ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ» (МГТУ ГА)

---

Кафедра технической эксплуатации
радиоэлектронного оборудования воздушного транспорта

Е.Б. Биктеева, Н.В. Гевак

# ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

**Учебно-методическое пособие**
по выполнению практических занятий

*для студентов*
*специальности 25.05.03*
*всех форм обучения*

Москва
ИД Академии Жуковского
2020

УДК 681.51
ББК 6Ф6.5
Б42

Рецензент:
*Стукалов С.Б.* – канд. техн. наук, доцент

**Биктеева Е.Б.**
Б42 Теория автоматического управления [Текст] : учебно-методическое пособие по выполнению практических занятий / Е.Б. Биктеева, Н.В. Гевак. – М.: ИД Академии Жуковского, 2020. – 48 с.

Данное учебно-методическое пособие издается в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Теория автоматического управления» по учебному плану для студентов направления 25.05.03 всех форм обучения.

В учебно-методическом пособии по выполнению практических занятий представлены теоретические сведения и практические задания для решения задач, касающихся теоретических основ построения систем автоматического управления. Задания снабжены перечнем необходимой литературы и рекомендациями к решению задач.

Рассмотрено и одобрено на заседаниях кафедры 28.08.2020 г. и методического совета 28.08.2020 г.

**УДК 681.51**
**ББК 6Ф6.5**

*В авторской редакции*

Подписано в печать 02.12.2020 г.
Формат 60x84/16 Печ. л. 3 Усл. печ. л. 2,79
Заказ № 698/1008-УМП07 Тираж 90 экз.

Московский государственный технический университет ГА
125993, Москва, Кронштадтский бульвар, д. 20

Издательский дом Академии имени Н. Е. Жуковского
125167, Москва, 8-го Марта 4-я ул., д. 6А
Тел.: (495) 973-45-68
E-mail: zakaz@itsbook.ru

## Содержание

Стр.

**Общие организационно-методические указания по подготовке и проведению практических занятий** 4

**Практическое занятие №1**. Нахождение передаточных характеристик различных САУ 6

**Практическое занятие №2**. Исследование устойчивости САУ 11

**Практическое занятие №3**. Оценка качества линейных САУ при детерминированных входных воздействиях 19

**Практическое занятие №4**. Оценка качества линейных САУ при случайных входных воздействиях 26

**Практическое занятие №5**. Оптимизация параметров САУ с заданной структурой различными методами 31

**Практическое занятие №6**. Нахождение частотных характеристик различных САУ. Нахождение передаточных функций различных сложных систем 34

**Практическое занятие №7**. Нахождение показателей астатизма различных систем 39

**Практическое занятие №8.** Нахождение динамических ошибок различных САУ 43

**Список рекомендованной литературы** 48

## Общие организационно-методические указания по подготовке и проведению практических занятий

Целью данного вида работы обучающегося является закрепление и углубление знаний, полученных при изучении теоретического материала по дисциплине «Теория автоматического управления».

Целью проведения практических занятий является:

- обобщение, систематизация, закрепление полученных теоретических знаний по темам дисциплины;

- формирование умений применять полученные знания на практике;

- рассмотрение практических аспектов применения положений теории автоматического управления на примерах и обучение использованию современного программного обеспечения (ПО) при решении практических задач в рамках таких дисциплин как «Теория автоматического управления», «Автоматика и управление».

Учебное пособие предназначена для студентов, обучающихся по специальностям 25.05.03, 10.05.02 и другим родственным специальностям.

Указания по технике безопасности совпадают с требованиями, предъявляемыми к пользователю ЭВМ. Другие опасные и вредные факторы отсутствуют.

При подготовке к занятию студенты должны:

- уяснить цель и порядок проведения практического занятия;

- изучить учебные материалы, изложенные в рекомендуемой к практическому занятию литературе, а также лекционный материал.

В результате самостоятельной подготовки студенты должны уметь ответить на вопросы для самоконтроля. На занятии каждый студент должен иметь конспект лекций, данные организационно-методические указания и отдельную тетрадь для оформления отчетов по практическим занятиям.

Практическое занятие начинается с контроля готовности студентов к занятию. Контроль готовности начинается с проверки присутствия студентов на занятии, наличия у каждого студента организационно-методических указаний, тетради для оформления отчетов по практическим занятиям, конспекта лекций и заканчивается контрольным опросом студентов по знанию основных теоретических положений практического занятия.

Далее студенты самостоятельно решают задачи, полученные решения обсуждаются в группе. Условия задач и их решения оформляются студентами в отчетах.

Заканчивается занятие подведением итогов с оценкой работы студентов, оформлением и защитой отчета по практическому занятию.

## Практическое занятие №1

## Нахождение передаточных характеристик различных САУ

**Цель работы -** изучение типовых линейных динамических звеньев, правил преобразования структурных схем и определения передаточных функций систем автоматического управления (САУ).

Время - 2 часа.

### 1. Учебные вопросы

1. Типовые линейные динамические звенья.
2. Преобразование структурных схем САУ.
3. Определение передаточных функций САУ.

### 2. Основные теоретические сведения

Процессы в системах радиоавтоматики описываются линейными дифференциальными уравнениями вида:

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 y(t) = b_m x^{(m)}(t) + \ldots + b_0 x(t),$$

где левая часть уравнения описывает преобразование выходного сигнала объекта управления, а правая часть описывает преобразования входного воздействия.

Решение дифференциального уравнения (1) связано с вычислительными трудностями, а во многих случаях, например – в следящих системах, не может быть осуществлено, т.к. не известно управляющее воздействие.

Для исследования систем радиоавтоматики используются следующие основные характеристики: передаточная функция, переходная и импульсная переходная функции, комплексный коэффициент передачи, частотная характеристика.

Преобразованием Лапласа называется функциональное преобразование вида

$$L[f(t)] = F(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt$$

Применим к (1) преобразование Лапласа, получим:

$$D(p)Y(p) = N(p)X(p) + M_н(p),$$

где

$$D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + ... + a_0;$$

$$N(p) = b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + ... + b_0;$$

$Y(p)$- преобразование Лапласа для выходного сигнала системы;

$X(p)$- преобразование Лапласа для входного сигнала;

$M_н$ - многочлен, отображающий начальные условия.

Введём обозначения:

$$W(p) = \frac{N(p)}{D(p)}; \quad W_н(p) = \frac{M_н(p)}{D(p)}.$$

Тогда $Y(p) = W(p)X(p) + W_н(p)$.

Функция $W(p)$ характеризует динамические свойства системы радиоавтоматики, она не зависит от управляющего воздействия и полностью определяется параметрами системы $a_i$ и $b_i$. Эту функцию называют передаточной. Тогда при нулевых начальных условиях

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + ... + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + ... + a_0}.$$

**Переходная характеристика** есть реакция динамического элемента на воздействие в виде единичной ступенчатой функции:

$$h(t) = L^{-1}\left[\frac{W(p)}{p}\right]$$

Переходный процесс, возникающий в системе радиоавтоматики при действии единичного импульса, называют **импульсной переходной функцией** (*импульсная переходная функция, весовая функция, импульсная характеристика*):

$$g(t) = L^{-1}(W(P))$$

Основные характеристики типовых линейных динамических звеньев:

- безынерционное (усилительное звено):

$y(t)=kx(t)$ – уравнение связи;

$W(p) = k$ - передаточная функция;

$k$ – коэффициент передачи звена;

- инерционное звено

$T \cdot \frac{dy}{dt} + y = k \cdot x$ – уравнение связи;

$W(p) = \frac{k}{1 + pT}$ - передаточная функция;

$W(jw) = \frac{k}{1 + jwT}$ - частотная характеристика;

- интегрирующее звено:

$y(t) = k \cdot \int_0^t x(t)dt$ – уравнение связи;

$W(p) = \frac{k}{p}$ - передаточная функция;

- колебательное звено

$T^2 \frac{d^2}{dt^2} y + 2\xi T \frac{d}{dt} y + y = kx$, где $\xi$- относительный коэффициент затухания;

$W(p) = \frac{k}{p^2 T^2 + 2\xi pT + 1}$ - передаточная функция;

- идеальное дифференцирующее звено

$y(t) = K \frac{d}{dt} x(t)$ – уравнение связи;

W(p)=Kp - передаточная функция.

В системах радиоавтоматики встречаются три вида соединений звеньев: последовательное, параллельное и соединение звеньев по схеме с обратной связью.

При последовательном соединении звеньев передаточная функция системы будет равна произведению передаточных функций звеньев. Передаточная функция параллельно соединённых звеньев равна сумме передаточных функций отдельных звеньев.

