

Пусть дана система:

$$\begin{cases} F(x,y) = 0 \\ G(x,y) = 0 \end{cases}$$

Согласно методу Ньютона, последовательные приближения вычисляются по формулам:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\Delta_x^{(n)}}{J(x_n, y_n)}, \; y_{n+1} = y_n - \frac{\Delta_y^{(n)}}{J(x_n, y_n)},$$

где $\Delta_x^{(n)} = \begin{vmatrix} F(x_n, y_n) & F_y'(x_n, y_n) \\ G(x_n, y_n) & G_y'(x_n, y_n) \end{vmatrix}$, $\Delta_y^{(n)} = \begin{vmatrix} F_x'(x_n, y_n) & F(x_n, y_n) \\ G_x'(x_n, y_n) & G(x_n, y_n) \end{vmatrix}$,

$$J(x_n, y_n) = \begin{vmatrix} F'_x(x_n, y_n) & F'_y(x_n, y_n) \\ G'_x(x_n, y_n) & G'_y(x_n, y_n) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Начальные приближения x_0, y_0 определяются приближенно (например, графически).

Метод Ньютона эффективен только при достаточной близости начального приближения к решению системы.

Пример 3.3. Найти одно приближение для решения системы. За начальное приближение системы принять $x_0 = 1,2,\ y_0 = 1,7$.

$$\begin{cases} F(x, y) \equiv 2x^3 - y^2 - 1 = 0 \\ G(x, y) \equiv xy^3 - y - 4 = 0 \end{cases}.$$

Вычисляем в начальной точке $x_0 = 1,2,\ y_0 = 1,7$:

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} 6x^2 & -2y \\ y^3 & 3xy^2 - 1 \end{vmatrix},\ J(1,2;1,7) = \begin{vmatrix} 8,64 & -3,40 \\ 4,91 & 9,40 \end{vmatrix} = 97,910 .$$

Получаем первые приближения:

$$x_1 = 1,2 - \frac{1}{97,910} \begin{vmatrix} -0,434 & -3,40 \\ 0,1956 & 9,40 \end{vmatrix} = 1,2 + 0,0349 = 1,2349,$$

$$y_1 = 1,7 - \frac{1}{97,910} \begin{vmatrix} 8,64 & -0,434 \\ 4,91 & 0,1956 \end{vmatrix} = 1,7 - 0,0390 = 1,6610 .$$

3.2. Лабораторная работа № 5 Решение систем линейных уравнений методом Гаусса. Вычисление обратной матрицы

Задания:

1) Решить заданную систему уравнений методом Гаусса с выбором главного элемента.

2) Вычислить для матрицы *A* обратную матрицу A^{-1}, используя метод Гаусса. Матрица *A* задается системой уравнений $Ax = b$.

Варианты заданий к лабораторной работе № 5

№1

$$\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - x_3 = -7; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1; \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9. \end{cases}$$

№2

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4; \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1; \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8. \end{cases}$$

№3

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$$

№4

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31; \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10. \end{cases}$$

№3
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$$

№4
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31; \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10. \end{cases}$$

№5
$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9; \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4; \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18. \end{cases}$$

№6
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4; \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11; \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 10. \end{cases}$$

№7
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4; \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$$

№8
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 5; \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15. \end{cases}$$

№9
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4; \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -1; \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

№10
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2; \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 = -1; \\ 3x_1 - 2x_2 = 8. \end{cases}$$

№11
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

№12
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 3; \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 8; \\ x_2 + 7x_3 = 17. \end{cases}$$

№13
$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = -7; \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0; \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$$

№14
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6; \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 16; \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 12. \end{cases}$$

№15
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8; \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -1; \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

№16
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 7; \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0; \\ 2x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$$

3.3. Лабораторная работа №6 Решение систем линейных уравнений методом простой итерации и методом Зейделя

Задания: Дана система линейных уравнений $Ax = b$.

1) Привести систему линейных уравнений к итерационному виду.

2) Исследовать итерационную последовательность на сходимость.

3) Найти решение системы линейных уравнений методом простой итерации с точностью до $\varepsilon = 0{,}00001$.

4) Найти решение системы линейных уравнений методом Зейделя. с точностью до $\varepsilon = 0{,}00001$.

Варианты заданий к лабораторной работе № 6

№ 1. $A=\begin{pmatrix} 24,41 & 2,42 & 3,85 \\ 2,31 & 31,49 & 1,52 \\ 3,49 & 4,85 & 28,92 \end{pmatrix}, \ b=\begin{pmatrix} 30,24 \\ 40,95 \\ 42,81 \end{pmatrix}.$

№ 2. $A=\begin{pmatrix} 34,42 & 3,41 & 2,84 \\ 2,31 & 40,49 & 2,62 \\ 2,48 & 5,61 & 38,24 \end{pmatrix}, \ b=\begin{pmatrix} 20,21 \\ 10,24 \\ 12,15 \end{pmatrix}.$

№ 3. $A=\begin{pmatrix} 34,25 & 4,21 & 4,12 \\ 1,12 & 41,49 & 1,52 \\ 2,54 & 4,85 & 30,92 \end{pmatrix}, \ b=\begin{pmatrix} 10,41 \\ 20,43 \\ 12,34 \end{pmatrix}.$

№ 4. $A=\begin{pmatrix} 24,41 & 2,02 & 2,15 \\ 4,12 & 21,49 & 1,52 \\ 2,31 & 4,85 & 28,92 \end{pmatrix}, \ b=\begin{pmatrix} 10,24 \\ 20,12 \\ 12,24 \end{pmatrix}.$

№ 5 $A=\begin{pmatrix} 25,43 & 2,42 & 4,85 \\ 2,31 & 29,12 & 3,52 \\ 2,12 & 4,85 & 28,92 \end{pmatrix}, \ b=\begin{pmatrix} 10,24 \\ 30,95 \\ 12,81 \end{pmatrix}.$

№ 6. $A=\begin{pmatrix} 40,42 & 2,42 & 2,86 \\ 3,34 & 35,12 & 1,52 \\ 2,46 & 4,85 & 30,14 \end{pmatrix}, \ b=\begin{pmatrix} 10,42 \\ 12,12 \\ 42,15 \end{pmatrix}.$

№ 7. $A=\begin{pmatrix} 42,18 & 4,32 & 3,85 \\ 5,31 & 41,32 & 1,52 \\ 3,49 & 4,85 & 34,32 \end{pmatrix}, \ b=\begin{pmatrix} 40,21 \\ 10,24 \\ 12,82 \end{pmatrix}.$

№ 8. $A=\begin{pmatrix} 35,01 & 2,42 & 2,85 \\ 2,31 & 41,49 & 3,52 \\ 3,24 & 4,85 & 29,52 \end{pmatrix}, \ b=\begin{pmatrix} 10,21 \\ 20,13 \\ 32,84 \end{pmatrix}.$

№ 9. $A=\begin{pmatrix} 20,01 & 2,46 & 2,12 \\ 2,31 & 30,49 & 1,52 \\ 3,49 & 4,85 & 32,52 \end{pmatrix}, \ b=\begin{pmatrix} 20,42 \\ 10,53 \\ 12,24 \end{pmatrix}.$

№ 10. $A=\begin{pmatrix} 40,21 & 2,42 & 3,12 \\ 2,31 & 34,49 & 1,52 \\ 3,49 & 4,85 & 26,72 \end{pmatrix}, \ b=\begin{pmatrix} 12,24 \\ 15,23 \\ 10,82 \end{pmatrix}.$

№ 11. $A = \begin{pmatrix} 32,21 & 2,42 & 2,14 \\ 2,31 & 24,12 & 1,52 \\ 2,45 & 4,85 & 30,12 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 40,12 \\ 19,14 \\ 12,84 \end{pmatrix}.$

№ 12. $A = \begin{pmatrix} 31,45 & 2,42 & 3,25 \\ 2,31 & 24,43 & 1,12 \\ 3,12 & 4,85 & 36,92 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 21,24 \\ 10,15 \\ 14,25 \end{pmatrix}.$

№ 13. $A = \begin{pmatrix} 40,41 & 2,42 & 3,86 \\ 2,31 & 21,49 & 4,55 \\ 2,49 & 4,85 & 25,96 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 20,41 \\ 30,11 \\ 12,24 \end{pmatrix}.$

№ 14. $A = \begin{pmatrix} 40,42 & 2,42 & 3,24 \\ 2,31 & 32,49 & 1,52 \\ 1,49 & 2,85 & 20,92 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 10,75 \\ 20,16 \\ 22,51 \end{pmatrix}.$

№ 15. $A = \begin{pmatrix} 35,41 & 2,42 & 3,21 \\ 2,31 & 28,49 & 1,52 \\ 1,44 & 4,85 & 34,12 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 10,04 \\ 20,16 \\ 12,25 \end{pmatrix}.$

№ 16. $A = \begin{pmatrix} 34,35 & 2,42 & 4,85 \\ 2,31 & 25,49 & 5,52 \\ 3,48 & 4,85 & 30,04 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 20,14 \\ 10,24 \\ 12,24 \end{pmatrix}.$

3.4. Лабораторная работа № 7 Решение систем нелинейных уравнений методом Ньютона

Задание:

Решить систему уравнений с помощью метода Ньютона. Результаты получить с пятью верными знаками. Начальные приближения найти графически.

