ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ» (МГТУ ГА)

Кафедра прикладной математики

Ю.Ф. Касимов, Н.И. Овсянникова, А.А. Пичугин

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Учебно-методическое пособие
по выполнению практических занятий

для студентов I курса
направления 01.03.04
очной формы обучения

Москва
ИД Академии Жуковского
2018

УДК 510.6(07)
ББК 517
К28

Рецензент:
Дементьев Ю.И. – канд. физ.-мат. наук, доц.

Касимов Ю.Ф.
К28 Математическая логика [Текст] : учебно-методическое пособие по выполнению практических занятий / Ю.Ф. Касимов, Н.И. Овсянникова, А.А. Пичугин. – М.: ИД Академии Жуковского, 2018. – 36 с.

Данное учебно-методическое пособие издается в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Математическая логика» по учебному плану для студентов I курса направления 01.03.04 очной формы обучения.

Рассмотрено и одобрено на заседании кафедры 15.05.2018 г. и методического совета 15.05.2018 г.

УДК 510.6(07)
ББК 517

В авторской редакции

Подписано в печать 04.09.2018 г.
Формат 60х84/16 Печ. л. 2,25 Усл. печ. л. 2,09
Заказ № 351/0622-УМП08 Тираж 25 экз.

Московский государственный технический университет ГА
125993, Москва, Кронштадтский бульвар, д. 20

Издательский дом Академии имени Н. Е. Жуковского
125167, Москва, 8-го Марта 4-я ул., д. 6А
Тел.: (495) 973-45-68
E-mail: zakaz@itsbook.ru

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Данное учебно-методическое пособие предназначено для студентов I-го курса очной формы обучения по направлению подготовки 01.03.04 и содержит материалы практических примеров, заданий и работ, изучаемых и выполняемых в процессе проведения практических занятий в 1-ом семестре.

Материалы учебно-методического пособия позволяют студентам получить практические навыки и умения, необходимые для освоения и усвоения теоретико-практических знаний раздела "Алгебра логики", его основных тем: "Логика высказываний" и "Логика предикатов".

В материалах каждой темы приведены краткие теоретические сведения и соответствующие практические примеры, задачи и контрольные задания.

Целью проведения и выполнения практических занятий и работ является:

- закрепление теоретико-практических основ пройденного и изученного материала лекций и практических занятий;
- приобретение необходимых практических навыков и умений, необходимых для выполнения индивидуальных и контрольных задач и заданий.

1. АЛГЕБРА ЛОГИКИ

1.1. Логика высказываний

Материалы раздела “Алгебра логики” являются важнейшей составляющей теоретических и практических основ математической логики. Логические понятия (язык, формулы, истинность и т.д.) систематически используются практически во всех разделах и темах учебной дисциплины “Математическая логика”, образуя их логическую базу.

Алгебра логики изучает в основном операциональный аспект логики, т.е. способы, с помощью которых из данного набора высказываний (формул) строятся другие, более сложные, высказывания (формулы). При этом даются правила верификации получаемых высказываний (формул), т.е. правила, с помощью которых устанавливается истинность полученного высказывания, если известна истинность исходных высказываний.

Собственно логические исчисления, т.е. формально-логические системы, в дисциплине “Математическая логика” не рассматриваются, но некоторые аспекты теории формальных систем изучаются в разделе “Алгебра логики”. Это, в первую очередь, понятие формального языка (в данном алфавите). При изучении этого понятия необходимо усвоить его чисто синтаксический характер. Язык называется формальным, если даются совершенно четкие правила для решения вопроса о том, является ли данное выражение выражением рассматриваемого языка. И хотя алгебра логики имеет дело, в первую очередь, с семантическими понятиями (истинность, эквивалентность формул), нужно четко различать оба эти аспекта во всех ситуациях.

Примерами формальных языков, изучаемых в алгебре логики, являются: <u>язык логики высказываний</u> - Z_0 и <u>язык логики предикатов</u> - Z_1. При изучении теоретических аспектов дисциплины “Математическая логика” в лекциях даются строгие определения этих языков. Основным элементом каждого из этих языков является **формула.** Затем изучаются чисто семантические понятия, истинные значения формул, равносильность формул и т.д. Важнейшими логическими понятиями являются понятия <u>тавтологии</u> (логического закона) и <u>логического следствия</u>. Важность этих понятий обуславливается тем, что в них формализуется (уточняется) смысл понятий математической теоремы и ее доказательства. В некотором смысле каждая математическая теорема есть тавтология в некотором языке, а ее доказательство проводится цепочной логических следствий.

Рассматриваемые в алгебре логики языки дают также мощное средство для описания самых разнообразных математических понятий, в том числе и понятий, которые изучаются в дисциплине “Математическая логика”. Важнейшей особенностью изучаемой дисциплины является широкое использование логической символики, и изучение алгебры логики призвано, в первую очередь, научить обучающихся свободно ею пользоваться.

Приведем теперь ряд простейших понятий, относящихся к формальным языкам.

Алфавитом называется любое непустое множество *A*. Элементы алфавита называются символами или буквами данного алфавита.

Словом в алфавите *A* называется произвольная конечная последовательность символов из *A*. Вводится также понятие *пустого слова*, обозначаемого Λ. Число букв в слове называется его длиной. Пустое слово имеет нулевую длину. Если α, β - два слова, то слово $\alpha\beta$, полученное приписыванием к слову α справа слова β, называется произведением слов α и β. При этом считается, что $\alpha\Lambda=\Lambda\alpha$ для любого слова α. Слово β называется подсловом слова α, если $\alpha = \alpha_1\beta\alpha_2$, при этом тройка $\langle\alpha_1, \beta, \alpha_2\rangle$ называется вхождением слова β в слово α, а пара $\langle\alpha_1, \alpha_2\rangle$ - контекстом этого вхождения. Одно и то же слово β может иметь несколько различных вхождений в качестве подслова в данное слово.

Пусть $\langle\alpha_1, \beta, \alpha_2\rangle$ - вхождение β в α, а γ – некоторое слово в том же алфавите. Тогда результатом замены данного вхождения β в слове α на слово γ называется слово $\delta = \alpha_1, \gamma\alpha_2$ $\delta=\alpha_1 \gamma \alpha_2$.

Результатом подстановки S_α^β в слово α вместо символа *a* слова β, называется слово, обозначаемое $S_a^\beta\alpha$ и получающееся одновременной заменой всех вхождений буквы *a* в слове α на слово β.

Языком в данном алфавите называется произвольное подмножество слов этого алфавита. Множество всех слов в алфавите *A* обозначается через A^*. Если $\mathcal{L}$ какой-либо язык в *A*, то $\mathcal{L} \subseteq A^*$.

Пример 1. Пусть алфавит $A = \{а, м\}$, тогда Λ, *а, м, ма, мама* – слова данного алфавита. Слово *папа* не является словом в данном алфавите, т.к. буква *п* не входит в этот алфавит.

Пример 2. Пусть *A* – алфавит русского языка. Тогда любое слово русского языка будет словом в этом алфавите. Слова *man, stata* не являются словами в этом алфавите.

Пример 3. Пусть $A = \{0,1,2, \dots, 9\}$ – алфавит, состоящий из цифровых символов (цифр). Тогда любое натуральное число изображается словом в этом алфавите. Слова 000, 010 – также является словами в этом алфавите.

Пример 4. Пусть *A* – расширенный алфавит русского языка, включающий пробел, заглавные буквы, все знаки препинания, а также скобки. Тогда не только слова русского языка, но и вообще любой текст русского языка является словом в данном алфавите.

Пример 5. Пусть $A = \{0,1\}$ – двоичный алфавит. Слово 01 является подсловом слова 1011011001101, причем это слово имеет четыре вхождения в указанное слово. Перечислим все эти вхождения: $\langle 1, 01, 1011001101\rangle$, $\langle 1011, 01, 1001101\rangle$, $\langle 10110110, 01, 101\rangle$, $\langle 10110110011, 01, \Lambda\rangle$.

Пример 6. Слово *ма* дважды входит в слово *мама*: $\langle\Lambda, ма, ма\rangle$, $\langle ма, ма, \Lambda\rangle$. Первое вхождение является начальным, второе конечным.

Пример 7. Слово 00 трижды входит в слово 10000: $\langle 1{,}00{,}00\rangle$, $\langle 10{,}00{,}0\rangle$, $\langle 100{,}00{,}\Lambda\rangle$.

Пример 8. Пустое слово Λ четыре раза входит в слово «*ура*»: $\langle \Lambda,\Lambda, ура\rangle$, $\langle у,\Lambda, ра\rangle$, $\langle ур,\Lambda, а\rangle$, $\langle ура,\Lambda,\Lambda\rangle$.

Пример 9. Слово «*горе*» является результатом замены вхождения слова «мо» на «го» в слове «море».

Пример 10. Пусть $\beta = 11$ и $\alpha = 11011$ - слова в двоичном алфавите. Слово β дважды входит в слово α. Если в этих вхождениях заменить β на слово $\gamma = 0$, то получатся слова 0011, 1100.

Пример 11. Пусть $\alpha = 01011, \beta = 111, a = 0$, тогда

$$S_{a}^{\beta}\alpha = S_{0}^{111}(010111) = 111111111.$$

Пример 12. $S_{м}^{п}(мама) = папа$, $S_{р}^{др}(рама) = драма$, $S_{ш}^{к}(шабаш) = кабак$.

Замечание. Как видно из примеров, в качестве алфавита может выбираться совершенно произвольный набор символов. Символами одного языка могут быть слова другого языка. Например, в ряде языков программирования слова *begin*, *end* считаются символами (буквами) этих языков.

Нужно четко понимать различие *между операциями замены вхождения подслова на слово и подстановки слова вместо некоторого символа*. Операция замены производится *однократно* для *фиксированного вхождения* заменяемого слова, тогда как в случае подстановки, *все вхождения символа* заменяются на заданное слово.

Пример 13. Пусть $\alpha = 0101$, $\beta = 101$. Если заменить первое вхождение символа 0 на слово β, то получится слово101101. Если же выполнить подстановку $S_{0}^{\beta}\alpha$, то получится слово 10111011.

Задачи (индивидуальные задания, примеры для самостоятельной работы обучающихся).

1. Пусть $A = \{0,1\}$ – двоичный алфавит. Найти произведения $\alpha\beta$ и $\beta\alpha$ слов α и β в этом алфавите, если:

а) $\alpha = 00$, $\beta = 11$;

б) $\alpha = 101$, $\beta = \Lambda$;

в) $\alpha = \Lambda$, $\beta = \Lambda$;

г) $\alpha = 11$, $\beta = 100$.

2. Найти все вхождения слова α в слово β, если:

а) $\alpha = 101$, $\beta = 110101011101$;

б) $\alpha = \Lambda$, $\beta = 1101$;

в) $\alpha = \Lambda$, $\beta = \Lambda$;

г) $\alpha = 11$, $\beta = 11$.

3. Пусть A алфавит русского языка. Выписать все подслова слова α, если:

а) $\alpha = математика$;
б) $\alpha = праздник$;
в) $\alpha = лекция$.

4. Пусть $A = \{a, b, +, -, x, y\}$ – алфавит из 6 символов. Выполнить замену первого вхождения слова α в слово β на слово γ, если:
а) $\alpha = a+,\ \beta = a + b - x + y,\ \gamma = b - y$;
б) $\alpha = -y,\ \beta = x - y + b - y,\ \gamma = +a$.

