ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ» (МГТУ ГА)

Кафедра вычислительных машин, комплексов, систем и сетей

Е.В. Юркевич

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Учебно-методическое пособие
по выполнению практических занятий

для студентов
направления 09.03.01
очной формы обучения

Москва
ИД Академии Жуковского
2018

УДК 681.5(07)
ББК 518
Ю74

Рецензент:

Вайнейкис Л.А. – канд. техн. наук, доц. каф.

Юркевич Е.В.

Ю74 Методы оптимизации [Текст] : учебно-методическое пособие по выполнению практических занятий / Е.В. Юркевич. – М. : ИД Академии Жуковского, 2018. – 32 с.

Данное учебно-методическое пособие издается в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Методы оптимизации» по учебному плану для студентов направления 09.03.01 очной формы обучения.

Рассмотрено и одобрено на заседании кафедры 27.03.2018 г. и методического совета 27.03.2018 г.

УДК 681.5(07)
ББК 518

В авторской редакции

Подписано в печать 03.05.2018 г.
Формат 60x84/16 Печ. л. 2 Усл. печ. л. 1,86
Заказ № 297/0403-УМП24 Тираж 30 экз.

Московский государственный технический университет ГА
125993, Москва, Кронштадтский бульвар, д. 20

Издательский дом Академии имени Н. Е. Жуковского
125167, Москва, 8-го Марта 4-я ул., д. 6А
Тел.: (495) 973-45-68
E-mail: zakaz@itsbook.ru

С О Д Е Р Ж А Н И Е

1. ОРГАНИЗАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

1.1. Цель и задачи выполнения практических занятий

Настоящее учебно-методическое пособие предназначено для студентов направления подготовки Информатика и вычислительная техника (бакалавриат), выполняющих практические работы по дисциплине «Методы оптимизации». В пособие включены материалы по практическим занятиям № 1-5.

Целью проведения практических занятий является закрепление основных теоретических положений, изложенных в лекциях.

Практическая работа состоит из следующих этапов:

1) домашняя подготовка;
2) выполнение работы в соответствии с заданием;

В процессе домашней подготовки студент:

- изучает лекционный материал, материалы по темам данного пособия и дополнительной литературы,
- знакомится с заданием по заданной теме.

В процессе выполнения практического занятия студент последовательно выполняет пункты задания. По завершению – демонстрирует преподавателю результаты.

1.2. Основные вопросы, подлежащие изучению

1. Базовые приемы анализа сложных объектов;
2. Парадигма исследования, управление и регулирование, система управления;
3. Стохастические и детерминированные модели. Понятие о Марковских процессах
4. Алгоритм поиска минимума одномерных унимодальных функций.
5. Методы оптимизации. Критерий Сильвестра

2. СОДЕРЖАНИЕ ЗАНЯТИЙ

В 6-м семестре учебным планом предусмотрено 24 практических занятия продолжительностью 2 академических часа каждое. В данном пособии приведен материал для пяти занятий.

2.1. Практическое занятие № 1. Нахождение областей допустимых значений вектора управляемых параметров (2 часа)

2.1.1 Цель занятия

- знакомство с основными положениями общей теории систем.

2.1.2 Задачи по теме

- закрепить знания по разделам:
  - понятие о системе,
  - свойства открытых и закрытых систем,
  - достоинства и недостатки централизованных и децентрализованных систем,
  - активные системы,
  - черный ящик,
  - большая система,
  - развивающаяся система, аттрактор;
- иметь понимание о базовых приемах анализа сложных объектов.

2.1.3 Основные теоретические сведения

Для понятия «система» до сих пор не существует общепринятого определения, обладающего достаточной четкостью и наглядностью. Предлагаемый нами вариант также не претендует на окончательность. Поэтому, оставив в стороне критический обзор встречающихся в литературе определений, а также полемику, связанную с этой задачей, определим, что системщик разделяет рассматриваемый объект на части и изучает алгоритмы и закономерности, определяющие их связи между собой.

Итак, рассматривается некоторое множество объектов $M = \{m_i,\ i = 1,2,..s\}$, где m может быть техническим блоком, технологическим этапом, подразделением фирмы, человеком, группой людей и т. д.). Если объект m_i в данном рассмотрении считается неделимым, то он принимается как _элемент_. В другом случае m_i возможно рассматривать как совокупность подобъектов.