Варианты заданий к лабораторной работе № 7

№ 1. $tg(xy + 0,1) = x^2;\; 0,5x^2 + 2y^2 = 1.$

№ 2. $tg(xy + 0,2) = x^2;\; 0,6x^2 + 2y^2 = 1.$

№ 3. $tg(xy + 0,3) = x^2;\; 0,7x^2 + 2y^2 = 1.$

№ 4. $tg(xy + 0,4) = x^2;\; 0,8x^2 + 2y^2 = 1.$

№ 5. $tg(xy) = x^2;\; 0,5x^2 + 2y^2 = 1.$

№ 6. $tg(xy + 0,1) = x^2;\; 0,6x^2 + 2y^2 = 1.$

№ 7. $tg(xy + 0,2) = x^2;\; 0,7x^2 + 2y^2 = 1.$

№ 8. $tg(xy + 0,3) = x^2;\; 0,8x^2 + 2y^2 = 1.$

№ 9. $tg(xy + 0,4) = x^2;\; 0,6x^2 + 2y^2 = 1.$

№ 10. $tg(xy+0,1)=x^2;\ 0,8x^2+2y^2=1.$

№ 11 $tg(xy)=x^2;\ 0,6x^2+2y^2=1.$

№ 12 $tg(xy+0,1)=x^2;\ 0,9x^2+2y^2=1.$

№ 13. $tg(xy+0,3)=x^2;\ 0,5x^2+2y^2=1.$

№ 13. $tg(xy+0,4)=x^2;\ 0,5x^2+2y^2=1.$

№ 14. $tg(xy+0,1)=x^2;\ 0,6x^2+2y^2=1.$

№ 15. $tg(xy+0,2)=x^2;\ 0,9x^2+2y^2=1.$

№ 16. $tg(xy+0,5)=x^2;\ 0,3x^2+2y^2=1.$

Глава 4. Численное интерполирование

4.1. Справочный материал по численному интерполированию

4.1.1. Постановка задачи численного интерполирования

Пусть на отрезке [*a; b*] заданы точки $x_0, x_1, ..., x_n$, которые называются узлами интерполяции**.** Будем предполагать, что все точки x_i различны и расположены в порядке возрастания.

Пусть известны значения некоторой функции $y=f(x)$ в этих точках:

$$y_0=f(x_0),\ \ ...\ \ y_n=f(x_n). \tag{4.1}$$

Требуется в определенном классе функций построить такую функцию $F(x)$, значения которой в узлах интерполяции совпадают со значениями $f(x)$. Функцию $F(x)$ будем называть интерполирующей функцией.

Будем искать интерполирующую функцию $F(x)$ в виде интерполяционного многочлена *n*-й степени:

$$F_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\ . \tag{4.2}$$

Условия (4.1) в данном случае перепишутся:

$$F_n(x_i)=\sum_{k=0}^{n} a_k x_i^k\ ,\ i=0,1,...,n. \tag{4.3}$$

Коэффициенты многочлена (4.2) a_k находятся единственным образом из условий (4.3). Рассмотрим различные способы записи интерполяционного многочлена.

4.1.2. Интерполяционный многочлен Лагранжа. Схема Эйткена

Пусть функция $f(x)$ задана условиями (4.1). Интерполяционным многочленом Лагранжа называется многочлен $L_n(x)$, представленный в виде:

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x-x_0)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_0)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)}\ . \tag{4.4}$$

Оценка погрешности формулы Лагранжа:

$$\left|R_n(x)\right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|(x-x_0)\cdot(x-x_1)...(x-x_n)\right|,$$

где $M_{n+1} = \max\limits_{[x_0,x_n]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|$ (4.5)

Пример 4.1. Для функции, имеющей аналитическое выражение $y=\sqrt{x}$, задана интерполяционная таблица:

x_k	100	121	144
y_k	10	11	12

а) Составить интерполяционный многочлен второго порядка.

$$L_2(x) = 10\frac{(x-121)(x-144)}{(100-121)(100-144)} + 11\frac{(x-100)(x-144)}{(121-100)(121-144)} +$$

$$+12\frac{(x-100)(x-121)}{(144-100)(144-121)}.$$

б) Вычислить значение $L_2(115)$.

$$L_2(115) = 10\frac{(115-121)(115-144)}{(100-121)(100-144)} + 11\frac{(115-100)(115-144)}{(121-100)(121-144)} +$$

$$+12\frac{\left(115-100\right)\left(115-121\right)}{\left(144-100\right)\left(144-121\right)} == 1,88312 + 9,90683 - 1,06719 = 10,7228$$

в) Оценить погрешность полученного результата

$$y''' = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}},\quad M_3 = \max_{[100,144]}\left|y'''\right| = \frac{3}{8}\frac{1}{\sqrt{100^5}} = \frac{3}{8}10^{-5}$$

$$\left|R_2(115\right| \le \frac{3}{8}10^{-5}\frac{1}{3!}\left|\left(115-100\right)\left(115-121\right)\left(115-144\right)\right| = \frac{1}{16}\cdot 10^{-5}\cdot 15\cdot 6\cdot 29 \approx$$

$$\approx 1,6\cdot 10^{-3}.$$

Если надо вычислить не общее выражение $L_n(x)$, а лишь его значение на конкретном x и при этом значения функции даны в достаточно большом количестве узлов, то можно использовать интерполяционную схему Эйткена.

Согласно данной схеме последовательно вычисляются многочлены:

$$L_{i,i+1}(x) = \frac{1}{x_{i+1}-x_i}\begin{vmatrix} y_i & x_i - x \\ y_{i+1} & x_{i+1}-x \end{vmatrix},$$

$$L_{i,i+1,i+2}(x) = \frac{1}{x_{i+2}-x_{i+1}}\begin{vmatrix} L_{i,i+1} & x_i - x \\ L_{i+1,i+2} & x_{i+2}-x \end{vmatrix},$$

$$L_{i,i+1,i+2,i+3}(x) = \frac{1}{x_{i+3}-x_{i+2}}\begin{vmatrix} L_{i,i+1,i+2} & x_i - x \\ L_{i+1,i+2,i+3} & x_{i+3}-x \end{vmatrix} \text{ и т.д.}$$

Интерполяционный многочлен *n*-й степени, принимающий в точках x_i значения y_i $(i=0,1,2,...,n)$, запишется следующим образом:

$$L_{012...n}(x)=\frac{1}{x_n-x_0}\begin{vmatrix} L_{012...(n-1)}(x) & x_0-x \\ L_{12...n}(x) & x_n-x \end{vmatrix}.$$

Вычисления по схеме Эйткена удобно расположить в таблице 4.1.

Таблица 4.1

Интерполяционная схема Эйткена

x_i	y_i	x_i-x	$L_{i-1,i}$	$L_{i-2,i-1,i}$	$L_{i-3,i-2,i-1,i}$	$\cdots$
x_0	y_0	x_0-x				
x_1	y_1	x_1-x	$L_{01}(x)$			
x_2	y_2	x_2-x	$L_{12}(x)$	$L_{012}(x)$		
x_3	y_3	x_3-x	$L_{23}(x)$	$L_{123}(x)$	$L_{0123}(x)$	$\cdots$
x_4	y_4	x_4-x	$L_{34}(x)$	$L_{234}(x)$	$L_{1234}(x)$	$\cdots$

Вычисления по схеме Эйткена обычно ведутся до тех пор, пока последовательные значения $L_{01...n}(x)$ и $L_{01...n,(n+1)}(x)$ не совпадут в пределах заданной точности. Схема Эйткена легко реализуется на ЭВМ и обеспечивает возможность автоматического контроля точности вычислений.

