

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ» (МГТУ ГА)

Кафедра вычислительных машин, комплексов, систем и сетей

Д.А. Затучный

ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ И СХЕМОТЕХНИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Учебно-методическое пособие
по выполнению курсовой работы

*для студентов
направления 09.03.01
очной формы обучения*

Москва
ИД Академии Жуковского
2020

УДК 621.3.01
ББК 6П2.1
З-37

Рецензент:

Надейкина Л.А. – канд. физ.-мат. наук, доцент

Затучный Д.А.

З-37

Основы электротехники и схмотехническое моделирование [Текст] : учебно-методическое пособие по выполнению курсовой работы / Д.А. Затучный. – М.: ИД Академии Жуковского, 2020. – 32 с.

Данное учебно-методическое пособие издается в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Основы электротехники и схмотехническое моделирование» по учебному плану для студентов направления 09.03.01 очной формы обучения.

Рассмотрено и одобрено на заседаниях кафедры 29.08.2020 г. и методического совета 29.08.2020 г.

УДК 621.3.01
ББК 6П2.1

В авторской редакции

Подписано в печать 19.11.2020 г.

Формат 60х84/16 Печ. л. 2 Усл. печ. л. 1,86
Заказ № 675/0818-УМП26 Тираж 30 экз.

Московский государственный технический университет ГА
125993, Москва, Кронштадтский бульвар, д. 20

Издательский дом Академии имени Н. Е. Жуковского
125167, Москва, 8-го Марта 4-я ул., д. 6А
Тел.: (495) 973-45-68
E-mail: zakaz@itsbook.ru

© Московский государственный технический
университет гражданской авиации, 2020

СОДЕРЖАНИЕ

Порядок выполнения курсовой работы.....	4
1. Электрические цепи постоянного тока.....	4
2. Законы Кирхгофа.....	7
3. Метод узловых потенциалов.....	9
4. Метод контурных токов.....	12
5. Исследование электрических цепей синусоидального тока.....	16
6. Задание на курсовую работу.....	21
Литература.....	32

Порядок выполнения курсовой работы

Для выполнения курсовой работы студенту необходимо:

Изучить теоретический материал и ознакомиться с примерами решения задач по теме.

Выполнить каждое задание курсовой работы согласно своему варианту.

Вариант выбирается по последней цифре шифра студента.

Предоставить курсовую работу на проверку преподавателю в установленный срок.

В случае устранения всех имеющихся замечаний преподаватель допускает студента до защиты курсовой работы.

Защита курсовой работы происходит в установленные преподавателем сроки. В случае успешной сдачи преподаватель ставит одну из оценок «удовлетворительно», «хорошо», «отлично» на выполненном задании и в экзаменационную ведомость.

Защита КР принимается при выполнении следующих условий:

- 1) наличие правильно выполненной курсовой работы;
- 2) соответствие курсовой работы варианту задания;
- 3) понимание студентом алгоритма выполненных заданий;
- 4) грамотный ответ на вопросы преподавателя.

Курсовая работа обязательно должна содержать:

- Теоретическую часть;
- Формулировку заданий;
- Схемы и чертежи;
- Алгоритмы решения;
- Подробный ход решения с расчётными формулами;
- Соответствующие расчёты.

1. Электрические цепи постоянного тока

Для передачи электрической энергии от источников к приемникам элементы, способные передавать эту энергию, объединяют в электрическую цепь. Например, компьютер (приемник электрической энергии), за которым вы сейчас работаете, получает энергию для своей работы из электросети (соединительные провода, коммутационное оборудование и т.д. и т.п.), а энергию получают на электростанции (источник электрической энергии). На основе сказанного дадим определение термину электрическая цепь.

Электрическая цепь — совокупность взаимосвязанных элементов, компонентов или устройств, предназначенных для передачи электрической энергии от источников электрической энергии к потребителям (рис.1 и 2).

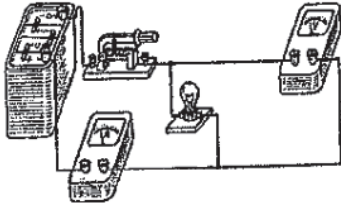


Рис. 1. Электрическая цепь

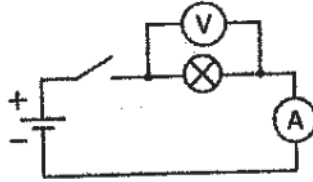


Рис. 2. Схема электрической цепи

При описании схем используют следующие термины: ветвь, контур, узел.

Ветвь — участок цепи между двумя узлами.

Контур — это некоторая последовательность ветвей.

Замкнутый контур — это последовательность ветвей, которая начинается и заканчивается в одном и том же узле, причем ветви входят по одному разу (не повторяются).

Узел — это место соединения трех и большего количества ветвей.

Приемники электрической энергии и их параметры.

В электрических схемах линейных цепей приемники (потребители) принято изображать в виде сопротивления R .

Сопротивление представляет собой коэффициент пропорциональности между током и напряжением для данного приемника. Математической формулировкой выше приведенного высказывания является закон Ома:

$$U = I \cdot R \quad (1.1)$$

Электрический ток — направленное движение электрически заряженных частиц под воздействием электрического поля. Обозначается буквой I , а основная единица тока в Международной системе единиц (СИ) - Ампер [A].

Электрическое напряжение — это разность электрических потенциалов между выделенными точками. Обозначается буквой U , а основная единица напряжения в Международной системе единиц (СИ) - Вольт [V].

Электрическое сопротивление — физическая величина, характеризующая свойство проводника препятствовать прохождению электрического тока и равная отношению напряжения на концах проводника к силе тока, протекающего по нему. Сопротивление обозначается буквой R , а

основная единица сопротивления в Международной системе единиц (СИ) - Ом [Ом].

Электрическая проводимость – величина, обратная сопротивлению. Данная величина обозначается G , а основная единица проводимости в Международной системе единиц (СИ) – Сименс.

В случае последовательного соединения n элементов:

$$I=I_1=I_2=\dots=I_n$$

$$U=U_1+U_2+\dots+U_n$$

$$R=R_1+R_2+\dots+R_n.$$

В случае параллельного соединения n элементов

$$I=I_1+I_2+\dots+I_n$$

$$U=U_1=U_2=\dots=U_n$$

$$1/R=1/R_1+1/R_2+\dots+1/R_n$$

Источник ЭДС – это идеальный источник электрической энергии бесконечно большой мощности с внутренним сопротивлением, равным нулю ($R_{вн} = 0$). В таком источнике разность потенциалов не зависит от протекающего через него тока.

Источник тока – это идеальный источник электрической энергии бесконечно большой мощности с внутренним сопротивлением, равным бесконечности ($R_{вн} = \infty$). У этого источника ток, протекающий через него, не зависит от разности потенциалов на его концах.

Мощность электрическая – это физическая величина, характеризующая скорость передачи или преобразования электрической энергии. Мощность помогает оценить энергетические условия. Обозначается буквой P , а основная единица мощности в Международной системе единиц (СИ) – Ватт (Вт).

Мощность элемента электрической цепи определяется как произведение напряжения на его зажимах на ток, протекающий через этот элемент:

$$P = UI = UI^2 = GU^2 \quad (1.2)$$

Максимальная мощность источника электрической энергии достигается при максимальном токе, т. е. при токе короткого замыкания. В этом случае мощность равна

$$P_{к} = I_{к}E = \frac{E^2}{R_{вн}}. \quad (1.3)$$

Вся мощность рассеивается на внутреннем сопротивлении. Мощность, выделенная на сопротивлении нагрузки, составит:

$$P = UI = IRI = I^2R = \left(\frac{E}{R_B + R}\right)^2 R \quad (1.4)$$

Рассмотрим пример.