Пусть каждый элемент m_k, при $k = 1,2,\ldots K$, характеризуется конечным набором параметров $P = \{p_j,\ j = 1,2,\ldots n\}$, где значение n ограничено целью создателя системы или наблюдателя. Таким образом, m_i описывается с помощью вектора $P_i = \{p_{kj},\ k = 1\text{-}s,\ j = 1\text{-}n\}$, где p_{kj} является k-м значением его j-й координаты. Естественно, для достижения цели, поставленной создателем системы при е синтезе (наблюдателем при её анализе), значение координаты каждого вектора P_k должны соотноситься некоторым образом со значением этой координаты для $P_{(k+1)}$-го вектора.

Определение: *Множество элементов M считается системой, если выполняются условия:*

- определена цель объединения рассматриваемых элементов. Чем строже определена цель, тем определенней возможно описать взаимодействие между элементами системы;

- хотя бы для одной характеристики p_i соотношения пар значений $\langle p_{kj},\ p_{k+1j}\rangle$ подчиняются алгоритму I, заданному создателем системы, при этом I обладает свойствами, известными наблюдателю за ее работой;

- объединение объектов в соответствии с I обусловило появление системообразующих свойств, позволяющих достичь цель построения системы.

Предметом исследований в рамках теории систем является изучение:

- видов и типов систем (например, открытые и закрытые системы, централизованные и децентрализованные системы и др.);
- принципов и закономерностей существования систем (например, принцип слабого элемента, наличия отрицательно обратной связи и др.);

- процессов функционирования и развития систем (например, равновесие, эволюция, адаптация, сверхмедленные процессы, переходные процессы и др.).

Практически, для построения системы требуется изучение механизмов:

- формирования внутренней организации систем, определяющей условия образования системообразующих свойств системы, с учетом её морфологии и информационных аспектов взаимодействия элементов;

- проявления системообразующих свойств при наличии алгоритма *I*. Часто эта задача является центральной в рассмотрении совокупности объектов как системы;

- характер реакций элементов системы на внешние воздействия.

При обобщающем рассмотрении каждая система может быть представлена как элемент системы более высокого порядка и, соответственно, каждый элемент системы (рассматриваемый в ней как неделимый) является в свою очередь системой более низкого порядка. Из этого положения вытекают два важных следствия:

Следствие 1. *При синтезе системы цель ее построения может быть определена лишь в результате её рассмотрения как элемента системы более высокого порядка (уже существующей и имеющей свою цель).*

Следствие 2. *При анализе работы системы функции ее элементов могут быть определены только после анализа целей использования каждого из этих элементов в качестве систем более низкого порядка.*

По функциональным возможностям системы различаются как *открытые и закрытые*. В состав открытых можно вводить новые элементы, не изменяя цель их создания. При фиксированной цели, закрытые не предполагают возможности введения новых членов. Так, в компьютерную сеть можно ввести новое программно-техническое средство, не изменяя цели её построения. Протокол обмена информацией определяется международным стандартом ISO/OSI, т. е. *International Standard Organization/Open System Interconnection* – в переводе означает, что этот стандарт принят Международной Организацией по Стандартизации и определяет нормы Взаимодействия Открытых Систем.

Закрытые и открытые системы имеют свою специфику в обеспечении защиты передаваемой информации от не санкционированного доступа.

В архитектуре систем, выделяют *централизованную и децентрализованную***.** Централизованные (иерархические) системы отличаются тем, что информация от элемента к элементу передается через центр. Достоинством такой архитектуры является определенность проведения технической политики, но ее недостатком является сложность передачи информации между элементами. Децентрализованные системы характеризуются прямыми информационными связями. Достоинством такой архитектуры является простота передачи информации между взаимосвязанными элементами «напрямую», но главным ее недостатком – неопределенность проведения технической и экономической политики.

Система называется активной, если она включает в себя хотя бы один активный элемент. Активным называется элемент, имеющий собственную цель деятельности в составе системы. Эта цель может отличаться от цели построения всей системы в целом. Принцип открытого управления, предложенный профессором В.Н. Бурковым, определяет задачу поиска оптимального плана работы активных элементов не на всем множестве возможных планов, а только на множестве планов, выгодных для элементов системы. Такие планы названы согласованными, а задача – задачей оптимального согласованного планирования. Три важнейших принципа работы в активных системах:

1. Принцип непротиворечивости целей. Цель лица, принимающего решения (ЛПР), не должна противоречить цели подчиненного. В противном случае руководитель рискует получить от него дезинформацию или (при самых благоприятных для ЛПР условиях) – некачественное выполнение распоряжения.