Пример 4.2. Функция $y=\sqrt[3]{x}$ задана таблицей.

x	1.0	1.1	1.3	1.5	1.6
y	1.000	1.032	1.091	1.145	1.170

Применив схему Эйткена, найти $\sqrt[3]{1,15}$.

Решение: Записываем данные значения функции в табл. 4.2. и вычисляем разности x_i-x при $x=1,15$.

Таблица 4.2

Схема Эйткена для примера 4.2.

i	x	y	x_i-x	$L_{i-1,\,i}$	$L_{i-2,\,i-1,\,i}$
0	1,0	1,000	-0,15		
1	1,1	1,032	-0,05	1,048	
2	1,3	1,091	0,15	1,047	1,048
3	1,5	1,145	0,35	1,050	
4	1,6	1.170	0,45	1,057	

Затем последовательно находим:

$$L_{01}=\frac{1}{x_1-x_0}\begin{vmatrix} y_0 & x_0-x \\ y_1 & x_1-x \end{vmatrix}=\frac{1}{0,1}\begin{vmatrix} 1 & -0,15 \\ 1,032 & -0,05 \end{vmatrix}=1,048,$$

$$L_{12}=\frac{1}{x_2-x_1}\begin{vmatrix} y_1 & x_1-x \\ y_2 & x_2-x \end{vmatrix}=\frac{1}{0,2}\begin{vmatrix} 1,032 & -0,05 \\ 1,091 & 0,15 \end{vmatrix}=1,047,$$

$$L_{23}=\frac{1}{x_3-x_2}\begin{vmatrix} y_2 & x_2-x \\ y_3 & x_3-x \end{vmatrix}=\frac{1}{0,2}\begin{vmatrix} 1,091 & 0,15 \\ 1,145 & 0,35 \end{vmatrix}=1,050,$$

$$L_{34}=\frac{1}{x_4-x_3}\begin{vmatrix} y_3 & x_3-x \\ y_4 & x_4-x \end{vmatrix}=\frac{1}{0,1}\begin{vmatrix} 1,145 & 0,35 \\ 1,170 & 0,45 \end{vmatrix}=1,057.$$

Полученные значения L_{i-1} заносим в таблицу, после чего вычисляем

$$L_{012}=\frac{1}{0,3}\begin{vmatrix} 1,048 & -0,15 \\ 1,047 & 0,15 \end{vmatrix}=1,048.$$

Значения L_{01} и L_{012} совпадают до третьего знака. На этом вычисления можно прекратить и с точностью до 10^{-3} записать $\sqrt[3]{1,15}=1,048.$

4.1.3. Первая и вторая интерполяционные формулы Ньютона

Часто интерполирование ведется для функций, заданных таблицами с равноотстоящими значениями аргументов. В этом случае шаг таблицы $h=x_{i+1}-x_i,(i=0,1,...,n-1)$ является величиной постоянной.

Составим таблицу конечных разностей, которые вычисляются по формуле:

$$\Delta^{k+1}y_i=\Delta^k y_{i+1}-\Delta^k y_i.$$

Таблица 4.3

Таблица конечных разностей

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	...
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	
x_1	y_1			
x_2	y_2	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	
x_3	y_3	Δy_2	...	
x_4	y_4			
...	...	...		

Первым интерполяционным многочленом Ньютона называется многочлен вида:

$$P_n(x)=y_0+\frac{\Delta y_0}{1!\cdot h}(x-x_0)+\frac{\Delta^2 y_0}{2!\cdot h^2}(x-x_0)(x-x_1)+...+\frac{\Delta^n y_0}{n!\cdot h^n}(x-x_0)...(x-x_{n-1}) \qquad (4.6)$$

Практически формула (4.6) применяется в несколько ином виде. Положим: $\frac{x-x_0}{h}=t$ или $x = x_0 + ht$. Тогда в новых обозначениях формула (4.6) перепишется:

$$P_n(x)=P_n(x_0+ht)=y_0+t\cdot\Delta y_0+\frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0+...+\frac{t(t-1)(t-2)...(t-n+1)}{n!}\cdot$$
$$\cdot\Delta^n y_0. \qquad (4.7)$$

В выражение многочлена (4.7) входят разности Δy_0, $\Delta^2 y_0,...,\Delta^n y_0$. Поэтому формулу (4.7) удобно применить для интерполирования в начале таблицы. Если требуется найти значение функции *f(x)* при значении $x = x'$, то в качестве x_0 берут ближайшее к x', причем меньшее значение аргумента. Говорят, что первый многочлен Ньютона применяется для интерполирования вперед.

Оценка погрешности первой интерполяционной формулы Ньютона:

$$\left|R_n(x)\right|\le\left|t(t-1)...(t-n)\right|\cdot M_{n+1}\frac{h^{n+1}}{(n+1)!},$$

где $M_{n+1}=\max\limits_{[a,b]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|$. (4.8)

Если аналитическое выражение $f^{(n+1)}(x)$ неизвестно или его трудно вычислить, то можно использовать следующую формулу:

$$\left|R_n(x)\right|\approx\left|\frac{\Delta^{n+1}y}{(n+1)}t(t-1)....(t-n)\right|, \text{ где } \Delta^{n+1}y=\max_{0\le m\le n}\left|\Delta^{n+1}y_m\right|. \qquad (4.9)$$

Вторым интерполяционным многочленом Ньютона называется многочлен вида:

$$\overline{P}_n(x)=y_n+\frac{\Delta y_{n-1}}{1!h}(x-x_n)+\frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}(x-x_n)(x-x_{n-1})+...+\frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}\cdot...\cdot$$
$$\cdot(x-x_n)(x-x_{n-1})...(x-x_1). \qquad (4.10)$$

На практике удобнее пользоваться другой формой записи многочлена:

Положим $t=\frac{x-x_n}{h}$, или $x=x_n+th$. В новых обозначениях получаем:

$$\overline{P}_n(x)=y_n+t\cdot\Delta y_{n-1}+\frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2}+...+\frac{t(t+1)(t+2)...(t+n-1)}{n!}\cdot$$
$$\cdot\Delta^n y_0. \qquad (4.11)$$

Оценка погрешности второго интерполяционного многочлена Ньютона:

$$\left|\overline{R}_n(x)\right|\le\left|t(t+1)...(t+n)\right|M_{n+1}\frac{h^{n+1}}{(n+1)!},$$

где $M_{n+1}=\max\limits_{[a,b]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|$. (4.12)

Если аналитическое выражение $f^{(n+1)}(x)$ неизвестно или его нужно вычислить, то можно использовать следующую формулу:

$$\left|\bar{R}_n(x)\right| \le \left|t(t+1)...(t+n)\right| \frac{\Delta^{n+1}y}{(n+1)!},$$

$$\text{где } \Delta^{n+1}y = \max_{0\le m\le n}\left|\Delta^{n+1}y_m\right|. \qquad (4.13)$$

В выражение многочлена (4.11) входят разности: $\Delta y_{n-1}, \Delta^2 y_{n-2}, ..., \Delta^n y_0$.

Поэтому формулу (4.11) используют для интерполирования в конце таблицы. Если требуется найти значение функции *f (x)* при значении *x = x'*, то в качестве x_n берут ближайшее к *x'* (большее) значение аргумента из чисел, содержащихся в таблице.

Говорят, что второй многочлен Ньютона применяется для интерполирования назад.

Рассмотрим пример использования многочленов Ньютона для интерполирования.

Пример 4.3. Функция $y = f(x)$ задана таблицей значений с шагом *h*.