Передаточная функция звеньев, соединённых по схеме с обратной связью равна:

- для случая отрицательной обратной связи

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{W_1(p)}{1 + W_0(p)W_1(p)}$$

- для случая положительной обратной связи

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{W_1(p)}{1 - W_0(p)W_1(p)}$$

### Примеры решения задач

<u>**Пример 1.**</u> На вход звена подается воздействие $x(t)=2t+1$, выходной сигнал описывается уравнением $y(t)=3e^{2t}$. Найти передаточную функцию системы $W(p)$.

<u>Решение.</u> Найдем изображение для входного сигнала. По табличным данным определяем:

$$x(t) = 2t + 1 \ \rightarrow X(p) = \frac{2}{p^2} + \frac{1}{p}; \ \ y(t) = 3e^{2t} \ \rightarrow Y(p) = \frac{3}{p-2}$$

Тогда по определению

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{\frac{2}{p^2} + \frac{1}{p}}{\frac{3}{p-2}} = \frac{\frac{2+p}{p^2}}{\frac{3}{p-2}} = \frac{(2+p)(p-2)}{3p^2} = \frac{p^2 - 4}{3p^2} = \frac{1}{3} - \frac{4}{3p^2}$$

<u>Ответ:</u> $W(p) = \frac{1}{3} - \frac{4}{3p^2}$.

<u>**Пример 2**</u>. Система состоит из трех последовательно соединенных звеньев, имеющих следующие передаточные функции: $W_1 = \frac{2}{p}$; $W_2 = \frac{1}{p+0.25}$; $W_3 = 1.5p$ . Найти передаточную функцию системы.

<u>Решение</u>. Передаточная функция последовательно соединенных звеньев есть произведение передаточных функций каждого звена. Тогда:

$$W_{\text{с}} = \frac{2}{p} \cdot \frac{1}{p + 0.25} \cdot 1.5p = \frac{3}{p + 0.25}$$

<u>Ответ:</u> $W_{\text{с}} = \frac{3}{p+0.25}$

## 3. Задание на практическое занятие

1. На вход системы, состоящей из 3 параллельных звеньев, подается сигнал $x(t)=2t+l$, на выходе каждого из звеньев соответственно имеются сигналы:

$y_1(t)=3t+2$, $y_2(t)=5t-1$, $y_3(t)=2t+4$. Найти передаточные функции звеньев и всей системы в целом.

2. На вход системы с обратной связью, в состав которой включено одно звено, подан сигнал x(t)=2, на выходе сигнал x(t)=3, передаточная функция звена $w_1(p)=\frac{p}{p+2}$. Найти передаточную функцию обратной связи.

3. Передаточная функция системы имеет вид $w(p)=\frac{2}{2p+1}$. Построить её ЛЧХ.

4. По дифференциальному уравнению объекта $\dddot{y}+6\ddot{y}+y=5x$ определить передаточную функцию объекта $W(p)=\frac{y}{x}$.

5. Передаточная функция звена равна $W(p)=\frac{2}{p^2}$. Задающее воздействие имеет вид: $\lambda(t)=2t+3$. Требуется найти выражение для выходного сигнала в операторной форме.

**Вопросы для самоконтроля**

1. Дайте краткую характеристику операторному, частотному и временному методам анализа линейных элементов и систем.

2. Что называется передаточной функцией элемента (системы)? Как получить эту функцию по известному дифференциальному уравнению?

3. Какие динамические звенья называют типовыми? Назовите основные типовые звенья АС. Укажите примеры элементов АС, которые могут быть описаны типовыми звеньями (для каждого типового звена).

4. Приведите выражения для передаточных функций типовых звеньев?

5. Какой вид имеют частотные характеристики (АЧХ, ФЧХ) типовых звеньев? Какими выражениями они описываются?

6. Как строят ЛАХ и ЛФХ типовых звеньев? Что дает использование логарифмических частотных характеристик для исследования АС?

7. Что называется амплитудно-фазовой характеристикой (АФХ) элемента (системы)?

9. Как строят АФХ типовых звеньев систем радиоавтоматики?

10. Изобразите временные характеристики (переходную, импульсную) типовых звеньев. Приведите их аналитическое описание.

## Практическое занятие №2
## Исследование устойчивости САУ

**Цель работы** – изучение устойчивости динамических звеньев САУ с использованием различных методов

Время - 2 часа.

### 1. Учебные вопросы

1. Критерий Гурвица.
2. Критерий Михайлова.
3. Критерий Найквиста.

### 2. Основные теоретические сведения

Под устойчивостью понимается свойство системы возвращаться к состоянию установившегося равновесия после устранения возмущения, которое вывело ее из этого состояния.

Процессы в системах радиоавтоматики описываются дифференциальными уравнениями вида (s – оператор дифференцирования):

$$\left(1 + W_p(s)\right) y(t) = W_p(s) x(t)$$

В соответствии с необходимым условием устойчивости все коэффициенты характеристического уравнения (1) должны быть больше нуля.

Для оценки устойчивости системы радиоавтоматики по критерию Гурвица необходимо из коэффициентов характеристического уравнения (1) составить матрицу Гурвица вида:

$$\begin{matrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & a_0 \end{matrix}$$

Для оценки устойчивости системы радиоавтоматики необходимо вычислить определители Гурвица (диагональные миноры), которые получают из матрицы (2) путём отчёркивания равного числа строк и столбцов в левом верхнем углу матрицы. Система радиоавтоматики устойчива, если при $a_n > 0$

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0.$$

Представим характеристическое уравнение в виде функции комплексного переменного

$$D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0$$

Сделав замену $p \to j\omega$, получим уравнение комплексного вектора

$$D(j\omega) = a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \cdots + a_1 (j\omega) + a_0$$

конец, которого при изменении угловой частоты колебаний от нуля до бесконечности опишет на комплексной плоскости некоторую кривую – годограф, эта кривая называется **кривой Михайлова**. Для построения кривой Михайлова необходимо в функции D(p) заменить $p \to j\omega$, и выделить действительную и мнимую части

$$D(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$$

где вещественная частотная часть содержит четные части, а мнимая – нечетные.

Критерий Михайлова формируется следующим образом.

Система ***n***-го порядка будет устойчива если годограф $D\,(j\omega)$, начинаясь на действительной положительной оси, огибает против часовой стрелки начало координат, проходя последовательно ***n*** квадрантов. Для устойчивых САУ кривая Михайлова всегда имеет спиралевидную форму, уходящую в бесконечность в квадранте комплексной плоскости, номер которого соответствует степени характеристического уравнения. Больше, чем ***n*** квадрантов, кривая Михайлова вообще не может пройти.

Критерий Найквиста применяется для оценки устойчивости замкнутой САУ при известной амплитудно-фазовой частотной характеристики разомкнутой системы.

Чтобы замкнутая система САУ была устойчивой, необходимо и достаточно соблюдение следующих условий:

1) при устойчивости разомкнутой системы САУ (или находящейся на границе устойчивости) АФЧХ при изменении частоты $\boldsymbol{\omega}$ от 0 до ∞ не должна охватывать точку с координатами (-1,j0);

2) при неустойчивости разомкнутой системы АФЧХ при изменении $\boldsymbol{\omega}$ от минус до плюс бесконечности, должна охватывать точку (-1,j0) столько раз,

сколько корней характеристического уравнения разомкнутой системы лежит справа от мнимой оси плоскости корней.

В основу анализа устойчивости по логарифмическим частотным характеристиками положен критерий Найквиста, но строиться при этом не амплитудно-фазовая характеристика, а логарифмическая амплитудная частотная характеристика (ЛАХ) и логарифмическая фазовая характеристика (ЛФХ) разомкнутой системы. Если разомкнутая система САУ устойчива, то для устойчивости замкнутой САУ необходимо и достаточно, чтобы во всех областях положительных ЛАХ разность между числом положительных и отрицательных переходов фазовой характеристики $\boldsymbol{\varphi(\omega)}$ через линию $\boldsymbol{-\pi}$ равнялась нулю.

При проектировании следует обеспечить определённые запасы устойчивости системы, которые характеризуют близость годографа частотной характеристики разомкнутой системы к точке с координатами $(-1, j0)$. Запасы устойчивости определяются на двух частотах: **частоте среза**, при которой амплитудно-частотная характеристика разомкнутой системы равна единице и **критической частоте**, при которой фазочастотная характеристика равна $-\pi$.

Различают запас устойчивости по фазе и усилению. Запас устойчивости по фазе показывает, на какое значение фазочастотная характеристика разомкнутой системы на частоте среза отличается от $-\pi$:

$\Delta\varphi = \pi - \varphi_p(w_{ср.})$.