5. Пусть $A = \{0,1\}$. Выполнить замену последнего вхождения слова α в слово β на слово γ, если:
а) $\alpha = 110, \beta = 1011001101, \gamma = 00$;
б) $\alpha = \Lambda, \beta = 101, \gamma = 1111$;
в) $\alpha = \Lambda, \beta = 1011, \gamma = \Lambda$;
г) $\alpha = 01, \beta = 01000, \gamma = \Lambda$;
д) $\alpha = \Lambda, \beta = \Lambda, \gamma = 101$;
е) $\alpha = \Lambda, \beta = \Lambda, \gamma = \Lambda$.

6. Пусть $A = \{0,1,2\}$. Выполнить подстановку $S_{x}^{\alpha}\beta$, если:
а) x = 0, $\alpha = 111, \beta = 1010$;
б) x = 2, $\alpha = \Lambda, \beta = 12120$;
в) x = 1, $\alpha = 12, \beta = 12120$;
г) x = 1, $\alpha = 11111, \beta = 1$;
д) x = 0, $\alpha = \Lambda, \beta = 0000$.

7. Слово α имеет длину 17 и содержит 8 вхождений символа a. Слово β имеет длину 4. Какова длина слова $S_{\alpha}^{\beta}\alpha$?

8. Слово α имеет длину n, слово β - длину m, а слово γ - длину k. Какова длина слова, полученного в результате замены какого-нибудь вхождения слова β в слово α на слово γ ?

9. Слово α имеет длину n и содержит k вхождений символа a. Длина слова β равна m. Какова длина слова $S_{\alpha}^{\beta}\alpha$?

1.2. Язык логики высказываний

Алфавит языка логики высказываний содержит:

- бесконечный набор символов $V = \{p_1, \dots, p_n \dots\}$ - пропозициональных переменных;
- пять символов логических связок:
  - $\neg$ - отрицание;
  - $\land$ - конъюнкция (и);
  - $\lor$ - дизъюнкция (или);
  - $\rightarrow$ - импликация (если…то);
  - $\leftrightarrow$ - эквиваленция (тогда и только тогда, когда),

а также двух вспомогательных символов – скобок:

- (- левая скобка;
-) – правая скобка.

Итак, $A = V \cup \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\} \cup \{(,)\}$.

Любое слово в этом алфавите будем называть выражением. Некоторый специальный класс выражений называется классом формул. Все формулы составляют язык L_0 – язык логики высказываний.

Определение формул (правила):

1. Каждая переменная есть формула, т.е. $V \subseteq L_0$. (пункт 1).

2. Если α, β - формулы, то $\neg\alpha, (\alpha \wedge \beta), (\alpha \vee \beta), (\alpha \rightarrow \beta), (\alpha \leftrightarrow \beta)$ – формулы. (пункт 2).

3. Других формул нет.

Для каждой формулы α можно образовать список $(z_1, \dots, z_n)$ всех переменных, входящих в эту формулу. Если $(z_1, \dots, z_n)$ список переменных формулы α, то пишут $\alpha(z_1, \dots, z_n)$.

Подформулой формулы α называется любое подслово слова α, само являющееся формулой.

Конструкцией формулы α называется последовательность ее подформул: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n = \alpha$ такая, что каждая из промежуточных формул получается из предыдущих с помощью только одной связки.

Каждая формула имеет конструкцию (возможно не единственную).

$\mathbb{B} = \{0,1\}$ – двухэлементное множество истинностных значений, 0 – ложь, 1 – истина. Логические операции, порождаемые связками, определяются следующими соотношениями:

$\neg 0 = 1, \neg 1 = 0;$

$0 \vee 1 = 1 \vee 0 = 1 \vee 1 = 1, 0 \vee 0 = 0;$

$0 \wedge 1 = 0 \wedge 0 = 1 \wedge 0 = 0, 1 \wedge 1 = 1;$

$0 \rightarrow 1 = 0 \rightarrow 0 = 1 \rightarrow 1 = 1, 1 \rightarrow 0 = 0;$

$0 \leftrightarrow 0 = 1 \leftrightarrow 1 = 1, 0 \leftrightarrow 1 = 1 \leftrightarrow 0 = 0.$

Если $\alpha(z_1, \dots, z_n)$ - формула логики высказываний (ФЛВ), то можно найти ее значение истинности при заданных значениях истинности переменных, с помощью любой конструкции формулы, вычисляя значения всех промежуточных подформул. Вся эта процедура описывается таблицей истинности формулы α, которая содержит истинностные значения формулы при всех возможных распределениях истинностных значений переменных.

Таблица истинности формулы

переменные	промежуточные подформулы	ФЛВ
Z_1 Z_i Z_n	α_1 α_j α_{m-1}	α
0………...0……….0 0………...0……….1 …………………….... 1………...1……….1		

Формула $\alpha(z_1, \dots, z_n)$ называется выполнимой, если для некоторых значений переменных $z_1, \dots, z_n$ формула принимает истинностное значение 1.

Формула $\alpha(z_1, \dots, z_n)$ называется опровержимой, если для некоторых значений переменных $z_1, \dots, z_n$ формула принимает значение 0.

Формула $\alpha(z_1, \dots, z_n)$ называется тождественно истинной или тавтологией, если для всех возможных значений переменных $z_1, \dots, z_n$ формула принимает значение 1.

Формула $\alpha(z_1, \dots, z_n)$ называется тождественно ложной, если для всех значений переменных $z_1, \dots, z_n$ она принимает значение 0.

Две формулы $\alpha(z_1, \dots, z_n)$ и $\beta(z_1, \dots, z_n)$ называются эквивалентными или равносильными, если они принимают одинаковые значения для всех возможных значений переменных. Если α и β эквивалентные формулы, то пишут:

$$\alpha \Leftrightarrow \beta \text{ или } \alpha \leftrightarrow \beta \text{ или } \alpha \mid\!=\!\mid \beta.$$

Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ и β - формулы. Будем говорить, что β является логическим следствием формул $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, и писать $\alpha_1, \dots, \alpha_n \models \beta$ или $\frac{\alpha_1 \dots \alpha_n}{\beta}$, если β всегда принимает значение 1, при условии, что все формулы $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ приняли значение 1. Формулы α и β равносильны тогда и только тогда, когда формула $\alpha \leftrightarrow \beta$ тождественно истинная, т.е. тавтология.

Формула β является следствием формул $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ тогда и только тогда, когда формула $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \rightarrow \beta$ - *тавтология*.

Пример 14. Покажем, что выражение $(\urcorner(P \vee Q) \wedge R)$ – формула языка L_0. Для этого выпишем конструкцию этой формулы по правилам построения 1 и 2:

P	– переменные, которые по определению (т.е. по правилу 1) являются формулами;	
Q		
R		
$(R \vee Q)$	- формула (по правилу 2);	
$\urcorner(P \vee Q)$	- формула	(по правилу 2)
$(\urcorner(P \vee Q) \wedge R)$	- формула	

Таким образом, P, Q, R, $(P \vee Q)$, $\urcorner(P \vee Q)$, $(\urcorner(P \vee Q) \wedge R)$ – все подформулы данной формулы, причем (P, Q, R) – список переменных этой формулы.

Пример 15. Найти значение формулы $((P \rightarrow Q) \wedge (\urcorner Q \vee R))$ при $P = 0$, $Q = 1, R = 0$.

Сначала выпишем конструкцию этой формулы:

$$P, Q, R, (P \rightarrow Q), \urcorner Q, (\neg \boldsymbol{Q} \vee \boldsymbol{R}), ((\boldsymbol{P} \rightarrow \mathbf{Q}) \wedge (\neg \boldsymbol{Q} \vee \boldsymbol{R})).$$

Тогда можно последовательно вычислить:

$$P = 0,\ Q = 1,\ R = 0,\ (P \to Q) = (0 \to 1) = 1,\ \neg Q = \neg 1 = 0,$$
$$(\neg Q \vee R) = (0 \vee 0) = 0,\ \big((P \to Q) \wedge (\neg Q \vee R)\big) = (1 \wedge 0) = 0.$$

Замечание. Конечно, в принципе, необязательно выписывать конструкцию формулы, чтобы найти ее значение при данных значениях переменной. Можно пользоваться методом прямой подстановки значений переменных в формулу и затем последовательно проводить вычисления, используя алгебраические свойства связок.

Пример 16. Вычислить значение формулы $\big(\neg(P \leftrightarrow Q) \vee (R \vee P)\big)$ при значениях переменных: $P = 1,\ Q = 0,\ R = 1$.

Подставляя значения переменных в формулу, получим

$$\big(\neg(P \leftrightarrow Q) \vee (R \vee P)\big) = \big(\neg(1 \leftrightarrow 0) \vee (1 \vee 1)\big) = (\neg 0 \vee 1) = (1 \vee 1) = 1.$$

Замечание. Запись формулы, получающуюся по правилам (пунктам) 1 и 2 определения формул, назовем канонической записью. Каноническая запись – наиболее полное и точное представление формулы. Однако на практике допускаются некоторые упрощения, касающиеся скобок. Для того, чтобы не выписывать слишком много скобок, договариваются о порядке выполнения логических операций в формуле (правило старшинства) так же, как и в обычной арифметике и алгебре. Принимается соглашение о следующем порядке выполнения операций: $\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$. Это значит, что операция “отрицание (инверсия)” - “$\neg$ ” всегда выполняется по порядку самой первой, затем выполняется “конъюнкция (логическое умножение) – “ $\wedge$ “и т.д.

Благодаря этому правилу, можно лишние скобки опускать, при этом внешние скобки в канонической записи опускаются всегда. Рассмотрим, например, формулу $\big((P \wedge Q) \to (R \vee Q)\big)$. Ее можно упростить, во-первых, снятием внешних скобок: $(P \wedge Q) \to (R \vee Q)$. Далее, так как операции $\wedge$ и $\vee$ предшествуют операции $\to$, то первую и вторую пары скобок можно опустить: $P \wedge Q \to R \vee Q$.

Итак, формула в канонической записи может быть в некоторых случаях упрощена и, наоборот, из упрощенной записи, учитывая старшинство операций, можно восстановить каноническую запись формулы.

Пример 17. Упростить формулу $\Big((P \wedge Q) \leftrightarrow \big(R \to (P \vee Q)\big)\Big)$.

Опуская внешнюю пару скобок, получим $(P \wedge Q) \leftrightarrow \big(R \to (P \vee Q)\big)$. Операция $\wedge$ предшествует операции $\leftrightarrow$, поэтому можно опустить и первую пару скобок: $P \wedge Q \leftrightarrow \big(R \to (P \vee Q)\big)$. Операция $\to$ предшествует операции $\leftrightarrow$, поэтому можно получить: $P \wedge Q \leftrightarrow R \to (P \vee Q)$ и, наконец, $P \wedge Q \leftrightarrow R \to P \vee Q$.

Пример 18. Упростить формулу $\neg\big((\neg P \to Q) \wedge (R \to S)\big)$.
В этой формуле нельзя сделать никаких упрощений.

Пример 19. Восстановить каноническую запись формулы

$$P \wedge Q \leftrightarrow Q \vee R \wedge \urcorner P \rightarrow P.$$

Находим операции, которые должны выполняться первыми, и заключаем соответствующие части в скобки: $(P \wedge Q) \leftrightarrow Q \vee (R \wedge \urcorner P) \rightarrow P$. Затем по порядку за операцией $\wedge$ идет операция $\vee$, а значит получаем

$$(P \wedge Q) \leftrightarrow \big(Q \vee (R \wedge \urcorner P)\big) \rightarrow P.$$

Следующая операция $\rightarrow$: $(P\wedge Q)\leftrightarrow((Q\vee(R\vee\neg P))\rightarrow P)$ и, наконец, заключаем формулу во внешние скобки:

$$\Big((P \wedge Q) \leftrightarrow \Big(\big(Q \vee (R \wedge \urcorner P)\big) \rightarrow P\Big)\Big).$$

Получена каноническая запись формулы.