а) Запишите первый интерполяционный многочлен Ньютона второго порядка, используя указанную ниже таблицу разностей.

x_i	$f(x_i)$	$\Delta y \cdot 10^{-5}$	$\Delta^2 y \cdot 10^{-5}$	$\Delta^3 y \cdot 10^{-5}$
0,150	0,14944	494	0	-1
0,155	0,15438	494	-1	1
0,160	0,15932	493	0	0
0,165	0,16425	493	0	1
0,170	0,16918	493	-1	
0,175	0,17411	492		
0,180	0,17903			

Вычислить значения функции при *x* = 0,156 при помощи первого многочлена Ньютона

$$P_2(x) = y_0 + t\cdot\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2}\Delta^2 y_0$$

Положим:

$$x_0,\ y_0 = 0{,}15438, \quad \Delta y_0 = 0{,}00494, \quad \Delta^2 y_0 = -0{,}00001,$$

$$\mathrm{t} = \frac{0{,}156\text{-}0{,}155}{0{,}005} = \frac{0{,}001}{0{,}005} = 0{,}2,$$

$$P_2\left(0{,}156\right) = 0{,}15438 + 0{,}2\cdot 0{,}00494 + \frac{0{,}2\cdot(0{,}2-1)}{2}\cdot 0{,}00001 =$$

$$= 0{,}1553672 \approx 0{,}15537.$$

б) Грубую оценку погрешности полученного значения можно получить, используя формулу (4.13).

$$\left|R_2(0{,}156)\right| \approx 0{,}2\cdot(0{,}2-1)\cdot(0{,}2-2)\frac{\Delta^3 y}{3!} = \frac{0{,}2\cdot 0{,}8\cdot 1{,}8}{2\cdot 3}0{,}00001 =$$

$$= 4{,}8\cdot 10^{-7}.$$

4.1.4. Интерполяция сплайнами.

При большом количестве узлов интерполяции сильно возрастает степень интерполяционных многочленов, что делает их неудобными для вычислений. Высокой степени многочленов можно избежать, разбив отрезок интерполяции на несколько частей с построением на каждой части самостоятельного интерполяционного многочлена. Такое интерполирование приобретает существенный недостаток: в точках стыка разных интерполяционных многочленов будет разрывной их первая производная.

В этом случае удобно пользоваться особым видом кусочно-полиномиальной интерполяции – интерполяцией сплайнами.

Сплайн – это функция, которая на каждом частичном отрезке является алгебраическим многочленом, а на всем заданном отрезке непрерывна вместе с несколькими своими производными. Ниже рассмотрен способ построения сплайнов третьей степени (кубических сплайнов), наиболее распространенных на практике.

Пусть интерполируемая функция $f(x)$ задана своими значениями y_i в узлах $x_i \ (i = 0,1,2,...,n)$.

На отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ функцию $f(x)$ запишем в виде:

$$S(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3 \tag{4.14}$$

где a_i, b_i, c_i, d_i - неизвестные коэффициенты (всего их $4n$).

Используя совпадение значений $S(x)$ в узлах с табличными значениями функции f, получаем следующие уравнения:

$$S(x_{i-1}) = y_{i-1} = a_i, \tag{4.15}$$

$$S(x_i) = y_i = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3. \tag{4.16}$$

Число этих уравнений – $2n$. Для получения дополнительных уравнений используем непрерывность $S'(x)$ и $S''(x)$ в узлах интерполяции интервала ($x_o; x_n$).

Получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} &b_{i+1} = b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2, \\ &c_{i+1} = c_i + 3d_i h_i \quad (i = 1,2,...,n-1). \end{aligned} \tag{4.17}$$

Для получения еще двух уравнений используем условие – равенство нулю второй производной $S''(x)$ в точках x_0, x_n:

$$c_1 = 0, \ c_n + 3d_n h_n = 0. \tag{4.18}$$

Исключив a_i из полученных выше уравнений, получаем систему, содержащую $3n$ неизвестных:

$$\begin{aligned} &b_i h_i - c_i h_i^2 - d_i h_i^3 = y_i - y_{i-1} \quad (i = 1,2,...,n), \\ &b_{i+1} - b_i - 2c_i h_i - 3d_i h_i^2 = 0 \quad (i = 1,2,...,n-1), \\ &c_{i+1} - c_i - 3d_i h_i = 0 \quad (i = 1,2,...,n-1), \\ &c_1 = 0, \\ &c_n + 3d_n h_n = 0. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Решив данную систему, получаем значения неизвестных b_i, c_i, d_i, которые определяют сплайн $S(x)$.

Рассмотрим пример построения сплайна.

Пример 4.4. Интерполирующая функция задана таблицей, содержащей четыре узла.

x_i	2	3	4	5
y_i	4	-2	6	-3

Используя формулы (4.14), составляем кубический сплайн:

$$S_1(x) = 4 + b_1(x-2) + c_1(x-2)^2 + d_i(x-2)^3,\ 2 \le x \le 3$$

$$S_2(x) = -2 + b_2(x-3) + c_2(x-3)^2 + d_2(x-3)^3,\ 3 \le x \le 5$$

$$S_3(x) = 6 + b_3(x-5) + c_3(x-5)^2 + d_3(x-5)^3,\ 5 \le x \le 7$$

Составляем систему уравнений с использованием формул (4.19):

$$\begin{aligned}
&b_1 + c_1 + d_1 = -6,\\
&2b_2 + 4c_2 + 8d_2 = 8,\\
&2b_3 + 4c_3 + 8d_3 = -9,\\
&b_2 - b_1 - 2c_1 - 3d_1 = 0,\\
&b_3 - b_2 - 4c_2 - 12d_2 = 0,\\
&c_2 - c_1 - 3d_1 = 0,\\
&c_3 - c_2 - 6d_2 = 0,\\
&c_1 = 0,\\
&c_3 + 6d_3 = 0.
\end{aligned}$$

Коэффициенты системы представлены в таблице 4.4.

Таблица 4.4

Коэффициенты, определяющие матрицу системы примера 4.4

b_1	c_1	d_1	b_2	c_2	d_2	b_3	c_3	d_2	Своб. члены
1	1	1	0	0	0	0	0	0	-6
0	0	0	2	4	8	0	0	0	8
0	0	0	0	0	0	2	4	8	-9
-1	-2	-3	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-1	-4	-12	1	0	0	0
0	-1	-3	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-1	-6	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	6	0

Система может быть решена с использованием компьютера, например, методом Гаусса. Получаем решение (результаты округлены до двух знаков после запятой):

$$b_1 = -11,60 \qquad c_1 = 5,60 \qquad d_1 = 0$$
$$b_2 = -0,40 \qquad c_2 = 6,60 \qquad d_2 = -1,70$$
$$b_3 = 1,62 \qquad c_3 = -4,59 \qquad d_3 = 0,76.$$

Полученные значения коэффициентов определяют искомый сплайн:

$$S_1(x) = 4 - 11,6(x-2) + 5,6(x-2)^2,$$

$$S_2(x) = -2 - 0,4(x-3) + 5,6(x-3)^2 - 1,7(x-3)^3,$$

$$S_3(x) = 6 + 1,62(x-5) - 4,59(x-5)^2 + 0,76(x-5)^3.$$

4.2. Лабораторная работа № 8. Численное интерполирование по интерполяционному многочлену Лагранжа. Схема Эйткена

Задания:

1) Функции $y = f(x)$ задана таблицей (смотри варианты заданий). Составить по таблице интерполяционный многочлен Лагранжа. Вычислить значение функции в заданной точке x. Оценить погрешность полученного результата.

2) Функции $y = f(x)$ задана таблицей:

x_k	1, 00	1,08	1,20	1,27	1,31	1,38
y_k	1,17520	1,30254	1,50946	1,21730	1,22361	1,23470

Пользуясь интерполяционной схемой Эйткена, вычислить с точностью до 10^{-5} значение $f(x^*)$.

Варианты заданий к лабораторной работе № 8

№ 1

1) $y = \ln x,\ x = 6,8$

x_k	6,0	6,5	7,0	7,5
y_k	1,792	1,8724	1,9646	2,015

2) $x^* = 1,134$.

№ 2

1) $y = e^x$, x=3,2

x_k	3,0	3,5	4,0	4,5
y_k	20,086	33,115	54,598	90,017

2) $x^* = 1,139$.

№ 3

1) $y = \sin x$, x=1,64

x_k	1,60	1,70	1,80	1,90
y_k	0,99957	0,99166	0,9738	0,9463

2) $x^* = 1,143$.

№ 4

1) $y = \cos x$, x=1,15

x_k	1,00	1,10	1,20	1,30

y_k	0,5403	0,4536	0,36236	0,2675

2) $x^* = 1,151.$

№ 5.

1) $y = ln\, x$, x=3,2

x_k	3,0	3,5	4,0	4,5
y_k	1,099	1,253	1,386	1,504

2) $x^* = 1,166.$

№ 6.