Запас устойчивости по усилению определяет, во сколько раз нужно увеличить коэффициент усиления, чтобы система оказалась на границе устойчивости. Запас устойчивости по усилению вычисляется по формуле:

$$\alpha = \frac{1}{|W_p(j\omega_{\text{кр}})|}$$

Системы радиоавтоматики, годографы частотных характеристик которых пересекают вещественную ось только справа от точки с координатами (-1, jω) *называют абсолютно устойчивыми.*

Если годограф $W_p(j\omega)$ не имеет точек пересечения с вещественной осью слева от точки с координатами (-1, jω), то для устойчивости замкнутой системы радиоавтоматики необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\omega_{ср.} < \omega_{кр.}$ .

В условно устойчивых системах радиоавтоматики для оценки устойчивости следует в диапазоне частот, где логарифмическая амплитудно-частотная характеристика больше нуля? подсчитать число переходов логарифмической фазочастотной характеристики через прямую $-\pi$. Если число положительных переходов через эту прямую равно числу отрицательных, то система в замкнутом состоянии устойчива.

Если $\omega_{ср} = \omega_{кр}$, то система радиоавтоматики находится на границе устойчивости. Критический коэффициент усиления вычисляют по формуле:

$$20\lg K_{кр} = 20\lg k + \Delta Л,$$

где ΔЛ – значение ЛАЧХ при $\omega = \omega_{кр}$

Если годограф частотной характеристики разомкнутой системы пересекает вещественную ось и слева от точки с координатами $(-1, j0)$, то систему называют *условно устойчивой.* Неустойчивой такая система может быть как при увеличении, так и при уменьшении коэффициента усиления. Для нормальной работы системы радиоавтоматики необходимо, чтобы запас устойчивости по усилению был $\alpha \geq 2$, а запас устойчивости по фазе $0{,}5 - 1\,рад$.

## Примеры решения задач

**Пример 1.** Оценить устойчивость системы, состоящей из двух последовательно соединённых звеньев с передаточными функциями $W_1(p) = \dfrac{2}{1+p}$ и $W_2(p) = \dfrac{3}{p+3}$.

Решение. Так как звенья соединены последовательно, то передаточная функция разомкнутой системы имеет вид:

$$W_p(p) = W_1(p) \cdot W_2(p) = \frac{2}{p+1} \cdot \frac{3}{p+3} = \frac{6}{p^2 + 4p + 3}.$$

Так как характеристическое уравнение имеет вид:

$$\underset{-\infty \leq w \leq +\infty}{\Delta \arg} G(jw) = \sum_{i=1}^{n} \arg(jw - \lambda_i),$$

то

$$1 + \frac{6}{p^2 + 4p + 3} = 0,$$

$$\frac{p^2+4p+9}{p^2+4p+3}=0.$$

Так как это выражение равно нулю, если равен нулю числитель, то рассмотрим уравнение $p^2+4p+9=0$. Выпишем коэффициенты: $a_0=9, a_1=4, a_2=1$. Составим матрицу Гурвица:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}.$$

Так как $a_2=1>0$, $\Delta_1=4>0$, $\Delta_2=\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 9 \end{vmatrix}>0$, то по критерию Гурвица система устойчива.

Ответ. Система устойчива.

**Пример 2.** Для системы, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии $W_p(p)=\dfrac{10}{p(1+0,1p)(1+0,01p)}$, определить запас устойчивости по усилению.

Решение. Запас устойчивости по усилению рассчитывается по формуле:

$$\alpha=\frac{K_{кр}}{K},$$

где $K=10$ - коэффициент усиления. Критический коэффициент усиления находится из условия $\Delta_2=0$ после составления матрицы Гурвица.

Найдем корни характеристического уравнения $1+W_p(p)=0$. В нашем случае $1+\dfrac{K_{кр}}{p(1+0,1p)(1+0,01p)}=0$. После преобразований получаем уравнение:

$$p(1+0,1p)(1+0,01p)+K_{кр}=0.$$

Раскрыв скобки, приходим к уравнению:

$$0,001p^3+0,11p^2+p+K_{кр}=0.$$

Выпишем коэффициенты: $a_0 = K_{кр}$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0{,}11$, $a_3 = 0{,}001$. Составим матрицу Гурвица:

$$\begin{pmatrix} 0{,}11 & K_{кр} & 0 \\ 0{,}001 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}11 & K_{кр} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим минор $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0{,}11 & K_{кр} \\ 0{,}001 & 1 \end{vmatrix}$. Критический коэффициент усиления ищется из условия: $\begin{vmatrix} 0{,}11 & K_{кр} \\ 0{,}001 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Тогда $K_{кр} = 110$. Следовательно, запас устойчивости по усилению рассчитывается следующим образом:

$$\alpha = \frac{110}{10} = 11.$$

<u>Ответ.</u> Запас устойчивости $\alpha = \frac{110}{10} = 11.$

## 3. Задание на практическое занятие

1. Оценить устойчивость системы, состоящей из одного звена с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{1}{1+p}$$

2. Оценить устойчивость системы передаточная функция, которой в замкнутом состоянии имеет вид:

$$W(p) = \frac{6}{(1+p)(p+3)}$$

3. Оценить устойчивость системы передаточная функция, которой в замкнутом состоянии имеет вид

$$W(p) = \frac{2 \cdot 10^4}{p^3 + 130p^2 + 3.2 \cdot 10^3 p + 2 \cdot 10^4}$$

4. Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{k}{p(1+Tp)^2}.$$

Найти зависимость критического коэффициента усиления от постоянной времени Т.

5. По логарифмическим частотным характеристикам оценить запас устойчивости по усилению в системе, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии:

$$W(p) = \frac{50(1 + 0.2p)}{p^2(1 + 0.02p)}$$

6. По критерию устойчивости Михайлова оценить устойчивость системы с передаточной функцией

$$W_{\text{р}}(p) = \frac{2}{p}.$$

8. По критерию устойчивости Найквиста оценить устойчивость системы, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии

$$W_{\text{р}}(p) = \frac{2}{1 + p}.$$

8. Оценить запас устойчивости по фазе системы, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии

$$W_{\text{р}}(p) = \frac{3p + 2}{p^2}$$

9. Для системы, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии

$$W(p) = \frac{10}{p(1 + 0.1p)(1 + 0.01p)}$$

определить запас устойчивости по усилению.

## Вопросы для самоконтроля

1. Необходимое и достаточное условие устойчивости, связанное с корнями характеристического уравнения.

2. Необходимое условие устойчивости, связанное с коэффициентами характеристического уравнения.

3. Критерий устойчивости Гурвица.

4. Критерий устойчивости Михайлова.

5. Критерий устойчивости Найквиста.
6. Запасы устойчивости по фазе и усилению. Условно устойчивая система.
7. Оценка устойчивости по ЛЧХ.
8. Устойчивость систем с запаздыванием.

## Практическое занятие №3

## Оценка качества линейных САУ при детерминированных входных воздействиях

**Цель работы -** изучение различных параметров САУ, характеризующих качество их функционирования.

Время - 2 часа.

### 1. Учебные вопросы

1. Показатели качества САУ.
2. Показатели качества САУ во временной области.
3. Частотные показатели качества САУ.

### 2. Основные теоретические сведения

Методы анализа качества переходного процесса можно разделить на две группы. прямые методы оценки качества по переходной характеристике и косвенные методы. Прямые методы требуют решения дифференциальных уравнений (или экспериментальных исследований). Косвенные методы позволяют, не решая уравнений, определять некоторые показатели качества.

*Динамическая ошибка (точность)* работы системы радиоавтоматики оценивается при управляющем воздействии вида $x(t)=\sum_{t=0}^{k}\alpha_i t^i$.

Для оценки качества работы систем РА применяются и *косвенные методы.* Эти методы базируются на вычислении интегральных оценок. Широко используется квадратичная интегральная оценка:

$$J=\int_0^\infty\left[e^2(t)+\alpha_1\dot{e}^2(t)+\alpha_2\ddot{e}^2(t)+\ldots+\alpha_k\left[e^{(k)}(t)\right]^2\right]dt,$$

где $e(t)$ - ошибка системы, равная разности входного $x(t)$ и выходного $y(t)$ сигналов; $\alpha_i$ - постоянные коэффициенты, $e^{(k)}$ – производные от ошибки.

К основным показателям качества переходного процесса в системе радиоавтоматики относятся следующие параметры:

1) длительность переходного процесса $t_n$, равная интервалу времени с момента подачи сигнала до момента времени, когда выходной сигнал не будет отличаться от его установившегося значения более чем на 5%;

2) перерегулирование $\gamma$, равное отношению максимального значения выходного сигнала в переходном процессе к установившемуся значению:

$$\gamma = \frac{y_{\max}}{y_y}$$

3) время установления первого максимума выходного сигнала $t_p$, характеризующее скорость изменения выходного сигнала в переходном процессе;

4) частота колебаний в переходном процессе $w_t = \frac{2\pi}{T}$, где $T$ - период колебаний.

