ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ» (МГТУ ГА)

Кафедра вычислительных машин, комплексов, систем и сетей

Н.И. Черкасова

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ И СЕТЕЙ

Учебно-методическое пособие
по выполнению практических занятий

для студентов III курса
направления 09.03.01
очной формы обучения

Москва
ИД Академии Жуковского
2018

УДК 681.3(07)
ББК 6Ф7.3
Ч48

Рецензент:
Феоктистова О.Г. – д-р техн. наук, проф.

Черкасова Н.И.
Ч48 Моделирование вычислительных систем и сетей [Текст] : учебно-методическое пособие по выполнению практических занятий / Н.И. Черкасова. – М.: ИД Академии Жуковского, 2018. – 32 с.

Данное учебно-методическое пособие издается в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Моделирование вычислительных систем и сетей» по учебному плану для студентов III курса направления 09.03.01 всех очной формы обучения.

В учебно-методическом пособии рассмотрены материалы о моделировании потока заявок, структуре и характеристиках систем массового обслуживания.

Приведены примеры решения задач СМО и представлены варианты заданий.

Рассмотрено и одобрено на заседании кафедры 27.03.2018 г. и методического совета 27.03.2018 г.

УДК 681.3(07)
ББК 6Ф7.3

В авторской редакции

Подписано в печать 12.06.2018 г.
Формат 60x84/16 Печ. л. 2 Усл. печ. л. 1,86
Заказ № 328/0604-УМП06 Тираж 30 экз.

Московский государственный технический университет ГА
125993, Москва, Кронштадтский бульвар, д. 20

Издательский дом Академии имени Н. Е. Жуковского
125167, Москва, 8-го Марта 4-я ул., д. 6А
Тел.: (495) 973-45-68
E-mail: zakaz@itsbook.ru

Содержание

1.Системы массового обслуживания

Рассмотрим решение вероятностных задач, связанных с работой систем массового обслуживания. Системы массового обслуживания - это такие системы, в которые в случайные моменты времени поступают заявки на обслуживание, при этом поступившие заявки обслуживаются с помощью имеющихся в распоряжении системы каналов обслуживания.

Математическая дисциплина, изучающая модели реальных систем массового обслуживания, получила название теории массового обслуживания. Задача теории массового обслуживания - установить зависимость результирующих показателей работы системы массового обслуживания (вероятности того, что требование будет обслужено; математического ожидания числа обслуженных требований и т. д.) от входных показателей (количество приборов в системе, параметров входящего потока требований и т. д.) установить такие зависимости в формульном виде можно только для простых систем массового обслуживания. Изучение же реальных систем проводится путем имитации, или моделирования их работы на ЭВМ с привлечением метода статистических испытаний. Схема СМО представлена на рисунке 1.

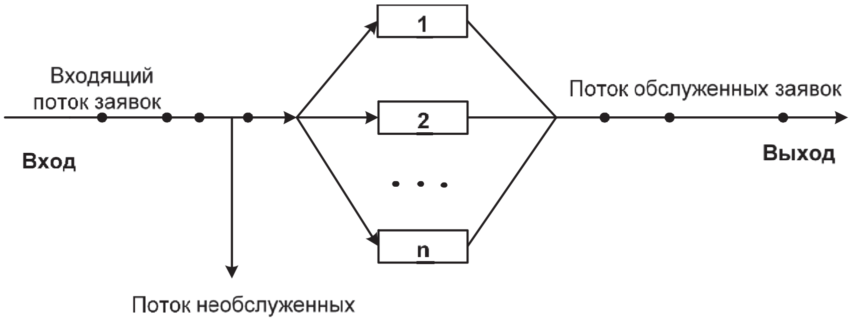

Рис.1 схема СМО

Система массового обслуживания считается заданной, если определены:

1) входящий поток требований, или, иначе говоря, закон распределения, характеризующий моменты времени поступления требований в систему. Первопричину требований называют источником. Предполагается, что источник располагает неограниченным числом требований и что требования однородны, т. е. различаются только моментами появления в системе;

2) система обслуживания, состоящая из накопителя и узла обслуживания. Последний представляет собой одно или несколько обслуживающих устройств, которые называтся приборами. Каждое требование должно поступить на один из приборов, чтобы пройти обслуживание. Может

оказаться, что требованиям придется ожидать, пока приборы освободятся. В этом случае требования находятся в накопителе, образуя одну или несколько очередей. Положим, что переход требования из накопителя в узел обслуживания происходит мгновенно;

3) время обслуживания требования каждым прибором, которое является случайной величиной и характеризуется некоторым законом распределения;

4) дисциплина ожидания, т. е. совокупность правил, регламентирующих количество требований, находящихся в один и тот же момент времени в системе. Система, в которой поступившее требование получает отказ, когда все приборы заняты, называется системой без ожидания. Если требование, заставшее все приборы занятыми, становится в очередь и ожидает до тех пор, пока освободиться один из приборов, то такая система называется чистой системой с ожиданием. Система, в которой требование, заставшее все приборы занятыми, становится в очередь только в том случае, когда число требований, находящихся в системе, не превышает определенного уровня (в противном случае происходит потеря требования), называется смешанной системой обслуживания;

5) дисциплина обслуживания, т. е. совокупность правил, в соответствии с которыми требование выбирается из очереди для обслуживания. Наиболее часто на практике используются следующие правила:

- заявки принимаются к обслуживанию в порядке очереди;
- заявки принимаются к обслуживанию по минимальному времени получения отказа;
- заявки принимаются к обслуживанию в случайном порядке в соответствии с заданными вероятностями;

6) дисциплина очереди, т.е. совокупность правил, в соответствии с которыми требование отдает предпочтение той или иной очереди (если их несколько) и располагается в выбранной очереди. Например, поступившее требование может занять место в самой короткой очереди; в этой очереди оно может расположиться последним (такая очередь называется упорядоченной), а может пойти на обслуживание вне очереди. Возможны и другие варианты

Отметим, что при исследовании сложных систем методом имитационного моделирования существенное внимание уделяется учету случайных факторов[1,2]. Как было показано выше, предметом теории массового обслуживания является установление зависимости между факторами, определяющими функциональные возможности системы массового обслуживания, и эффективностью ее функционирования. В большинстве случаев все параметры, описывающие системы массового обслуживания, являются случайными величинами или функциями, поэтому эти системы относятся к стохастическим системам.

Случайный характер потока заявок (требований), а также, в общем случае, и длительности обслуживания приводит к тому, что в системе массового обслуживания происходит случайный процесс[3,4]. По характеру случайного процесса, происходящего в системе массового обслуживания (СМО), различают системы марковские и немарковские. В марковских системах входящий поток требований и выходящий поток обслуженных требований (заявок) являются пуассоновскими. Пуассоновские потоки позволяют легко описать и построить математическую модель системы массового обслуживания. Данные модели имеют достаточно простые решения, поэтому большинство известных приложений теории массового обслуживания используют марковскую схему. В случае немарковских процессов задачи исследования систем массового обслуживания значительно усложняются и требуют применения статистического моделирования, численных методов с использованием ЭВМ.

В качестве математических схем, используемых для формализации действия этих факторов, используются случайные события, случайные величины и случайные процессы (функции). Формирование на ЭВМ реализаций случайных объектов любой природы сводится к выработке и преобразованию случайных чисел.

Случайный процесс, протекающий в СМО, состоит в том, что система в случайные моменты времени переходит из одного состояния в другое: меняется число занятых каналов, число заявок, стоящих в очереди, и т.п. Это означает, что СМО представляет собой физическую систему дискретного типа с конечным (или счетным) множеством состояний, а переход системы из одного состояния в другое происходит скачком, в момент, когда осуществляется какое-то событие (приход новой заявки, освобождение канала, уход заявки из очереди и т.п.).

Рассмотрим физическую систему X с не более, чем счетным множеством состояний $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$

В любой момент времени t система X может быть в одном из этих состояний. Обозначим $p_k(t)$ ($k = 1, 2, \ldots, n, \ldots$) вероятность того, что в момент t система будет находиться в состоянии x_k. Очевидно, для любого t

$$\sum_k p_k(t) = 1.$$

Случайные процессы с дискретными состояниями (не более, чем счетным множеством состояний) бывают двух типов: с дискретным или непрерывным временем. Первые отличаются тем, что переходы из состояния в состояние могут происходить только в строго определенные, разделенные конечными интервалами моменты времени $t_1, t_2, \ldots$ Случайные процессы с непрерывным временем отличаются тем, что переход системы из состояния в состояние возможен в любой момент времени t.