На приведенной на рис.3 схеме:

$R_1=2 \text{ оМ}, R_2=1 \text{ оМ}, R_3=3 \text{ оМ}$

$U_1=U_2=2\text{В}.$

Найти $U, I, R.$

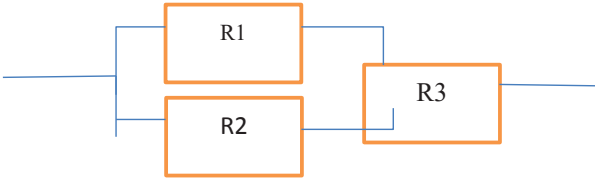


Рис.3. Последовательно-параллельное соединение сопротивлений

Решение.

1) $I_1=U_1/R_1=2/2=1\text{А},$

$I_2=U_2/R_2=2\text{А}.$

$I_3=I_1+I_2=3\text{А}.$

2) $U_3=I_3R_3=9\text{В}.$

3) $I=I_3=3\text{А}$

$U=U_1+U_3=11\text{В}.$

4) Найдём проводимость блока из двух элементов:

$1/R_{\text{бл}}=1/R_1+1/R_2.$

Тогда $R_{\text{бл}}=R_1R_2/(R_1+R_2)=2/3 \text{ оМ}.$

$R=R_{\text{бл}}+R_3=3+2/3=11/3 \text{ оМ}.$

2. Законы Кирхгофа

Законы Кирхгофа, записанные для узлов и контуров цепи, дают полную систему линейных уравнений, которая позволяет найти все токи и напряжения.

Первый закон гласит, что алгебраическая сумма токов в любом узле электрической цепи равна нулю

$$\sum_{i=1}^n \pm I_n = 0 \quad (2.1)$$

где n – число ветвей входящих в узел.

Или же в любом узле сумма токов, направленных к узлу, равна сумме токов, направленных от узла

$$\sum_{i=1}^g I_i = \sum_{j=1}^m \pm I_j \quad (2.2)$$

где n – токи, входящие в узел, а m – токи, исходящие из узла.

Второй закон гласит, что в любом замкнутом контуре алгебраическая сумма падений напряжений равна алгебраической сумме источников ЭДС, входящих в этот контур:

$$\sum_{k=1}^m U_{R_k} = \sum_{k=1}^m I_k R_k = \sum_{k=1}^n E_k \quad (2.3)$$

где m – число резистивных элементов в контуре, а n – число источников энергии в контуре. Или же в любом замкнутом контуре алгебраическая сумма напряжений равна нулю

$$\sum_{k=1}^n U_k \quad (2.4)$$

где n – число участков в контуре.

Под напряжением в этом случае понимается как падение напряжения на компоненте схемы под действием протекающего тока, так и напряжение на выводах источников ЭДС, входящих в данный контур.

Алгоритм решения задачи по законам Кирхгофа:

1. Нумерация узлов, входящих в электрическую цепь. Подсчет количества ветвей, ветвей, содержащих источник тока, и подсчет узлов.
2. Выбор произвольного направления токов в ветвях электрической цепи;
3. Составление необходимого числа уравнений по первому закону Кирхгофа, т.е. количество узлов схемы минус единица.
4. Выбор направления обхода контура.
5. Составление необходимого числа уравнений по второму закону Кирхгофа, т.е. количество ветвей схемы минус количество уравнений по первому закону Кирхгофа, минус количество ветвей, содержащих источник тока.

Пример. Рассчитать по законам Кирхгофа токи на приведённой на рис.4 схеме.

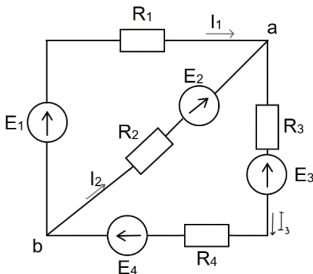


Рис.4. Схема для расчёта токов по законам Кирхгофа.

$$R_1 = 0,5 \text{ Ом}$$

$$R_2 = 3 \text{ Ом}$$

$$R_3 = 4 \text{ Ом}$$

$$R_4 = 0,8 \text{ Ом}$$

$$E_1 = 1 \text{ В}$$

$$E_2 = 1,5 \text{ В}$$

$$E_3 = 2 \text{ В}$$

$$E_4 = 2,5 \text{ В}$$

$$I_1 - ? ; I_2 - ? ; I_3 - ?$$

Составим систему уравнений по законам Кирхгофа:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0, \\ I_1 R_1 - I_2 R_2 = E_1 - E_2, \\ I_2 R_2 + I_3 (R_3 + R_4) = E_2 - E_3 + E_4 \end{cases}$$

Подставляем числовые значения:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0, \\ 0,5 \cdot I_1 - 3 \cdot I_2 = 0,5, \\ 3 \cdot I_2 + 4,8 \cdot I_3 = 2 \end{cases}$$

Решая полученную систему, получим значения токов:

$$I_1 = 0,115 \text{ А}, \quad I_2 = 0,186 \text{ А}, \quad I_3 = 0,301 \text{ А}.$$

$$\text{Ответ: } I_1 = 0,115 \text{ А}, \quad I_2 = 0,186 \text{ А}, \quad I_3 = 0,301 \text{ А}.$$

3. Метод узловых потенциалов

Метод узловых потенциалов (МУП) — метод расчета электрических цепей путем записи системы линейных алгебраических уравнений, в которой неизвестными являются потенциалы в узлах цепи. ***В результате применения метода определяются потенциалы во всех узлах цепи, а также токи во всех ветвях.***

Алгоритм решения задачи по МУП:

1. Пронумеровать узлы схемы.
2. Принять потенциал одного из узлов схемы равным нулю, т.е. заземлить этот узел.
3. Записать общий вид системы уравнений для данной системы.
4. Подсчитать коэффициенты и правую часть.
5. Решить систему любым из доступных способов.
6. Рассчитать токи по закону Ома.

Пусть имеется схема, состоящая из четырех узлов, найдем в ней потенциалы узлов и токи в ветвях. Для этого заземлим один из узлов, пусть это будет четвертый узел, тогда $\varphi_4 = 0$. При решении задачи расчета электрической цепи данным методом возникает система уравнений, общий вид этой системы:

$$\begin{cases} \varphi_1 G_{11} + \varphi_2 G_{12} + \varphi_3 G_{13} = I_{11} \\ \varphi_1 G_{21} + \varphi_2 G_{22} + \varphi_3 G_{23} = I_{22} \\ \varphi_1 G_{31} + \varphi_2 G_{32} + \varphi_3 G_{33} = I_{33} \end{cases} \quad (3.1)$$

В приведенной системе $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ – искомые потенциалы узлов ($\varphi_4 = 0$); I_1, I_2, I_3 – эквивалентные токи узлов, равные сумме произведений ЭДС ветви на её проводимость для ветвей, сходящихся в соответствующий узел. При этом ЭДС, направленные к узлу, берутся со знаком «+», от узла – со знаком «-»;

G_{11}, G_{22}, G_{33} – суммы проводимостей ветвей, сходящихся к соответствующему узлу;

G_{12}, G_{13}, G_{23} – суммы проводимостей ветвей, непосредственно включенных между узлами 1 и 2, 1 и 3, 2 и 3. Эти коэффициенты входят в систему со знаком «-».

После записи всех коэффициентов удобнее перейти к матричной форме:

$$[G] \cdot [\varphi] = [I] \quad (3.2)$$

где G – матрица проводимостей, I – вектор эквивалентных токов узлов, φ – искомый вектор узловых потенциалов. После решения данной системы получим значения потенциалов узлов $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.

Пример. Рассчитать методом узловых потенциалов токи по схеме, приведенной на рис. 5.