Установившееся значение выходного сигнала системы вычисляется следующим образом: при единичном входном сигнале $y_y = \lim\limits_{p \to 0} pW_з(p) \cdot \frac{1}{p} = W_з(0)$, где $W_з(p)$ - передаточная функция замкнутой системы.

В астатических системах радиоавтоматики установившееся значение выходного сигнала в переходном процессе равно единице, в статических системах - $\frac{K}{1+k}$ .

Частотные показатели качества работы систем радиоавтоматики определяются по амплитудно-частотной характеристике замкнутой системы.

К частотным показателям качества работы систем радиоавтоматики относятся следующие параметры:

1) **полоса пропускания** $w_n$ - диапазон частот, в котором амплитудно-частотная характеристика больше или равна единице. Если амплитудно-частотная характеристика замкнутой системы радиоавтоматики во всём диапазоне частот меньше единицы, то полоса пропускания отсчитывается по уровню $0{,}7$.

2) **резонансная частота** $w_p$ - частота, соответствующая максимуму амплитудно-частотной характеристики замкнутой системы, эта частота характеризует частоту колебаний в переходном процессе;

3) **показатель колебательности** $M$ - максимальное значение амплитудно-частотной характеристики замкнутой системы. Можно показать, что колебательность системы связана с запасом устойчивости по фазе выражением:

$$M = \frac{1}{sin\Delta\varphi}$$

где $\Delta\varphi$ – запас устойчивости по фазе.
Обычно стремятся, чтобы показатель колебательности не превышал двух.

**Примеры решения задач**

**Пример 1.** Дана система с передаточной функцией звена

$$W(p) = \frac{3}{(0{,}1p+1)(0{,}15p+1)}.$$

Требуется найти перерегулирование в системе.

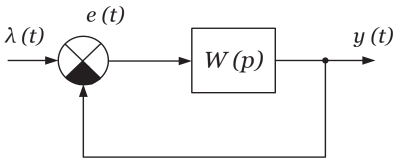


Рисунок 1 – Структурная схема системы радиоавтоматики

Решение. Передаточная функция замкнутой системы записывается в виде:

$$W_з(p) = \frac{W_p(p)}{1+W_p(p)} = \frac{\frac{3}{(0{,}1p+1)(0{,}15p+1)}}{1+\frac{3}{(0{,}1p+1)(0{,}15p+1)}} = \frac{3}{(0{,}1p+1)(0{,}15p+1)+3} =$$

$$= \frac{3}{0{,}015p^2+0{,}25p+4}.$$

Для приведённого примера:

$$\frac{W_з(p)}{p} = \frac{3}{p\left(0{,}015p^2+0{,}25p+4\right)}.$$

Разложим эту дробь в сумму обыкновенных дробей:

$$\frac{W_з(p)}{p}=\frac{A}{p}+\frac{Bp+C}{0,015p^2+0,25p+4}.$$

$$A\left(0,015p^2+0,25p+4\right)+Bp^2+Cp=3.$$

$$\left(0,015A+B\right)p^2+\left(0,25A+C\right)+4A=0p^2+0p+3.$$

Получим систему уравнений:

$$\begin{cases}4A=3,\\0,015A+B=0,\\0,25A+C=0.\end{cases}$$

Решением этой системы является следующий набор значений:

$$\begin{cases}A=0,75,\\B=-0,015\cdot 0,75=-0,01125,\\C=-0,25\cdot 0,75=-0,1875.\end{cases}$$

Таким образом:

$$\frac{W_з(p)}{p}=\frac{0,75}{p}-\frac{0,01125p+0,1875}{0,015p^2+0,25p+4}=\frac{0,75}{p}-\frac{1125p+18750}{1500p^2+25000p+400000}=$$

$$=\frac{0,75}{p}-\frac{9p+150}{12p^2+200p+3200}=\frac{0,75}{p}-\frac{9p}{12p^2+200p+3200}-\frac{150}{12p^2+200p+3200}=$$

$$=\frac{\frac{3}{4}}{p}-\frac{3}{4}\frac{p+\frac{25}{3}}{\left(p+\frac{25}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{1775}}{3}\right)^2}-\frac{3}{\sqrt{1775}}\frac{\frac{75}{12}\cdot\frac{\sqrt{1775}}{3}}{\left(p+\frac{25}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{1775}}{3}\right)^2}=$$

$$=\frac{\frac{3}{4}}{p}-\frac{3}{4}\frac{p+\frac{25}{3}}{\left(p+\frac{25}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{1775}}{3}\right)^2}-\frac{75}{4\sqrt{1775}}\frac{\frac{\sqrt{1775}}{}}{\left(p+\frac{25}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{1775}}{3}\right)^2}.$$

Используя таблицу преобразований, имеем:

$$h(t)=\frac{3}{4}\cdot 1(t)-\frac{3}{4}e^{-\frac{25}{3}t}\cos\frac{\sqrt{1775}}{3}t-\frac{75}{4\sqrt{1775}}e^{-\frac{25}{3}t}\sin\frac{\sqrt{1775}}{3}t.$$

По графику $h(t)$ (рис. 2) необходимо определить величину перерегулирования $\gamma$.

Установившиеся значение выходного сигнала системы вычисляется следующим образом:

$$y_y=\lim_{p\to 0} pW_з(p)\frac{1}{p}=W_з(0),$$

где $W_з(p)$ - передаточная функция замкнутой системы.

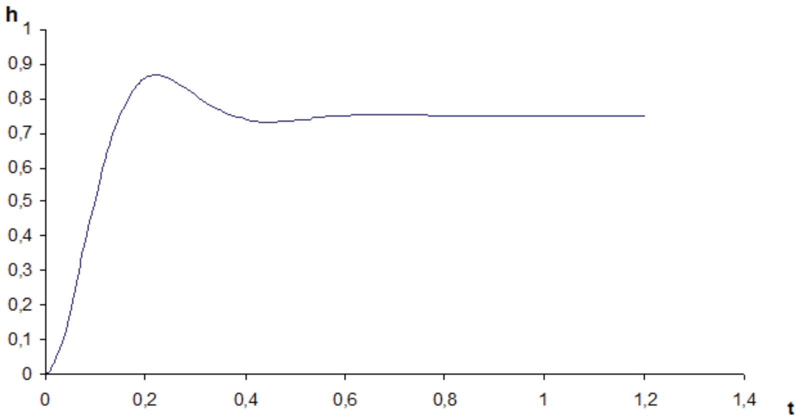


Рисунок 2 – График переходной характеристики

В данном случае $y_y=\dfrac{3}{0{,}015\cdot 0^2+0{,}25\cdot 0+4}=\dfrac{3}{4}=0{,}75.$

Перерегулирование $\gamma$ равно отношению максимального значения выходного сигнала в переходном процессе к установившемуся значению:

$$\gamma=\frac{y_{\max}}{y_y}=\frac{0{,}86}{0{,}75}=1{,}15.$$

Ответ. Перерегулирование $\gamma$=1,15.

## 3. Задание на практическое занятие

1. Для системы с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{1}{p^4}$$

найти переходную, импульсную переходную функции, построить переходной процесс и найти показатели его качества.

2. Для системы с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{1}{p+3}$$

найти переходную, импульсную переходную функции, построить переходной процесс и найти показатели его качества.

3. Для системы, состоящей из двух последовательных звеньев с передаточными функциями

$$W1(p) = \frac{3p}{p^2+1}; \quad W2(p) = \frac{1}{p}$$

найти переходную, импульсную переходную функции, построить переходной процесс и найти показатели его качества.

4. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид:

$$W_{\text{р}}(p) = \frac{3}{(1+0.2p)(1+0.01p)}$$

Определит переходную, импульсную переходную функции замкнутой системы, построить переходной процесс и найти показатели его качества.

5. Для системы, состоящей из трех параллельных звеньев с передаточными функциями

$$W1(p) = \frac{2}{p}; \quad W2(p) = \frac{3}{p+1}; \quad W3(p) = \frac{2p+1}{p^2}$$

найти переходную, импульсную переходную функции, построить переходной процесс и найти показатели его качества.

## Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение переходной и импульсной функции?

2. Приведите основные показатели качества работы система САУ?

3. Какими факторами определяется длительность процесса регулирования?

4. От чего зависит время установления первого максимума и частота САУ?

5. Качество переходных процессов в САУ. Интегральная оценка.

6. Методы анализа детерминированных процессов в линейных стационарных системах.

7. Типовые входные воздействия. Виды переходных процессов.

8. Показатели качества переходного процесса в системе РА.

## Практическое занятие №4

## Оценка качества линейных САУ при случайных входных воздействиях

**Цель работы -** изучение различных параметров САУ, характеризующих качество их функционирования, при случайных входных воздействиях.