2. Принцип согласования интересов. Касается ситуации, когда требуется выполнение задания активным элементом в составе системы. Даже если цели ЛПР и подчиненного близки и последний готов выполнить задание точно и в срок, нельзя требовать, чтобы он выполнял работу, противоречащую интересам других элементов данной системы. Добиваясь выполнения своих распоряжений ЛПР, желая иметь подчиненных в виде единого коллектива (читай – системы), не должен сталкивать между собой интересы отдельных членов этого коллектива.

Под интересом понимается отображение цели активного элемента на ресурсы, желаемые им для её достижения. Например, при одной и той же цели выполнения работы один сотрудник имеет интерес в моральном удовлетворении, а другому требуется материальное поощрение. Следовательно, для достижения единой цели поведение сотрудников будет различно.

3. Принцип реализуемости воздействий. Принцип определяет наличие кредита доверия как руководителя к подчиненным, так и подчиненных к руководителю. Под кредитом доверия понимается допустимое количество ошибок, превышение которого грозит срывом достижения цели и даже развалом системы. Кредит доверия определяется большим количеством психологических, организационных и статусных факторов. Следовательно, ЛПР должен давать распоряжения только те, которые подчиненные могут выполнить.

Термин «*чёрный ящик*» характеризует системы, сложность построения которых существенно превосходит сложность решаемой задачи, или механизм работы, которых неважен в рамках её решения. «Метод чёрного ящика» – метод исследования таких систем, когда вместо свойств и взаимосвязей составных частей системы, изучается реакция системы, как целого, на изменяющиеся входные воздействия.

В решении практических задач важной характеристикой системы является введение понятия *большая (сложная) система*. Данный термин введен не как противопоставление «не большой» системе, а как характеристика её описания. *Большая система – это объект, характеризуемый функциями, выполняемыми его элементами, и алгоритмами взаимосвязи этих функций.*

Система называется развивающейся, если её характеристики изменяются в процессе функционирования. Развитие может происходить как в сторону усложнения системы, так и в сторону её упрощения.

С разнообразием развивающихся систем связано понятие *аттрактора, т. е. конечного состояния в естественном развитии системы*. Можно полагать, что во всех случаях, каково бы ни было первоначальное состояние системы, ее развитие при заданных граничных условиях, может быть описано траекторией, ведущей из точки начального состояния к аттрактору. В этой связи *важным критерием качества системы является регулярность (вероятность) достижения аттрактора, в случае организационной системы – достижения цели (желательно, чтобы она совпадала с аттрактором).* В связи с различиями в целеполагании элементов организационных систем было введено понятие *«странного аттрактора», т. е. конечной точки развития отдельно взятого элемента, находящегося в составе системы*. Решение задач построения системы в этом случае предполагает формирование целей элементов, определяющих согласование странных аттракторов.

2.1.4 Задания для самостоятельного решения

Получите у преподавателя вариант задания для сообщения на практическом занятии:

Задание 1-1. *Прокомментируйте условия применения предлагаемого определения системы:*

- *для рассмотрения механической конструкции;*
- *для рассмотрения программного обеспечения технологического процесса;*
- *для рассмотрения программно-технического комплекса;*
- *для рассмотрения человеко-машинной системы;*
- *для рассмотрения коллектива (объединения специалистов);*
- *для рассмотрения корпорации (объединения компаний).*

Задание 1-2. *Назовите все уровни модели ISO/OSI и обоснуйте наличие каждого из этих уровней согласно первому и второму следствиям теории систем.*

Задание 1-3. *Предложите схему построения человеко-машинной системы, масимизирующей достоинства и минимизирующей недостатки централизованной и децентрализованной архитектуры. Например, в системе менеджмента качества, согласно системе международных стандартов ISO-9000.*

Задание 1-4. *Дайте пример возможности введения согласованной организации учебного процесса в университете.*

Задание 1-5. *Дайте пример использования метода черного ящика в реализации новой технологии на производстве. Например, при введении интернета вещей (промышленного интернета).*

Задание 1-6. *Дайте пример описания какого-либо технологического процесса (от системы сборки программно-технического устройства до системы построения самолета). Например, в качестве инварианта, позволяющего рассматривать разнообразие форм влияния внешних и/или внутренних факторов на выполнение функций, входящих в рассматриваемый технологический процесс, возможно использовать характеристики передаваемой информации.*

Задание 1-7. *Дайте пример нахождения аттрактора в последовательности натурального ряда чисел. Предложите возможности развития в построении систем передачи данных, в обеспечении защиты систем коммуникации от несанкционированного доступа и предложите механизм нахождения аттрактора такого развития. Расскажите об особенностях странных аттракторов.*