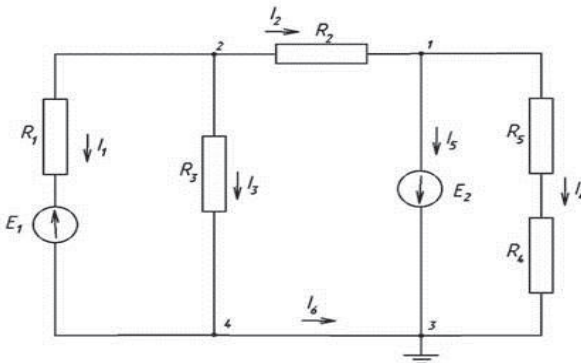


Рис.5. Схема на расчёт токов методом узловых потенциалов

$$E_1 = 1\text{В}, \quad E_2 = 1\text{В}, \quad R_1 = 1\text{Ом}, \quad R_2 = 1\text{Ом}, \quad R_3 = 2\text{Ом}, \quad R_4 = 5\text{Ом}, \\ R_5 = 4\text{Ом}$$

$$I_1 - ? \quad I_2 - ? \quad I_3 - ? \quad I_4 - ? \quad I_5 - ? \quad I_6 - ?$$

1. Пронумеруем узлы, потенциал в узле 3 приравняем к 0 (следовательно, и потенциал в узле 4 будет равен 0) расставим токи в ветвях (от предполагаемого узла с большим потенциалом к меньшему).

2. Поскольку потенциалы в узлах 3 и 4 известны – равны 0, согласно метода узловых напряжений составим два уравнения для узлов 1 и 2, однако в ветви между узлами 1 и 3 стоит идеальный источник ЭДС без внутреннего сопротивления, следовательно потенциал в узле 1 $\varphi_1 = -E = -1\text{В}$. Тогда достаточно одного уравнения для узла 2:

$$\varphi_1 G_{21} + \varphi_2 G_{22} = J_2,$$

где

$$G_{22} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = 2,5 \text{ (См)},$$

$$G_{21} = -\frac{1}{R_2} = -\frac{1}{1} = -1 \text{ (См)},$$

$$J_2 = \frac{E_1}{R_1} = \frac{1}{1} = 1 \text{ (А)}.$$

G_{22} - сумма проводимостей ветвей, сходящихся ко 2 узлу,

G_{21} - проводимость ветви между узлами 2 и 1.

Подставим численные значения и определим потенциал в узле 2:

$$\varphi_2 = \frac{J_2 - \varphi_1 G_{21}}{G_{22}} = \frac{1 \cdot 1 - (-1) \cdot (-1)}{2,5} = 0 \text{ (В)}$$

Зная потенциалы всех узлов определим токи в ветвях:

$$I_1 = \frac{-E_1 + (\varphi_2 - \varphi_4)}{R_1} = \frac{-1}{1} = -1 \text{ (А)}.$$

Отметим, что направление тока не совпадает с выбранным.

$$I_2 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{R_2} = \frac{1}{1} = 1 \text{ (А)}.$$

Направление тока совпадает с выбранным.

$$I_3 = \frac{\varphi_2 - \varphi_4}{R_3} = \frac{0}{R_3} = 0 \text{ (A)}.$$

$$I_4 = \frac{\varphi_1 - \varphi_3}{R_4} = \frac{-1}{5+4} = -0,11 \text{ (A)}.$$

Направление тока не совпадает с выбранным

$$I_5 = I_2 - I_4 = 1 - (-0,11) = 1,11 \text{ (A)}.$$

Направление тока совпадает с выбранным

$$I_6 = -I_5 - I_4 = -1,11 - (-0,11) = -1 \text{ (A)}.$$

Направление тока не совпадает с выбранным

Проверим результат решения по 1 правилу Кирхгофа для узлов.

Для узла 1:

$$I_2 - I_5 - I_4 = 1 - 1,11 - (-0,11) = 0$$

Для узла 2:

$$-I_1 - I_3 - I_2 = 1 - 0 - 1 = 0.$$

Для узла 3:

$$I_6 + I_5 + I_4 = -1 + 1,11 - 0,11 = 0$$

Для узла 4:

$$I_1 + I_3 - I_6 = -1 + 0 - (-1) = 0$$

1-й закон Кирхгофа для всех узлов выполняется – решение правильное.

4. Метод контурных токов

Один из методов анализа электрической цепи является **метод контурных токов**. Основой для него служит второй закон Кирхгофа. Главное его преимущество это уменьшение количества уравнений до $m - n + 1$, m - количество ветвей, а n - количество узлов в цепи. На практике такое уменьшение существенно упрощает расчет.

Контурный ток - это величина, которая одинакова во всех ветвях данного контура. Обычно в расчетах они обозначаются двойными индексами, например I_{11} , I_{22} и т.д.

Действительный ток в определенной ветви определяется алгебраической суммой контурных токов, в которую эта ветвь входит. Нахождение действительных токов и есть первоочередная задача метода контурных токов.

Контурная ЭДС - это сумма всех ЭДС входящих в этот контур.

Собственным сопротивлением контура называется сумма сопротивлений всех ветвей, которые в него входят.

Общим сопротивлением контура называется сопротивление ветви, смежное двум контурам.

Общий план составления уравнений

- 1 – Выбор направления действительных токов.
- 2 – Выбор независимых контуров и направления контурных токов в них.
- 3 – Определение собственных и общих сопротивлений контуров
- 4 – Составление уравнений и нахождение контурных токов
- 5 – Нахождение действительных токов

Рассмотрим пример.

Пример. Рассчитать методом контурных токов токи по схеме, приведённой на рис. 6.

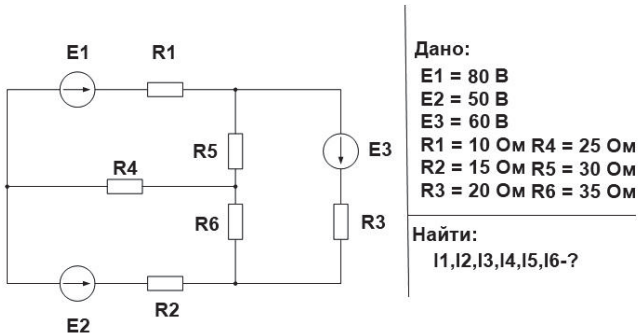
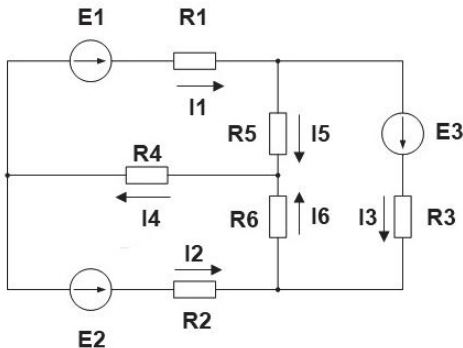


Рис.6. Схема на расчёт токов методом контурных токов

Решение

1. Произвольно выбираем направления действительных токов $I_1 - I_6$.



2. Выделяем три контура, а затем указываем направление контурных токов I_{11}, I_{22}, I_{33} . (рис.7). Мы выберем направление по часовой стрелке.

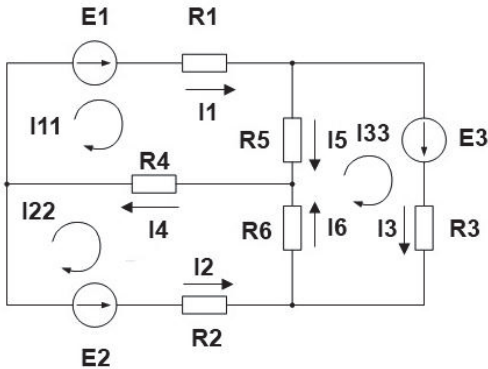


Рис.7. Направления контурных токов

3. Определяем собственные сопротивления контуров. Для этого складываем сопротивления в каждом контуре.

$$R_{11} = R_1 + R_4 + R_5 = 10 + 25 + 30 = 65 \text{ Ом}$$

$$R_{22} = R_2 + R_4 + R_6 = 15 + 25 + 35 = 75 \text{ Ом}$$

$$R_{33} = R_3 + R_5 + R_6 = 20 + 30 + 35 = 85 \text{ Ом}$$

Затем определяем общие сопротивления, общие сопротивления легко обнаружить, они принадлежат сразу нескольким контурам, например сопротивление R_4 принадлежит контуру 1 и контуру 2. Поэтому для удобства обозначим такие сопротивления номерами контуров к которым они принадлежат.

$$R_{12} = R_{21} = R_4 = 25 \text{ Ом}$$

$$R_{23} = R_{32} = R_6 = 35 \text{ Ом}$$

$$R_{31} = R_{13} = R_5 = 30 \text{ Ом}$$

4. Приступаем к основному этапу – составлению системы уравнений контурных токов. В левой части уравнений входят падения напряжений в контуре, а в правой ЭДС источников данного контура.