Замечание. Если в формуле встречается несколько операций одного и того же вида, то они выполняются последовательно слева направо. Таким образом, в формуле $P \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow S$ скобки нужно расставить следующим образом: $\Big(\big((P \rightarrow Q) \rightarrow R\big) \rightarrow S\Big)$.

Пример 20. Восстановить каноническую запись формулы

$$P \vee Q \vee R \wedge P \rightarrow Q \rightarrow R.$$

Последовательно получаем:

$$P\vee Q\vee(R\wedge P)\rightarrow Q\rightarrow R;\ (P \vee Q) \vee (R \wedge P) \rightarrow Q \rightarrow R;$$

$$\big((P \vee Q) \vee (R \wedge P)\big) \rightarrow Q \rightarrow R;\ \Big(\big((P \vee Q) \vee (R \wedge P)\big) \rightarrow Q\Big) \rightarrow R;$$

$$\bigg(\Big(\big((P \vee Q) \vee (R \wedge P)\big) \rightarrow Q\Big) \rightarrow R\bigg).$$

Умение упрощать и восстанавливать каноническую запись является очень важным. Без правильного применения этих операций невозможно точно вычислять значения формулы.

Для решения вопроса о свойствах формулы, как правило приходится строить таблицу истинности данной формулы. Очень важно научиться правильно строить таблицу. При этом следует придерживаться следующей системы. Сначала образуется список переменных данной формулы и на каждую переменную выделяется столбец таблицы истинности. Все остальные столбцы отводятся для последовательных подформул из конструкции данной формулы.

Пример 21. Пусть дана формула $P \wedge Q \vee (R \rightarrow P)$.

Восстановим ее каноническую запись: $\big((P \wedge Q) \vee (R \rightarrow P)\big)$. Список переменных этой формулы будет: (P, Q, R). Схема таблицы истинности будет иметь следующий вид:

P	Q	R	$P \wedge Q$	$R \rightarrow P$	$(P \wedge Q) \vee (R \rightarrow P)$
0	0	0			
0	0	1			
.	.	.			
.	.	.			
1	1	1			

Строки истинности заполняются последовательными значениями переменных и всех подформул, включая саму формулу.

Если формула содержит n переменных, то всего строк значений будет 2^n, так как столько будет всевозможных распределений истинностных значений переменных. Обычно в k-й строке выписываются значения для формул таблицы при значениях n переменных, соответствующих цифрам n-значного двоичного разложения числа k. Так, если $k = 3$, $n = 4$, то $k = 3 = (0011)$ - двоичное представление числа 3 и, следовательно, первая пара переменных получит значения 0, а вторая пара – 1. В общем случае начальное значение набора переменных будет $(0 \dots 0)$, т.е. состоит из одних 0, а затем последовательно изменяется по возрастанию до набора $(1 \dots 1)$ включительно.

Пример 22. Построить таблицу истинности для формулы $(P \wedge Q) \vee (R \to P)$. Формула имеет 3 переменных (P, Q, R), следовательно, всего будет $2^3 = 8$ наборов возможных значений для переменных: $0 = (0,0,0)$, $1 = (0,0,1)$, $2 = (0,1,0)$, $3 = (0,1,1)$, $4 = (1,0,0)$, $5 = (1,0,1)$, $6 = (1,1,0)$, $7 = (1,1,1)$. Для каждого такого набора значений переменных можно найти соответствующие значения формул и полностью заполнить таблицу истинности:

P	Q	R	$P \wedge Q$	$R \to P$	$(P \wedge Q) \vee (R \to P)$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

Имея таблицу истинности, можно ответить на все вопросы, касающиеся данной формулы.

Пример 23. Будет ли формула предыдущего примера выполнимой, опровержимой, тавтологией, тождественно ложной?

Просматривая таблицу истинности для этой формулы, мы видели, что на наборе $P = Q = R = 0$ формула принимает значение 1, и, следовательно, она <u>выполнима</u>.

На наборе $P = Q = 0$, $R = 1$ формула принимает значение 0, и, следовательно, она <u>опровержима</u> и <u>не может быть тавтологией</u>, с другой стороны, она <u>выполнима</u> и, следовательно, не может быть <u>тождественно ложной.</u>

Задачи (индивидуальные задания, примеры для самостоятельной работы обучающихся).

1. Выписать конструкцию следующих формул:

а) $\left(\left((P_0 \to P_1) \wedge (P_1 \to P_2)\right) \to (\urcorner P_0 \vee P_2)\right)$,

б) $\left(\urcorner(P \to Q) \wedge \left(P \leftrightarrow (R \vee \urcorner P)\right)\right)$,

в) $(\urcorner P \vee \urcorner Q) \leftrightarrow (\urcorner\urcorner P \to \urcorner\urcorner Q)$,

г) $\urcorner\left((P \wedge Q) \wedge (Q \vee R) \to \left((S \vee T) \vee \urcorner S\right)\right)$.

2. Упростить, если это возможно, записи следующих формул:

а) $\left(\left((P \to \urcorner Q) \to (P \vee Q)\right) \leftrightarrow \urcorner P\right)$,

б) $\left(\left((P_0 \to P_1) \wedge (P_1 \to P_2)\right) \to (\urcorner P_0 \vee P_2)\right)$,

в) $\left(\left((P \to Q) \to Q\right) \to R\right)$;

г) $\left(\left(\urcorner P \wedge \urcorner(P \wedge Q)\right) \to (\urcorner R \vee \urcorner Q)\right)$.

3. Восстановить каноническую запись следующих формул:

а) $P_1 \to P_2 \to P_3 \to P_4$;

б) $P_1 \wedge P_2 \to P_3 \wedge P_4$;

в) $\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q} \wedge \boldsymbol{R} \leftrightarrow \neg \boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q} \to \boldsymbol{R} \vee \boldsymbol{P}$;

г) $\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{Q} \wedge \boldsymbol{R} \vee \boldsymbol{P} \to \boldsymbol{Q} \to \boldsymbol{R} \vee \boldsymbol{Q} \wedge \boldsymbol{P}$;

д) $P \leftrightarrow Q \leftrightarrow R \wedge P \leftrightarrow Q \to P$.

4. Построить таблицы истинности следующих формул:

а) $\urcorner P \wedge \urcorner Q \vee \urcorner R \wedge \urcorner P$

б) $(P \to Q) \vee (P \to Q \wedge R)$;

в) $P \to (P \vee Q) \to (Q \wedge R) \to R$;

г) $\urcorner(P \wedge Q) \leftrightarrow (\urcorner P \vee Q) \to \urcorner Q$;

д) $(P \to \urcorner Q) \leftrightarrow (P \leftrightarrow Q)$;

е) $(P \vee Q) \leftrightarrow (\urcorner P \wedge \urcorner Q) \leftrightarrow R$;

ж) $P \wedge Q \to P \to \urcorner P$.

5. Будут ли следующие формулы выполнимы ?

а) $P \leftrightarrow Q \wedge R \leftrightarrow P$;

б) $P \leftrightarrow \urcorner R \wedge Q$;

в) $\urcorner P \vee (P \vee Q)$;

г) $P \to \urcorner Q \to \urcorner(P \to \urcorner Q)$;

д) $(P \wedge Q) \leftrightarrow \urcorner(P \to \urcorner Q)$;

е) $(P \vee Q) \leftrightarrow (R \wedge \urcorner P) \leftrightarrow P$;

ж) $\urcorner P \wedge Q \to Q \vee R$;.

з) $(P \wedge Q) \vee R \to (S \vee T) \vee (Q \vee U) \to (P \vee \urcorner P)$.

6. Будут ли следующие формулы опровержимы ?

а) $P \wedge Q \to (Q \wedge \urcorner Q \to R \wedge Q)$;

б) $(P \vee \urcorner Q) \vee R \to (Q \vee R)$;

в) $\urcorner P \to \urcorner\urcorner\urcorner P$;

г) $(P \vee Q) \to (\urcorner P \wedge Q) \vee (P \wedge \urcorner Q)$.

7. Будут ли тавтологическими следующие формулы ?

а) $(P \to Q) \vee (P \to \urcorner Q)$;

б) $\urcorner\urcorner P \to \urcorner\urcorner\urcorner\urcorner P$;

в) $\neg \boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{Q} \to \boldsymbol{Q} \vee \boldsymbol{R}$;

г) $P \wedge P \vee P \to P$;

д) $P \wedge Q \to P \vee R \to \urcorner P \wedge \urcorner Q$;

е) $(P \to Q) \to \big((P \to \urcorner Q) \to P\big)$.

8. Будут ли тождественно ложными следующие формулы ?

а) $P \wedge (\urcorner P \vee Q)$;

б) $(R \wedge P) \wedge (\urcorner P \wedge Q)$;

в) $P \leftrightarrow \urcorner P$;

г) $R \to P \to \urcorner P$;

д) $\big((Q \vee P) \to \urcorner(Q \vee P)\big) \wedge (Q \wedge P)$;

е) $\urcorner(P \vee Q) \leftrightarrow \urcorner(\urcorner P \vee \urcorner Q)$.

9. Будут ли эквивалентными следующие пары формул ?

а) $P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R)$ и $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow R$;

б) $P \vee (\urcorner P \wedge Q)$ и $P \vee Q$;

в) P и $P \wedge (Q \vee \urcorner Q)$;

г) $\urcorner\urcorner P$ и $\urcorner\urcorner\urcorner\urcorner P$;

д) $P \to (Q \to R)$ и $(P \to Q) \to R$;

е) $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$ и $(P \vee Q) \leftrightarrow (\urcorner P \leftrightarrow \urcorner Q)$.

10. Доказать следующие эквивалентности:

а) $\alpha \wedge \alpha \mathrel{|\!\!=\!\!|} \alpha$;

а’) $\alpha \vee \alpha \mathrel{|\!\!=\!\!|} \alpha$;

б) $\alpha \wedge \beta \mathrel{|\!\!=\!\!|} \beta \wedge \alpha$;

б’) $\alpha \vee \beta \mathrel{|\!\!=\!\!|} \beta \vee \alpha$;

в) $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \mathrel{|\!\!=\!\!|} \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$;

в’) $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \mathrel{|\!\!=\!\!|} \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$;

г) $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \mathrel{|\!\!=\!\!|} (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$;

г’) $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \mathrel{|\!\!=\!\!|} (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$;

д) $\neg(\alpha \vee \beta) \mathrel{|\!\!=\!\!|} \neg\alpha \wedge \neg\beta$;

д’) $\neg(\alpha \wedge \beta \mathrel{|\!\!=\!\!|} \neg\alpha \vee \neg\beta$;

е) $\alpha \wedge (\alpha \vee \beta) \mathrel{|\!\!=\!\!|} \alpha$;

е’) $\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \mathrel{|\!\!=\!\!|} \alpha$;

ж) $\neg\neg\alpha \mathrel{|\!\!=\!\!|} \alpha$;

з) $(\alpha \to \beta) \mathrel{|\!\!=\!\!|} (\neg\alpha \vee \beta)$

и) $\alpha \vee \beta \mathrel{|\!\!=\!\!|} \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$

к) $\alpha \vee (\beta \wedge \neg\beta) \mathrel{|\!\!=\!\!|} \alpha$

к’) $\alpha \wedge (\beta \vee \neg\beta) \mathrel{|\!\!=\!\!|} \alpha$

Следующий цикл задач иллюстрирует одно из важнейших понятий алгебры логики – <u>понятие логического следствия</u>. Доказывать утверждения о выводимости можно многими способами. <u>Первый способ</u> состоит в построении таблиц истинности для посылок и следствия с последующим анализом. <u>Второй способ</u> состоит в использовании преобразования схемы вывода к единственной формуле и с дальнейшей проверкой ее на тождественную истинность. Третий способ состоит в последовательном применении правил вывода, ранее уже доказанных.