2.1.5 Список рекомендуемой литературы

1. Новиков Д.А. Кибернетика: Навигатор. История кибернетики, современное состояние, перспективы развития. – М.: ЛЕНАНД. 2016 -160с. (Умное управление)
2. Берталанфи Л. фон. История и статус общей теории систем. В кн.: Системные исследования. Методологические проблемы. Ежегодник.– М.: «Наука», 1973, С. 20-37.
3. Богданов А. А. Тектология: Всеобщая организационная наука. Международный институт Александра Богданова. Редколлегия В. В. Попков (отв. ред.) и др. Сост., предисловие и комментарии Г. Д. Гловели. Послесловие В. В. Попкова. М.: «Финансы», 2003.
4. Эшби У. Р. Введение в кибернетику: пер. с англ. / под. ред. В. А. Успенского. Предисл. А. Н. Колмогорова. Изд. 2-е, стереотипное. – М.: «КомКнига», 2005.– 432с.
5. Юркевич Е.В. Введение в теорию информационных систем/ 2-е изд. –М.: ООО «Группа Издательский дом «Технологии», 2007 – 272 с.

6. Месарович М. Общая теория систем: математические основы / М.Месарович, Я.Такахара; Пер. с англ. Э. Л. Наппельбаума; под ред. С.В.Емельянова. — М.: «Мир», 1978.
7. Блауберг И. В., Юдин Э. Г. Становление и сущность системного подхода. М., 1973.
8. Бурков В.Н., Ириков В.А. Модели и методы управления организационными системами М., Наука 1994.
9. Бурков В.Н., Новиков Д.А. Введение в теорию активных систем. М., ИПУ РАН, 1996.
10. И. Пригожин, И Стенгерс «Время, хаос, квант» Эдиториал УРСС, М., 2000.

2.2 Практическое занятие № 2. Свойства выпуклых критериев оптимальности (2 часа)

2.2.1 Цель занятия

- знакомство с основными понятиями об управлении как о механизме достижения цели построения системы.

2.2.2 Задачи по теме

- закрепить знания по разделам:
  - парадигма исследования, управление и регулирование,
  - система управления,
  - принцип отрицательной обратной связи,
  - устойчивость системы, критерий Ляпунова, величина ε;
- изучить базовые приемы анализа устойчивости работы системы.

2.2.3 Основные теоретические сведения

Управление является важнейшей категорией, являющейся основой для решения кибернетических проблем. *Под управлением понимается совокупность целенаправленных функциональных взаимодействий элементов системы.* Целью управления является достижение парадигмы.

Парадигма (греч. paradeigma – пример, образец). *В рассмотрении данного курса под парадигмой понимается ключевая идея, лежащая в основе построения системы, а также то, какая должна быть система или как она должна работать (формироваться) по мнению её создателя.* В постановке проблем оптимизации состава системы и/или алгоритма её работы различают:

- субъектно – ориентированную парадигму, описывающую характеристики системы или её элементов, значения которых требуется достигнуть при оптимизации состава системы или её элементов;

- объектно – ориентированная парадигма, описывающая характеристики алгоритма построения (работы) системы или её элементов, значения которых требуется достигнуть при оптимизации этого алгоритма.

Технология управления включает в себя приемы, порядок, регламент выполнения процесса управления. Технология управления состоит из информационных, вычислительных, организационных и логических операций, выполняемых элементами системы по определенному алгоритму экспертно или с использованием программно-технических средств. Различают:

линейную технологию управления, управление по отклонениям, управление по результатам, управление по целям, управление по ситуации, поисковое управление.

Частным случаем управления является регулирование. Его цель заключается в снятии локальных отклонений в параметрах технологического процесса, т. е. в поддержании характеристик одного или нескольких выходов объекта управления на уровне, определенном функциональными требованиями.

Регулятор – преобразует ошибку регулирования $\Delta(t)$ в управляющее воздействие, поступающее на объект управления. Задающее воздействие $g(t)$ – определяет требуемый закон регулирования выходной величины. Ошибка регулирования $\Delta(t) = g(t) - y(t)$, определяется как разность между требуемым значением регулируемой величины и текущим её значением. Если $\Delta(t)$ отлична от нуля, то такой сигнал поступает на вход регулятора, который формирует регулирующее воздействие, чтобы в итоге $\Delta(t) = 0$.