Время - 2 часа.

### 1. Учебные вопросы

1. Показатели качества САУ.
2. Частотные показатели качества САУ.
3. Дисперсия ошибки.
4. Эффективная полоса пропускания системы.

### 2. Основные теоретические сведения

Реальные системы автоматики работают в условиях воздействия на них случайных возмущений. Кроме того, и задающее воздействие в общем случае описывается случайным процессом. В большинстве случаев закон распределения ошибки системы можно считать гауссовским, поэтому для расчёта составляющих суммарной средней квадратической ошибки достаточно учесть математическое ожидание и корреляционную функцию ошибки или её спектральную плотность (при стационарном процессе).

Суммарная ошибка состоит из двух составляющих, одна из которых, определяющая точность воспроизведения сигнала, зависит от передаточной функции ошибки, вторая, обусловленная действием помехи, - от передаточной функции замкнутой системы.

Точность системы относительно случайных составляющих сигнала и помехи оценивается дисперсией ошибки:

$$\delta_e^2 = M\left[e^2\left(t\right)\right] = R_e\left(\tau\right)\ \Big|_{\tau=0},$$

где $\delta_e^2$ - дисперсия ошибки; $\delta_e$ - средняя квадратическая ошибка системы, $M$ - математическое ожидание от квадрата ошибки; $R_e\left(\tau\right)$ - автокорреляционная функция ошибки.

Дисперсию ошибки можно представить в виде

$$\delta_e^2 = \delta_{ex}^2 + \delta_{en}^2 + \delta_{exn}^2 + \delta_{enx}^2$$

Первое слагаемое определяет среднюю квадратическую ошибку воспроизведения сигнала $x(t)$. Второе слагаемое характеризует ошибку вследствие действия помехи $n(t)$. Последние два слагаемых – составляющие ошибки из-за корреляции сигнала с помехой и помехи с сигналом.

Величину $\delta_{\sum} = \left[m_e^2 + \delta_e^2\right]^{\frac{1}{2}}$ называют суммарной средней квадратической ошибкой системы радиоавтоматики.

Дисперсия ошибки может быть вычислена через её спектральную плотность:

$$\delta_e^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)|W(j\omega)|^2 d\omega$$

где $S_x(w)$ - спектральная плотность сигнала.

Интеграл удобно представить в виде:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)|W(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_n(j\omega)}{H_n(j\omega)GH_n(-j\omega)} d\omega$$

где $G_n(jw) = b_0(jw)^{2n-2} + b_1(jw)^{2n-4} + \ldots + b_{n-1}$ - полином, содержащий чётные степени $\omega$, $H_n(jw) = a_0(jw)^n + a_1(jw)^{n-1} + \ldots + a_n$ - полином, корни которого лежат в верхней полуплоскости комплексной переменной $\omega$, $n$ - степень полинома $H_n(j\omega)$.

Если $n=1$, то $I_1 = \dfrac{b_0}{2a_0a_1}$.

Если $n=2$, то $I_2 = \dfrac{-b_0 + a_0b_1/a_2}{2a_0a_1}$.

Если $n=3$, то $I_3 = \dfrac{-a_2b_0 + a_0b_1 - a_0a_1b_2/a_3}{2a_0(a_0a_3 - a_1a_2)}$.

На практике часто встречаются случаи, когда помеху можно считать белым шумом, спектральная плотность которого в пределах полосы пропускания системы радиоавтоматики постоянна.

Эффективной полосой пропускания системы называется величина:

$$f_{эф} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W(j\omega)|^2 d\omega$$

$$\omega_{эф} = \int_{-\infty}^{\infty} |W(j\omega)|^2 d\omega$$

## Примеры решения задач

**<u>Пример 1.</u>** Найти дисперсию ошибки, если передаточная функция звена $W(p) = \frac{1}{p}$, а спектральная плотность входного воздействия $S_x(w) = 0,4$.

<u>Решение.</u> Найдём передаточную функцию замкнутой системы:

$$W_з(p) = \frac{\frac{1}{p}}{1 + \frac{1}{p}} = \frac{1}{p+1}.$$

Сделаем замену $p$ на $j\omega$. Тогда передаточная функция замкнутой системы будет иметь вид:

$$W_з(jw) = \frac{1}{jw+1} = \frac{1-jw}{w^2+1} = \frac{1}{w^2+1} - j\frac{w}{w^2+1}.$$

$$|W_з(jw)|^2 = \frac{1+w^2}{\left(1+w^2\right)^2} = \frac{1}{1+w^2}.$$

При подстановке этого выражения в формулу для $\delta_e^2$ получим:

$$\delta_e^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 0,4 \cdot \frac{\partial w}{w^2+1} = \frac{0,4}{2\pi} \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to \infty}} arctgw \Big|_a^b = \frac{0,4}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{0,4}{2} = 0,2.$$

<u>Ответ.</u> $\delta_e^2 = 0,2$

**Пример 2**. Найти дисперсию ошибки, если передаточная функция звена $W(p)=\frac{1}{p^2}$, а спектральная плотность входного воздействия $S_x(w)=0,2$.

Решение. Найдём передаточную функцию замкнутой системы:

$$W_з(p)=\frac{\frac{1}{p^2}}{1+\frac{1}{p^2}}=\frac{1}{p^2+1}\rightarrow W_з(j\omega)=\frac{1}{(j\omega)^2+1}=\frac{1}{1-\omega^2}\rightarrow$$

$$\rightarrow|W_з(j\omega|^2=\frac{1}{(1-\omega^2)^2}$$

$$\delta_e^2=\frac{0,2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial w}{\left(1-w^2\right)^2}=\frac{0,2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial w}{(1-w)^2(1+w)^2}.$$

Перепишем подынтегральное выражение. Для этого сделаем следующее преобразование:

$$(1-w)^2=1-2w+w^2=1+2j^2w-j^2w^2=-1\cdot(jw)^2+2j\cdot(jw)+1\cdot(jw)^0,$$

В данном случае $n=2$. Тогда $b_0=0,b_1=1,a_0=-1,a_1=2j,a_2=1$. Следовательно, $J_2=\left|\frac{-1}{-4j}\right|=\left|\frac{1}{4j}\right|=\left|\frac{j}{4j^2}\right|=\left|-\frac{1}{4}j\right|=\frac{1}{4}.$

$\delta_e^2=0,2\cdot\frac{1}{4}=0,05.$

Ответ. $\delta_e^2=0,05$

### 3. Задание на практическое занятие

1. Передаточная функция системы *W(p) = 1/p*, спектральная плотность входного процесса *S(ω) = 0,4*. Найти дисперсию процесса на выходе замкнутой системы.

2. Передаточная функция системы: *W(p) = 2/(p+3)*, спектральная плотность входного процесса *S(ω) = 0,1*. Найти дисперсию процесса на выходе.

3. Передаточная функция системы: $W(p) = 1/p^2$, спектральная плотность входного процесса *S(ω) = 0,2*. Найти дисперсию процесса на выходе.

4. Передаточная функция системы: *W(p) = (1+3p)/(p(1+2p))*, спектральная плотность входного процесса *S(ω) = 0,3*. Найти дисперсию процесса на выходе.

5. Передаточная функция разомкнутой системы: $W(p) = k/p$. Рассчитать эквивалентную полосу пропускания белого шума замкнутой системы.

## Вопросы для самоконтроля

1. Частотные показатели качества.
4. Средняя квадратическая ошибка системы.
5. Дисперсия ошибки.
6. Нахождение дисперсии ошибки через спектральную плотность.
7. Эффективная полоса пропускания системы.

## Практическое занятие №5
## Оптимизация параметров САУ с заданной структурой

**Цель работы -** практическое освоение методов оптимизации параметров САУ, использование современного программного обеспечения для задач оптимизации.

Время - 2 часа.

### 1. Учебные вопросы

1. Критерии оптимизации.
2. Определение передаточных функций САУ.
3. Нахождение оптимальных параметров САУ.

### 2. Основные теоретические сведения

Цель оптимизации – выбор параметров системы, при котором минимизируется результирующая ошибка слежения, вызванная как искажением задающего воздействия $\lambda(t)$ при его прохождении через систему, так и действием шума на выходе дискриминатора.

Рассматривается несколько характерных случаев:

1) воздействие $\lambda(t)$ - детерминированная функция, возмущение $\xi(t)$ - флуктуационный процесс;

2) воздействие $\lambda(t)$ и возмущение $\xi(t)$ являются случайными процессами.