Так как контура у нас три, следовательно, система будет состоять из трех уравнений. Для первого контура уравнение будет выглядеть следующим образом:

$$I_{11} * R_{11} - I_{22} * R_{21} - I_{33} * R_{31} = E_1$$

Ток первого контура I_{11} , умножаем на собственное сопротивление R_{11} этого же контура, а затем вычитаем ток I_{22} , помноженный на общее сопротивление первого и второго контуров R_{21} и ток I_{33} , помноженный на

общее сопротивление первого и третьего контура R_{31} . Данное выражение будет равняться ЭДС E_1 этого контура. Значение ЭДС берем со знаком плюс, так как направление обхода (по часовой стрелке) совпадает с направлением ЭДС, в противном случае нужно было бы брать со знаком минус.

Те же действия проделываем с двумя другими контурами и в итоге получаем систему:

$$\begin{cases} I_{11} * R_{11} - I_{22} * R_{21} - I_{33} * R_{31} = E_1 \\ I_{22} * R_{22} - I_{11} * R_{12} - I_{33} * R_{32} = -E_2 \\ I_{33} * R_{33} - I_{11} * R_{13} - I_{22} * R_{23} = E_3 \end{cases}$$

В полученную систему подставляем уже известные значения сопротивлений и решаем её любым известным способом.

$$\begin{cases} 65I_{11} - 25I_{22} - 30I_{33} = 80 \\ 75I_{22} - 25I_{11} - 35I_{33} = -50 \\ 85I_{33} - 30I_{11} - 35I_{22} = 60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_{11} = 2,726 \\ I_{22} = 1,264 \\ I_{33} = 2,189 \end{cases}$$

5. Последним этапом находим действительные токи, для этого нужно записать для них выражения.

Контурный ток равен действительному току, который принадлежит только этому контуру. То есть другими словами, если ток протекает только в одном контуре, то он равен контурному.

$$I_1 = I_{11} = 2,726$$

Но, нужно учитывать направление обхода, например, в нашем случае ток I_2 не совпадает с направлением, поэтому берем его со знаком минус.

$$-I_2 = -I_{22} = -1,264$$

$$I_3 = I_{33} = 2,189$$

Токи, протекающие через общие сопротивления определяем как алгебраическую сумму контурных, учитывая направление обхода. Например, через резистор R_4 протекает ток I_4 , его направление совпадает с направлением обхода первого контура и противоположно направлению второго контура. Значит, для него выражение будет выглядеть

$$I_4 = I_{11} - I_{22} = 2,726 - 1,264 = 1,462$$

А для остальных

$$I_5 = I_{11} - I_{33} = 0,537$$

$$I_6 = I_{33} - I_{22} = 0,925$$

5. Исследование электрических цепей синусоидального тока

Закон Ома.

Под законом Ома в комплексной форме понимают:

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z} \quad (5.1)$$

$$\begin{cases} \dot{I} = I e^{j\varphi_i} \\ \dot{U} = U e^{j\varphi_u} \end{cases} \Rightarrow Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = z e^{\pm j\varphi} = z \cos \varphi \pm j z \sin \varphi = r \pm jx. \quad (5.2)$$

Комплексное сопротивление участка цепи представляет собой комплексное число, вещественная часть которого соответствует величине активного сопротивления, а коэффициент при мнимой части – реактивному сопротивлению.

По виду записи комплексного сопротивления можно судить о характере участка цепи:

$R + jX$ - активно-индуктивное сопротивление; $R - jX$ - активно-емкостное.

Первый закон Кирхгофа в комплексной форме

Алгебраическая сумма комплексных действующих значений токов в узле равна нулю:

$$\sum_{k=1}^n \dot{I}_k = 0. \quad (5.3)$$

Второй закон Кирхгофа в комплексной форме.

В замкнутом контуре электрической цепи алгебраическая сумма комплексных действующих значений ЭДС равна алгебраической сумме комплексных падений напряжений в нём.

$$\sum_{k=1}^n \dot{E}_k = \sum_{k=1}^n \dot{I}_k Z_k. \quad (5.4)$$

При использовании символического метода можно пользоваться понятиями мощностей. Но в комплексной форме можно записать только полную мощность:

$$S = \dot{U} \dot{I} = U \cdot \dot{I} \cdot e^{\pm j\varphi} = S \cdot e^{\pm j\varphi}, \quad (5.5)$$

где \dot{I} - комплексно-сопряжённый ток.

$$S \cos \varphi \pm j S \sin \varphi = P \pm jQ.$$

Полная мощность в комплексной форме представляет собой комплексное число, вещественная часть которого соответствует активной мощности рассматриваемого участка, а коэффициент при мнимой части – реактивной мощности участка. Значение знака перед мнимой частью: «+» означает, что напряжение опережает ток, нагрузка – активно-индуктивная;

«-» означает, что нагрузка - активно-емкостная.

Зависимости между током и напряжениями резистивных, индуктивных и ёмкостных элементов определяются происходящими в них физическими процессами. Также при анализе цепей синусоидального тока необходимо помнить, что реактивное индуктивное сопротивление (X_L) индуктивной катушки и реактивное ёмкостное сопротивление (X_C) конденсатора зависят от частоты f источника синусоидального напряжения:

$$U = U_m \sin(\omega t + \psi_u), \text{ т.е.}$$

$$X_L = \omega L = 2\pi fL \text{ и } X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi fC}, \quad (5.6)$$

где $\omega = 2\pi f$ - угловая частота напряжения, рад/с; $f = \frac{1}{T}$ - циклическая частота, Гц; T - период синусоидального напряжения, с; ψ_u - его начальная фаза, рад. или град.

В ветвях с реактивными элементами L и C между напряжением и током возникает фазовый сдвиг $\varphi = \psi_u - \psi_i$, где ψ_i - начальная фаза тока. Угол φ (в рад. или град.) – это алгебраическая величина, изменяющаяся в диапазоне от $-90^\circ \left(-\frac{\pi}{2} \text{ рад} \right)$ до $+90^\circ \left(+\frac{\pi}{2} \text{ рад} \right)$. Знак и величина угла зависят от типа и величины параметров последовательно соединённых элементов R , L и C ветви и частоты f напряжения.

Резистивный элемент.

Синусоидальный ток в резистивном элементе равен:

$$i = i_{Rm} \sin(\omega t + \psi_i), \quad (5.7)$$

и напряжение, приложенное к элементу, равно

$$U_R = RI_{Rm} \sin(\omega t + \psi_u) = U_{Rm} \sin(\omega t + \psi_u), \quad (5.8)$$

где амплитуда тока и напряжения связаны соотношением $U_{Rm} = RI_{Rm}$, а их начальные фазы одинаковые: $\psi_u = \psi_i$, т.е. ток и напряжение совпадают по фазе.

Действующее значение напряжения и тока резистивного элемента связаны следующим соотношением:

$$U_R = RI_R.$$

Индуктивный элемент.

Если ток в индуктивном элементе синусоидальный: $i = i_{Rm} \sin(\omega t + \psi_i)$, то напряжение на индуктивном элементе равно

$$U_L = U_{Lm} \sin\left(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}\right) = U_{Lm} \sin(\omega t + \psi_u),$$

где амплитуды тока и напряжения связаны соотношением $U_{Lm} = \omega LI_{Lm}$, а их начальные фазы связаны соотношением: $\psi_u = \psi_i + \frac{\pi}{2}$, т.е. напряжение в индуктивном элементе опережает ток на $\frac{\pi}{2}$ или ток в катушке индуктивности отстает от напряжения на $\frac{\pi}{2}$.