1) $y = x + \frac{10}{x}$, x=4,39

x_k	4,00	4,30	4,60	4,90
y_k	6,500	6,626	6,774	6,941

2) $x^* = 1,175.$

№ 7

1) $y = cos\, x$, x=0,12

x_k	0,10	0,30	0,50	0,70
y_k	0,99500	0,95534	0,87758	0,76484

2) $x^* = 1,182.$

№ 8

1) $y = sin\, x$, x=1,6

x_k	1,5	2,0	2,5	3,5
y_k	0,99745	0,9093	0,59847	0,14112

2) $x^* = 1,197.$

№ 9

1) $y = lg\, x$, x=7,2

x_k	7,0	7,5	8,0	8,5
y_k	0,8451	0,8751	0,9031	0,9294

2) $x^* = 1,185.$

№ 10

1) $y = \ln x$, $x = 8,2$

x_k	8,0	8,5	9,0	9,5
y_k	2,079	2,140	2,197	2,251

2) $x^* = 1,192.$

№ 11

1) $y = \lg x$, $x = 8,4$

x_k	8,1	8,5	8,9	9,3
y_k	0,908	0,929	0,949	0,968

2) $x^* = 1{,}195.$

№ 12

1) $y = e^x$, x=1,4

x_k	1,2	1,6	2,0	2,4
y_k	3,320	4.953	7,389	11,023

2) $x^* = 1{,}178.$

№ 13

1) $y = x + \dfrac{10}{x}$, x=1,4

x_k	1,0	1,5	2,0	2,5
y_k	10,100	8.167	7,000	6,500

2) $x^* = 1{,}135.$

№ 14

2) $y = \sin x$, x=0,64

x_k	0,60	0,65	0,70	0,75
y_k	0,56464	0,60519	0,64422	0,68164

2) $x^* = 1{,}136.$

№ 15

3) $y = \sin x$, x=1,04

x_k	1,00	1,05	1,10	1,15
y_k	0,84147	0,86742	0,89121	0,91276

2) $x^* = 1{,}152.$

№ 16

1) $y = \cos x$, x=0,16

x_k	0,15	0,20	0,25	0,30
y_k	0,99877	0,98007	0,96891	0,95534

2) $x^* = 1{,}167.$

4.3. Лабораторная работа № 9. Первый и второй интерполяционные многочлены Ньютона

Задания:

1) Пользуясь первой интерполяционной формулой Ньютона второй степени, найти значение функции *f(x)* для заданного *x*. Оценить погрешность полученного результата.

2) Пользуясь второй интерполяционной формулой Ньютона второй степени, найти значение функции *f(x)* для заданного *x*. Оценить погрешность полученного результата. Функция $f(x)$ задана таблицей значений, которая представлена в вариантах заданий к лабораторной работе.

Варианты заданий к лабораторной работе № 9

№ 1

1) x=0,02; 2) x=0,31.

x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
0,00	0,2808	0,20	0,4131	0,40	0,5522
0,05	0,3127	0,25	0,4477	0,45	0,5868
0,10	0,3454	0,30	0,4825	0,50	0,6209
0,15	0,3790	0,35	0,5174		

№ 2

1) x=0,03; 2) x=0,32.

x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
0,00	0,2808	0,20	0,4131	0,40	0,5522
0,05	0,3127	0,25	0,4477	0,45	0,5868
0,10	0,3454	0,30	0,4825	0,50	0,6209
0,15	0,3790	0,35	0,5174		

№ 3

1) x=1,53; 2) x=1,82.

x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
1,50	0,51183	1,70	0,4894	1,90	0,46678
1,55	0,50642	1,75	0,48376	1,95	0,4611
1,60	0,50064	1,80	0,47811	2,00	0,4554
1,65	0,49503	1,85	0,47245		

№ 4

1) x=0,03; 2) x=0,34.

x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
0,00	0,28081	0,20	0,41318	0,40	0,55226
0,05	0,31270	0,25	0,44771	0,45	0,58682
0,10	0,34549	0,30	0,48255	0,50	0,62096
0,15	0,37904	0,35	0,51745		

№5

1) x=1,52; 2) x=1,81.

X	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
1,50	0,51183	1,70	0,4894	1,90	0,46678
1,55	0,50642	1,75	0,48376	1,95	0,4611
1,60	0,50064	1,80	0,47811	2,00	0,4554
1,65	0,49503	1,85	0,47245		

№ 6

1) x=1,53; 2) x=1,82.

x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
1,00	0,5652	1,20	0,8861	1,40	1,3172
1,05	0,6375	1,25	0,9817	1,45	1,4482
1,10	0,7147	1,30	1,0848	1,50	1,5906
1,15	0,7973	1,35	1,1964		

№ 7

1) x=1,03; 2) x=1,33.

x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
1,00	0,5652	1,20	0,8861	1,40	1,3172
1,05	0,6375	1,25	0,9817	1,45	1,4482
1,10	0,7147	1,30	1,0848	1,50	1,5906
1,15	0,7973	1,35	1,1964		

№ 8

1) x=1,04; 2) x=1,63.

x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
1,00	0,5652	1,40	0,8861	1,80	1,3172
1,10	0,6375	1,50	0,9817	1,90	1,4482
1,20	0,7147	1,60	1,0848	2,00	1,5906
1,30	0,7973	1,70	1,1964		

№ 9

1) x=0,04; 2) x=0,32.

x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
0,00	0,28081	0,20	0,41318	0,40	0,55226
0,05	0,3127	0,25	0,44771	0,45	0,58682
0,10	0,34549	0,30	0,48255	0,50	0,62096
0,15	0,37904	0,35	0,51745		

№ 10

1) x=0,03; 2) x=0,32.

x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
0,00	0,3809	0,20	0,4532	0,40	0,5621
0,05	0,39120	0,25	0,4720	0,45	0,5832
0,10	0,4054	0,30	0,4856	0,50	0,6001
0,15	0,4290	0,35	0,5064		

№ 11

1) x=0,03; 2) x=0,32.

x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
0,00	0,2404	0,20	0,4032	0,40	0,5124
0,05	0,3228	0,25	0,4523	0,45	0,5681
0,10	0,3654	0,30	0,4624	0,50	0,6009
0,15	0,3890	0,35	0,5004		

№ 12

1) x=1,53; 2) x=1,82.

x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
1,50	0,51183	1,70	0,4894	1,90	0,46678
1,55	0,50642	1,75	0,48376	1,95	0,4611
1,60	0,50064	1,80	0,47811	2,00	0,4554
1,65	0,49503	1,85	0,47245		

№ 13

1) x=1,0 3; 2) x=1,34.

x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
1,00	0,5652	1,20	0,8861	1,40	1,3172
1,05	0,6375	1,25	0,9817	1,45	1,4482
1,10	0,7147	1,30	1,0848	1,50	1,5906
1,15	0,7973	1,35	1,1964		

№ 14

1) x=1,03; 2) x=1,32.

x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
1,00	0,5604	1,20	0,7851	1,40	1,2142
1,05	0,5752	1,25	0,8617	1,45	1,3442
1,10	0,6148	1,30	0,9848	1,50	1,4905
1,15	0,7072	1,35	1,0964		

№ 15

1) x=1,05; 2) x=1,64.

x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
1,00	0,5054	1,40	0,8062	1,80	1,2174
1,10	0,6073	1,50	0,9516	1,90	1,4362
1,20	0,7121	1,60	1,0246	2,00	1,5804
1,30	0,7874	1,70	1,1458		

№ 16

1) x=1,52; 2) x=1,81.

x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
1,50	0,51183	1,70	0,4894	1,90	0,46678
1,55	0,50642	1,75	0,48376	1,95	0,4611
1,60	0,50064	1,80	0,47811	2,00	0,4554
1,65	0,49503	1,85	0,47245		

4.4. Лабораторная работа № 10. Интерполяция сплайнами

Задания:

1. Составить сплайн, заданный интерполяционной таблицей.
2. Проверить практическое совпадение значений «соседних» выражений сплайна в узловых точках, а также совпадение их со значениями функции в узлах интерполяции.