Если в установившемся режиме математическое ожидание ошибки слежения $M\left[x(t)\right]=m_x$, вызванное детерминированным воздействием $\lambda(t)$, постоянно и отлично от нуля, то в качестве критерия оптимизации может применяться условие минимума установившегося значения среднего квадрата ошибки:

$$M[x^2] = \overline{x^2} = m_x^2 + \delta_x^2 = min$$

Также в качестве критерия оптимизации может использоваться требование минимизации дисперсии ошибки слежения при ограничении максимального значения $x_{\lambda_{\max}}$ составляющей ошибки, вызванной воздействием $\lambda(t)$:

$$\delta_x^2 = \min,$$
$$x_{\lambda_{\max}} \le x_{доп},$$

где $x_{доп.}$ - максимально допустимое значение ошибки, выбираемое так, чтобы ошибка не выходила за пределы дискриминационной характеристики и не возникал срыв сопровождения.

В тех случаях, когда изменение параметра $\lambda(t)$, за которым идёт слежение, описывается стационарным случайным процессом с нулевым математическим ожиданием, критерием оптимизации параметров системы может служить минимум дисперсии суммарной ошибки слежения, вызванной как искажением процесса $\lambda(t)$, так и действием флюктуационного напряжения $\xi(t)$:

$$\delta_x^2 = \delta_{x_1}^2 + \delta_{x_2}^2 = \min.$$

## 3. Задание на практическое занятие

1. На систему с астатизмом второго порядка действует квадратичное возмущение $\lambda(t) = at^2 \cdot 1(t)$. Крутизна дискриминатора и спектральная плотность шума на выходе дискриминатора известны. Передаточная функция звена имеет вид:

$$W(p) = \frac{k_{u2}(1 + pT_1)}{p^2}$$

По критерию минимума установившегося значения среднего квадрата ошибки наилучшим образом выбрать постоянную времени $T_1$ и коэффициент передачи интегратора $k_{u2}$.

2. На систему с астатизмом второго порядка действует воздействие $\lambda(t)$ являющиеся стационарным случайным процессом со спектральной плотностью $S(\omega) = \frac{2\mu\delta_\lambda^2}{\omega^2+\mu^2}$. Выбрать в рассматриваемой в первой задаче системе коэффициент интегратора $k_u$ так, чтобы дисперсия суммарной ошибки слежения была минимальна.

## Вопросы для самоконтроля

1. Поясните цель оптимизации параметров САУ.
2. Поясните, что определяет средняя квадратическая ошибка системы.

4. Как найти дисперсию ошибки, зная спектральную плотность входного воздействия.

5. Дайте определение эффективной полосы пропускания системы.

## Практическое занятие №6

## Нахождение частотных характеристик различных САУ. Нахождение передаточных функций различных сложных систем

**Цель работы -** практическое освоение методов преобразования структурных схем САУ и расчета многоконтурных схем САУ.

Время - 2 часа.

### 1. Учебные вопросы

1. Определение передаточных функций сложных систем.
2. Определение АЧХ сложных систем.

### 2. Краткие теоретические сведения

В системах РА помимо замкнутого контура с главной обратной связью имеются контуры, образованные дополнительными внутренними обратными связями, введенными для придания необходимых динамических характеристик. Передаточные функции таких систем находят путем последовательного сведения структурной схемы многоконтурной системы к эквивалентной одноконтурной.

Частотная характеристика получается из передаточной функции при подстановке в передаточную функцию комплексной переменной $jw$:

$$W(jw) = W(p)\ \big|_{p=jw}.$$

Частотную характеристику можно представить в виде действительной и мнимой части:

$$W(jw) = P(w) + jQ(w).$$

$\left|W(jw)\right| = \sqrt{P^2(w) + Q^2(w)}$ - амплитудно-частотная характеристика (АЧХ), $\phi(w) = arctg\dfrac{Q(w)}{P(w)}$- фазочастотная характеристика (ФЧХ), $Л(w) = 20\lg\left|W(jw)\right|$- логарифмическая амплитудно-частотная характеристика.

## Примеры решения задач

**Пример 1**. Свести к эквивалентной одноконтурной схеме двухконтурную систему, приведенную на рис. 3.

Решение. Заменим внутренний контур его передаточной функцией, которая имеет вид

$$W_{вк}(p) = \frac{W_2(p)}{1 + W_2(p)W_0(p)}$$

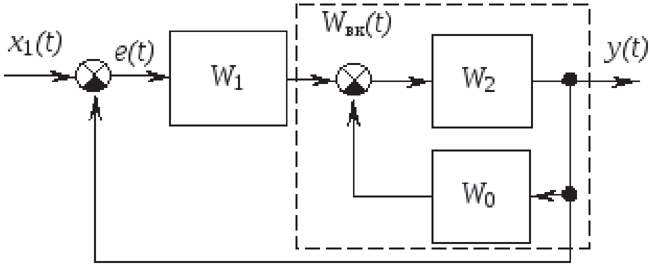


Рисунок 3 – Структурная схема двухконтурной системы РА

Аналогично определяется общая передаточная функция системы, изображенной на рис. 3:

$$W_р(p) = W_1(p)W_{вк}(p) = \frac{W_1(p)W_2(p)}{1 + W_2(p)W_0(p)}$$

**Пример 2.** Свести к эквивалентной одноконтурной схеме многоконтурную систему. Изображенную на рис. 4, а).

Решение. На первом этапе производится операция преобразования в систему без перекрестных связей. Операция преобразования проводится в соответствии с правилами преобразования путем переноса сумматоров или узлов ответвления. После преобразований передаточные функции находят по методу свертывания двух-, многоконтурной системы к одноконтурной. Передаточная функция преобразованной разомкнутой системы (рис. 4, б) имеет вид

$$W_р(p) = W_1(p)W_{вк}(p) = \frac{W_1(p)W_{вк}(p)}{1 + W_1(p)W_{вк}(p)W_3^{-1}(p)W_{02}(p)}$$

где $W_{вк}(p) = \frac{W_2(p)W_3(p)}{1+W_{01}(p)W_2(p)W_3(p)}$

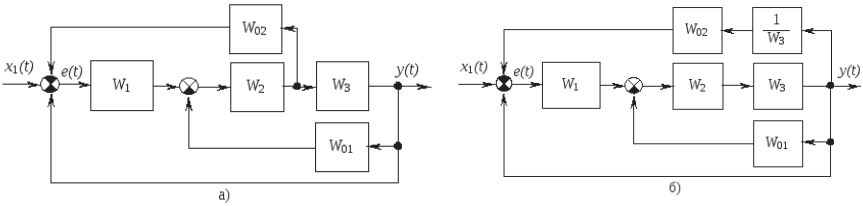


Рисунок 4 – Структурная схема многоконтурной системы с перекрестными обратными связями (а) и не перекрестными обратными связями (б)

**Пример 3.** Построить логарифмическую амплитудно-частотную характеристику системы с передаточной функцией $W(p)=\dfrac{2}{2p+1}$.

Сделаем замену: $p=jw$. Тогда:

$$W(jw)=\frac{2}{2jw+1}=\frac{2(1-2jw)}{(1+2jw)(1-2jw)}=\frac{2-4jw}{1+4w^2}=\frac{2}{1+4w^2}-j\frac{4w}{1+4w^2}.$$

$$|W(jw)|=\frac{\sqrt{16w^2+4}}{1+4w^2},$$

$$Л(w)=20\lg\frac{\sqrt{16w^2+4}}{1+4w^2}=10\lg\left(16w^2+4\right)-20\lg\left(1+4w^2\right).$$

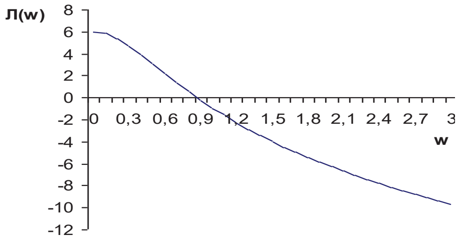


Рисунок 5 – График логарифмической амплитудно-частотной характеристики

## 3. Задание на практическое занятие

1. Дана многоконтурная система, структурная схема которой представлена на рис.6. Требуется найти передаточную функцию системы.

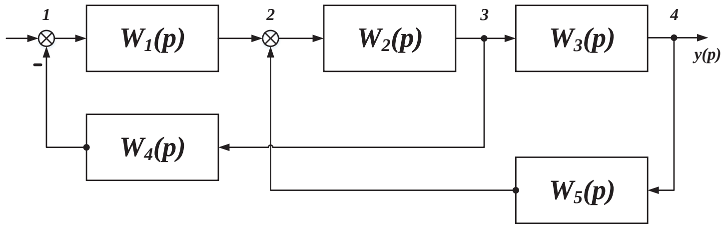


Рисунок 6

2. Определить передаточную функцию для САУ, структурная схема которой представлена на рис. 7, если $k_1$=2, $k_2$=100, $k_3$=100, $k_4$=2.5 1/с; $T_3$=0,05 с, $T_4$=0,07 с, $T_{oc}$=0,2 с.