Действующее значение напряжения и тока индуктивного элемента связаны следующим соотношением: $U_L = \omega LI_L = X_L I_L$.

Величина $X_L = \omega L$, единица которой Ом, называется индуктивным сопротивлением, а обратная величина $B_L = \frac{1}{\omega L}$, единица которой $\text{Ом}^{-1} = \text{См}$ – индуктивной проводимостью.

Закон Ома в комплексной форме для индуктивного элемента записывается в следующем виде:

$$\dot{U}_L = \omega LI_L e^{j\psi_i} = e^{j\left(\psi_i + \frac{\pi}{2}\right)},$$

или

$$\dot{U}_L = j\omega L \dot{I}_L = jX_L \dot{I}_L.$$

Входящая в это выражение величина $j\omega L = jX_L$ называется комплексным сопротивлением индуктивного элемента, а обратная ей величина $\frac{1}{j\omega L} = -jB_L$ – комплексной проводимостью индуктивного элемента.

Ёмкостной элемент.

Напряжение между выводами ёмкостного элемента изменяется синусоидально: $U_C = U_{Cm} \sin(\omega t + \psi_u)$, а синусоидальный ток имеет следующий вид:

$$i_C = I_{Cm} \sin\left(\omega t + \psi_u + \frac{\pi}{2}\right) = I_{Cm} \sin(\omega t + \psi_i),$$

где амплитуды напряжения и тока связаны соотношением $I_{Cm} = \omega C U_{Cm}$, а их начальные фазы связаны соотношением $\psi_i = \psi_u + \frac{\pi}{2}$, т.е. ток на конденсаторе обгоняет напряжение на $\frac{\pi}{2}$.

Действующее значение напряжения и тока ёмкостного элемента связаны следующим соотношением:

$$U_C = \frac{1}{\omega C} I_C = \frac{I_C}{B_C}.$$

Величина $B_C = \omega C$ в выражении, единица которой $\text{Ом}^{-1} = \text{См}$, называется ёмкостной проводимостью, а обратная величина $X_C = \frac{1}{\omega C}$, единица которой Ом – ёмкостным сопротивлением.

Закон Ома в комплексной форме для ёмкостного элемента имеет следующий вид:

$$\dot{U}_C = \frac{1}{j\omega C} \dot{I}_C = -jX_C \dot{I}_C.$$

Величина $\frac{1}{j\omega C} = -jX_C$ называется комплексным сопротивлением ёмкостного элемента, а обратная ей величина $j\omega C = jB_C$ - комплексной проводимостью ёмкостного элемента.

В общем виде для цепи синусоидального тока, содержащей последовательно соединённые резистор, катушку индуктивности и конденсатор, комплексное сопротивление имеет вид:

$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = z \cdot e^{j\varphi},$$

где R - резистор, Ом ; L - индуктивность, Гн ; C - ёмкость, Ф .

Полное сопротивление цепи вычисляется по следующей формуле:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

Аргумент комплексного сопротивления $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$ показывает сдвиг между током и напряжением на участке цепи с комплексным сопротивлением Z , представленным в общем виде.

Пример.

Рассчитать цепь синусоидального тока с последовательным соединением приемников

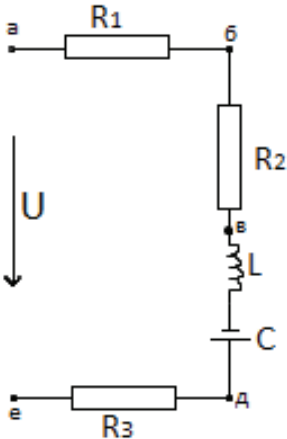


Рис.8. Схема для расчёта цепи синусоидального тока

$$U = 59 \text{ В}$$

$$R_1 = 10 \text{ Ом}$$

$$R_2 = 5,5 \text{ Ом}$$

$$R_3 = 6,9 \text{ Ом}$$

$$L = 85 \text{ мГц}$$

$$C = 125 \text{ мкФ}$$

$$f = 50 \text{ Гц}$$

Определить ток цепи, падение напряжения на элементах цепи, полную мощность цепи.

Решение:

1. Определим реактивное сопротивление участков цепи

$$X_c = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2 * 3,14 * 50 * 125 * 10^{-6}} = 25,48 \text{ Ом}.$$

$$X_L = 2\pi f L = 2 * 3,14 * 50 * 85 * 10^{-3} = 26,69 \text{ Ом}$$

2. Общее сопротивление цепи Z :

$$Z = (R_1 + R_2 + R_3) + j(X_C - X_L) = 22,4 + j(25,48 - 26,69) = 22,4 - j*1,21 \text{ Ом}$$

3. Комплексное значение тока в цепи запишем в показательной форме:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{59}{22,4 - 1,21j} = \frac{59(22,4 + 1,21j)}{(22,4 - 1,21j)(22,4 + 1,21j)} = \frac{1321,6 + 71,39j}{501,76 + 1,4641} = 2,63 + 0,14j = 2,6 * e^{0,05j} \text{ А.}$$

Так как начальная фаза напряжения не задана, то удобнее принять ее равной нулю и расположить вектор напряжения, совпадающим с вещественной осью комплексной плоскости. В этом случае мнимая составляющая также равна нулю и комплексное напряжение равно действительной части:

$$U = U = 59 \text{ В.}$$

4. Рассчитаем комплексное значение напряжение на элементах цепи в показательной и алгебраической форме:

$$U_{R1} = IR_1 = 26,3 + 1,4j = 26,3 * e^{0,05j} \text{ В.}$$

$$U_{R2} = IR_2 = 2,63 * 5,5 + 0,14 * 5,5j = 14,46 + 0,77j = 14,48 * e^{0,05j} \text{ В.}$$

$$U_{R3} = IR_3 = 18,15 + 0,97j = 18,18 * e^{0,05j} \text{ В.}$$

$$U_C = -jX_C I = -j * 25,48 * (2,63 + 0,14j) = -2,63 * 25,48j - 0,14 * 25,48j^2 = (3,57 - 67,01j) \text{ В.}$$

$$U_L = jX_L I = j * 26,69 * (2,63 + 0,14j) = (-3,74 + 70,19j) \text{ В.}$$

5. Определим полную мощность цепи.

Полная мощность:

$$S = U * I^* = 59 * (2,63 + 0,14j) = 155,17 + 8,26j \text{ В*А,}$$

где I^* - сопряженный элемент тока.

6. Задание на курсовую работу

1) Решение задач на электрические цепи постоянного тока

Вариант 1

В цепи (рис. 9) известны величины сопротивлений $R_1=35 \text{ Ом}$, $R_2=5 \text{ Ом}$, $R_3=100 \text{ Ом}$, $R_4=25 \text{ Ом}$, а также величина $E=2 \text{ В}$.

Определить значения токов $I_1=?$, $I_2=?$, $I_3=?$, $I_4=?$ и напряжение $U=?$.

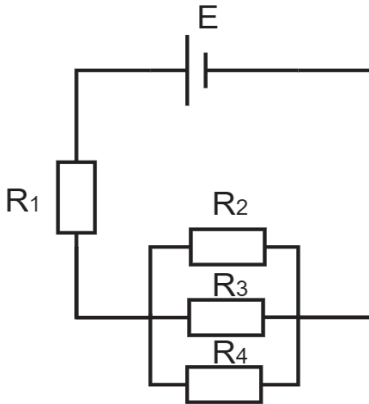


Рис. 9. Схема для варианта 1 задания 1

Вариант 2

В цепи (рис. 10) известны величины сопротивлений $R_1=1$ Ом, $R_2=0.5$ Ом, $R_3=2$ Ом, а также напряжение на участках $U_1=U_2=5$ В.

Определить значения напряжения $U=?$, тока $I=?$ и сопротивление $R=?$.