Пример 24. Доказать схему вывода $\alpha, \alpha \to \beta \models \beta$. Нам нужно доказать, что для всех значений переменных, при которых обе формулы α и $\alpha \to \beta$ истинны, будет обязательно истинна и формула β.

Если формулы α и $\alpha \to \beta$ обе истинны при некоторых значениях переменных, то в силу определения импликации $\alpha \to \beta$ при истинном α может быть истинной лишь в случае, когда β также истинна. Итак, β при этих же значениях переменных будет истинной формулой.

11. Доказать с помощью таблиц истинности следующие схемы вывода:

а) $\alpha \models \alpha \vee \beta$;

б) $\alpha, \beta \models \alpha \wedge \beta$;

в) $\alpha, \beta \models \alpha$;

г) $\alpha \vee \beta, \neg\beta \models \alpha$;

д) $\alpha, \alpha \to \beta \models \beta$;

е) $\alpha \to \beta, \neg\beta \models \neg\alpha$;

ж) $\alpha \models \neg\neg\alpha$;

з) $\neg\neg\alpha \models \alpha$.

12. Доказать следующие выводимости:

а) $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{Q} \wedge \boldsymbol{P} \to \neg\boldsymbol{R} \models \neg\boldsymbol{Q}$;

б) $\boldsymbol{P} \to \boldsymbol{Q}, \neg(\boldsymbol{Q} \vee \boldsymbol{R}) \models \neg\boldsymbol{P}$.

13. Является ли формула $\neg R \wedge \neg Q$ следствием формулы $\neg(P \vee Q) \wedge R$?

14. Будет ли формула $P \leftrightarrow Q$ следствием формулы $P \vee \neg P$?

15. Будет ли формула $\neg P \to Q$ логическим следствием формулы $\neg(Q \to \neg P)$?

1.3. Контрольные задачи по теме «Логика высказываний»

1. Привести пример опровержимой формулы: а) с 9 переменными; б) с 12 переменными.

2. Привести пример неопровержимой формулы: а) с 7 переменными; б) с 3 переменными.

3. Привести пример тавтологии: а) с одной переменной; б) с двумя переменными; в) с 12 переменными.

4. Привести пример невыполнимой формулы: а) с одной переменной; б) с двумя переменными; в) с 8 переменными.

5. Формула α истинна всегда, когда истинна формула β. Будет ли формула $\alpha \to \beta$ тождественно истинной ?

6. Доказать равносильность:

$$\alpha \vee (\neg\alpha \wedge \beta) \models\mid \alpha \vee \beta \qquad \text{для любых } \alpha, \beta.$$

7. Доказать схему вывода

$\frac{\alpha, \alpha\to\beta, \beta}{\alpha\vee\gamma\to\beta}$ для любых α, β, γ.

8. Пусть α, β, γ - тавтологии. Какие из следующих формул опровержимы: $\alpha \wedge \beta, \alpha \vee \beta, \alpha \wedge \neg\gamma, \alpha \to \neg\gamma$.

9. Пусть α есть следствие формулы β. Доказать, что тогда $\alpha \vee \gamma$ есть следствие $\beta \vee \gamma$.

10. Пусть $\alpha \mid\!=\!\mid \alpha_1$, $\beta \mid\!=\!\mid \beta_1$. Доказать, что

$$\alpha \vee \beta \mid\!=\!\mid \alpha_1 \vee \beta_1.$$

11. Пусть α, β, γ - произвольные формулы такие, что $\alpha \models \beta$ и $\beta \models \gamma$. Доказать, что $\alpha \models \gamma$.

12. Является импликация $\alpha \to \beta$ двух невыполнимых формул α, β невыполнимой формулой ?

13. Доказать, что любая формула является следствием невыполнимой формулы ?

14. Привести пример двух формул α и β таких, чтобы $\alpha \to \beta$ и $\beta \to \alpha$ были бы равносильными формулами.

15. Привести пример формул α, β таких, чтобы формула $\neg\alpha \vee \neg\beta \to \alpha$ была тавтологией.

16. Привести пример двух формул α, β таких, чтобы $\alpha \wedge \beta$ была бы следствием $\alpha \vee \beta$.

17. Формула α - опровержима. Будет ли формула $\underbrace{\neg\neg\ldots\neg}_{1982 \text{ отриц.}}\alpha$ опровержимой ?

18. Привести пример двух формул α, β таких, чтобы $\alpha \wedge \beta$ была опровержимой, а $\alpha \vee \beta$ - выполнимой формулами.

19. Пусть α, β, γ - невыполнимые формулы. Какие из формул $\alpha \wedge \beta$, $\neg\alpha \vee \beta$, $\alpha \to \beta$, $\alpha \leftrightarrow \beta$ выполнимы ?

20. Будут ли равносильными две невыполнимые формулы ?

21. Может ли опровержимая формула быть следствием неопровержимой формулы ?

22. Доказать схему вывода: $\dfrac{\alpha \to \beta, \gamma \to \beta, \delta \to \alpha \vee \gamma, \delta}{\beta}$.

23. Доказать, что импликация двух тождественно истинных формул α, β - тождественно истинна.

24. Привести пример опровержимой формулы α и некоторой формулы β таких, чтобы $\beta \to \alpha$ была бы тавтологией.

25. Пусть β есть следствие α. Доказать, что тогда $\neg\alpha$ есть следствие $\neg\beta$.

26. Пусть α - выполнимая формула, β - тавтология, а γ - невыполнимая формула. Какие из следующих формул выполнимы: $\alpha \wedge \gamma, \alpha \vee \gamma, \alpha \to \beta, \beta \to \gamma, \neg\alpha \vee \neg\gamma$?

27. Пусть α - тавтология, β - выполнимая формула. Может ли $\rceil\beta$ быть следствием α ?

28. Доказать схему вывода $\alpha, \neg\alpha \models \beta$ для любых α, β.

29. Может ли отрицание тавтологии быть выполнимой формулой ?

30. Привести пример формулы α с шестью переменными такой, что ее отрицание $\rceil\alpha$ – выполнимая формула.

31. Пусть $\rceil\alpha \vee \beta$ и $\rceil\gamma \vee \rceil\beta$ - тождественно истинные формулы. Доказать, что формула $\alpha \to \rceil\gamma$ также тождественно истинна.

32. Доказать схему вывода:

$$\frac{\alpha\wedge\beta\to\rceil\gamma, \rceil\alpha, \beta\to\gamma}{\rceil(\alpha\wedge\beta)}.$$

33. Доказать схему вывода:

$$\frac{\alpha\to(\beta\to\gamma), (\gamma\wedge\delta)\to\mu, \rceil\sigma\to\delta\wedge\rceil\mu}{\alpha\to(\beta\to\sigma)}.$$

34. Доказать, что дизъюнкция двух выполнимых формул всегда выполнима.

35. Привести пример формул α, β таких, чтобы формула $\neg\alpha \vee \neg\beta$ была тавтологией.

36. Доказать равносильность

$$\alpha \vee \neg\alpha \models\mid \beta \vee \neg\beta .$$

37. Доказать схему вывода:

$$\frac{\alpha\to\beta, \beta\to\gamma}{\alpha\to\gamma} \text{ для любых } \alpha, \beta, \gamma.$$

38. Доказать, что отрицания двух равносильных формул равносильны.

39. Пусть β - тавтология, α - опровержимая формула. Какой будет формула $\alpha \to \beta$?

40. Доказать схему вывода:

$$\alpha \models \beta \to \alpha .$$

41. Пусть $\Gamma, \alpha \models \beta$, где Γ - конечный набор формул. Доказать, что

$$\Gamma \models \alpha \to \beta$$

42. Пусть α - формула такая, что $\alpha \to \rceil\alpha$ - тавтология. Доказать, что α - невыполнимая формула.

43. Доказать схему вывода:

$$\frac{(\alpha\wedge\beta)\vee(\gamma\wedge\delta), \alpha\to\rceil\alpha}{\gamma} \quad \text{для любых } \alpha, \beta, \gamma, \delta.$$

44. Пусть $\Gamma, \alpha \models \beta$, где Γ - конечное множество формул. Доказать, что $\Gamma, \neg\beta \models \neg\alpha$

45. Пусть $\Gamma \models \alpha \to \beta$. Доказать, что $\Gamma, \alpha \models \beta$.

46. Доказать, что $\Gamma, \alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n \models \beta$ тогда и только тогда, когда $\Gamma \models \alpha_1 \to (\alpha_2 \to \ldots..(\alpha_n \to \beta)\ldots\ldots..)$.

47. Пусть $\Gamma, \alpha \models \beta$ и $\Gamma, \gamma \models \beta$. Доказать, что $\Gamma, \alpha \vee \gamma \models \beta$

48. Пусть $\Gamma, \alpha \models \beta \wedge \neg\beta$. Тогда $\Gamma \models \neg\alpha$.

49. Пусть α – тавтология, а β – произвольная формула. Если P - переменная, то $S_p^{\beta}\alpha$ – также тавтология.

50. Если $\alpha \models \beta$, то для любой переменной p и формулы γ:

$$\mathbf{S}_{\mathrm{P}}^{\gamma}\,\alpha \models \mathbf{S}_{\mathrm{P}}^{\gamma}\,\beta\ .$$

1.4. Логика предикатов

В логике предикатов изучаются произвольные высказывательные формы с переменными, области значения которых лежат в заданном универсуме. Сами формы при постановке конкретных значений переменных (т.е. имен объектов универсума) превращаются в высказывания истинные или ложные.

Для данного универсума высказывательные формы строятся, исходя из некоторых элементарных высказывательных форм, называемых предикатами, с помощью фиксированных логических средств, образующих язык описания данного универсума. При этом предикаты представляют собой некоторые основные свойства и отношения, заданные на исходном универсуме. Предикаты записываются в виде $P(x_1 \dots x_n)$, где $x_1 \dots x_n$ - список переменных этого предиката. Для задания предиката от n-переменных необходимо указать исходный универсум, каждой переменной приписать множество ее возможных значений из этого универсума и, наконец, для каждого конкретного набора значений переменных указать истинностное значение высказывания, получающегося при подстановке вместо переменных имен выбранных значений.

Над предикатами выполняются все известные логические операции логики высказываний. Таким образом, для любых двух предикатов $A(x_1 \dots x_n)$, $B(y_1 \dots y_m)$ можно образовать высказывательные формы: $\rceil A(x_1 \dots x_n)$; $A(x_1 \dots x_n) \wedge B(y_1 \dots y_m)$; $A(x_1 \dots x_n) \vee B(y_1 \dots y_m)$; $A(x_1 \dots x_n) \to B(y_1 \dots y_m)$; $A(x_1 \dots x_n) \leftrightarrow B(y_1 \dots y_m)$.

Значения полученных высказывательных форм вычисляются, исходя из значений форм $A(x_1 \dots x_n)$, $B(y_1 \dots y_m)$ для указанных значений переменных с последующим применением правил логики высказываний. Из полученных высказывательных форм, снова применяя операции логики высказываний, можно получить все более сложные высказывательные формы.