Схема возможных состояний системы 1 и возможных переходов из состояния в состояние показана на рисунке 2 (*графом состояний*).

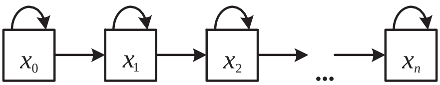

Рис. 2. Граф состояний системы 1.

Стрелками показаны возможные переходы системы из состояния в состояние. Закругленная стрелка, направленная из состояния x_k в него же, означает, что система может не только перейти в соседнее состояние x_{k+1}, но и остаться в прежнем. Для данной системы характерны *необратимые переходы*; в связи с этим из состояния x_n никакие переходы в другие состояния уже невозможны.
Отметим, что граф состояний на рис. 2 показывает только переходы из состояния в соседнее состояние и не показывает «перескоки» через состояние: эти перескоки отброшены как практически невозможные.

Случайные процессы, протекающие в СМО, как правило, представляют собой процессы с непрерывным временем. Это связано со случайностью потока заявок. В противоположность системе 1 с необратимыми переходами, рассмотренной в предыдущем примере, для СМО характерны *обратимые переходы*: занятый канал может освободиться.

В качестве примера рассмотрим одноканальную СМО, в которой заявка, заставшая канал занятым, не становится в очередь, а покидает систему (получает «отказ»). Это – дискретная система с непрерывным временем и двумя возможными состояниями: x_0 – канал свободен, x_1 – канал занят.
Переходы из состояния в состояние обратимы. Граф состояний системы 2. показан на рисунке 3.

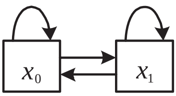

Рис. 3. Граф состояний системы 2.

Для того чтобы описать случайный процесс, протекающий в дискретной системе с непрерывным временем, прежде всего нужно проанализировать причины, вызывающие переход системы из состояния в состояние. Для СМО основным фактором, обусловливающим протекающие в ней процессы, является поток заявок. Поэтому математическое описание любой СМО начинается с потока заявок.

2. Моделирование потока заявок

Поток событий - последовательность событий, происходящее в последовательные моменты времени одно за другим. Поток характеризуется *интенсивностью* λ – частотой появления событий или средним числом событий, поступающих в СМО в единицу времени.

Потоки однородных событий отличаются только временем их появления. Их можно описать как последовательность моментов времени наступления событий. Для их моделирования достаточно сформировать вектора чисел, которые будут соответствовать интервалу времени между очередными событиями.

2.1. Поток однородных событий

При моделировании процессов обслуживания возникает необходимость формирования реализаций случайного потока однородных событий (заявок). Каждое событие потока характеризуется моментом времени tj, в который оно наступает. Чтобы описать случайный поток однородных событий как случайный процесс, достаточно задать закон распределения, характеризующий последовательность случайных величин tj. Для того, чтобы получить реализацию потока однородных событий t1, t2, …, tk, необходимо сформировать реализацию z1, z2, …, zk k-мерного случайного вектора ξ1, ξ2, …, ξk и вычислить значения ti в соответствии со следующими соотношениями:

t1 = ξ1,

t2 = ξ1 + ξ2,

…………………….

tk = ξ1 + ξ2 + … + ξk.

Основная задача теории простейшего потока состоит в определении закона распределения числа событий за период времени t, рассматриваемый в качестве случайной величины. Это соответствует задачи отыскания функции pk(t).

2.2. Характеристики простейшего потока событий

Регулярность. Поток событий называется ***регулярным,*** если события следуют одно за другим через определенные равные промежутки времени. Например, поток изделий на конвейере сборочного цеха (с постоянной скоростью движения) является регулярным. Такой поток сравнительно редко встречается в реальных системах, но представляет интерес как предельный случай. Типичным для системы массового обслуживания является случайный поток заявок[5].

Поток однородных событий называется простейшим, если он обладает следующими тремя свойствами.

Стационарность. Для любого положительного t (t>0) всегда существует такое k>=0, что вероятность появления k событий за период времени (a, a+t), обозначим ее через pk(t), является одной и той же для всех a>=0. Для потоков, в которых за конечный промежуток времени с вероятностью 1 происходит конечное число событий, всегда выполняется равенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) = 1 \quad (\forall t > 0)$$

Поток событий называется *стационарным*, если его вероятностные характеристики не зависят от времени. В частности, интенсивность стационарного потока есть величина постоянная: $\lambda(t) = \lambda$. Таким образом, сущность данного свойства заключается в постоянстве вероятностного режима во времени

Отсутствие последействия. Оно выражает собой отсутствие взаимной зависимости появления событий в потоке в непересекающихся между собой промежутках времени. В данном случае условная вероятность появления k событий (в зависимости от возможных вариантов чередования до начального момента времени a) за промежуток времени (a, a+t) равняется безусловной вероятности pk(t). Таким образом, появление в потоке очередного события не зависит от чередования предшествующих моменту a событий и как давно произошло последнее из них. Иногда это свойство формулируют следующим образом: распределение времени до ближайшего события не зависит от времени наблюдения, т.е. от того, сколько времени прошло после последнего события. Отсутствие последействия в потоке означает, что события, образующие поток, появляются в последовательные моменты времени независимо друг от друга.

Если промежутки времени между последовательными событиями представляют собой независимые, одинаково распределенные случайные величины, поток называется *рекуррентным* (поток Пальма, поток с ограниченным последействием).

Ординарность. Это означает, что вероятность появления двух или более событий в течение элементарного интервала времени $\Delta t \to 0$ есть величина бесконечно малая по сравнению с вероятностью появления одного события на этом интервале. Другими словами, два и более событий в таком потоке произойти одновременно не могут.

В итоге получаем следующее окончательное определение простейшего потока.

Определение Простейшим потоком однородных событий называем всякий стационарный ординарный поток без последействия. Одной из характеристик потока случайных событий является его интенсивность – среднее число событий, происходящих в единицу времени.

Следует отметить, что при поступлении заявок группами, их объем может быть, как постоянным, так и случайным. В случае неординарного потока заявок в виде партий с постоянным размером рекомендуется переходить к ординарному потоку групповых заявок.

Отметим, что название «простейший» связано с тем, что математическое описание событий, связанных с простейшими потоками, оказывается наиболее простым.

Простейший поток играет среди других потоков особую роль при построении и исследовании моделей систем, в которых события, приводящие к изменению состояний, могут произойти в любой произвольный момент времени (*непрерывно - стохастические модели*). Для него число событий, попадающих на любой фиксированный интервал времени, подчиняется закону Пуассона, поэтому его иначе называют стационарным пуассоновским.
Вероятность того, что за интервал времени τ в простейшем потоке произойдет ровно m событий, определяется следующим выражением:

$$P_m(\tau)=\frac{(\lambda\tau)^m}{m!}e^{-\lambda\tau}$$

Здесь λ – интенсивность, т.е. среднее число событий в единицу времени.
Вероятность того, что в течении интервала времени τ не произойдет не одного события, составляет

$$P_0(\tau)=e^{-\lambda\tau}.$$

Вероятность, что за время τ произойдет хотя бы одно событие

$$P_{\geq 1}(\tau)=1-e^{-\lambda\tau}$$

Условие отсутствие последствия (заявки поступают независимо друг от друга) наиболее существенно для простейшего потока.