Возмущающее воздействие $f(t)$ – это процесс влияния на характеристики управляемого элемента, являющийся помехой управлению.

Определение: *Система, состоящая из управляющего элемента, управляемого элемента и элементов, определяющих связи между ними, является системой управления. Совокупность управляющих воздействий, распределенных во времени, соответствующих какой-либо информации о состоянии объекта управления и внешней среды, называется управляющим решением.*

Классификация систем управления:

- по структурному решению: одномерные – с одним входом и одним выходом, и многомерные – с несколькими входами и выходами;

- по характеру управления: системы управления, системы регулирования;

- по характеру действия: системы непрерывного действия, системы дискретного действия;

- по степени использования информации о состоянии объекта управления: Управление с обратной связью (ОС) и Управление без ОС;

- по степени использования информации о параметрах и структуре объекта управления: адаптивный, неадаптивный, поисковый, безпоисковый, с идентификацией, с переменной структурой;

- по степени преобразования координат в системе управления: детерминированный, стохастический (со случайными воздействиями);

- по виду математического представления координат: линейные, нелинейные (релейные, логические и др.);

- по виду управляющих воздействий: аналоговые, дискретные (прерывные, импульсные, цифровые);

- по степени участия человека: ручные, автоматические, автоматизированные (человек в управлении);

- по закону изменения выходной переменной: стабилизирующая (значение, предписанное выходной переменной, является неизменным); программная (выходная переменная изменяется по определённой, заранее заданной программе); следящая (предписанное значение выходной переменной зависит от значения неизвестной заранее переменной на входе автоматической системы);

- по количеству управляемых и регулируемых переменных: одномерные, многомерные;

- по степени самонастройки, адаптации, оптимизации и интеллектуальности (экстремальные, самонастраивающиеся, интеллектуальные);

- по воздействию чувствительного (измерительного) элемента на регулирующий орган (системы прямого управления, системы косвенного управления).

Если имеются только управляющий и управляемый элементы, то принято говорить, что управление ведется по каналу «прямой связи». Возможности таких схем весьма ограничены. Они отличаются низкой надежностью, так как требуют расширенного знания характеристик управляющего и управляемого элементов, но в реальной жизни (особенно в организационных системах!) этого достичь практически невозможно.

Если в системе управления имеется канал информационной связи, позволяющий выходной сигнал передавать на ее вход, то принято говорить, что для обеспечения устойчивости работы системы управления используется принцип отрицательной обратной связи (ОС), т. е. связи, при которой на вход регулятора подаётся действительное значение выходной переменной с обратным знаком. Блок-схему, определяющую информационные связи между «Управляющим» и «Управляемым» элементами, можно представить в виде рис. 2.1:

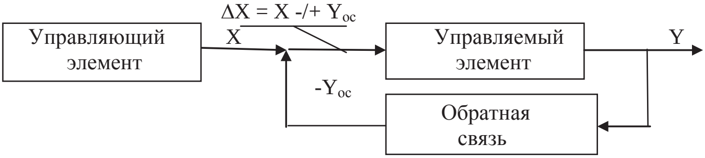


Рисунок 2.1- Информационные связи

Введение ОС образует в системе управления замкнутый контур. В результате управляющим становится сигнал рассогласования между задаваемым значением регулируемой переменной и сигналом обратной связи (ΔX = X -/+ Yoc).

Принято различать «отрицательную» и «положительную» обратную связь. Отрицательная обратная связь обеспечивает устойчивость работы системы, а положительная её развитие.

Системы, которые позволяют проводить обучение, адаптацию или настройку контуров управления за счет запоминания и анализа информации о поведении объекта при внутренних и/или внешних воздействиях на его элементы называются интеллектуальными системами управления (ИСУ). Особенностью интеллектуальных систем является наличие базы знаний, блока логического вывода, интерпретатора (блока объяснений).

В случае адаптивных (самонастраивающихся) систем отрицательная обратная связь является блоком, в результате работы которого система запоминает коррекции, производимые при определенных внешних условиях. Тем самым с помощью элементов искусственного интеллекта она обеспечивает возможность повышения организации системы.

Устойчивость – это характеристика работы системы на заданном промежутке времени. В терминах данного курса примем, что *устойчивость – это свойство системы возвращаться в заданный или близкий к нему установившийся режим после какого-либо возмущения.* В устойчивой системе переходные процессы являются затухающими.