Исходные предикаты для заданного универсума вводятся либо описанием, либо прямым заданием истинностных значений предиката для всех возможных значений переменных. Последний способ годится лишь в случае конечного универсума.

Пример 25. $\mathrm{P}(x) = [x > 3]$ – одноместный предикат на множестве всех вещественных чисел $\mathbb{R}$. $P(4) = [4 > 3]$ – истинное высказывание, $P(1) = [1 > 3]$ - ложное высказывание.

Пример 26. $P(x,y) = [x\ делится\ на\ y]$ – двухместный предикат на множестве натуральных чисел N. $P(6,2) = [6\ делится\ на\ 2]$ - истинное высказывание, $P(7,15) = [7\ делится\ на\ 15]$ - ложное высказывание.

Пример 27.

$P(x,y,z) = [точка\ x\ лежит\ между\ точками\ y,z\ на\ заданной\ прямой]$ - трехместный предикат, заданный на множестве точек фиксированной прямой. Если точки задаются координатами, то P(1,3,4) – ложно, $P(3,1,4)$ - истинно.

Пример 28. Пусть задан предикат $P(x)$ на множестве $U = \{1,2,3,4,5,6\}$ с помощью таблицы:

x	1	2	3	4	5	6
$P(x)$	И	Л	И	И	Л	Л

В этом случае смысл самого свойства явно не указывается, не полностью задается набор возможных истинностных значений предиката $P(x)$ для всевозможных значений переменных.

Замечание. В логике предикатов смысл самих свойств и отношений, представимых предикатами, не учитывается. Учитываются лишь истинностные значения предиката на различных наборах значений переменных. Таким образом, два предиката с одним и тем же числом переменных, определенных на одном и том же универсуме и принимающих истинностные значения, при всех возможных значениях переменных, в логике предикатов не различаются.

Замечание. Универсум, на котором задаются предикаты, необязательно должен быть однородным, т.е. состоять из объектов одного и того же типа. В принципе каждой переменной может быть приписано свое множество значений. В этом случае универсум содержит все типы возможных значений.

Пример 29. Предикат $P(x,y) = [\ x\ муж\ y]$ переменная *x*, в качестве возможных значений имеет множество мужчин, а *y* – множество женщин.

Пример 30. $P(x,y) = [круг\ x\ имеет\ радиус\ y]$ - геометрический предикат, где *x* берется из множества всех кругов плоскости, а *y* – из множества неотрицательных чисел.

Замечание. В некоторых случаях в силу общепринятых соглашений данный предикат может быть неопределен для данного набора значений переменных. Все наборы, на которых значение предиката определено (т.е. имеет смысл), составляют область допустимых значений переменных. Однако часто принимают соглашение о том, что значение предиката на наборе, не входящем в область допустимых значений переменных, есть ложное истинностное значение.

Пример 31. Пусть $P(x,y) = [x/y = 2]$, где *x*, *y* – действительные числа. Тогда набор $x = 1$, $y = 0$ не является допустимым для предиката $P(x,y)$, т.к. выражение $1/0$ - бессмысленно, но можно считать, что само истинностное значение предиката на этом наборе – ложно.

Задачи (индивидуальные задания, примеры для самостоятельной работы обучающихся).

1. Пусть $A(x,y) = [x < y]$, $B(x,y) = [x = 2y]$. Вычислить значение высказывательной формы $\urcorner A(x,y) \to B(x,y)$ на наборах $(x = 2, y = 0)$, $(x = 2, y = 1)$.

Решение. 1) $A(2,0) = [2 < 0]$ – ложное высказывание,

$B(2,0) = [2 = 2 \cdot 0]$ – ложное высказывание.

Следовательно, $\urcorner A(2,0)$ – истинное высказывание, а в силу свойств импликации $\urcorner A(2,0) \to B(2,0)$ - ложное высказывание (т.к. $(И \to Л) = Л$);

2) A(2,1) = [2 < 1] = “ложь”, B(2,1) = [2=2*1] = “истина”

Следовательно, $\left(\urcorner A(2,1) \to B(2,1)\right) = (\urcorner Л \to И) = (И \to И) = И$.

Замечание. В дальнейшем мы будем придерживаться принятого в дискретной математике соглашения о том, что “истина” изображается как “1”, а “ложь” – “0”.

2. Пусть $P(x,y)$, $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{y})$ – два предиката, заданные своими истинностными таблицами для всех значений переменных, если *x* приписано множество значений – $\{0,1,2\}$, а $y - \{2,4\}$:

P (x, y)

x \ y	2	4
0	0	1
1	1	0
2	0	1

Q (y)

Y	Q(y)
2	1
4	0

Составить матрицу истинности для формы

$$\boldsymbol{F} = (\neg \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{y}) \to \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})) \to (\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \vee \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{y}).$$

Решение:

x	y	Q(y)	P(x, y)	$\neg \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{y})$	$\neg \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{y}) \to \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$	$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \vee \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{y})$	F
0	2	1	0	0	1	1	1
0	4	0	1	1	1	1	1
1	2	1	1	0	1	1	1
1	4	0	0	1	0	0	1
2	2	1	0	0	1	1	1
2	4	0	1	1	1	1	1

3. Вычислить значение формы $\urcorner P(x,y) \wedge Q(x,y,z)$, где $P(x,y) = [x < \sin y]$, $Q(x,y,z) = [x + y = z]$ с вещественными переменными x, y, z на наборе значений переменных $x = 3, y = 2, z = 5$.

4. Пусть универсум U состоит из 6 слов алфавита $\mathbb{B} = \{0,1\}$: $U = \{01, 110, 010, 110011, 0000, 01110\}$. На этом универсуме заданы предикаты: $\mathrm{P(x) = [x - слово\ из\ четного\ числа\ букв]}$,

$Q(x,y) = [x \text{ входит в } y \text{ как подслово}]$. Определить значение формы $P(x) \wedge P(y) \rightarrow \urcorner Q(x,y)$ для значения переменных:

а) $x = 01, y = 01110$; б) $x = 0000, y = 010$; в) $x = 01110$, $y = 110$.

5. Пусть $U = [1,2,3,4,5,6,7,8,9]$ – набор из 9-ти чисел. На данном универсуме определены предикаты:

$P(x) = [x - \text{четное число}]$;

$Q(x,y) = [x - \text{делится на } y]$;

$R(x,y,z) = [y = x + z]$.

Вычислить значение формы $Q(x,y) \wedge \urcorner R(x,y,z) \leftrightarrow P(x)$ для следующих наборов значений переменных:

а) $x = 2, y = 2, z = 2$;

б) $x = 1, y = 9, z = 6$;

в) $x = 5, y = 7, z = 7$;

г) $x = 9, y = 5, z = 8$.

6. Пусть $X = \{0,1\}$, $Y = \{2,5,7\}$. На этих множествах заданы таблично три предиката:

x \ Y	2	5	7
0	0	0	1
1	1	0	1

P(x,y)

x \ Y	2	5	7
0	1	1	0
1	1	1	1

Q(x,y)

y	2	5	7
R	0	0	1

R(y)

Составить полную таблицу истинности для формы:

$P(x,y) \wedge Q(x,y) \leftrightarrow \urcorner R(y) \vee P(x,y)$.

7. Пусть $P(x,y) = [3x - 2y = 0]$, $Q(x) = [z < 7]$, $R(x,y) = [x \text{ делится на } y]$, где x, y, z принимают всевозможные целые значения. Вычислить значения формы

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \vee \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{z}) \rightarrow \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \wedge \neg \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

на следующих наборах значений переменных:

а) x = -1, y = 0, z = 2;

б) x = 0, y = 0, z = 0;

в) x = 1, y = -5, z = 8;

г) x = -4, y = 2, z = -3

Кванторы

Кроме операций, задаваемых логическими связками, в логике предикатов вводятся еще операции квантификации или навешивания кванторов на высказывательные формы. При этом различают два типа кванторов: универсальные кванторы и экзистенциальные кванторы.

Пусть $P(x_1 \ldots x_n)$ – высказывательная форма, а x_i - произвольная переменная. Тогда навешивание универсального квантора (квантора всеобщности) по переменной x_i означает образование формы вида $\forall x_i P(x_1 \dots x_n)$, которая читается так: для всех x_i выполнено (свойство) $P(x_1 \dots x_n)$. Говорят, что квантор $\forall$ связывает переменную x_i в форме $P(x_1 \dots x_n)$ и в форме $\forall x_i P(x_1 \dots x_n)$ - переменная x_i становится связанной. Навешивание экзистенциального квантора (квантора существования) на форму $P(x_1 \dots x_n)$ по переменной x_i означает переход к форме $\exists x_i P(x_1 \dots x_n)$, которая читается так: существует x_i такое, что выполнено (свойство) $P(x_1 \dots x_n)$. В этом случае переменная x_i в полученной форме $\exists x_i P(x_1 \dots x_n)$ также считается связанной. Переменные в форме, которые не связываются кванторами, называются свободными переменными. Каждое навешивание квантора уменьшает, вообще говоря, число свободных переменных на 1. Так, если в форме $P(x_1 \dots x_n)$ n-свободных переменных, то в форме $Qx_{i_1} Qx_{i_2} \dots Qx_{i_k} P(x_1 \dots x_n)$, где Q – либо квантор $\forall$, либо квантор $\exists$, будет $(n-k)$ свободных переменных.

Пример 32. Пусть $P(x,y,z)$ – форма с тремя свободными переменными. Тогда формы $\exists x P(x,y,z)$, $\forall y P(x,y,z)$, $\exists z P(x,y,z)$, $\exists y P(x,y,z)$ и т.д. имеют по две свободные переменные. Формы $\forall y \forall z P(x,y,z)$, $\exists y \forall z P(x,y,z)$, $\forall y \exists z P(x,y,z)$ и т.д. имеют по одной свободной переменной. Формы $\forall x \forall y \forall z P(x,y,z)$, $\forall x \exists y \forall z P(x,y,z)$, $\exists x \forall y \exists z P(x,y,z)$ и т.д. вообще не имеют свободных переменны.

Если в форме нет свободных переменных, то она, по существу, представляет собой некоторое высказывание об объектах универсума. *Если форма имеет свободные переменные, то она превращается в высказывание, при подстановке, вместо свободных переменных, имен конкретных объектов универсума.*

Пример 33. Пусть $P(x) = [x - \text{простое число}]$ - одноместный предикат, заданный на множестве всех натуральных числе. Тогда $\forall x P(x)$ - высказывание, означающее: «каждое число простое», что, конечно, является ложным высказыванием.

Выражение $\exists x P(x)$ означает высказывание: «существует простое число», что является истинным высказыванием.

Пример 34. Пусть $P(x,y) = [x < y]$ - двухместный предикат на множестве вещественных чисел. Тогда $\exists x P(x,y)$ - форма с одной свободной переменной y. Если вместо y подставить некоторое конкретное значение, скажем – 3, то получиться высказывание $\exists x(x < 3)$, т.е. существуют числа, меньшие 3, что, конечно, истинно.

Если же образовать форму $\forall x P(x,y) = \forall x(x < y)$, то при подстановке вместо y числа 3 получим высказывание $\forall x(x < 3)$, т.е. каждое число меньше 3, что, конечно, ложно. Если навесить сразу два квантора, скажем $\forall x \exists y P(x,y) = \forall x \exists y(x < y)$, то получим высказывание: «для любого x

существует *y* больший, чем *x*». Это высказывание истинно. Если поставить кванторы в обратном порядке, т.е. образовать выражение $\exists y \forall x P(x,y) = \exists y \forall x (x < y)$, то получим высказывание: «существует *y* такое, что каждое *x* меньше *y*»; полученное высказывание ложно.