2.3. Стационарный пуассоновский поток

Поток событий называется простейшим (или стационарным пуассоновским), если он одновременно стационарен, ординарен и не имеет последействия. Название «простейший» объясняется тем, что СМО с простейшими потоками имеет наиболее простое математическое описание. Между тем, самый простой, регулярный поток не является «простейшим», так как обладает последействием: моменты появления событий в таком потоке связаны жесткой, функциональной зависимостью. Без специальных усилий по поддержанию его регулярности такой поток обычно не создается.
Простейший поток в качестве предельного возникает в теории случайных процессов столь же естественно, как в теории вероятностей нормальное распределение получается в качестве предельного для суммы случайных величин: *при наложении (суперпозиции) достаточного большого числа n*

независимых, стационарных и ординарных потоков (сравнимых между собой по интенсивностям λ_i ($i=1,2,...,n$)*) получается поток, близкий к простейшему с интенсивностью* λ*, равной сумме интенсивностей входящих потоков, т.е.*

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i .$$

Название «пуассоновский» связано с тем, что при соблюдении 1 – 3 число событий, попадающих на любой фиксированный интервал времени, будет распределено по закону Пуассона. Покажем это с помощью элементарных рассуждений.

Рассмотрим на оси времени *Ot* простейший поток событий как неограниченную последовательность случайных точек (рисунок. 4).

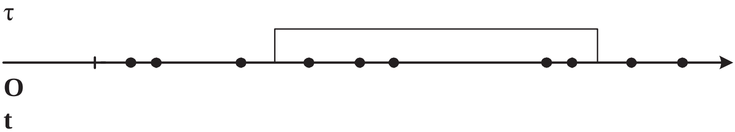

Рис. 4. Простейший поток событий.

Пусть случайная величина *X* выражает число событий (точек), попадающих на произвольный промежуток времени τ. Покажем, что *случайная величина X распределена по закону Пуассона.*

Разобьем временной промежуток τ на n равных элементарных отрезков $\Delta t = \tau/n$. Математическое ожидание числа событий, попадающих на элементарный отрезок Δt, очевидно, равно $\lambda \cdot \Delta t$, где λ – интенсивность потока (т.к. на единицу длины попадает в среднем λ точек). Согласно свойству ординарности потока, можно пренебречь вероятностью попадания на элементарный (т.е. малый) отрезок двух и более событий. Поэтому математическое ожидание $\lambda \cdot \Delta t$ числа точек, попадающих на участок Δt, будет приближенно (с точностью до бесконечно малых высшего порядка при $\Delta t \to 0$) равно вероятности попадания на него одной точки (или, что равнозначно, хотя бы одной).

Будем считать элементарный отрезок Δt «занятым», если в нем появилось событие потока, и «свободным», если не появилось. Вероятность того, что отрезок $\Delta t = \tau/n$ окажется «занятым», равна $\lambda \Delta t = \lambda\tau/n$; вероятность того, что он окажется «пустым», равна $1 - \lambda\tau/n$ (чем меньше Δt , тем точнее равенства).

Число занятых элементарных отрезков, т.е. число X событий на всем временном промежутке τ, можно рассматривать как случайную величину, имеющую биномиальный закон распределения (с параметрами n и $p = \lambda\tau/n$), а, следовательно, по формуле Бернулли

(Необходимое для возникновения биномиального закона условие независимости испытаний, в данном случае – независимость n элементарных отрезков относительно события «отрезок занят», обеспечивается свойством отсутствия последействия потока).

Известно, что при неограниченном увеличении числа элементарных отрезков Δt , т.е. при $n \to \infty$, $p = \lambda\tau/n \to 0$ и постоянном значении произведения $np = \lambda\tau$ биномиnальное распределение стремится к распределению Пуассона с параметром $a = \lambda\tau$:

$$P_m(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^m}{m!} e^{-\lambda\tau} \quad (2.1)$$

От этого свойства закона Пуассона – выражать биномиальное распределение при большом числе опытов и малой вероятности события – происходит его название, часто применяемое в учебниках статистики: закон редких явлений.

В частности, вероятность того, что за время τ не произойдет ни одного события (m = 0), равна

$$P0\ (\tau) = e{-}\lambda\tau. \quad (2.2)$$

Более подробно Пуассоновский поток событий описан в Приложении 1.

2.4. Особенности простейшего потока событий

Простейший поток обладает следующими особенностями:

1. Сумма M независимых, ординарных, стационарных потоков заявок с интенсивностями λ_i (i = 1, ..., M) сходится к простейшему потоку с интенсивностью, равной сумме интенсивностей исходных потоков при условии, что складываемые потоки оказывают приблизительно одинаково малое влияние на суммарный поток. Сходимость суммарного потока к простейшему осуществляется очень быстро. Практически можно считать, что сложение четырех-пяти стационарных, ординарных, независимых потоков, сравнимых по интенсивности, достаточно для того, чтобы суммарный поток был близок к простейшему.

Таким образом, для выяснения всех свойств суммарного потока достаточно знать лишь интенсивности суммируемых потоков и практически не требуется знать внутреннюю структуру этих потоков.

Простейший поток обладает устойчивостью, состоящей в том, что при суммировании независимых простейших потоков получается снова простейший поток, причем интенсивности складываемых потоков суммируются.

2. Поток заявок, полученный путем случайного разрежения исходного потока, когда каждая заявка с определенной вероятностью p исключается из потока независимо от того, исключены другие заявки или нет, образует простейший поток с интенсивностью

$\lambda_p = p\,\lambda,$

где λ – интенсивность исходного потока. В отношении исходного потока заявок делается предположение лишь об ординарности и стационарности.

3. Для простейшего потока характерно, что поступление заявок через короткие промежутки времени более вероятно, чем через длинные, – 63% промежутков времени между заявками имеют длину, меньшую среднего значения $1/\lambda$. Следствием этого является то, что простейший поток по сравнению с другими видами потоков создает наиболее тяжелый режим работы системы. Поэтому предположение о том, что на вход системы поступает простейший поток заявок, приводит к определению предельных значений характеристик качества обслуживания. Если реальный поток отличен от простейшего, то система будет функционировать не хуже, чем это следует из полученных оценок.

4. Интервал времени между произвольным моментом времени и моментом поступления очередной заявки имеет такое же распределение с тем же средним $M[\tau] = 1/\lambda$, что и интервал времени между двумя последовательными заявками. Эта особенность простейшего потока является следствием отсутствия последействия.

Важная роль простейшего потока при моделировании определяется тем, что простейшие или близкие к ним потоки часто встречаются на практике. Кроме того, при анализе СМО можно получить вполне удовлетворительные результаты, заменяя входной поток любой структуры простейшим с той же интенсивностью.

При моделировании систем, в которых случайные события, приводящие к изменению состояний, могут происходить только в моменты времени, отстоящие друг от друга на величину, кратную значению тактового интервала T (*дискретно - стохастические модели*), для описания интервалов времени между событиями используют регулярный просеянный поток. Его можно получить, удаляя в регулярном потоке события с вероятностью π и оставляя с вероятностью $1-\pi$. Просеянный поток иногда называют дискретным пуассоновским, так как его свойства аналогичны для моментов времени, кратных периоду T, свойствам простейшего потока. К просеянному регулярному потоку приводит, например регулярный поток данных, передаваемый по каналам связи с контролем наличия сбоев в передаваемом коде и исправлением путем повторной передачи.

2.5. Пример решения задачи

Пример. На станцию поступает простейший поток вызовов с интенсивностью λ=1,2 вызовов в минуту. Найти вероятность того, что за две минуты: а) не придет ни одного вызова; б) придет ровно один вызов; в) придет хотя бы один вызов.

Решение. а) Случайная величина X – число вызовов за две минуты – распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda\tau=1,2\cdot 2 = 2,4$. Вероятность того, что вызовов не будет ($m = 0$), по формуле (2.2):

$P_0(2) \approx e^{-2,4} \approx 0,091$.

б) Вероятность одного вызова ($m = 1$) по формуле (2.1):

$P_1(2) \approx 2,4\cdot 0,091 \approx 0,218$.

в) Вероятность хотя бы одного вызова:

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - P_0(2) \approx 1 - 0,091 = 0,909$.

Найдем распределение интервала времени T между двумя произвольными соседними событиями простейшего потока.

В соответствии с формулой (2.2) вероятность того, что на участке времени длиной t не появится ни одного из последующих событий, равна

$P(T \geq t) = e^{-\lambda t}$,

а вероятность противоположного события, т.е. функция распределения случайной величины T , есть

$$F(t) = P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t}. \qquad (2.3)$$

Функция распределения (3) определяет показательный (экспоненциальный) закон распределения. Таким образом, *интервал времени между двумя произвольными соседними событиями простейшего потока имеет показательное распределение*, для которого математическое ожидание равно среднему квадратичному отклонению случайной величины:

$a = \sigma = \dfrac{1}{\lambda}$,

и обратно по величине интенсивности потока λ.