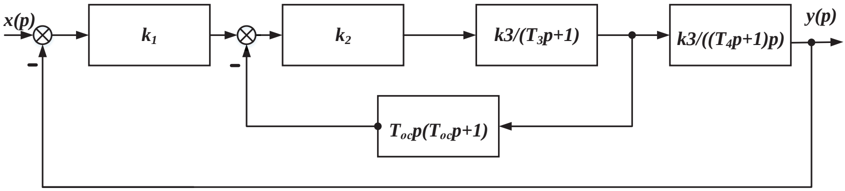


Рисунок 7

3. Определить передаточную функцию для САУ, структурная схема которой представлена на рис. 8, если

$$W_1(p) = \frac{k_1}{T_1 p}; \quad W_2(p) = \frac{k_2}{T_2 p + 1}; \quad W_3(p) = \frac{k_3}{T_3 p + 1}; \quad W_4(p) = \frac{T_1 p}{k_1 k_2}$$

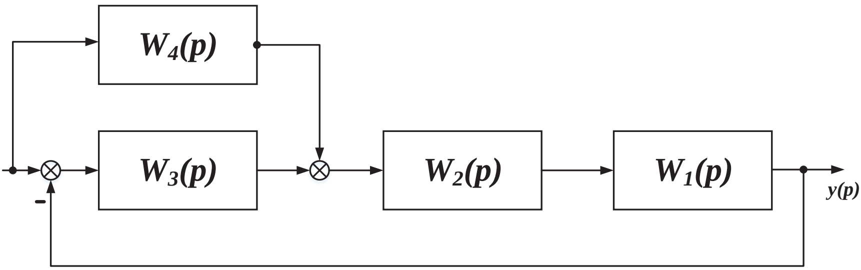


Рисунок 8

4. Постройте по решению задачи 2 АЧХ САУ.

5. Постройте по решению задачи 3 АЧХ САУ.

**Вопросы для самоконтроля**

1 Какие частотные характеристики используются для исследования САУ?

2. Дайте определение амплитудно-частотной характеристики?

3. Дайте определение логарифмической амплитудно-частотной характеристике.

4. Почему логарифмические частотные характеристики нашли широкое применение?

5. Объясните на примере принцип преобразования структуры многоконтурной САУ для ее исследования.

## Практическое занятие №7

## Нахождение показателей астатизма различных систем

**Цель работы –** практическое освоение методов нахождения астатизма различных САУ.

Время - 2 часа.

### 1. Учебные вопросы

1. Астатические системы.
2. Особенности астатических систем.

### 2. Краткие теоретические сведения

Система называется статической, если при любом постоянном задающем воздействии *x(t)= const* установившаяся ошибка не равна нулю.

Система называется астатической, если при любом постоянном задающем воздействии установившаяся ошибка равна нулю. Астатические системы могут быть первого, второго и более высоких порядков астатизма.

Если на вход астатической системы подан сигнал $x(t) = c \cdot 1(t)$, то согласно определению передаточной функции ошибки:

$$E(p) = W_e(p)X(p) = W_e(p) \cdot \frac{c}{p}.$$

Ошибка в установившемся режиме, называемая статической, на основании теоремы преобразования Лапласа о конечном значении функции:

$$e_c = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{p\to 0} pE(p) = \lim_{p\to 0} W_e(p)c.$$

Из этого выражения следует, что статическая ошибка равна нулю, если передаточная функция ошибки содержит множитель $p$ (имеет нуль в точке $p=0$), в противном случае статическая ошибка не равна нулю.

Передаточная функция ошибки системы с астатизмом порядка $\nu$ содержит множитель $p^{\nu}$. В такой системе ошибка в установившемся режиме равна нулю при входном сигнале $x(t) = ct^{\nu-1}$.

Из формулы $W_e(p)=\dfrac{1}{1+W_p(p)}$ следует, что система радиоавтоматики имеет порядок $\nu$ астатизма, если передаточная функция разомкнутой системы содержит $\nu$ интегрирующих звеньев (имеет полюс порядка $\nu$ в точке $p=0$).

Другими словами, порядок астатизма определяется числом интегрирующих звеньев в контуре следящей системы. Следовательно, для уменьшения ошибки необходимо увеличивать количество интегрирующих звеньев. Но это увеличение имеет ограничение, так как с увеличением числа звеньев ухудшается устойчивость системы (каждое интегрирующее звено вносит фазовый сдвиг, равный -π/2). Поэтому для систем, имеющих порядок астатизма выше второго, для обеспечения устойчивости необходимо использовать специальные методы коррекции.

### Примеры решения задач

**Пример 1**. Передаточная функция системы в разомкнутом состоянии имеет вид: $W_p(p)=\dfrac{1}{p^2}$. Какой порядок астатизма имеет система?

Решение. Передаточная функция ошибки находится по формуле:

$$W_e(p)=\frac{1}{1+W_p(p)}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{p^2}}=\frac{p^2}{p^2+1}.$$

Передаточная функция ошибки имеет нуль второго порядка в точке $p=0$, следовательно, данная система является астатической системой второго порядка.

**Пример 2.** Передаточная функция системы в замкнутом состоянии определяется формулой:

$$W_з(p)=\frac{b_2p^2+b_1p+b_0}{a_4p^4+a_3p^3+a_2p^2+a_1p+a_0}.$$

Каковы условия получения порядка астатизма, если:

1) $\nu=0$,

2) $\nu=1$,

3) $\nu=2$.

Найдём передаточную функцию рассогласования:

$$W_e(p) = 1 - W_з(p) = 1 - \frac{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0} =$$

$$\frac{a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 - b_2 p^2 - b_1 p - b_0}{a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}.$$

Перепишем числитель полученного выражения в виде:

$$a_4 p^4 + a_3 p^3 + (a_2 - b_2)p^2 + (a_1 - b_1)p + (a_0 - b_0).$$

Отсюда следует, что условием получения системы:

1) с астатизмом нулевого порядка является условие: $a_0 \neq b_0$,

2) с астатизмом первого порядка является условие: $a_0 = b_0$, $a_1 \neq b_1$,

3) с астатизмом второго порядка является условие: $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 \neq b_2$.

## 3. Задание на практическое занятие

1. Передаточная функция рассогласования определяется формулой:

$$W_e(p) = \frac{d_4 p^4 + d_3 p^3 + d_2 p^2 + d_1 p + d_0}{a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}.$$

Каковы условия получения порядка астатизма, если:

1) $\nu = 0$,

2) $\nu = 1$,

3) $\nu = 2$.

2. Передаточная функция системы в разомкнутом состоянии определяется формулой:

$$W_p(p) = \frac{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{c_4 p^4 + c_3 p^3 + c_2 p^2 + c_1 p + c_0}.$$

Каковы условия получения порядка астатизма, если:

1) $\nu = 0$,

2) $\nu = 1$,

3) $\nu = 2$.

3. Передаточная функция системы в разомкнутом состоянии определяется формулой:

$$W_{\text{р}} = \frac{2p^2 + p + 1}{0.25p^3 + p^2 + 0.5p + 1}$$

Определите порядок астатизма системы.

## Вопросы для самоконтроля

1 Дайте определение статических систем.

2. Дайте определение астатических систем.

3. Как определить порядок астатизма системы?

4. Почему нельзя для уменьшения ошибки ограничиваться простым увеличением порядка астатизма системы?

## Практическое занятие №8
## Нахождение динамических ошибок различных САУ

**Цель работы -** практическое освоение методов определения динамических ошибок САУ.

Время - 2 часа.

### 1. Учебные вопросы

1. Динамическая ошибка системы автоматического управления.
2. Определение динамической ошибки при медленно изменяющихся входных сигналах.
3. Определение динамической ошибки для гармонического входного сигнала

### 2. Краткие теоретические сведения

Помимо статистических ошибок точность работы систем радиоавтоматики характеризуется динамическими и переходными ошибками.

Динамическая ошибка – ошибка в установившемся режиме работы системы при воздействии на неё нестационарного сигнала.

Переходная ошибка – ошибка при работе системы в переходном процессе, который возникает при отработке начального рассогласования.

Динамическая точность работы систем радиоавтоматики определяется при медленно изменяющихся входных сигналах (воздействия, число производных от которых ограничено).

Сигнал $x(t)=\sum_{i=0}^{k} a_i t^i$ относится к медленно изменяющемуся воздействию, так как число производных от этого сигнала неравных нулю, равно $k$, а $(k+1)$-я производная равна нулю. Гармонический сигнал не является медленно изменяющимся, так как число производных от него равно $\infty$.

Переходные процессы в системах радиоавтоматики затухают значительно быстрее по сравнению с изменением медленно изменяющегося сигнала, поэтому и достигается установившейся динамический режим работы системы.