С помощью операции квантификации и логических связок из исходных элементарных высказывательных форм можно получать все более сложные формы, комбинируя применение этих операций.

Пример 35. Пусть $P(x,y)$, $Q(x)$, $R(x,y,z)$ - формы.

Тогда можно получить формы

$\exists x(P(x,y) \vee \exists y R(x,y,z) \to Q(x))$

$\forall x \exists y \big(P(x,y) \wedge \neg Q(x) \to R(x,y,z)\big)$; $\forall x Q(x) \to \exists y R(x,y,z)$

и т.д.

Правила вычислений истинностных значений высказывательных форм, полученных из исходных предикатов с помощью логических связок и кванторов, основываются в принципе на содержательном смысле тех отношений и свойств, которые представлены предикатами, входящими в эту формулу, а также смыслом логических связок и кванторов.

Задачи (индивидуальные задания, примеры для самостоятельной работы обучающихся).

1. Пусть $B(x,y,z) = [x + y = z]$ – трехместный предикат, а $P(x,y,z) = [x \cdot y = z]$, $L(x,y) = [x < y]$ - двухместные предикаты на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$. Записать с помощью кванторов следующие выражения:

а) для всех *x* и *y* существует *z* такое, что $x + y = z$;

б) не существует *x*, меньшего 0;

в) для каждого *x*, $x + 0 = x$;

г) для всех *x*, $x \cdot y = y$, для всех *y*;

д) существует *x* такой, что $x \cdot y = y$ для всех *y*.

2. Пусть $\mathbb{Z}$ - множество всех целых чисел. Выяснить истинность высказываний (с переменными из $\mathbb{Z}$):

а) $\forall x \exists y (x \cdot y = 0)$;

б) $\forall x \forall y (x \cdot y = 0)$;

в) $\exists y \forall x (x \cdot y = 1)$;

г) $\exists y \exists x (x \cdot y = 1)$;

д) $\exists y \forall x (x \cdot y = x)$;

е) $\forall x \exists y (x \cdot y = x)$, где «·» - операция умножения.

3. Пусть универсумом является множество целых чисел $\mathbb{Z}$ и $P(x,y,z) = [x - y = z]$ - трехместный предикат на этом универсуме. Записать с помощью логической символики следующие утверждения:

а) для всех *x*, *y* существует *z* такое, что $x - y = z$;

б) для всех *x*, *y* существует *z* такое, что $x - z = y$;

в) существует x такое, что для всех y, $y - x = y$;
г) когда 0 вычитается из произвольного числа, то в результате получается то же самое число;
д) если из 3 вычесть 5, то получится (-2).

4. Найти такой универсум из чисел, чтобы следующие высказывания были истинными:
а) $\forall x(x > 10)$;
б) $\forall x(x = 3)$;
в) $\forall x \exists y(x + y = 436)$;
г) $\exists y \forall x(x + y < 0)$.

5. Пусть $P(x, y)$ – предикат на множестве $U = \{0,1,2,3,4\}$, заданный таблицей

P (x, y):

y \ x	0	1	2	3	4
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
2	1	1	0	1	0
3	0	1	0	1	1
4	1	1	1	0	1

Построить полные таблицы истинности для форм: $\forall x P(x, y)$, $\forall y P(x, y)$, $\exists x P(x, y)$, $\exists y P(x, y)$, $\forall x \forall y P(x, y)$, $\exists x \forall y P(x, y)$, $\exists x \exists y P(x, y)$.

6. Пусть x, y – переменные, определенные на множестве людей. Введем следующие обозначения:

$M(x) = [x - \text{мужчина}]$; $D(x) = [x - \text{женщина}]$;

$B(x, y) = [x \text{ состоит в браке с } y]$; $k(x, y) = [x - \text{ребенок } y]$;

$L(x) = [x \text{ живет в Москве}]$; $G(x) = [x \text{ живет в Омске}]$.

Запишите в логической символике следующие предложения:
1) каждый человек имеет отца и мать;
2) каждый, кто имеет отца, имеет и мать;
3) x и y – братья;
4) если в Москве живет женщина, имеющая брата в Омске, то в Омске живет мужчина, имеющий сестру в Москве;
5) не всякая женщина из Омска имеет сына в Москве;
6) существуют два человека такие, что ни один сын одного из них не состоит в браке с дочерью другого;
7) не всякий женатый мужчина живет в Москве;
8) существует человек, имеющий жену, проживающую в Омске, и жену – в Москве.

7. Пусть $P(x, y, z) = [xy = z]$, $E(x, y) = [x = y]$, $G(x, y) = [x > y]$.

Переменные x, y, z обозначают произвольные целые числа. Записать с помощью логической символики следующие выражения:

а) если $y = 1$, то $xy = x$ для всех x;
б) если $xy \neq 0$, то $x \neq 0$ или $y \neq 0$;
в) если $xy = 0$, то $x = 0$ либо $y = 0$;
г) $3x = 6$, тогда и только тогда, когда $x = 2$;
д) не существует решения уравнения $x^2 = y$ при $y < 0$;
е) $x < z$ - необходимое условие для $x < y$ и $y < z$;
ж) $x \leq y$ и $y \leq x$ достаточно для того, чтобы $y = x$;
з) если $x < y$ и $z < 0$, то $xz > yz$;
и) невозможно, чтобы $x = y$ и $x < y$;
к) если $x < y$, то для некоторого $z < 0$ будет $xz > yz$;
л) существует такое x, что для всех y и z, $xy = xz$.

8. Пусть универсум U состоит всего из двух элементов $\{0, 1\}$. $P(x, y)$ - двухместный предикат на U. Найти формулы логики высказываний с элементарными высказываниями $P(0,0)$, $P(0,1)$, $P(1,0)$, $P(1,1)$ – эквивалентные следующим выражениям:
а) $\forall x P(0, x)$;
б) $\forall x \forall y P(x, y)$;
в) $\forall x \exists y P(x, y)$;
г) $\exists x \forall y P(x, y)$;
д) $\exists y \exists x P(x, y)$.

1.5. Язык логики предикатов.

Алфавит логики предикатов состоит из четырех групп символов:

- множества предметных переменных – $V = \{x, y, z, \dots\}$;
- множества предикатных символов – $R = \{P, Q, R, \dots\}$;
  причем каждому предикатному символу приписано натуральное число – его ранг;
- множества логических символов - $\{\rceil, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists\}$;
- множества скобок – $\{(,)\}$.

Язык Z_1 логики предикатов определяется рекурсивно. Сначала определяются элементарные формулы. Элементарная формула – это формула вида $T(p_1, \dots, p_n)$, где T – предикатный символ n-го ранга, т.е. $T \in R$, а $p_1, \dots, p_n$ – предметные переменные из V.

Говорят, что все вхождения переменных в элементарную формулу свободны, а сами переменные называются свободными.

Определение (правила) формул языка Z_1:

1. Каждая элементарная формула есть формула (пункт 1).

2. Если α, β - формулы, то (пункт 2):

а) $\rceil\alpha$ - формула, причем каждая переменная, входящая свободно в α, входит свободно и в $\rceil\alpha$;

б) $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \to \beta)$, $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ – формулы, причем каждое вхождение переменной p в формулу α или β имеет соответствующее того же типа (связанное или свободное) вхождение в построенные формулы;

в) $\exists p\alpha$, $\forall p\alpha$ - формулы такие, что все вхождения переменной p в формулы $\exists p\alpha$, $\forall p\alpha$ объявляются связанными кванторами $\exists$ и $\forall$, остальные вхождения имеют тот же тип, что и соответствующие вхождения в α.

Пример 36. Выражения $P(x,y,z)$, $Q(x,y)$, $P(x,x,z)$, $Q(x,x)$, $P(z,z,y)$, $P(x,z,y)$, $P(x,x,x)$ являются элементарными формулами. Все переменные свободны в этих формулах.

Пример 37. $\big((\forall x P(x,y) \to \urcorner Q(z,y)\big) \vee \big(R(x,x) \leftrightarrow \exists z P(z,y)\big))$ - формула, в которой все вхождения переменной y свободны, а переменные x и z имеют как связанные, так и свободные вхождения.

Замечание. В дальнейшем мы будем придерживаться следующего принципа переименования связанных переменных. В данной формуле каждое связанное с данным квантором вхождение переменной будем оставлять без изменения, если формула не содержит свободных вхождений в эту формулу, и заменять на произвольную переменную (одну и ту же для всех вхождений), которая не встречается в этой формуле. Полученная формула не будет содержать переменные, имеющие как связанные, так и свободные вхождения. Такие формулы будем называть нормальными, а процедуру переименования назовем приведением к нормальному виду.

Пример 38. Пусть дана формула $\big(\forall x P(x) \to \urcorner P(x)\big)$. Первое и второе вхождение переменной x связаны, а последнее – свободно. Заменим связанные вхождения на x_1, получим $\big(\forall x_1 P(x_1) \to \urcorner P(x)\big)$ – нормальную формулу.

Замечание. Для упрощения записи формул в логике предикатов используются соглашения о порядке выполнения операций, аналогичные тем, что были приняты в логике высказываний. Кванторы имеют более высокий приоритет по сравнению с другими связками. Таким образом, запись $\forall x P(x) \to P(y)$ означает формулу $\Big(\big(\forall x P(x)\big) \to P(y)\Big)$, а не формулу $\forall x\big(P(x) \to P(y)\big)$.

Точно так же, как в логике высказываний определяются понятия конструкции *формулы*, *подформулы*, *сокращенной* и *канонической записи формулы.*

Пример 39. $\Big(\exists x\big(\urcorner P(x,y) \to \forall y R(x,y,z)\big) \vee P(x,x)\Big)$ – формула в канонической записи. Ее конструкция имеет вид:

$P(x,y)$, $P(x,x)$, $R(x,y,z)$, $\neg P(x,y)$, $\forall y R(x,y,z)$,
$(\neg P(x,y) \to \forall y R(x,y,z))$, $\exists x(\neg P(x,y) \to \forall y R(x,y,z))$,
$(\exists x(\neg P(x,y) \to \forall y R(x,y,z)) \vee P(x,x))$.

Эта формула имеет как связанные, так и свободные вхождения $\boldsymbol{x}$. Поэтому переименованием связанных вхождений $\boldsymbol{x}$ ее можно привести к нормальному виду:

$$\left(\exists x_1\left(\urcorner P(x_1,y)\to \forall y R(x_1,y,z)\right)\vee P(x,x)\right).$$

Пример 40. Формулу $\left(\left(\forall x R(x,y)\wedge \exists x P(x)\right)\to \left(P(x)\vee R(y,x)\right)\right)$ можно привести к нормальному виду

$$\left(\forall x_1 R(x_1,y)\wedge \exists x_2 P(x_2)\right)\to \left(P(x)\vee R(y,x)\right)$$

$$\forall \boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y})\wedge \exists \boldsymbol{x}_2\ \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}_2)\to \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})\vee \boldsymbol{R}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}).$$

Задачи (индивидуальные задания, примеры для самостоятельной работы обучающихся).

1. Перечислить все подформулы (связанные и свободные), вхождения переменных в формулах:

а) $\forall x P(x)$;

б) $\forall x P(x)\to P(y)$;

в) $P(x)\to \exists x Q(x)$;

г) $\exists x P(x)\wedge R(x)$;

д) $\exists x\forall y\left(P(x)\wedge Q(y)\right)\to \forall x R(x)$;

е) $\exists x\exists y\left(P(x,y)\wedge Q(z)\right)$.