Варианты заданий к лабораторной работе № 10

№ 1

x	2	5	6	8
$f(x)$	1	3	5	6

№ 2

x	-1	0	2	4
$f(x)$	0	1	3	4

№ 3

x	-4	-2	1	2
$f(x)$	-2	-1	0	2

№ 4

x	-3	-1	0	2
$f(x)$	-1	1	2	3

№ 5

x	-5	-4	0	1
$f(x)$	1	3	4	6

№ 6

x	-2	0	2	3
$f(x)$	-1	0	2	3

№ 7

x	0	1	3	5
$f(x)$	2	6	8	9

№ 8

x	1	3	4	5
$f(x)$	2	-1	3	4

№ 9

x	1	2	5	6
$f(x)$	-2	3	-1	4

№ 10

x	-1	2	3	6
$f(x)$	2	-3	4	-1

№ 11

x	2	4	5	6
$f(x)$	-4	2	0	-1

№ 12

x	1	2	4	8
$f(x)$	4	-3	5	-1

№ 13

x	-1	0	4	8
$f(x)$	3	-2	5	-1

№ 14

x	0	3	4	5
$f(x)$	4	-2	3	-2

№ 15

x	-1	-2	0	1
$f(x)$	2	-1	4	-2

№ 16

x	-3	-2	-1	2
$f(x)$	2	-2	3	-1

Глава 5. Численное дифференцирование

5.1. Справочные материалы по численному дифференцированию

5.1.1. Численное дифференцирование на основе интерполяционной формулы Лагранжа

Пусть $f(x)$ – функция, для которой нужно найти производную в заданной точке отрезка $[a, b]$, $F_n(x)$ – интерполяционный многочлен для $f(x)$, построенный на $[a, b]$.

$f(x) = F_n(x) + R_n(x)$, где $R_n(x)$ – погрешность интерполяции.

$f'(x) = F_n'(x) + R_n'(x), \quad r_n(x) = R_n'(x)$ – погрешность производной.

$$f'(x) = f'(x_0 + t \cdot h) \approx \frac{1}{h} \cdot \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \frac{(-1)^{n-i}}{i! \cdot (n-i)!} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{t^{[n+1]}}{t-i}\right), \text{ где}$$

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad t = \frac{x - x_0}{h}, \quad x_{i+1} - x_i = h, \quad t^{[n+1]} = t \cdot (t-1) \cdot \ldots \cdot (t-n).$$

Пользуясь выражением для остаточного члена интерполяционной формулы, можно получить:

$$r_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \left(f^{(n+1)}(\xi) \cdot w_{n+1}'(x) + w_{n+1}(x) \cdot \frac{d}{dx} f^{(n+1)}(\xi) \right). \quad (5.1)$$

В узлах интерполяции формула (5.1) примет вид:

$$r_n(x) = f^{(n+1)}(\xi) \cdot (-1)^{n-i} \cdot h^n \cdot \frac{i! \cdot (n-i)!}{(n+1)!}, \quad x_0 \le \xi \le x_n$$

$$r_n(x) = f^{(n+1)}(\xi) \cdot (-1)^{n-i} \cdot h^n \cdot \frac{i! \cdot (n-i)!}{(n+1)!}, \quad x_0 \le \xi \le x_n .$$

5.1.2.Численное дифференцирование на основе интерполяционной формулы Ньютона

$$f'(x) \approx P_n'(x_0 + t \cdot h),$$

$$f'(x) \approx \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 + \frac{2t-1}{2} \cdot \Delta^2 y_0 + \frac{3t^2 - 6t + 2}{6} \cdot \Delta^3 y_0 + \ldots \right) \quad (5.2)$$

Таким же образом можно вычислить и производные любого порядка. Формула (5.2) существенно упрощается, если x совпадает с узлом интерполирования. В этом случае каждый узел можно считать начальным: $x = x_0$, $t = 0$.

$$f'(x_0) = \frac{1}{h} \cdot \left(\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{3} - \frac{\Delta^4 y_0}{4} + \frac{\Delta^5 y_0}{5} - ... \right).$$

Оценка погрешности:

$$r_n(x) = \frac{h^n}{(n+1)!} \cdot \left(f^{(n+1)}(\xi) \cdot \frac{d}{dt} t^{[n+1]} + t^{[n+1]} \cdot \frac{d}{dt} (f^{(n+1)}(\xi)) \right).$$

В случае оценки погрешности в узле таблицы (*x=x₀, t=0*) будем иметь:

$$r_n(x) = (-1)^n \cdot \frac{h^n}{n+1} \cdot f^{(n+1)}(\xi).$$

Для оценки $f^{(n+1)}(\xi)$ при малых *h* используют формулу:

$$f^{(n+1)}(\xi) \approx \frac{\Delta^{n+1} y_0}{h^{n+1}}.$$

5.2. Лабораторная работа № 11. Численное дифференцирование с помощью интерполяционных формул Лагранжа и Ньютона

Задания:

1) Найти значение производной функции *y=f(x)*, заданной на отрезке [a, b] с помощью многочлена Лагранжа (*n=4*) в точке *x=m.* Сравнить полученный результат с точным значением производной в точке, используя непосредственное дифференцирование функции.

2) Найти значение производной функции *y=f(x)*, заданной на отрезке [a, b] с помощью многочлена Ньютона (*n=5*) в точке *x=a*. Оценить погрешность.

Варианты заданий к лабораторной работе № 11

№ 1

$f(x) = \sin\frac{x}{2}$, *a*=1,5, *b*=2, *m*=1,55.

№ 2

$f(x) = \cos\frac{x}{2}$, *a*=1,5, *b*=2, *m*=1,55.

№ 3

$f(x) = \sin\frac{x}{2}$, *a*=2, *b*=2,5, *m*=2,06.

№ 4

$f(x) = \cos\frac{x}{2}$, *a*=2, *b*=2,5, *m*=2,06.

№ 5

$f(x) = \lg x$, *a*=2, *b*=2,5, *m*=2,04.

№ 6

$f(x) = \ln\frac{x}{2}$, *a*=3, *b*=3,5, *m*=3,03.

№ 7

$f(x) = \lg x$, *a*=70, *b*=90, *m*=73.

№ 8

$f(x) = \ln\frac{x}{2}$, *a*=4,5, *b*=10, *m*=5,03.

№ 9

$f(x) = e^{\frac{x}{2}}$, *a*=3,4, *b*=4,3, *m*=3,6.

№ 10

$f(x) = e^{\frac{x}{2}}$, *a*=0,5, *b*=1,5, *m*=0,63.

№ 11

$f(x) = 3^{\frac{x}{2}}$, *a*=5,4, *b*=6, *m*=5,6.

№ 12

$f(x) = 3^{\frac{x}{2}}$, *a*=6, *b*=7,5, *m*=6,12.

№ 13

$f(x)=\lg x$, a=3, b=6, m=3,04.

№ 14

$f(x)=\ln\frac{x}{2}$, a=5, b=7, m=5,03.

№ 15

$f(x)=\sin\frac{x}{2}$, a=0, b=*1*, m=0,06.

№ 16

$f(x)=\cos\frac{x}{2}$, a=0, b=1, m=0,06.

Глава 6. Численное интегрирование

6.1. Справочные материалы по численному интегрированию

6.1.1. Квадратурные формулы Ньютона - Котеса

В тех случаях, когда для вычисления определённого интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ по каким-либо причинам не представляется возможным использовать формулу Ньютона - Лейбница, применяют численные методы вычисления интеграла. Многие из них основаны на том, что на отрезке [*a, b*] функцию *f(x)* заменяют интерполирующей функцией.

Разобьём отрезок интерполирования [*a, b*] на *n* частей. Получим $(n+1)$ точку $x_0, x_1, \ldots x_n$, где $x_{i+1}=x_i+h$ $\left(h=\dfrac{b-a}{n}\right)$. Заменим функцию *f(x)* на отрезке [*a*; *b*] интерполяционным многочленом Лагранжа для равноотстоящих узлов. Обозначим значения функции в узлах интерполяции: $y_i=f(x_i)$.

$$L_n(x_0+t\cdot h)=\sum_{i=0}^{n} y_i\cdot\frac{(-1)^{n-i}\cdot t^{[n+1]}}{i!\cdot(n-i)!\cdot(t-i)},$$

где $t=\dfrac{x-x_0}{h}$, $\quad t^{[n+1]}=t\cdot(t-1)\cdot\ldots\cdot(t-n)$.

Положим:

$$\int\limits_a^b f(x)dx\approx\int\limits_a^b L_n(x);\int\limits_a^b L_n(x)=\sum y_i\cdot\int\limits_{x_0}^{x_n}\frac{(-1)^{n-i}\cdot t^{[n+1]}}{i!\cdot(n-i)!\cdot(t-i)}dt, i=0,1,\ldots,n.$$

Сделаем замену: $x=a+ht$, $dx=\dfrac{b-a}{n}dt$.