Для простейшего потока с интенсивностью λ вероятность попадания на *элементарный (малый)* отрезок времени Δt хотя бы одного события потока равна согласно (3):

$$P_{\Delta t} = P(T < \Delta t) = 1 - e^{-\lambda\Delta t} \approx \lambda\Delta t. \qquad (2.4)$$

Эта приближенная формула, получаемая заменой функции $e^{-\lambda\Delta t}$ лишь двумя первыми членами ее разложения в ряд по степеням Δt , тем точнее, чем меньше Δt .

2.6. Задание

Интенсивность простейшего потока заявок равна λ. Определить:

1) *средний интервал* времени между соседними заявками в потоке;
2) *среднее число заявок*, поступающих в систему за время τ;
3) *вероятность* того, что за время τ в систему не поступит ни одной заявки;
4) *вероятность* того, что за время τ в систему поступит хотя бы одна заявка;
5) *вероятность* того, что за время τ в систему поступит больше одной заявки.

Таблица 1. – варианты заданий

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
λ,с-1	*0,25*	*0,25*	*0,25*	*0,5*	*1,0*	*1,0*	*1,5*	*1,5*	*2,0*	*2,0*
τ, с	*2,0*	*4,0*	*8,0*	*2,0*	*2,0*	*5,0*	*2,0*	*1,0*	*1,0*	*2,0*

3. Форма записи типа СМО

В теории массового обслуживания приняты сокращенные обозначения, Которые для краткой характеристики СМО *ввел Д.Кендалл ввел символику (нотацию* в основе которых лежит обозначение вида *A*/ *B*/ *m*., где A и B описывают соответственно законы распределения промежутков времени между последовательно поступающими заявками и распределение времени их обслуживания, то есть соответственно входной поток и поток обслуживания, задавая функцию распределения интервалов между заявками во входном потоке и функцию распределения времен обслуживания[6].

а величина m - число обслуживающих приборов.

A и B принимают значения из следующего набора символов:

M - показательное распределение;

E_r - распределение Эрланга порядка r;

D - детерминированное распределение ;

G - распределение общего вида.

Иногда приходится указывать также емкость накопителя системы (*K*) или число источников нагрузки (M); в том случае будет использоваться пятибуквенное обозначение: F/B/m/K/M. В случае отсутствия одного из последних индексов предполагается, что его значения сколь угодно велико. Например, запись вида D/M/2/20 означает систему с двумя обслуживающими приборами постоянным (детерминированным) временем между двумя последовательно поступающими заявками, показательным распределением длительности обслуживания и накопителем емкостью 20 заявок.

При этом подразумевается, что потоки являются **рекуррентными**, т.е. интервалы между событиями независимы и имеют одинаковое распределение. Обязательными в нотации являются первых 3 позиции. По умолчанию если n отсутствует имеем систему с отказами, если отсутствует k, то по умолчанию – один источник.

3.1. Характеристики СМО типа M/M/1

СМО M/M/1 представляет собой систему с одним обслуживающим прибором, пуассоновским входящим потоком и экспоненциальным распределением длительности обслуживания Рассматриваемая СМО может быть представлена графически рисунке 5.

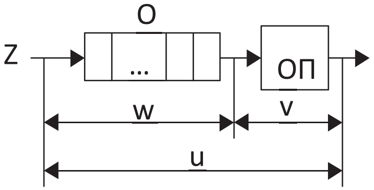

Рис.5. Одноканальная СМО
Система может работать в стационарном, либо в нестационарном режимах.

При Работе в стационарном режиме вероятностные
характеристики функционирования системы не зависят от времени, а в нестационарном -зависит.

Необходимым условием существования стационарного режима одноканальной СМО является условие $\lambda < \mu$, т.е. интенсивность поступления заявок должна быть меньше интенсивности их обслуживания.

Поведение СМО типа M/M/1 описывается процессом размножения и гибели, Граф переходов для СМО типа M/M/1 представлен на рисунке 6.

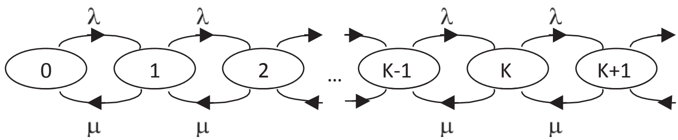

Рис.6. Граф переходов для СМО типа M/M/1

4. Моделирование систем массового обслуживания

Независимо от характера процесса, протекающего в системе массового обслуживания, различают два основных вида СМО:

– системы с отказами, в которых заявка, поступившая в систему в момент, когда все каналы заняты, получает отказ и сразу же покидает очередь;

– системы с ожиданием (очередью), в которых заявка, поступившая в момент, когда все каналы обслуживания заняты, становится в очередь и ждет, пока не освободится один из каналов. Системы массового обслуживания с ожиданием делятся на системы с ограниченным ожиданием и системы с неограниченным ожиданием.

В системах с ограниченным ожиданием может ограничиваться:

- длина очереди;
- время пребывания в очереди.

В системах с неограниченным ожиданием заявка, стоящая в очереди, ждет обслуживание неограниченно долго, т.е. пока не подойдет очередь.
Все системы массового обслуживания различают по числу каналов обслуживания:

- одноканальные системы;
- многоканальные системы.

Приведенная классификация СМО является условной. На практике чаще всего системы массового обслуживания выступают в качестве смешанных систем. Например, заявки ожидают начала обслуживания до определенного момента, после чего система начинает работать как система с отказами.

4.1. Определение характеристик систем массового обслуживания

4.1.1. Одноканальная модель с пуассоновским входным потоком с экспоненциальным распределением длительности обслуживания

Простейшей одноканальной моделью с вероятностными входным потоком и процедурой обслуживания является модель, характеризуемая показательным распределением как длительностей интервалов между поступлениями требований, так и длительностей обслуживания. При этом плотность распределения длительностей интервалов между поступлениями требований имеет вид

$$f_1(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}, \qquad (4.1)$$

где λ - интенсивность поступления заявок в систему
Плотность распределения длительностей обслуживания:

$$f_2(x) = \mu \cdot e^{-\mu t}, \qquad (4.2)$$

где μ - интенсивность обслуживания
Потоки заявок и обслуживании простейшие.
Пусть система работает с ***отказами***. Необходимо определить абсолютную и относительную пропускную способность системы.
Представим данную систему массового обслуживания в виде графа (рисунок 7), у которого имеются два состояния:
S_0 - канал свободен (ожидание);
S_1 - канал занят (идет обслуживание заявки).

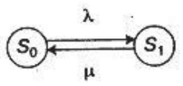

Рис. 7. Граф состояний одноканальной СМО с отказами

Обозначим вероятности состояний: $P_0(t)$ - вероятность состояния «канал свободен»; $P_1(t)$ - вероятность состояния «канал занят». По размеченному графу состояний (рис. 4.1) составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний:

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda \cdot P_0(t) + \mu \cdot P_1(t) \\ \dfrac{dP_1(t)}{dt} = -\mu \cdot P_1(t) + \lambda \cdot P_0(t). \end{cases} \quad (4.3)$$

Система линейных дифференциальных уравнений (4.3) имеет решение с учетом нормировочного условия $P_0(t) + P_1(t) = 1$. Решение данной системы называется неустановившимся, поскольку оно непосредственно зависит от t и выглядит следующим образом:

$$P_0(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \quad (4.4)$$

$P_1(t) = 1 - P_0(t) = 1$. (4.5)

Нетрудно убедиться, что для одноканальной СМО с отказами вероятность $P_0(t)$ есть не что иное, как относительная пропускная способность системы q. Действительно, P_0 - вероятность того, что в момент t канал свободен и заявка, пришедшая к моменту t, будет обслужена, а следовательно, для данного момента времени t среднее отношение числа обслуженных заявок к числу поступивших также равно $P_0(t)$, т. е.