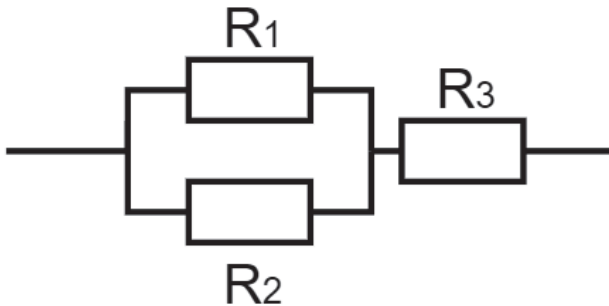


Рис.10. Схема для варианта 2 задания 1

Вариант 3

В цепи (рис. 11) известна величина сопротивления $R_H=9.9$ Ом, а также показания вольтметра $U=120$ В и амперметра 12 А.

Подсчитать мощность, выделяемую в сопротивлении R_H .

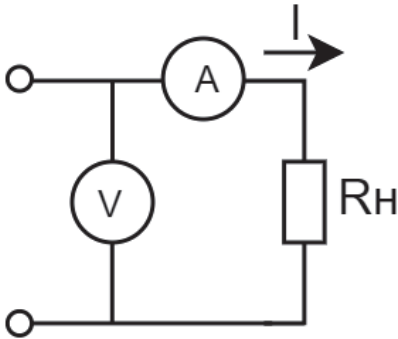


Рис.11. Схема для варианта 3 задания 1

Вариант 4

В цепи (рис. 12) известна величина сопротивления $R_B=0.5$ Ом, $R_H=1$ Ом, а также величина ЭДС $E=5$ В.

Определить значения тока $I=?$ и мощность $P=?$.

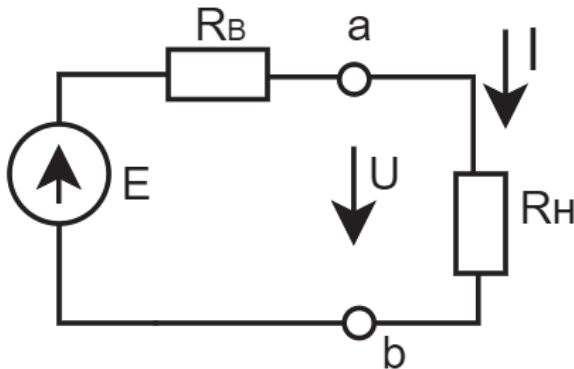


Рис.12. Схема для варианта 4 задания 1

Вариант 5

При разомкнутом ключе К в цепи (рис. 13) показания вольтметра 2,1 В. Когда ключ замкнут, амперметр фиксирует ток 1 А. Внешнее сопротивление цепи $R=2$ Ом.

Определить ЭДС источника E , внутреннее сопротивление $R_{вТ}$ и напряжение на зажимах источника U .

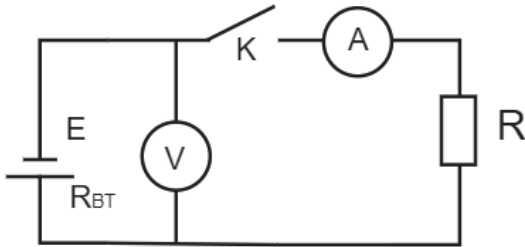


Рис. 13. Схема для варианта 5 задания 1

Вариант 6

В цепи (рис. 14) известны величины сопротивлений $R_1=2$ Ом, $R_4=0.3$ Ом, а также величина токи $I_1=1,5$ А, $I_4=3$ А и напряжение на участке $U_2=3$ В.

Определить значения тока $I=?$, напряжение $U=?$ и сопротивления $R=?$.

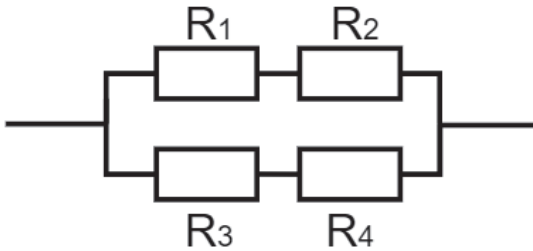


Рис.14. Схема для варианта 6 задания 1

Вариант 7

В цепи (рис. 15) известны величины сопротивлений $R_1=2$ Ом, $R_2=3$ Ом, $R_3=5$ Ом, $R_4=1.5$ Ом, а также величина $E=1.5$ В.

Определить значения токов $I_1=?$, $I_2=?$, $I_3=?$, $I_4=?$ и напряжение $U=?$.

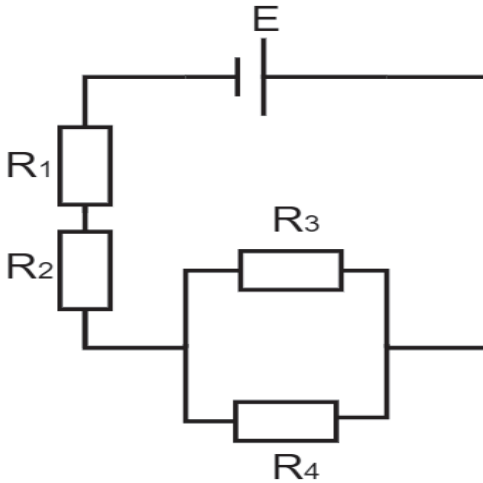


Рис.15. Схема для варианта 7 задания 1

Вариант 8

В цепи (рис. 16) известны величины сопротивлений $R_1 = R_2 = 1$ Ом, $R_3 = 2$ Ом, $R_4 = 3$ Ом, а также величина напряжения $U = 3$ В.

Определить значения сопротивления $R = ?$, и тока $I = ?$.

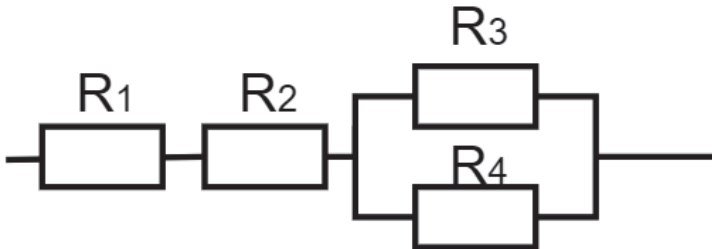


Рис. 16. Схема для варианта 8 задания 1

Вариант 9

В цепи (рис. 17) известна величина сопротивления $R_B = 3$ Ом, $R_H = 4$ Ом, а также тока $I = 2$ А.

Определить значения ЭДС источника $E = ?$ и мощность $P = ?$.

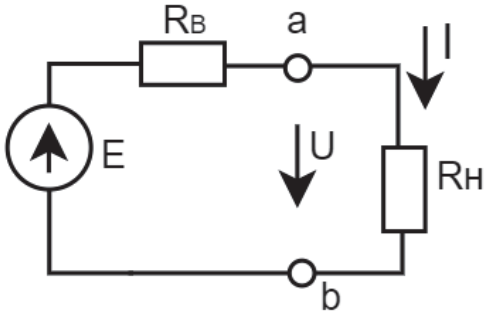


Рис. 17. Схема для варианта 9 задания 1

Вариант 10

В цепи (рис. 18) известны величины сопротивлений $R_1=4$ Ом, $R_2=3$ Ом, $R_3=2$ Ом, а также напряжение на участках $U_1=U_2=3$ В.

Определить значения напряжения $U=?$, тока $I=?$ и сопротивление $R=?$.

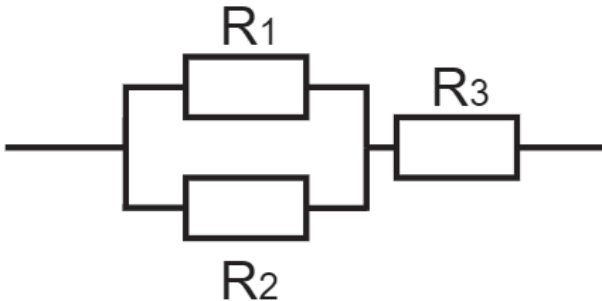


Рис.18. Схема для варианта 10 задания 1

2) Рассчитать цепь по законам Кирхгофа

Вариант 1

В цепи (рис. 19) известны величины сопротивлений $r_1=2$ Ом, $r_2=2,5$ Ом, $r_3=3$ Ом, $r_4=1,5$ Ом, а также величины $E_1=10$ В, $E_2=8$ В.