2. Привести к нормальному виду и упростить следующие формулы:

а) $\left(\left(\forall z\exists y P(y,z)\to \left(\urcorner Q(x,y,z)\vee \forall x P(y,x)\right)\right)\leftrightarrow \left(Q(x,y,z)\wedge P(z,z)\right)\right)$;

б) $\left(\left(\forall x P(x,y)\to \left(\urcorner P(x,y)\vee R(y,z,x)\right)\right)\wedge \exists z\left(P(z,y)\to \left(R(y,z,x)\vee P(x,x)\right)\right)\right)$

3. Указать все связанные вхождения в формулах:

а) $\forall z\exists y\left(P(z,y)\wedge \forall z Q(z,x)\to R(z)\right)$,

б) $\forall x\exists y\left(P(x,y)\wedge \forall y Q(y,x)\to R(x)\right)$;

в) $\forall y\exists z\left(P(y,z)\wedge \forall z Q(z,x)\to R(y)\right)$;

г) $\forall y\exists z\left(P(z,y)\right)\wedge \forall z$.

Моделью в логике предикатов называют множество M вместе с заданными на нем предикатами.

Модель записывается в виде: $\langle M,R\rangle$, где M - носитель модели (универсум, основное множество), а R - набор предикатов, определенных на данном множестве M. Символ M есть имя носителя модели, т.е. имя исходного универсума.

Предикаты модели – $R=\{P,Q,R,S,\dots,W\}$ - обычно их конечное число, обозначается предикатными символами $P,Q,\dots,W$, т.е. эти символы – имена конкретных предикатов.

<u>Замечание</u>. Нужно твердо помнить, что в языке Z_1 логики предикатов предикатные символы – просто буквы, ничего, собственно говоря, не

обозначающие. Формула логики предикатов – просто цепочка символов – выражение (слово) в алфавите языка Z_1. Когда же речь идет о модели, то символ M есть имя какого-либо конкретного множества (универсума), а символы $P, Q, \dots, W$ - имена конкретных предикатов модели.

Набор предикатных символов (имен) данной модели называется сигнатурой модели. Формула языка логики предикатов, в которой все предикатные символы принадлежат сигнатуре данной модели, называются формулой данной сигнатуры.

Пусть $m = \langle M, R \rangle$ – модель сигнатуры R, а $\alpha(p_1, \dots, p_n)$ – формула этой сигнатуры. Будем говорить, что формула $\alpha(p_1, \dots, p_n)$ выполнима в модели m, если существует набор $a_1 \dots a_n \in M$ значений свободных переменных $p_1, \dots, p_n$ формулы α, такой, что при интерпретации α в этой модели высказывание $\alpha(a_1, \dots, a_n)$, получающееся подстановкой имен $a_1, \dots, a_n$ вместо переменных $p_1, \dots, p_n$ - истинно.

Говорят также, что набор $a_1, \dots, a_n$ удовлетворяет формуле α в модели m, и пишут

$$\boldsymbol{m} \models \alpha(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n)\ .$$

Пример 41. Пусть $m = \langle \mathbb{R}, P \rangle$, где $\mathbb{R}$ - множество вещественных чисел, $\boldsymbol{P}$ - двухместный предикат, такой, что $P(x, y) = [x < y]$. Рассмотрим формулу:

$$\alpha = \forall x \exists y \Big(\big(P(x,y) \wedge P(y,z) \big) \vee \urcorner P(x,z) \Big).$$

Учитывая смысл $\boldsymbol{P}$, можно формулу α переписать как высказывательную форму:

$$\forall\, \boldsymbol{x}\, \exists\, \boldsymbol{y}\, ((\boldsymbol{x} < \boldsymbol{y}) \wedge (\boldsymbol{y} < \boldsymbol{z}) \vee \neg(\boldsymbol{x} < \boldsymbol{z}))$$

с одной свободной переменной z. Пусть $z = 1$. Тогда форма $\alpha(z)$ превратится в высказывание

$$\forall x \exists y \big(x < y \wedge y < 1 \vee \urcorner(x < 1) \big),$$

т.к. $\urcorner(x < 1)$ означает, что $x \geq 1$, то полученное высказывание равносильно

$$\forall x \exists y (x < y < 1 \vee x \geq 1),$$

которое, как легко видеть, истинно, а следовательно, формула α выполнима в m.

Пример 42. Пусть $m = \langle \mathbb{Z}, D \rangle$ – модель, где D – двухместный предикат $D(x, y) = [x \text{ делится на } y]$. Рассмотрим формулу $\alpha(y) = \exists x D(x, y)$. Это формула с одной свободной переменной y. При интерпретации в m она представляет собой высказывательную форму:

$$\alpha(y) = \exists x (x \text{ делится на } y).$$

Пусть $y = 7$. Тогда $\alpha(7) = \exists x (x \text{ делится на } 7)$, т.е. получили высказывание: существует число x, делящееся на 7. Это высказывание конечно истинно, т.е. формула $\alpha(y)$ выполнима в модели m. Если рассмотреть формулу $\forall x D(x, y)$, то она представляет в модели m форму $\forall x (x \text{ делится на } y)$ - «*каждое x делится на y*». Если взять $y = 1$, то получится высказывание $\forall x D(x, 1)$ - «*каждое x делится на* 1», которое истинно, т.е. формула $\forall x D(x, y)$ также выполнима в m.

Наконец рассмотрим формулу $\forall x \forall y D(x, y)$, которая интерпретируется как высказывание: «каждое число *x* делится на каждое число *y*», что конечно, ложно. Следовательно, формула $\forall x \forall y D(x, y)$ невыполнима в m.

Формула α логики предикатов называется выполнимой, если найдется модель $m = \langle M, R \rangle$, сигнатура которой содержит предикатные символы из α, такая, что формула α будет выполнимой в этой модели.

Формула α называется тождественно истинной в модели *m*, если формула α превращается в истинное (в модели *m*) высказывание при всех возможных значениях свободных переменных формулы α.

Точнее, если $\alpha = \alpha(p_1 \dots p_n)$, где $p_1 \dots p_n$ - свободные переменные, то α тождественно истинна в модели *m*, если для любых $a_1 \dots a_n$ объектов из множества *M* высказывание $\alpha(a_1 \dots a_n)$ истинно в модели *m*, т.е. $\boldsymbol{m} \models \alpha(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n)$.

Формулы α, β равносильны в модели *m*, если они представляют собой равносильные высказывательные формы в модели *m*, т.е. их значения истинности в модели *m* совпадают для любых наборов значений переменных. В этом случае пишут $\alpha \underset{m}{\models\!\!|} \beta$.

Формулы α, β равносильны в логике предикатов, если они равносильны в каждой модели $\boldsymbol{m}$: $\alpha \models\!\!| \beta$

Формула α называется тождественно истинной или тавтологией, если она тождественно истинна в каждой модели.

Пусть Γ – множество формул, α - формула. Говорят, что α является логическим следствием формул из Γ, пишут: $\Gamma \models \alpha$, если в каждой модели *m* из истинности всех формул из Γ при некоторых значениях переменных следует истинность формулы α при этих же значениях переменных.

Пример 43. Рассмотрим формулу $\alpha = \forall x (P(x) \to Q) \vee (Q \wedge P(y))$, где Q (не содержит переменных), - есть некоторое высказывание. В качестве модели возьмем двухэлементное множество $M = \{a, b\}$ с единственным одноместным предикатом *P*, заданным таблицей:

x	a	b
P(x)	0	1

Высказыванию *Q* поставим в соответствие ложное значение 0. Наша формула содержит одну свободную переменную *y* и, следовательно, при интерпретации формулы α она становится высказывательной формой от одной переменной *y*. Составим полные таблицы для всех подформул, входящих в формулу α, при интерпретации в модели $m = \langle M, P, Q\rangle$. Для формулы $P(x) \to Q$ таблица имеет вид:

x	Q	P(x) $\to$ Q
a	0	1
b	0	0

Эта таблица получается прямым вычислением, подставляя вместо x последовательно a и b, пользуясь исходной таблицей для предиката P и учитывая, что Q – ложно, получаем:

$$P(x) \to Q|_{x=a} = P(a) \to Q = 0 \to 0 = 1;$$
$$P(x) \to Q|_{x=b} = P(b) \to Q = 1 \to 0 = 0.$$

Аналогично получаем таблицу для $Q \wedge P(y)$:

y	Q	Q $\wedge$ P(y)
a	0	0
b	0	0

Так как формула $P(x) \to Q$ при $x = b$ принимает ложное значение 0, то формула $\forall x(P(x) \to Q)$ будет ложной в данной модели, т.к. по смыслу высказывание $\forall x(P(x) \to Q)$ означает, что для всех x, $(P(x) \to Q)$ истинно, но, как мы уже заметили, это не верно. Итак, $\forall x(P(x) \to Q)$ – ложна, (т.е. 0).

Тогда окончательно для формулы $\alpha = \forall x(P(x) \to Q) \vee (Q \wedge P(y))$ таблица будет иметь вид:

y	Q	$\forall x\,(\boldsymbol{P}(x) \to \boldsymbol{Q})$	$\boldsymbol{Q} \wedge \boldsymbol{P}(y)$	$\forall x\,(\boldsymbol{P}(x) \to \boldsymbol{Q}) \vee (\boldsymbol{Q} \wedge \boldsymbol{P}(y))$
a	0	0	0	0
b	0	0	0	0

<u>Замечание.</u> Полностью интерпретацию в модели формулы и вычисление ее возможных истинностных значений можно провести лишь тогда, когда носитель модели (универсум) – конечное множество. Тогда каждый предикат задается своей таблицей истинности для всех возможных значений переменных. Затем, используя таблицы для логических связок и учитывая смысл кванторов, последовательно вычисляются возможные значения всех подформул и, наконец, все значения формулы. Если же множество модели бесконечно, а предикаты заданы описанием, то значения формулы и ее свойства (выполнимость, тождественная истинность и т.д.) устанавливаются рассуждением.

Пример 44. Пусть $M = \{1,2,3,4\}$, $P(x, y) = [x \text{ делится на } y]$, $Q(x) = [x > 2]$. Получим модель $m = \langle M; P, Q\rangle$. Хотя предикаты заданы описаниями, легко полностью задать их таблицы истинности:

P(x,y)

y \ x	1	2	3	4
1	1	0	0	0
2	1	1	0	0
3	1	0	1	0
4	1	1	0	1

x	Q(x)
1	0
2	0
3	1
4	1

Рассмотрим теперь формулу: $\alpha = \left(\exists x Q(x) \to \forall y P(x,y)\right) \vee Q(y)$. Эта формула имеет одну свободную переменную y, т.е. $\alpha = \alpha(y)$. Построим ее таблицу истинности.

Оценим сначала подформулы: $\exists x Q(x)$, $\forall y P(x,y)$. Первая формула является высказыванием: существует *x*, большее, чем 2. Ясно, что оно истинно, т.к. $Q(3) = [3 > 2]$ - истинна. Вторая формула является формой, зависящей от одной свободной переменной *x*. Составим для этой формулы таблицу истинности.