$q = P_0(t)$, (4.6)

По истечении большого интервала времени (при $t \to \infty$) достигается стационарный (установившийся) режим:

$$q = P_0 = \frac{\mu}{\mu + \lambda}, \quad (4.7)$$

Зная относительную пропускную способность, легко найти абсолютную. Абсолютная пропускная способность (A) - среднее число заявок, которое может обслужить система массового обслуживания в единицу времени:

$$A = \lambda \cdot q = \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu}. \quad (4.8)$$

Вероятность отказа в обслуживании заявки будет равна вероятности состояния «канал занят»:

$$P_{отк} = P_1 = 1 - P_0 = 1 - \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}. \quad (4.9)$$

Данная величина $P_{отк}$ может быть интерпретирована как средняя доля необслуженных заявок среди поданных.

4.1.2. Одноканальная СМО с отказами

Пример решения задачи

Пусть одноканальная СМО с отказами представляет собой один пост ежедневного обслуживания (ЕО) автомобилей. Заявка - автомобиль, прибывший в момент, когда пост занят, - получает отказ в обслуживании. Интенсивность потока автомобилей λ= 1,0 (автомобиль в час). Средняя продолжительность обслуживания - 1,8 часа. Поток автомобилей и поток обслуживании являются простейшими.

Требуется определить в установившемся режиме предельные значения:

- относительной пропускной способности q;
- абсолютной пропускной способности A;
- вероятности отказа $P_{отк}$;

Сравните фактическую пропускную способность СМО с номинальной, которая была бы, если бы каждый автомобиль обслуживался точно 1,8 часа и автомобили следовали один за другим без перерыва.

Решение 1. Определим интенсивность потока обслуживания:

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{об}} = \frac{1}{1,8} = 0,555$$

.

2. Вычислим относительную пропускную способность:

$$q = \frac{\mu}{\mu + \lambda} = \frac{0,555}{1 + 0,555} = 0,356$$

.

Величина q означает, что в установившемся режиме система будет обслуживать примерно 35% прибывающих на пост ЕО автомобилей.

3. Абсолютную пропускную способность определим по формуле:

$$A = \lambda \cdot q = 1 \cdot 0,356 = 0,356$$

.

Это означает, что система (пост ЕО) способна осуществить в среднем 0,356 обслуживания автомобилей в час.

4. Вероятность отказа:

$$P_{отк} = 1 - q = 1 - 0,356 = 0,644$$

.

Это означает, что около 65% прибывших автомобилей на пост ЕО получат отказ в обслуживании.

5. Определим номинальную пропускную способность системы:

$$A_{ном} = \frac{1}{\bar{t}_{обсл}} = \frac{1}{0,8} = 0,555$$

(автомобилей в час).

Оказывается, что $A_{ном}$ в 1,5 раза $\left(\frac{0,555}{0,356} \approx 1,5\right)$ больше, чем фактическая пропускная способность, вычисленная с учетом случайного характера потока заявок и времени обслуживания.

4.1.3. Задание

Одноканальная СМО с отказом. Интенсивность потока автомобилей λ= (автомобиль в час). Средняя продолжительность обслуживания - t 〖обсл_〗 . Поток автомобилей и поток обслуживании являются простейшими.
Решить и определить следующие характеристики СМО:

1. сформулировать *условия* (предположения и допущения), при которых случайный процесс, протекающий в системе, будет Марковским;
2. нарисовать *модель* системы и при необходимости ввести обозначения интенсивностей поступления и обслуживания заявок;
3. выписать *систему уравнений* для определения стационарных вероятностей состояний;
4. определить следующих характеристики функционирования СМО: *нагрузка, загрузка, среднее число работающих приборов, коэффициент простоя системы, среднее число заявок в очереди и в системе, вероятность потери заявок, производительность системы, интенсивность потока потерянных заявок, среднее время ожидания и пребывания заявок в системе;*
5. относительная пропускная способность q;
6. абсолютная пропускная способность A;
7. вероятность отказа $P_{отк}$

Таблица 2 – варианты заданий

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
λ,час-1	*0,25*	*0,25*	*0,25*	*0,5*	*1,0*	*1,0*	*1,5*	*1,5*	*2,0*	*2,0*
τ, час	*2,0*	*4,0*	*8,0*	*2,0*	*2,0*	*5,0*	*2,0*	*1,0*	*1,0*	*2,0*

4.2. Одноканальная СМО с ожиданием

Рассмотрим ***теперь одноканальную СМО с ожиданием.***
Система массового обслуживания имеет один канал. Входящий поток заявок на обслуживание - простейший поток с интенсивностью λ. Интенсивность потока обслуживания равна μ (т. е. в среднем непрерывно занятый канал будет выдавать μ обслуженных заявок). Длительность обслуживания - случайная величина, подчиненная показательному закону распределения. Поток обслуживании является простейшим пуассоновским потоком событий. Заявка, поступившая в момент, когда канал занят, становится в очередь и ожидает обслуживания.
Предположим, что независимо от того, сколько требований поступает на вход обслуживающей системы, данная система (очередь + обслуживаемые клиенты) не может вместить более N-требований (заявок), т. е. клиенты, не попавшие в ожидание, вынуждены обслуживаться в другом месте. Наконец,

источник, порождающий заявки на обслуживание, имеет неограниченную (бесконечно большую) емкость.

Граф состояний СМО в этом случае имеет вид, показанный на рисунке 8.

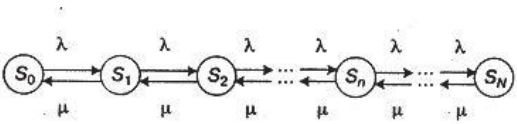

Рис. 8. Граф состояний одноканальной СМО с ожиданием (схема гибели и размножения)

Состояния СМО имеют следующую интерпретацию:

S_0 - «канал свободен»;

S_1 - «канал занят» (очереди нет);

S_2 - «канал занят» (одна заявка стоит в очереди); ……………………………………………………….

S_n - «канал занят» (n -1 заявок стоит в очереди);

S_N - «канал занят» (N - 1 заявок стоит в очереди). Стационарный процесс в данной системе будет описываться следующей системой алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} -\psi \cdot P_0 + P_1 = 0, \quad n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ -(1-\psi)\cdot P_n + P_{n+1} + \psi \cdot P_{n-1} = 0, \quad 0 < n < N \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ -P_N + \psi \cdot P_{N-1} = 0, \quad n = N \end{cases}, \qquad (4.10)$$

где $\psi = \dfrac{\lambda}{\mu}$; n – номер состояния. и

Решение приведенной выше системы уравнений (4.10) для нашей модели СМО имеет вид

$$P_n = \begin{cases} \left(\dfrac{1-\psi}{1-\psi^{N+1}}\right)\cdot \psi^n, \quad \psi \neq 1, \quad n = 0,1,2,\dots,N \\ \dfrac{1}{(N+1)}, \quad \psi = 1. \end{cases} \qquad (4.11)$$

$$P_0 = \frac{1-\psi}{1-\psi^{N+1}} \qquad (4.12)$$

Тогда

$$P_n = \begin{cases} P_0 \cdot \psi^n, & \psi \neq 1, \quad n = 0,1,2,\dots,N \\ \dfrac{1}{(N+1)}, & \psi = 1. \end{cases}$$

Следует отметить, что выполнение условия стационарности $\psi = \dfrac{\lambda}{\mu} < 1$ для данной СМО не обязательно, поскольку число допускаемых в обслуживающую систему заявок контролируется путем введения ограничения на длину очереди (которая не может превышать N - 1), а не соотношением между интенсивностями входного потока, т. е. не отношением $\psi = \dfrac{\lambda}{\mu}$.