По определению передаточной функции рассогласования преобразование Лапласа для ошибки системы:

$$E(p)=W_e(p)X(p)=\left[C_0+C_1p+\frac{1}{2}C_2p^2+\ldots+\frac{1}{k!}C_kp^k\right]X(p)$$

или в области действительного переменного

$$e(t)=C_0x^{(0)}(t)+C_1x^{(1)}(t)+\frac{1}{2}C_2x^{(2)}(t)+\cdots+\frac{1}{k!}C_kx^{(k)}(t)$$

где $x^{(k)}$ – $k$-я производная.

Число слагаемых в последнем выражении ограничено, так как сигнал $x(t)$ является медленно изменяющимся воздействием. Для нахождения неизвестных коэффициентов $C_i$, которые называются коэффициентами ошибки, известны три способа.

1) $C_k=k!\frac{\delta^k}{\delta p^k}W_e(p)|_{p=0}$;

2) коэффициенты ошибок находятся путём деления числителя передаточной функции ошибки на её знаменатель.

3) для реализации третьего способа представим передаточную функцию ошибки в виде:

$$W_e(p)=\frac{b_np^n+b_{n-1}p^{n-1}+\ldots+b_1p+b_0}{a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}+\ldots+a_1p+a_0}.$$

Перемножив полином знаменателя на ***E(p)***, получим:

$$\left[a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}+\ldots+a_1p+a_0\right]\left[C_0+C_1p+\frac{1}{2}C_2p^2+\ldots+\frac{1}{k!}C_kp^k\right]=$$
$$=b_np^n+b_{n-1}p^{n-1}+\ldots+b_1p+b_0.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях $p$ слева и справа в выражении, определим формулы для последовательного вычисления коэффициентов ошибок:

$$C_0=\frac{b_0}{a_0},\ C_1=\frac{b_1-a_1C_0}{a_0},\ C_2=\frac{\left(b_2-a_2C_0-a_1C_1\right)\cdot 2}{a_0}.$$

В инженерных расчётах коэффициенты ошибок удобнее рассчитывать через коэффициенты передаточной функции разомкнутой системы:

$$W_p(p) = \frac{d_m p^m + \ldots + d_2 p^2 + d_1 p + d_0}{b_n p^n + \ldots + b_2 p^2 + b_1 p + b_0} \cdot \frac{k}{p^\nu}$$

где $\nu$ - порядок астатизма системы.

Формулы расчёта первых трёх коэффициентов ошибок статических и астатических систем радиоавтоматики через параметры передаточной функции представлены в таблице.

Таблица 1 – Формулы расчёта первых трёх коэффициентов ошибок статических и астатических систем радиоавтоматики

| $\nu$ | $C_i$ | **Формулы для расчёта** |
|---|---|---|
| **0** | $C_0$ | $\frac{1}{1+k}$ |
| | $C_1$ | $k\frac{b_1 - d_1}{(1+k)^2}$ |
| | $C_2$ | $2\left[k\frac{b_2 - d_2}{(1+k)^2} + k\frac{b_1(d_1 - b_1)}{(1+k)^3} + k^2\frac{2d_1(d_1 - b_1)}{(1+k)^3}\right]$ |
| **1** | $C_0$ | **0** |
| | $C_1$ | $\frac{1}{k}$ |
| | $C_2$ | $2\left[\frac{b_1 - d_1}{k} - \frac{1}{k^2}\right]$ |
| **2** | $C_0$ | **0** |
| | $C_1$ | **0** |
| | $C_2$ | $\frac{2}{k}$ |

Первое слагаемое в выражении ошибки называют ошибкой по положению, а коэффициент $C_0$-коэффициентом ошибки по положению, второе слагаемое – ошибкой по скорости, а коэффициент $C_1$ - коэффициентом ошибки по скорости. Аналогично, третье слагаемое называют ошибкой по ускорению, а коэффициент $C_2$ - коэффициентом ошибки по ускорению.

В астатических системах $\nu$ первых коэффициентов ошибок равны нулю, где $\nu$ - порядок астатизма системы радиоавтоматики.

При анализе качества работы систем радиоавтоматики помимо вычисления ошибок при медленно изменяющихся сигналах приходится оценивать точность и при гармонических воздействиях. В этом случае нельзя применять метод коэффициентов ошибок, так как число производных от гармонического сигнала не ограничено. При этом для расчёта ошибок необходимо использовать частотные характеристики. По амплитудно-частотной характеристике ошибки вычисляется амплитуда колебаний ошибки, по фазочастотной характеристике – сдвиг колебаний ошибки относительно входного сигнала.

### Примеры решения задач

**Пример 1.** Найти динамическую ошибку при входном сигнале $x(t)=\alpha_1(t)+\frac{1}{2}\alpha_2 t^2$ следящей системы, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии $W_p(p)=\frac{k}{p}\frac{1+pT_2}{(1+pT_1)(1+pT_3)}$ .

Решение. Преобразуем $W_p(p): W_p(p)=\frac{k}{p}\frac{1+pT_2}{1+p(T_1+T_3)+p^2T_1T_3}$ .

Коэффициент астатизма $\nu=1$.

Тогда $C_0=0, C_1=\frac{1}{k}, C_2=2\left[\frac{T_1+T_3-T_2}{k}-\frac{1}{k^2}\right], \dot{x}(t)=\alpha_{21}+\alpha_2 t, \ddot{x}(t)=\alpha_2$

Подставим данные в выражение для ***e(t)***, получим:

$$e(t)=\frac{1}{k}(\alpha_1+\alpha_2 t)+\frac{1}{2}\cdot 2\left[\frac{T_1+T_3-T_2}{k}-\frac{1}{k^2}\right]\cdot\alpha_2=\frac{1}{k}(\alpha_1+\alpha_2 t)+\frac{1}{k}\left(T_1+T_3-T_2-\frac{1}{k}\right)\alpha_2.$$

Таким образом, при увеличении коэффициента усиления системы и введении форсирующего звена ошибка уменьшается, увеличение же постоянных времени инерционных звеньев ухудшает динамическую ошибку системы.

### 3. Задание на практическое занятие

1. Определить динамическую ошибку в системе с передаточной функцией $H(p)=\frac{K}{p(1+pT)}$при линейно изменяющемся входном сигнале $g(t)=a+bt$.

2. Определить динамическую ошибку для системы с передаточной функцией при входном сигнале $g(t)=0{,}5t+\frac{0{,}02}{2}t^2$

$$H(p) = \frac{2}{p}\frac{1}{(1 + 2.5p)(1 + 3.75p)}$$

3. Определить динамическую ошибку в системе с передаточной функцией $H(p) = \frac{K}{(1+pT)}$при линейно изменяющемся входном сигнале $g(t)=5+0.2t$

**Вопросы для самоконтроля**

1. Динамическая ошибка САУ.
2. Нахождение коэффициентов ошибок.
3. Влияние на ошибку системы коэффициента усиления системы и введения форсирующего звена.
4. Назовите три способа нахождения коэффициентов ошибок.

**Список рекомендованной литературы**

1. Затучный Д.А. Автоматика и управление. Учебное пособие. – М.: МГТУ ГА, 2011.

2. Власов, К.П. Теория автоматического управления. Основные положения. Программы расчета / К.П. Власов. — М.: Гуманитарный Центр, 2013. - 544 с.

3. Ерофеев, А.А. Теория автоматического управления: Учебник для вузов / А.А. Ерофеев. — СПб.: Политехника, 2008. - 302 с.

4. Ким, Д.П. Теория автоматического управления. учебник и практикум для академического бакалавриата / Д.П. Ким. - Люберцы: Юрайт, 2016. - 276 с.

5. Коновалов, Б.И. Теория автоматического управления: Учебное пособие. 4-е изд., стер / Б.И. Коновалов, Ю.М. Лебедев. - СПб.: Лань, 2016. - 224 с.

6. Бесекерский В.А. Теория систем автоматического управления: учеб. пособие. - СПб.: Профессия, 2007.

7. Первачёв С.В. Радиоавтоматика. - М.: Радио и связь. 1982.

8. Клавдиев А.А. Теория автоматического управления в примерах и задачах. Ч.1, Учебное пособие. – СПб: СЗТУ, 2005. 74 с.

9. Французова Г.А., Шпилевая О.Я., Юркевич В.Д. Сборник задач по теории автоматического управления. Часть 1: Учебное пособие. - Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2000. – 78 с.

10. Сборник задач по теории автоматического управления: учебно-методическое пособие для студентов технических специальностей / сост. В.А. Бороденко. – Павлодар : Кереку, 2009. – 112 с.

11. Певзнер Л.Д. Практикум по теории автоматического управления. Учебное пособие/Л.Д. Певзнер. – М.: Высшая школа, 2006. – 590 с.