При $x=x_0$ имеем t = 0, а при $x=x_n$ имеем t = n. Получаем:

$$\int\limits_a^b f(x)dx\approx(b-a)\cdot\sum y_i\cdot H_i, \tag{6.1}$$

где
$$H_i=\frac{1}{n}\cdot\int\limits_0^n\frac{(-1)^{n-i}\cdot t^{[n+1]}}{i!\cdot(n-i)!\cdot(t-i)}dt,\quad i=0,1,\ldots,n \tag{6.2}$$

Формула (6.1) называется квадратурной формулой Ньютона - Котеса, а (6.2) называются коэффициентами Котеса.

6.1.2. Формула трапеций

При $n = 1$ из формулы (6.1), (6.2) получаем:

$$H_0 = \frac{1}{2}, H_1 = \frac{1}{2}, \quad \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2} \cdot (y_0 + y_1) \tag{6.3}$$

Формула (6.3) даёт один из простейших способов вычисления определённого интеграла и называется формулой трапеций. Распространяя формулу (6.3) на все отрезки разбиения, получим общую формулу трапеций на отрезке [*a*; *b*]:

$$\int_a^b f(x(dx = h \cdot \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + ... + \frac{y_n}{2} \right). \tag{6.4}$$

Оценка погрешности метода трапеции:

$$\left| R_n \right| \le M \cdot \frac{(b-a) \cdot h^2}{12}, \text{ где } M = \max_{a \le x \le b} \left| f''(x) \right|. \tag{6.5}$$

6.1.3. Формула Симпсона

При $n = 2$ из формул (6.1), (6.2) имеем: $H_0 = \frac{1}{6}, \quad H_1 = \frac{2}{3}, \quad H_2 = \frac{1}{6}$.

Получаем на отрезке $\left[x_0; x_1 \right]$:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx (x_2 - x_0) \sum_{i=0}^{2} H_i \cdot y_i = 2h \cdot \left(\frac{1}{6} y_0 + \frac{2}{3} y_1 + \frac{1}{6} y_2 \right),$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3} \cdot (y_0 + 4y_1 + y_2). \tag{6.6}$$

Если $n = 2m$, то применяя формулу (6.6) к каждой паре частичных отрезков $\left[x_{2i-2}, x_{2i} \right]$ $(i = 1, 2, \ldots m)$ получим:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3} \left((y_0 + y_{2m}) + 2(y_0 + ... + y_{2m-2}) + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{2m-1}) \right) \tag{6.7}$$

Формула (6.7) называется формулой Симпсона.

Оценка погрешности формулы Симпсона:

$$\left| R_n \right| \le M \cdot \frac{(b-a) \cdot h^4}{180}, \text{ где } M = \max_{a \le x \le b} \left| f^{(4)}(x) \right|.$$

Иногда удобно использовать следующую оценку: $\left| R_n \right| \le \frac{\left| I_n - I_{2n} \right|}{15}$, где I_n, I_{2n} – значения интеграла, вычисленные по формуле Симпсона соответственно при *n* и *2n* отрезках разбиения.

Пример 6.1. Вычислить интеграл: $I=\int_0^1 x^2 \sin x\,dx$ по формуле трапеций, разделив отрезок [0; 1] на 5 равных частей и оценить погрешность вычислений. Значения подынтегральной функции приведены в таблице:

x_i	$\frac{y_i}{2}$ $(i=0;5)$	y_i $(i=1,2,3,4)$
0,0	0	
0,2		0,0079467
0,4		0,0623068
0,6		0,2032711
0,8		0,4591078
1,0	0,4207355	
Σ	0,4207355	0,7326324

I=0,2(0,4207355+0,7326324)=0,2306736.

Оценка ошибки метода: На отрезке [0; 1] $0<f''(x)<3,3$. Получаем

$$|R|<\frac{3,3\cdot 0,2^2}{12}\approx 0,011.$$

Пример 6.2. Вычислить интеграл: $I=\int_0^1 x^2 \sin x\,dx$ по формуле Симпсона, разделив отрезок [0; 1] на 10 равных частей и оценить погрешность вычислений. Значения подынтегральной функции приведены в таблице 6.1.

$$I=\frac{0,1}{3}\cdot(0,841471+1,465264+4,390471)=0,223240.$$

Для оценки остаточного члена найдём производную четвёртого порядка от подынтегральной функции.

$$f^{(4)}(x)=(x^2-12)\cdot\sin x-8x\cdot\cos x,$$

$$f^{(4)}(x)\le 14, |R|\le\frac{14\cdot 0,14}{180}=0,0000077.$$

Таблица 6.1

Значения функции для примера 6.1.

x_i	y_i $(i=0;10)$	$2y_i$ $(i=2,4,6,8)$	$4y_i$ $(i=1,3,5,7,9)$
0	0		
0,1			0,0039932
0,2		0,0158944	
0,3			0,1063872
0,4		0,1246436	
0,5			0,4794248
0,6		0,4065422	
0,7			1,2626666
0,8		0.9182156	
0,9			2, 537972
1,0	0,841471		
Σ	0,841471	1,4652648	4,390471

6.1.4. Вычисление интегралов методом Монте - Карло

В практических приложениях часто приходится вычислять значения кратных интегралов. Кратный интеграл вычисляется для функции многих переменных по замкнутой ограниченной многомерной области. Вычислительная схема имеет вид: интервал, соответствующий изменению каждой переменной внутри области интегрирования, разбивается на фиксированное число отрезков. Таким образом, задается разбиение области интегрирования на определенное число элементарных многомерных объемов. Вычисляются значения подынтегральной функции для точек, взятых по одной внутри каждого элементарного объема, и полученные значения суммируются. При увеличении кратности интеграла число слагаемых очень быстро возрастает. Пусть, например, мы разбиваем интервал изменения каждой переменной на десять частей. Для вычисления 10-кратного интеграла потребуется сумма, количество слагаемых в которой определяется числом 10^{10}. Вычисление такой суммы затруднительно даже на самых быстродействующих современных ЭВМ. В таких ситуациях предпочтительнее использовать для получения значения интеграла метод Монте - Карло. В основе оценки искомого значения интеграла I лежит известное соотношение: $I = y^{*} \cdot \sigma$, где y^{*} – значение подынтегральной функции в некоторой «средней» точке области интегрирования, а σ – (многомерный) объем области интегрирования. При этом предполагается, что подынтегральная функция (обозначим ее f) непрерывна в области интегрирования. Выберем в этой области n случайных точек M_i. При достаточно большом n приближенно можно считать:

$$y^{*} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(M_i). \qquad (6.8)$$

Точность оценки значения интеграла методом Монте-Карло пропорциональна корню квадратному из числа случайных испытаний и не зависит от кратности интеграла. Именно поэтому применение метода целесообразно для вычисления интегралов высокой кратности. Рассмотрим применение метода для простейшего случая интеграла: $I = \int_a^b f(x)dx$.

В этой ситуации $\sigma = b - a$ и равенство (6.8) принимает вид:

$I = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$, где x_i $(i = 1,2,...n)$ – случайные точки, лежащие в интервале $[a;b]$. Для получения таких точек на основе последовательности случайных точек x_i, равномерно распределенных в интервале [0; 1], достаточно выполнить преобразование: $x_i^{'} = a + (b-a)x_i$.

Рассмотрим пример вычисления интеграла вида $I = \iint_{\sigma} f(x)dxdy$, где σ - замкнутая область на плоскости.

Пример 6.1. Методом Монте-Карло вычислить: $I = \iint_{\sigma} (x^2 + y^2)dxdy$.

Область интегрирования σ определяется следующими неравенствами:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \le x \le 1, \\ 0 \le y \le 2x - 1 \end{cases}.$$

Область интегрирования σ расположена внутри единичного квадрата $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1.$

Для решения задачи воспользуемся таблицей случайных чисел, представленных в [2]. При проведении расчетов для случая n=20 (при использовании компьютера обычно используются большие значения n) получаем: из 20 пар случайных чисел из единичного квадрата только четыре точки попали в область σ. Подсчитав сумму значений $f(x, y)$ для точек, которые попали в область σ, получаем:

$$z^* = \frac{1}{4} \cdot 3{,}837 = 0{,}96,\ \ \sigma = \frac{1}{4},\ \ I = z^* \cdot \sigma = 0{,}96 \cdot \frac{1}{4} = 0{,}24.$$

6.2. Лабораторная работа № 12. Численное интегрирование по формуле трапеций и формуле Симпсона

Задания:

1) Вычислить интеграл по формуле трапеции; число частичных отрезков $n = 10$. Оценить абсолютную погрешность по формуле

$$|r| \le \frac{(b-a)^3}{12 \cdot n^2} \cdot M_2, \quad M_2 = \max|f''(x)|, \quad x \in [a,b].$$

2) Вычислить интеграл по формуле Симпсона при $n = 16$ (S_{16}) и при $n = 8$ (S_8). Оценить погрешность по формуле $r \le \dfrac{|S_8 - S_{16}|}{15}$.