Определить значения токов $I_1=?$, $I_2=?$, $I_3=?$, $I_4=?$.

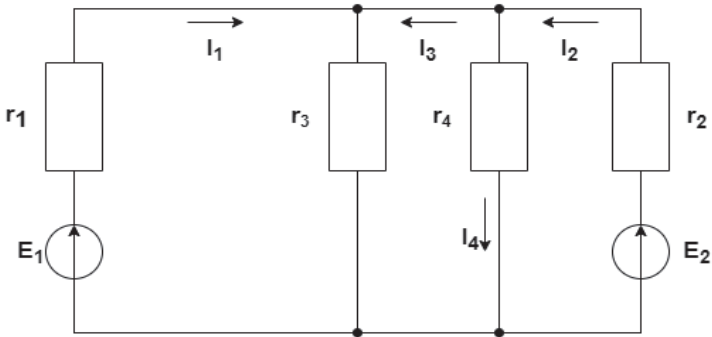


Рис.19. Схема для варианта 1 задания 2

Вариант 2

В цепи (рис. 20) известны величины сопротивлений $R_1=0,5$ Ом, $R_2=3$ Ом, $R_3=4$ Ом, $R_4=0,8$ Ом, а также величины $E_1=1$ В, $E_2=1,5$ В, $E_3=2$ В, $E_4=2,5$ В. Определить значения токов $I_1=?$, $I_2=?$, $I_3=?$.

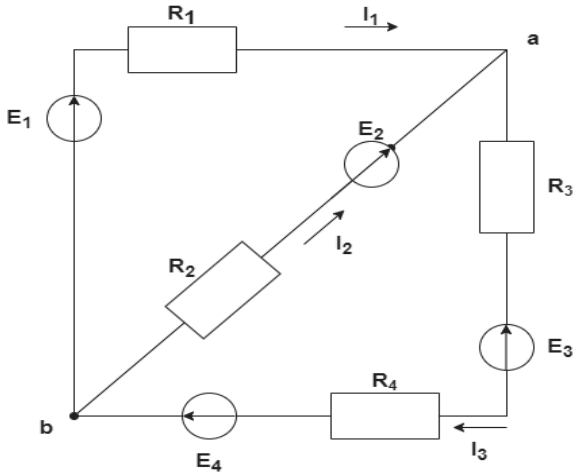


Рис.20. Схема для варианта 2 задания 2

Вариант 3

В цепи (рис. 21) известны величины сопротивлений $R_1=1$ Ом, $R_2=2$ Ом, $R_3=R_4=1,5$ Ом, а также величины $E_1=4$ В.

Определить значения токов $I_1=?$, $I_2=?$, $I_3=?$.

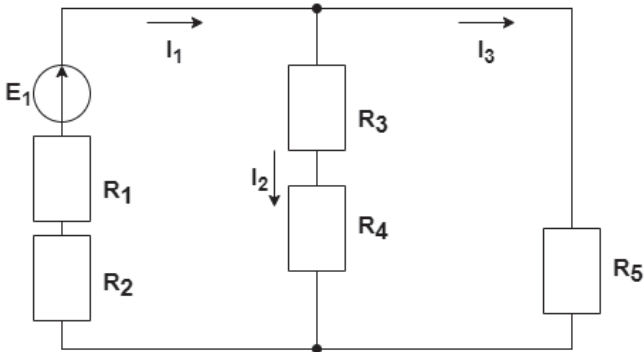


Рис.21. Схема для варианта 3 задания 2

Вариант 4

В цепи (рис. 22) известны величины сопротивлений $R_1=3$ Ом, $R_2=2$ Ом, $R_3=1,5$ Ом, $R_4=2,5$ Ом, $R_5=2$ Ом, $R_6=3$ Ом, а также величины $E_1=2$ В, $E_2=3$ В. Определить значения токов $I_1=?$, $I_2=?$, $I_3=?$, $I_4=?$, $I_5=?$, $I_6=?$, $I_7=?$, $I_8=?$.

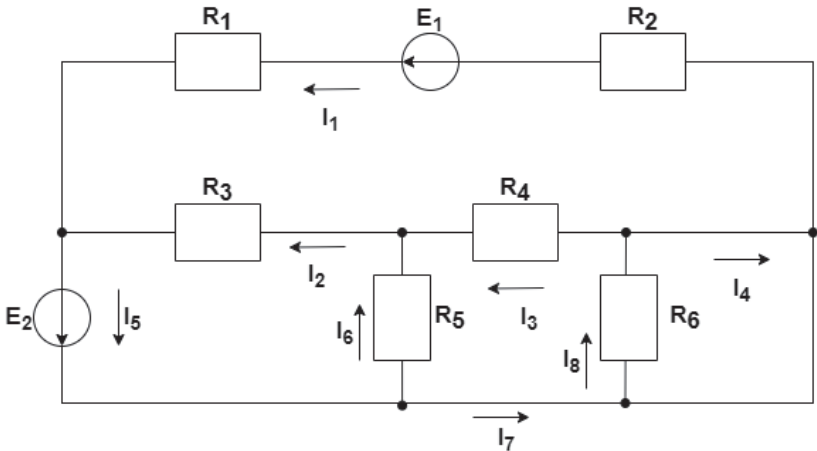


Рис.22. Схема для варианта 4 задания 2

Вариант 5

В цепи (рис. 23) известны величины сопротивлений $R_1=1$ Ом, $R_2=3$ Ом, $R_3=1,5$ Ом, $R_4=2$ Ом, а также величины $E_1=1,5$ В, $E_2=2$ В. Определить значения токов $I_1=?$, $I_2=?$, $I_3=?$, $I_4=?$.

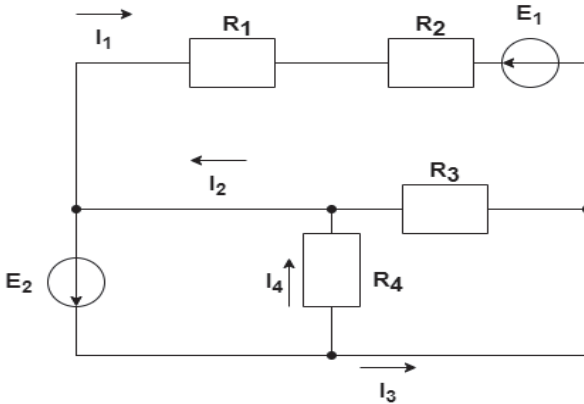


Рис.23. Схема для варианта 5 задания 2

Вариант 6

В цепи (рис. 24) известны величины сопротивлений $R_1=1$ Ом, $R_2=2$ Ом, $R_3=1,5$ Ом, $R_4=2,5$ Ом, $R_5=3$ Ом, а также величины $E_1=1$ В, $E_2=2$ В, $E_3=3$ В, $E_4=3$ В. Определить значения токов $I_1=?$, $I_2=?$, $I_3=?$.

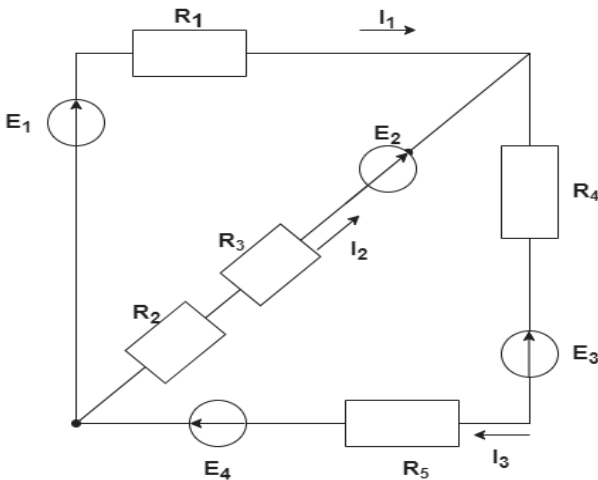


Рис.24. Схема для варианта 6 задания 2

Вариант 7

В цепи (рис. 25) известны величины сопротивлений $R_1=0,5$ Ом, $R_2=1$ Ом, $R_3=1,5$ Ом, $R_4=2$ Ом, $R_5=1$ Ом, а также величины $E_1=1$ В, $E_2=2$ В. Определить значения токов $I_1=?$, $I_2=?$, $I_3=?$.