X	$\forall y\, \boldsymbol{P}(x, y)$
1	0
2	0
3	0
4	0

Эта таблица получается при последовательной подстановке вместо *x* всех возможных значений: 1, 2, 3, 4. По смыслу формула $\forall y P(x,y) = \forall y[x \text{ делится на } y]$ означает свойство элемента *x*, выражающееся в том, что <u>*x* делится на все элементы *y* универсума</u>. Это, конечно, неверно ни при каком (при любом) *x* , т.е. $\forall y P(x,y)$ – тождественно ложны на *M*. Это можно было доказать непосредственным просмотром таблицы для $P(x,y)$.

Итак, у нас есть таблицы для подформул исходной формулы α. Теперь можно построить таблицу и для самой формулы α:

y	$\exists x\, \boldsymbol{Q}(x) \to \forall y\, \boldsymbol{P}(x, y)$	$\boldsymbol{Q}(y)$	$\alpha(y)$
1	1	0	1
2	1	0	1
3	0	1	1
4	0	1	1

Таким образом, формула $\alpha(y)$ - тождественно истинна в данной модели.

Пример 45. Покажем, что формулы $\neg\forall x P(x)$ и $\exists x \neg P(x)$ равносильны в логике предикатов, т.е. $\neg\forall x\, \boldsymbol{P}(x) \models\!\!\!\dashv \exists x\, \neg \boldsymbol{P}(x)$

Так как, нам нужно доказать равносильность формул в <u>логике предикатов,</u> то для этого нам нужно доказать их равносильность в любой модели.

Пусть $\langle \boldsymbol{M};\boldsymbol{P}\rangle$ - произвольная модель, где P – какой-либо одноместный предикат на M. Левая формула (в примере) в этой модели утверждает: неверно, что все элементы из M обладают свойством P, т.е. не все элементы множества M обладают свойством P, а значит, есть элемент, скажем, $a \in M$ такой, что a не обладает этим свойством, т.е. неверно, что $P(a)$ - истинно, т.е. $P(a)$ - ложно, а, значит, $\urcorner P(a)$ - истинно, т.е. нашелся элемент a, обладающий свойством $\neg \boldsymbol{P}$, т.е. такой элемент существует, а следовательно, $\exists x \urcorner P(x)$ – истинно. Следовательно, из истинности левой формулы в произвольной модели $\boldsymbol{m}$ следует истинность правой формулы (в той же модели). Оборачивая рассуждение, легко доказать и обратное. Итак, обе формулы равносильны в любой модели а, значит, равносильны и в логике предикатов.

1.6. Контрольные задачи по теме “Логика предикатов”

1. Пусть $\boldsymbol{m}=\langle \boldsymbol{M};\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}\rangle$ - модель, где P – одноместный предикат, а Q – двухместный предикат на $M = \{0,1,2,3,4\}$, задаваемые таблицами

P(x)

x	P(x)
0	0
1	1
2	0
3	0
4	1

Q(x, y)

x \ y	0	1	2	3	4
0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1
2	1	1	1	1	1
3	0	0	1	1	0
4	1	1	0	0	0

Составить полные таблицы истинности для следующих формул:

а) $\forall x P(x)$;

б) $\exists x P(x)$;

в) $\forall x Q(x,y)$;

г) $\exists x Q(x,y)$;

д) $\exists y Q(x,y)$;

е) $\forall y Q(x,y)$;

ж) $\forall x Q(x,x)$;

з) $\exists x Q(x,x)$;

и) $P(x) \to \exists y Q(x,y)$;

к) $\forall x \exists y \big(P(x) \vee Q(x,y)\big)$;

л) $\exists y \big(Q(x,y) \to \urcorner P(x)\big)$;

м) $\exists x \exists y \big(Q(x,y) \leftrightarrow Q(y,x)\big)$;

н) $\forall x \forall y \big(Q(x,y) \leftrightarrow Q(y,x)\big)$;

о) $\forall x Q(x,y) \leftrightarrow P(y)$.

2. Пусть $\mathbb{N}$ - множество натуральных чисел, $"<"$– - отношение «быть меньше» для натуральных чисел, $"="$ - отношение равенства чисел. Для модели $\langle N; <, = \rangle$ показать эквивалентность следующих формул:

а) $\exists x \forall y \rceil (y > x)$ и $\exists x \neg \exists y (y > x)$;

б) $\forall x \forall y \neg (x < y) \wedge \neg (y < x)$ и $\forall x \forall y (x = y)$;

в) $\rceil (x < y) \wedge \rceil (y < x)$ и $(x = y)$;

г) $\exists x \forall y \big(y > x \vee \rceil (y > 0)\big)$ и $\exists x \forall y (y > 0 \to y > x)$;

д) $(x < y)$ и $\exists z (z > 0 \wedge y = x + z)$.

3. Пусть $\langle \mathbb{Z}; D, <, = \rangle$ - модель на множестве целых чисел $\mathbb{Z}$, где $D(x, y) = [x \text{ делится на } y]$, а $"<", "="$ имеют обычный смысл. Выяснить, истинны или ложны следующие высказывания в этой модели:

а) $\forall x \exists y D(x, y)$;

б) $\exists x \exists y D(x, y)$;

в) $\forall x \forall y (D(x, y) \to x \le y)$;

г) $\forall x \forall y \forall z (x < y \wedge y < x \to x = y)$;

д) $\forall x \exists y \big(x < y \wedge D(x, y)\big)$;

е) $\forall x \forall y \exists z \big(D(x, z) \wedge D(y, z)\big)$;

ж) $\forall x \forall y \exists z \big(D(z, x) \wedge D(z, y)\big)$;

з) $\exists x \forall y \big(D(x, y) \to \rceil (x = y)\big)$.

4. Доказать следующие равносильности:

а) $\forall x \forall y\, P(x, y) \models\mid \forall y \forall x\, P(x, y)$;

б) $\exists x \exists y\, P(x, y) \models\mid \exists y \exists x\, P(x, y)$;

в) $\neg \exists x\, P(x) \models\mid \forall x \neg P(x)$;

г) $\exists x (P(x) \vee Q(x)) \models\mid \exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$;

д) $\exists x (P(x) \wedge Q) \models\mid \exists x\, P(x) \wedge Q$, если x не входит в Q.

5. Доказать следующие тавтологии (тождественно истинные – “истина” или “1”):

а) $P(x) \vee \neg P(x)$;

б) $\forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x) \to \forall x (P(x) \vee Q(x))$;

в) $\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \to \exists x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(x)$.

6. Привести пример модели $\langle M; P, Q \rangle$ такой, что формулы:

а) $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ и $\forall x \big(P(x) \vee Q(x)\big)$;

б) $\exists x \big(P(x) \wedge Q(x)\big)$ и $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$

были бы неравносильны в этой модели.

7. Дан одноместный предикат $P(x)$ на множестве M, а также двухместный предикат равенства $[x = y]$. Записать с помощью формул логики предикатов следующие высказывания для модели $\langle M; P, = \rangle$:

а) существует не менее одного элемента множества M, который удовлетворяет $P(x)$;

б) существует не более одного элемента множества M, удовлетворяющего свойству P;

в) существует по крайней мере два элемента множества M, удовлетворяющие свойству P;

г) существует не более двух элементов множества M, удовлетворяющих свойству P;

д) существуют в точности два элемента из M, удовлетворяющих свойству P.

8. Доказать, что конъюнкция тождественно истинной формулы с произвольной формулой является тождественно истинной.

9. Доказать, что отрицание тавтологии – невыполнимая формула (в логике предикатов).

10. Доказать, что конъюнкция тавтологии α с произвольной формулой β равносильна формуле β.

11. Доказать, что формула α выполнима, если $\urcorner\alpha$ не является тождественно истинной.

12. Выполнимы ли следующие формулы:

а) $\exists x P(x)$;

б) $\forall x P(x)$;

в) $\exists x \forall y \big(Q(x,x) \wedge \urcorner Q(x,y)\big)$;

г) $\exists x \exists y (P(x) \wedge \urcorner P(y))$;

д) $P(x) \rightarrow \forall y P(y)$;

е) $\exists x P(x) \rightarrow \forall x P(x)$;

ж) $\forall x P(x) \rightarrow \urcorner\exists x P(x)$.

13. Являются ли тавтологиями следующие формулы:

а) $\exists \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \rightarrow \forall \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$;

б) $\urcorner(\exists x P(x) \rightarrow \forall x P(x))$;

в) $\forall x \exists y Q(x,y) \rightarrow \exists y \forall x Q(x)$;

г) $\exists y \forall x Q(x,y) \rightarrow \forall x \exists y Q(x,y)$.

14. Доказать, что импликация двух тавтологий является тавтологией.

15. Пусть множество M модели $m = \langle M; P, Q, S \rangle$ состоит из трех элементов $M = \{a, b, c\}$. Исключите кванторы из следующих формул:

а) $\forall x P(x)$;

б) $\forall x P(x) \wedge \forall x S(x)$;

в) $\forall x P(x) \wedge \exists x S(x)$;

г) $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$;

д) $\forall x \urcorner P(x) \vee \forall x P(x)$.

16. Доказать, что формула $\exists x (P(x) \wedge Q(x))$ следует из формулы $P(x) \wedge \forall x Q(x)$.

17. Записать формулами (над областью вещественных чисел) следующие предложения:

а) каждое квадратное уравнение с действительными коэффициентами (a, b, c) имеет не более двух корней;

б) для любых двух вещественных чисел существует такое третье, что оно больше каждого из этих чисел.

18. Построить отрицание следующих высказываний и прочитать их словами (x, y, z, t – вещественные переменные):

а) $\forall \boldsymbol{x} \forall \boldsymbol{y}\ ((\boldsymbol{x} > \boldsymbol{y}) \vee (\boldsymbol{x} < \boldsymbol{y}) \vee (\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}))$;

б) $\exists y \forall x\big((y \neq 0) \rightarrow (x + y) = x\big)$;

в) $\forall \boldsymbol{x} \forall \boldsymbol{y} \exists \boldsymbol{z}\ ((\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{z}) \vee \exists \boldsymbol{t}\ (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{t}) \wedge (\boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{t}))$.

19. Формализовать следующие рассуждения:

а) ни один человек не является четвероногим. Все женщины – люди. Следовательно, ни одна женщина не является четвероногой;

б) каждый купивший билет получает премию. Следовательно, если премии не выданы, то никто не покупал билеты;

в) Арт – мальчик, у которого нет автомобиля. Джейн любит только мальчиков, имеющих автомобили. Следовательно, Джейн не любит Арта;

г) все первокурсники встречаются со всеми второкурсниками. Ни один первокурсник не встречается ни с одним студентом предпоследнего курса. Следовательно, ни один второкурсник не является студентом предпоследнего курса;

д) некоторым нравится Элвис. Некоторые не любят никого, кому нравится Элвис. Следовательно, некоторые любят не всех.

Литература

1. Касимов Ю.Ф., Кузнецов В.Л., Пичугин А.А. Математическая логика: Учебное пособие. – М.: МГТУ ГА, 2016. – 48 с.

2. Андерсон Джеймс А. Дискретная математика и комбинаторика: Пер. с англ. – М.: ИД “Вильямс”, 2003. – 960 с.

3. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов: Учебник для вузов.- СПб.: Питер, 2009.- 384 с.

4. Кузнецов О.П. Дискретная математика для инженеров.- СПб.-М.-Краснодпр: Лань, 2005. – 420 с.

5. Васильев В.И., Касимов Ю.Ф. Дискретная математика. Часть 1. Основы математического языка и логики: Учебное пособие. - М.: МГТУ ГА, 1995. – 108 с.

6. Самохин А.В. Математическая логика и теория алгоритмов: Учебное пособие. - М.: МГТУ ГА, 2003. – 236 с.