Определим характеристики одноканальной СМО с ожиданием и ограниченной длиной очереди, равной (N - 1):

– вероятность отказа в обслуживании заявки:

$$P_{отк} = P_N = \begin{cases} \left(\dfrac{1-\psi}{1-\psi^{N+1}}\right) \cdot \psi^n, & \psi \neq 1, \\ \dfrac{1}{(N+1)}, & \psi = 1. \end{cases} \quad (4.13)$$

– относительная пропускная способность системы:

$$q = 1 - P_{отк} = \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{1-\psi}{1-\psi^{N+1}}\right) \cdot \psi^n, & \psi \neq 1, \\ 1 - \dfrac{1}{(N+1)}, & \psi = 1. \end{cases} \quad (4.14)$$

– абсолютная пропускная способность:

$$A = q \cdot \lambda \quad (4.15)$$

ё

– среднее число находящихся в системе заявок:

$$L_S = \sum_{n=0}^{N} n \cdot P_n = \begin{cases} \dfrac{\psi \cdot \left[1 - (N+1) \cdot \psi^N + N \cdot \psi^{N+1}\right]}{(1-\psi) \cdot \left(1 - \psi^{N+1}\right)}, & \psi \neq 1 \\ N/2, & \psi = 1 \end{cases} \quad (4.16)$$

– среднее время пребывания заявки в системе:

$$W_S = \frac{L_S}{\lambda(1 - P_N)} \quad (4.17)$$

– средняя продолжительность пребывания клиента (заявки) в очереди:

$$W_q = W_S - \frac{1}{\mu} \qquad (4.18)$$

– среднее число заявок (клиентов) в очереди (длина очереди):

$$L_q = \lambda(1 - P_N)W_q \qquad (4.19)$$

Рассмотрим пример одноканальной СМО с ожиданием.

4.2.1. Пример решения задачи

Специализированный пост диагностики представляет собой одноканальную СМО. Число стоянок для автомобилей, ожидающих проведения диагностики, ограниченно и равно 3 [(N - 1) = 3]. Если все стоянки заняты, т. е. в очереди уже находится три автомобиля, то очередной автомобиль, прибывший на диагностику, в очередь на обслуживание не становится. Поток автомобилей, прибывающих на диагностику, распределен по закону Пуассона и имеет интенсивность λ= 0,85 (автомобиля в час). Время диагностики автомобиля распределено по показательному закону и в среднем равно 1,05 час.

Требуется определить вероятностные характеристики поста диагностики, работающего в стационарном режиме.

Решение

1. Параметр потока обслуживании автомобилей:

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{об}} = \frac{1}{1{,}05} = 0{,}952$$

2. Приведенная интенсивность потока автомобилей определяется как отношение интенсивностей λ μи , т. е.

$$\psi = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0{,}85}{0{,}952} = 0{,}893$$

.

3. Вычислим финальные вероятности системы:

$$P_0 = \frac{1-\psi}{1-\psi^{N+1}} = \frac{1-0{,}893}{1-0{,}893^5} \approx 0{,}248;$$

$$P_1 = \psi \cdot P_0 = 0{,}893 \cdot 0{,}248 \approx 0{,}221;$$

$$P_2 = \psi^2 \cdot P_0 = 0{,}893^2 \cdot 0{,}248 \approx 0{,}198;$$

$$P_2 = \psi^3 \cdot P_0 = 0{,}893^3 \cdot 0{,}248 \approx 0{,}177;$$

$$P_4 = \psi^4 \cdot P_0 = 0{,}893^4 \cdot 0{,}248 \approx 0{,}158.$$

4. Вероятность отказа в обслуживании автомобиля:

$$P_{отк} = P_4 = \psi^4 \cdot P_0 \approx 0{,}158$$

.

5. Относительная пропускная способность поста диагностики:

$q = 1 - P_{отк} = 1 - 0{,}158 = 0{,}842$.

6. Абсолютная пропускная способность поста диагностики

$A = q \cdot \lambda = 0{,}842 \cdot 0{,}85 = 0{,}716$ (автомобиля в час)

7. Среднее число автомобилей, находящихся на обслуживании и в очереди (т.е. в системе массового обслуживания):

$$L_S = \frac{\psi \cdot \left[1 - (N+1) \cdot \psi^N + N \cdot \psi^{N+1}\right]}{(1-\psi) \cdot (1-\psi^{N+1})} = \frac{0{,}893 \cdot \left[1 - (4+1) \cdot 0{,}893^4 + 4 \cdot 0{,}893^5\right]}{(1-0{,}893) \cdot (1-0{,}893^5)} = 1{,}77$$

8. Среднее время пребывания автомобиля в системе:

$$W_S = \frac{L_S}{\lambda(1-P_N)} = \frac{1{,}77}{0{,}85(1-0{,}158)} \approx 2{,}473$$ часа

9. Средняя продолжительность пребывания заявки в очереди на обслуживание:

$$W_q = W_S - \frac{1}{\mu} = 2{,}473 - \frac{1}{0{,}952} = 1{,}423$$ часа.

10. Среднее число заявок в очереди (длина очереди):

$L_q = \lambda(1-P_N)W_q = 0{,}85 \cdot (1-0{,}158) \cdot 1{,}423 = 1{,}02$.

Работу рассмотренного поста диагностики можно считать удовлетворительной, так как пост диагностики не обслуживает автомобили в среднем в 15,8% случаев ($P_{отк}$ = 0,158).

4.2.2. Задание

Одноканальная СМО без отказа. Число стоянок для автомобилей, ожидающих проведения диагностики, ограниченно и равно 3 [(N - 1) = 3]. Интенсивность потока автомобилей λ= (автомобиль в час).

Средняя продолжительность обслуживания - t 〖обсл_〗. Поток автомобилей и поток обслуживании являются простейшими.

Решить и определить следующие характеристики СМО:

1. сформулировать условия (предположения и допущения), при которых случайный процесс, протекающий в системе, будет Марковским;
2. нарисовать модель системы и при необходимости ввести обозначения интенсивностей поступления и обслуживания заявок;
3. выписать систему уравнений для определения стационарных вероятностей состояний;
4. определить следующих характеристики функционирования СМО: нагрузка, загрузка, среднее число работающих приборов, коэффициент простоя системы, среднее число заявок в очереди и в системе, вероятность потери заявок, производительность системы, интенсивность потока потерянных заявок, среднее время ожидания и

пребывания заявок в системе, . относительной пропускной способности q;

5. абсолютной пропускной способности А;
6. вероятности отказа Ротк

Варианты задания определены в таблице 2.

4.3. Одноканальной СМО с ожиданием без ограничения на вместимость блока ожидания

Перейдем теперь к рассмотрению одноканальной СМО с ожиданием без ограничения на вместимость блока ожидания (т. е. $N \to \infty$) Остальные условия функционирования СМО остаются без изменений.

Стационарный режим функционирования данной СМО существует при $t \to \infty$ для любого n = 0, 1, 2, ... и когда $\lambda < \mu$. Система алгебраических уравнений, описывающих работу СМО при $t \to \infty$ для любого n = 0, 1, 2, ... имеет вид

$$\begin{cases} -\lambda \cdot P_0 + \mu \cdot P_1 = 0, & n = 0 \\ \lambda \cdot P_{n-1} + \mu \cdot P_{n+1} - (\lambda + \mu) \cdot P_n = 0, & n > 0 \end{cases} \quad (4.20)$$

Решение данной системы уравнений имеет вид

$$P_n = (1 - \psi)\psi^n, \; n = 0, 1, 2, ... \quad (4.21)$$

где $\psi = \dfrac{\lambda}{\mu} < 1$.

Характеристики одноканальной СМО с ожиданием, без ограничения на длину очереди, следующие:

– среднее число находящихся в системе клиентов (заявок) на обслуживание:

$$L_S = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P_n = \frac{\psi}{1 - \psi} \quad (4.22)$$

– средняя продолжительность пребывания клиента в системе:

$$W_S = \frac{L_S}{\lambda} = \frac{1}{[\mu \cdot (1 - \psi)]} \quad 4.23)$$

– среднее число клиентов в очереди на обслуживании:

$$L_q = L_S - \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\psi^2}{(1 - \psi)} \quad (4.24)$$

– средняя продолжительность пребывания клиента в очереди:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\psi}{[\mu \cdot (1 - \psi)]} \quad (4.25)$$

4.3.1. Пример решения задачи

В предыдущем примере речь идет о функционировании поста диагностики. Пусть рассматриваемый пост диагностики располагает неограниченным количеством площадок для стоянки прибывающих на обслуживание автомобилей, т. е. длина очереди не ограничена.

Требуется определить финальные значения следующих вероятностных характеристик:

- вероятности состояний системы (поста диагностики);
- среднее число автомобилей, находящихся в системе (на обслуживании и в очереди);
- среднюю продолжительность пребывания автомобиля в системе (на обслуживании и в очереди);
- среднее число автомобилей в очереди на обслуживании;
- среднюю продолжительность пребывания автомобиля в очереди.