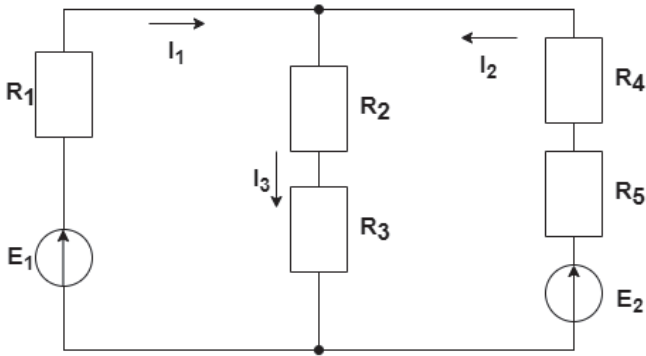


Рис.25. Схема для варианта 7 задания 2

Вариант 8

В цепи (рис. 26) известны величины сопротивлений $R_1=1,5$ Ом, $R_2=2$ Ом, $R_3=1,2$ Ом, а также величины $E_1=2$ В.

Определить значения токов $I_1=?$, $I_2=?$, $I_3=?$.

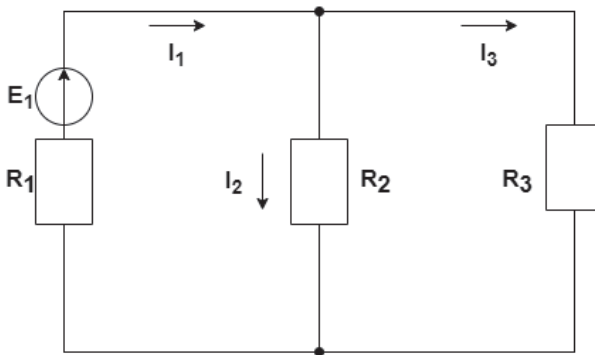


Рис.26. Схема для варианта 8 задания 2

Вариант 9

В цепи (рис. 27) известны величины сопротивлений $R_1=1$ Ом, $R_2=1,5$ Ом, $R_3=2$ Ом, а также величины $E_1=1,5$ В, $E_2=3$ В.

Определить значения токов $I_1=?$, $I_2=?$, $I_3=?$, $I_4=?$.

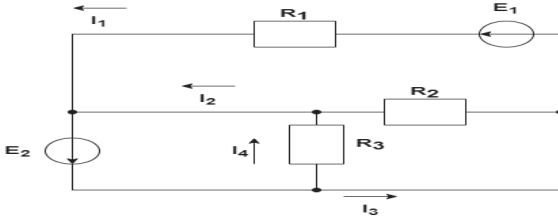


Рис.27. Схема для варианта 9 задания 2

Вариант 10

В цепи (рис. 28) известны величины сопротивлений $R_1=1 \text{ Ом}$, $R_2=0,5 \text{ Ом}$, $R_3=1,5 \text{ Ом}$, $R_4=1 \text{ Ом}$, $R_5=2 \text{ Ом}$, а также величины $E_1=1 \text{ В}$, $E_2=2 \text{ В}$.

Определить значения токов $I_1=?$, $I_2=?$, $I_3=?$, $I_4=?$, $I_5=?$, $I_6=?$, $I_7=?$, $I_8=?$.

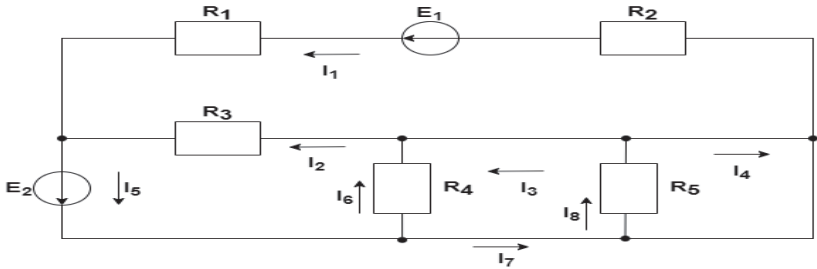


Рис.28. Схема для варианта 10 задания 2

- 3) Рассчитать цепь из задания №2 методом контурных токов.
- 4) Рассчитать цепь из задания №2 методом узловых потенциалов.
- 5) Рассчитать электрическую цепь синусоидального тока с последовательным соединением приёмников (рис. 29)

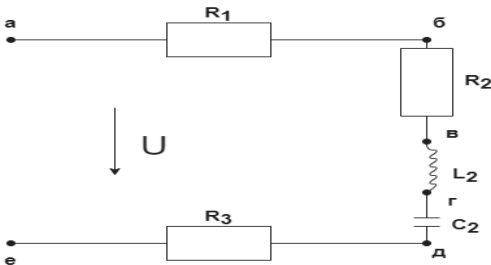


Рис. 29. Схема для решения задания №5

Определить ток цепи, падение напряжения на элементах цепи, активную, реактивную и полную мощность цепи.

Вариант 1

Дано: $U=100$ В, $R_1=5$ Ом, $R_2=3$ Ом, $L_2=70$ мГн, $C_2=150$ мкФ, $R_3=7$ Ом.

Вариант 2

Дано: $U=95$ В, $R_1=7$ Ом, $R_2=4$ Ом, $L_2=75$ мГн, $C_2=130$ мкФ, $R_3=4,5$ Ом.

Вариант 3

Дано: $U=59$ В, $R_1=10$ Ом, $R_2=5,5$ Ом, $L_2=85$ мГн, $C_2=125$ мкФ, $R_3=6,5$ Ом.

Вариант 4

Дано: $U=90$ В, $R_1=8,5$ Ом, $R_2=10$ Ом, $L_2=70$ мГн, $C_2=150$ мкФ, $R_3=11$ Ом.

Вариант 5

Дано: $U=85$ В, $R_1=12$ Ом, $R_2=11$ Ом, $L_2=95$ мГн, $C_2=110$ мкФ, $R_3=9$ Ом.

Вариант 6

Дано: $U=105$ В, $R_1=15$ Ом, $R_2=10$ Ом, $L_2=60$ мГн, $C_2=115$ мкФ, $R_3=12$ Ом.

Вариант 7

Дано: $U=125$ В, $R_1=18$ Ом, $R_2=16$ Ом, $L_2=105$ мГн, $C_2=100$ мкФ, $R_3=15$ Ом.

Вариант 8

Дано: $U=75$ В, $R_1=10$ Ом, $R_2=6$ Ом, $L_2=90$ мГн, $C_2=100$ мкФ, $R_3=7$ Ом.

Вариант 9

Дано: $U=55$ В, $R_1=8$ Ом, $R_2=7$ Ом, $L_2=85$ мГн, $C_2=90$ мкФ, $R_3=5$ Ом.

Вариант 10

Дано: $U=82$ В, $R_1=11$ Ом, $R_2=17$ Ом, $L_2=135$ мГн, $C_2=95$ мкФ, $R_3=15$ Ом.

Литература

1. Затучный Д.А. Основы электротехники и схемотехническое моделирование.– Учебное пособие. – М.: МГТУ ГА, 2018.
2. Резников Б.Л. Электротехника, электроника и схемотехника: Тексты лекций. – М.: МГТУ ГА, 2012.
3. Б.Л. Резников. Электротехника, электроника и схемотехника. Пособие по выполнению лабораторных и практических работ для студентов II курса направления 230100 очной формы обучения. – М.: МГТУ ГА, 2013.