Варианты заданий к лабораторной работе № 12

№ 1

1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 1{,}3}}$; 2) $\displaystyle\int_{0{,}2}^{1} \frac{tg\, x^2}{x^2 + 1} dx$.

№ 2

1) $\displaystyle\int_{1{,}2}^{2{,}7} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3{,}2}}$; 2) $\displaystyle\int_{1{,}6}^{2{,}4} (x+1) \cdot \sin x\, dx$.

№ 3

1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 1{,}3}}$; 2) $\displaystyle\int_{0{,}2}^{1} \frac{tg\, x^2}{x^2 + 1} dx$.

№ 4

1) $\displaystyle\int_{0{,}2}^{1{,}2} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$; 2) $\displaystyle\int_{0{,}6}^{1{,}4} \frac{\cos x}{x+1} dx$.

№ 5

1) $\displaystyle\int_{0{,}8}^{1{,}4} \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 3}}$; 2) $\displaystyle\int_{1{,}6}^{2{,}4} \sqrt{x} \cdot \cos x^2\, dx$.

№ 6

1) $\int\limits_{1,4}^{2,1} \frac{dx}{\sqrt{3x^2-1}}$; 2) $\int\limits_{0,9}^{1,6} \frac{\lg(x^2+1)}{x} dx$.

№ 7

1) $\int\limits_{1,2}^{2,6} \frac{dx}{\sqrt{3x^2+1}}$; 2) $\int\limits_{0,4}^{1,2} \frac{\cos x}{x+2} dx$.

№ 8

1) $\int\limits_{0,4}^{1,2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}$; 2) $\int\limits_{0,4}^{1,2} (2x+0,5)\cdot \sin x\, dx$.

№ 9

1) $\int\limits_{0,6}^{1,5} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+1}}$; 2) $\int\limits_{0,4}^{0,8} \frac{tg\,(x^2+0,5)}{2x^2+1} dx$.

№ 10

1) $\int\limits_{0,5}^{1,3} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$; 2) $\int\limits_{0,2}^{1,8} \sqrt{x+1}\cdot \cos x^2\, dx$.

№ 11

1) $\int\limits_{1,4}^{2,1} \frac{dx}{\sqrt{4x^2+1}}$; 2) $\int\limits_{0,4}^{1,2} (x+1,5)\cdot \sin 2x\, dx$.

№ 12

1) $\int\limits_{0,4}^{1,2} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+1}}$; 2) $\int\limits_{0,2}^{1,8} \sqrt{x^2+1}\cdot \cos x\, dx$.

№ 13

1) $\int\limits_{1,6}^{2,4} \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$; 2) $\int\limits_{0,4}^{1,2} (x+1,5)\cdot \sin x^2\, dx$.

№ 14

1) $\int\limits_{1,2}^{2,6} \frac{dx}{\sqrt{x^2+0,5}}$; 2) $\int\limits_{0,4}^{0,8} \frac{tg\,(x^2+0,5)}{x^2+1} dx$.

№ 15

1) $\int\limits_{1,8}^{2,4} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+1}}$; 2) $\int\limits_{0,4}^{1,2} \frac{\cos 2x}{x+1} dx$·

№ 16

1) $\int\limits_{1,6}^{2,8} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1,4}}$; 2) $\int\limits_{1,4}^{2,2} \sqrt{x}\cdot \cos 2x\, dx$·

6.3. Лабораторная работа № 13. Вычисление интегралов методом Монте-Карло

Задания:

1. Вычислить определенный интеграл, заданный на отрезке [a; b] методом Монте-Карло.

2. Вычислить двойные интегралы $\iint\limits_{\sigma} dxdy$, $\iint\limits_{\sigma} f(x,y)dxdy$ методом Монте-Карло. Область σ - замкнутая область на плоскости, представленная треугольником, заданным координатами вершин A, B, C.

Варианты заданий к лабораторной работе № 13

№ 1

1) $\int\limits_{1,2}^{2,6} \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+0,5}}$, 2) A(0;0), B(3;4,), C(5;0), $f(x,y) = x^2 + xy.$

№ 2

1) $\int\limits_{0,4}^{1,2} \frac{\cos x}{x^2+1}dx$, 2) A(0;5), B(6;4,), C(6;0), $f(x,y) = y^2 + xy.$

№ 3

1) $\int\limits_{1,6}^{2,4} \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$, 2) A(0;8), B(6;4,), C(3;0), $f(x,y) = y^2 + 2xy.$

№ 4

1) $\int\limits_{0,2}^{1,8} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{x+1}dx$, 2) A(0;4), B(5;8,), C(4;0), $f(x,y) = 2y^2 + 4xy.$

№ 5

1) $\int\limits_{1,2}^{2,8} \frac{x^2dx}{\sqrt{4x^2+1}}$, 2) A(0;0), B(6;8,), C(5;0), $f(x,y) = y^2 + 5xy.$

№ 6

1) $\int\limits_{0,8}^{2,4} \frac{\sin x}{x^2+1}dx$, 2) A(0;6), B(5;3,), C(3;0), $f(x,y) = x^2 + 2xy^2.$

№ 7

1) $\int\limits_{0,4}^{1,8} \frac{\sqrt{2x+1}}{x^2+1}dx$, 2) A(0;0), B(6;4,), C(3;0), $f(x,y) = 2x + 4xy^2.$

№ 8

1) $\int\limits_{1,2}^{2,4} \sqrt{x}\cdot\cos x\,dx$, 2) A(0;9), B(8;5,), C(4;0), $f(x,y) = x + 3x^2y.$

№ 9

1) $\int\limits_{1,4}^{2,4} \frac{dx}{\sqrt{x^2+0,5x}}$, 2) A(0;0), B(8;8), C(6;0), $f(x,y)=2x+3x^2y^2$.

№ 10

1) $\int\limits_{0,4}^{1,2} \frac{xdx}{\sqrt{2x+1}}$, 2) A(0;8), B(4;5), C(4;0), $f(x,y)=\sqrt{x+x^2y^2}$.

№ 11

1) $\int\limits_{0,6}^{2,4} \frac{x^2dx}{\sqrt{4x^3+1}}$, 2) A(0;0), B(6;4), C(2;0), $f(x,y)=\sqrt{y+2x^2y}$.

№ 12

1) $\int\limits_{0,5}^{1,5} \frac{\sin 2x}{x^2+1}dx$, 2) A(0;5), B(6;3), C(2;0), $f(x,y)=\sqrt{2y+xy}$.

№ 13

1) $\int\limits_{0,4}^{2,4} \sqrt{x^2+1}\cdot\sin x\,dx$, 2) A(0;9), B(8;5), C(4;0), $f(x,y)=x+3xy^2$.

№ 14

1) $\int\limits_{0,2}^{1,8} \sqrt{x^4+1}\cdot\cos x\,dx$, 2) A(0;6), B(8;4), C(4;0), $f(x,y)=x^2+3xy$.

№ 15

1) $\int\limits_{0,2}^{1} \frac{tg\,x^2}{2x^2+1}dx$, 2) A(0;0), B(8;4), C(2;0), $f(x,y)=y^2+3x^2$.

№ 16

1) $\int\limits_{0,2}^{1} \frac{1+\cos x^2}{x^2+1}dx$, 2) A(0;10), B(8;5), C(4;0), $f(x,y)=xy^2+x^2$.

Список литературы

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы — М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002.
2. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. Физматгиз, М., 1960.
3. Заварыкин В.М., Житомирский В.Г., Лапчик. М.П. Численные методы. — М.: Просвещение, 1990.
6. Калиткин Н.Н. Численные методы. — М.: Наука, 1978.
7. Копченова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах. — М.: Наука, 1972.