Пример решения

1. Параметр потока обслуживания μ и приведенная интенсивность потока автомобилей ψ определены в предыдущем примере:

μ=0,952; ψ=0,893.

2. Вычислим предельные вероятности системы по формулам

$P_0 = 1 - \psi = 1 - 0{,}893 = 0{,}107;$

$P_1 = (1 - \psi) \cdot \psi = (1 - 0{,}893) \cdot 0{,}893 = 0{,}096;$

$P_2 = (1 - \psi) \cdot \psi^2 = (1 - 0{,}893) \cdot 0{,}893^2 = 0{,}085;$

$P_3 = (1 - \psi) \cdot \psi^3 = (1 - 0{,}893) \cdot 0{,}893^3 = 0{,}076;$

$P_4 = (1 - \psi) \cdot \psi^4 = (1 - 0{,}893) \cdot 0{,}893^4 = 0{,}068;$

$P_5 = (1 - \psi) \cdot \psi^5 = (1 - 0{,}893) \cdot 0{,}893^5 = 0{,}061.$

и т.д.

Следует отметить, что $P_0(t)$ определяет долю времени, в течение которого пост диагностики вынужденно бездействует (простаивает). В нашем примере она составляет 10,7%, так как $P_0(t)$ = 0,107.

3. Среднее число автомобилей, находящихся в системе (на обслуживании и в очереди):

$$L_S = \frac{\psi}{1 - \psi} = \frac{0{,}893}{1 - 0{,}893} = 8{,}346$$ ед.

4. Средняя продолжительность пребывания клиента в системе:

$$W_S = \frac{L_S}{\lambda} = \frac{1}{[\mu \cdot (1 - \psi)]} = \frac{1}{[0{,}952 \cdot (1 - 0{,}893)]} = 9{,}817$$ час.

5. Среднее число автомобилей в очереди на обслуживание:

$$L_q = L_S - \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\psi^2}{(1-\psi)} = \frac{0{,}893^2}{(1-0{,}893)} = 7{,}453$$
.

6. Средняя продолжительность пребывания автомобиля в очереди:

$$W_q = \frac{\psi}{[\mu \cdot (1-\psi)]} = \frac{0{,}893}{0{,}952 \cdot (1-0{,}893)} = 8{,}766$$
час.

7. Относительная пропускная способность системы:

$q = 1$

т. е. каждая заявка, пришедшая в систему, будет обслужена.

8. Абсолютная пропускная способность:

$$A = \lambda \cdot q = 0{,}85 \cdot 1 = 0{,}85$$
.

Следует отметить, что предприятие, осуществляющее диагностику автомобилей, прежде всего интересует количество клиентов, которое посетит пост диагностики при снятии ограничения на длину очереди.

Допустим, в первоначальном варианте количество мест для стоянки прибывающих автомобилей было равно трем (см. пример 4.2). Частота т возникновения ситуаций, когда прибывающий на пост диагностики автомобиль не имеет возможности присоединиться к очереди:

$$m = \lambda \cdot P_N$$
.

В нашем примере при $N = 3 + 1 = 4$ и $\psi = 0{,}893$

$$m = \lambda \cdot P_N \cdot \psi^4 = 0{,}85 \cdot 0{,}284 \cdot 0{,}8934 = 0{,}134$$
автомобиля в час

При 12-часовом режиме работы поста диагностики это эквивалентно тому, что пост диагностики в среднем за смену (день) будет терять 12 • 0,134 = 1,6 автомобиля.

Снятие ограничения на длину очереди позволяет увеличить количество обслуженных клиентов в нашем примере в среднем на 1,6 автомобиля за смену (12ч. работы) поста диагностики. Ясно, что решение относительно расширения площади для стоянки автомобилей, прибывающих на пост диагностики, должно основываться на оценке экономического ущерба, который обусловлен потерей клиентов при наличии всего трех мест для стоянки этих автомобилей.

4.3.2. Задание

Используя значения, полученные при решении задачи - одноканальная СМО без отказа, определить следующие характеристики при неограниченной длине очереди:

1. вероятности состояний системы (поста диагностики);
2. среднее число автомобилей, находящихся в системе (на обслуживании и в очереди);

3. среднюю продолжительность пребывания автомобиля в системе (на обслуживании и в очереди);
4. среднее число автомобилей в очереди на обслуживании;
5. среднюю продолжительность пребывания автомобиля в очереди.

Варианты задания определены в таблице 2.

Литература.

1. Карпов Ю Г. Имитационное моделирование систем. - СПб.: БХВ, 2006, ISBN 5-94151-8.3.4.
2. Пащенко Ф.Ф. Введение в моделирование систем. - М.: Финансы и статистика, 2006.
3. Шеннон Р.Ю. Имитационное моделирование систем – искусство и наука: пер. с англ. – М.: Мир, 1978.
4. Клейнен Дж. Статистические методы в имитационном моделировании. – М.: Статистика, 1978.
5. Лоу А.М., Кельтон В.Д. Имитационное моделирование. Классика CS. – 3-е изд. – СПб.: Питер; Киев: Издательская группа BHV, 2004.
6. Замятина О.М. Моделирование сетей. Методическое пособие. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2011

Приложение 1

Пуассоновский поток событий

Пуассоновский поток занимает центральное место среди всего многообразия потоков, так же как случайные величины с нормальным законом распределения в прикладной теории вероятностей. Это объясняется тем, что в теории потоков, так же, как и в теории случайных величин, имеется предельная теорема, согласно которой сумма большого числа независимых потоков с любым законом распределения приближается к простейшему потоку с ростом числа слагаемых потоков.

Распределение событий на малом интервале времени

По определению, интенсивностью потока λ называется предел $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\psi_1(t,\Delta t)}{\Delta t}=\lambda(t)$, так как простейший поток стационарен, то для него $\lambda(t)=\lambda=const$.

Стационарность потока и отсутствие последействия исключают зависимость вероятности появления событий на интервале Δt как от расположения этого интервала на оси времени, так и от событий ему предшествующих. Поэтому $\psi_1(t,\Delta t)=\psi_1(\Delta t)$.

Для любого промежутка времени имеем $\psi_1(\Delta t) = P_1(\Delta t) + ... + P_k(\Delta t) + ...$. При устремлении $\Delta t \to 0$ всеми членами правой части этой формулы, за исключением первого, можно пренебречь, т.к. в силу ординарности потока событий эти величины пренебрежимо малы по сравнению с $P_1(\Delta t)$:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \Psi_1(\Delta t) = P_1(\Delta t).$$

С учетом изложенного преобразуем исходное выражение для интенсивности потока:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Psi_1(t,\Delta t)}{\Delta t} = \frac{P_1(dt)}{dt} = \lambda.$$

Отсюда имеем равенство $P_1(dt) = \lambda dt$, т.е. вероятность появления одного события на малом интервале времени пропорциональна этому интервалу с коэффициентом λ. Очевидно, что $P_0(dt) + \psi_1(dt) = 1$. Следовательно, , $P_0(dt) + P_1(dt) = 1$, откуда имеем $P_0(dt) = 1 - \lambda dt$ - вероятность непоявления ни одного события на малом интервале времени dt.

Распределение событий в пуассоновском потоке

Найдем выражение $P_n(\tau + d\tau)$, где $n > 0$ - вероятность того, что на интервале $\tau + d\tau$ произойдет n событий. Это событие произойдет в одном из двух взаимоисключающих случаях:

1. n событий произошло на интервале τ и 0 событий - в интервале $d\tau$, следующем непосредственно за τ. Так как последействие отсутствует, то вероятность случая 1 равна $P_n(\tau) \cdot (1 - \lambda d\tau)$;
2. $n-1$ событие произошло в интервале τ и 1 событие – в интервале $d\tau$. Соответствующая вероятность $P_{n-1}(\tau) \cdot \lambda d\tau$.

По теореме сложения вероятностей несовместных событий имеем вероятность наступления ситуации 1 или 2:

$$P_n(\tau + d\tau) = P_n(\tau)(1 - \lambda d\tau) + P_{n-1}(\tau)\lambda d\tau.$$

Откуда $\dfrac{P_n(\tau + d\tau) - P_n(\tau)}{d\tau} = -P_n(\tau)\lambda + P_{n-1}(\tau)\lambda$. Устремив $d\tau \to 0$, получим

$$\frac{dP_n(\tau)}{d\tau} = -\lambda\left[P_n(\tau) - P_{n-1}(\tau)\right].$$

Определим аналогичное соотношение для $n = 0$. Чтобы событие на интервале $\tau + d\tau$ не наступило ни одного раза, необходимо и достаточно, чтобы оно наступило *0* раз в интервале τ и *0* раз - в $d\tau$. Вероятность этого события равна $P_n(\tau + d\tau) = P_0(\tau)(1 - \lambda d\tau)$. Откуда аналогично получим $P_0'(\tau) = -\lambda P_0(\tau)$.

Таким образом, пуассоновский поток событий описывается системой линейных дифференциальных уравнений

$$P_0'(\tau) = -\lambda P_0(\tau),$$

$P_n'(\tau) = -\lambda P_n(\tau) + \lambda P_{n-1}(\tau)$

с очевидными начальными условиями $P_0(0) = 1;\ P_n(0) = 0;\ n > 0$.

Из первого уравнения получаем $P_0(\tau) = ce^{-\lambda\tau}$, из начальных условий имеем $P_0(0) = ce^{-\lambda 0} = 1$, откуда *c = 1*. Окончательно $P_0(\tau) = e^{-\lambda\tau}$. Таким образом, для пуассоновского потока вероятность $P_0(\tau)$ отсутствия событий на любом интервале длиной τ определяется экспоненциальной зависимостью. Для решения полной системы уравнений используем преобразование Лапласа. Имеем $P_0(p)\cdot p = -\lambda P_0(p) + P_0(0)$,

$P_n(p)\cdot p = -\lambda P_n(p) + \lambda P_{n-1}(p)$,

откуда $P_0(p) = \dfrac{1}{p+\lambda}$; $P_n(p) = \dfrac{1}{p+\lambda}P_{n-1}(p)$ и далее $P_1(p) = \dfrac{\lambda}{(p+\lambda)^2}$; $P_2(p) = \dfrac{\lambda^2}{(p+\lambda)^3}$; … $P_n(p) = \dfrac{\lambda^n}{(p+\lambda)^{n+1}}$.

Взяв обратное преобразование Лапласа, с помощью таблиц получим $P_n(\tau) = \dfrac{(\lambda\tau)^n e^{-\lambda\tau}}{n!}$, т.е. распределение Пуассона. Таким образом, простейший поток подчиняется закону распределения Пуассона, для которого математическое ожидание и дисперсия соответственно равны $\mu = \sigma^2 = \lambda\tau$.

Распределение интервалов между событиями

Найдем закон распределения интервалов времени между событиями для простейшего потока. Рассмотрим случайную величину T - промежуток времени между двумя произвольными соседними событиями в простейшем потоке. Требуется найти функцию распределения $F(t) = P\{T \le t\}$.

Рассмотрим противоположное событие $P\{T > t\} = 1 - F(t)$. Это вероятность того, что, начиная с некоторого момента t_0 появления события, за время t не появится больше ни одного события. Так как поток без последействия, то тот факт, что событие появилось в момент t_0, не должен оказать никакого влияния на поведение потока в дальнейшем. Поэтому вероятность $P\{T > t\} = P_0(t) = e^{-\lambda t}$,

откуда $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, и плотность распределения вероятности $W(t) = \dfrac{dF}{dt} = \lambda e^{-\lambda t}$.

Такой закон распределения называется показательны*м*(экспоненциальным) с параметромλ. Математическое ожидание m_t и дисперсия D_t этого процесса:

$$m_t = \int_0^\infty tW(t)dt = \lambda\int_0^\infty te^{-\lambda t}dt = \frac{1}{\lambda};$$

$$D_t = \int_0^\infty t^2 W(t)dt - \frac{1}{\lambda^2} = \int_0^\infty \lambda t^2 e^{-\lambda t}dt - \frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Показательный закон обладает свойством: если промежуток времени, распределенный по показательному закону, уже длился некоторое время τ, то это никак не влияет на закон распределения оставшейся части промежутка $t - \tau$ (он будет таким же, как закон распределения промежутка t).

. Пусть $P_a(t)$ - вероятность того, что обслуживание, продолжавшееся a (с), еще продлится не менее t (с): т.е. на интервале времени a+t не произойдет ни одного события. При показательном законе распределения времени обслуживания $P_0(t) = e^{-\lambda t}$. По теореме о произведении вероятностей событий $P_0(t+a) = P_0(a) \cdot P_a(t)$. При показательном законе $P_0(t+a) = e^{-\lambda(t+a)} = e^{-\lambda t} \cdot e^{-\lambda a}$; $P_0(a) = e^{-\lambda a}$ и, следовательно, $P_a(t) = e^{-\lambda t}$, т.е. при показательном законе времени обслуживания закон распределения оставшейся части времени обслуживания не зависит от того, сколько времени уже длилось обслуживание. Показательный закон единственный, для которого справедливо это свойство.

Рассмотренное свойство, представляет другую формулировку свойства отсутствия последействия.

Рассмотрим потоки событий, которые моделируют реальные процессы

Пусть $\lambda > 0$ — некоторая постоянная; ξ_n, $n \geq 1$, — последовательность независимых экспоненциально распределенных случайных величин с параметром λ.

$P\{\xi_t > t\} = \exp(-\lambda t), t > 0$,

Тогда множество моментов времени $\{t_n, n \geqslant 1\}$, где $t_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n, n \geqslant 1$, называется простейшим потоком однородных событий.

Из свойств экспоненциального распределения следует, что:

1. *время* от момента $t > 0$ до следующего события потока имеет экспоненциальное распределение с параметром λ, независимо от числа и моментов событий потока в интервале $(0, t)$;

2. *вероятность* того, что в интервале $(t, t+h)$ происходит событие потока, равна $\lambda h + o(h), h \to 0$;

3. *вероятность* двух или более числа событий в интервале $(t, t+h)$ равна $o(h), h \to 0$.

Постоянная λ *называется параметром простейшего потока.*

Обозначим через N_t число событий простейшего потока интенсивности λ, наступивших в интервале $(T, T+t)$. Например, N_t число звонков, поступивших за время t. Тогда N_t имеет распределение Пуассона с параметром λt

$P(N_t=k)=\exp(-\lambda t)(\lambda t)^k/k!$
$k=0,1,2,\ldots$ Среднее число звонков равно: $EN_t=\lambda t$
Итак, среднее число звонков для простейшего потока пропорционально интенсивности и длине интервала.

Простой групповой поток

События могут наступать как поодиночке, так и группами.

Пусть $t_1<t_2<\ldots<t_n<\ldots$ — моменты событий простейшего потока с параметром $\lambda>0$;

$\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n,\ldots$ — последовательность независимых неотрицательных целочисленных случайных величин с распределением $f_k=P(\eta_k=k),n\geqslant1,k\geqslant1(\sum_{k=1}^{\infty}f_k=1)$.

Последовательности $\{\eta_n\}$ и $\{t_n\}$ считаем взаимно независимыми.

Положим, что в момент $\{t_n\}$, происходит $\{\eta_n\}$ событий некоторого случайного потока. Такой поток назовем *простым гру*пповым (неординарным) *потоком однородных событий*.
Таким образом, простой групповой поток определяется параметром λ и набором вероятностей $\{f_k\}$.

Простой поток разнотипных событий

Пусть $t_1<t_2<\ldots<t_n<\ldots$ — моменты событий простейшего потока с параметром $\lambda>0$;

$\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n,\ldots$ — независимые случайные величины со значением k из некоторого конечного или счетного множества $\{k\}$.

Считается что последовательности $\{t_n\}$ и $\{\sigma_n\}$ являются независимыми и $P(\sigma_n=k)=p_k,\sum_k p_k=1$. Если $\sigma_n=k$, то в момент $\{t_n\}$ наступает событие типа k .
Если события потока интерпретируются как поступающие в систему требования, то в этом случае говорят, что поступает требование типа k .
Так определяется *простой поток разнотипных событий* (*требований*).