В устойчивой системе возмущение параметров её работы успокаивается ($Y = f(t) \to 0$ при $t \to \infty$, т. е. алгоритм сходящийся), и она возвращается к изначально заданной программе. Если система успокаивается, но режим ее работы меняется, считается, что система квазиустойчива, т. е. $Y = f(t) \to const.$ при $t \to \infty$. Если реакция системы такова, что функция $Y = f(t)$ при $t \to \infty$ изменяется неограниченно (алгоритм расходящийся), то система неустойчива.

Исходя из практических условий, введем величину ε, определяющую допустимый предел значений ΔX. Будем считать систему устойчивой в смысле Ляпунова, если $\Delta X \le \varepsilon$ для каждого t. В системах управления любой направленности (технические, организационные, биологические) величина ε определяется искусством принятия решений. Поясним сказанное на рис. 2.2.

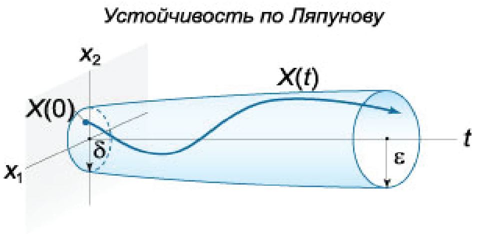


Рисунок 2.2.

Если зависимость *X(t)* поместить в «трубу» радиуса ε и она не выйдет за пределы этой «трубы», то нашу систему можно считать устойчивой.

Таким образом, пусть дано дифференциальное уравнение $\dot{x} = f(x,t)$ где x принадлежит n-мерному нормированному пространству E. Решение $x_0(\bullet): t_0 + R^+ \to E$ этого уравнения назовем устойчивым по Ляпунову, если для всякого $E>0$ найдется δ>0 такое, что для всякого $x \in E$, удовлетворяющего неравенству $|x - x_0(t_0)| < \delta$, решение $x(\bullet)$ задачи Коши $\dot{x} = f(x,t), x(t_0) = x$ единственно, определено на $t_0 + R^+$ и при всяком $t \in t_0 + R^+$ удовлетворяет неравенству $|x(t) - x_0(t)| < \varepsilon$.

Если, сверх того, найдется $\delta_0 > 0$ такое, что для всякого решения $x(\bullet)$ уравнения $\dot{x} = f(x,t)$, начальное значение которого удовлетворяет неравенству $|x(t_0) - x_0(t_0)| < \delta_0$ имеет место равенство $\lim\limits_{t\to+\infty} |x(t) - x_0(t)| = 0$ (соответственно неравенство $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln |x(t) - x_0(t)| < 0$ здесь и далее будем полагать $ln0=-\infty$), то решение $x_0(\bullet)$ называется асимптотически (соответственно - экспоненциально) устойчивым. Решение уравнения $\dot{x} = f(x,t)$, где $x \in R^n$ или $x \in C^n$ называется устойчивым по Ляпунову (асимптотически, экспоненциально устойчивым), если оно становится таковым в результате наделения пространства R^n (или C^n) некоторой нормой. Это свойство решения от выбора нормы не зависит.

Если решение φ(t) системы дифференциальных уравнений не только устойчиво в смысле Ляпунова, но и удовлетворяет соотношению $\lim\limits_{e\to\infty} |x(t) - \varphi(t)| = 0$ при условии, $|x(0) - \varphi(0)| < \delta$, то говорят, что решение φ(t) является асимптотически устойчивым. В этом случае все решения, достаточно близкие к φ(0) в начальный момент времени, постепенно сходятся к φ(t) при увеличении t... Схематически это показано на рис. 2.3.

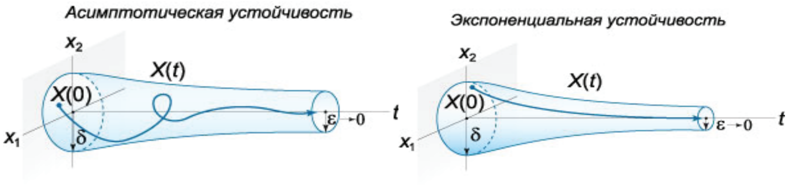


Рисунок 2.3

Если фазовые портреты систем содержат одинаковые особые точки и геометрически похожие траектории, то такие системы называются структурно устойчивыми. Для строгого определения этого свойства требуется, чтобы существовала возможность взаимно-однозначного и непрерывного отображения, которое преобразует семейство траекторий первой системы в семейство траекторий второй системы с сохранением направления движения.

2.2.4 Задания для самостоятельного решения

Получите у преподавателя вариант задания для сообщения на практическом занятии:

Задание 2-1. *Предложите субъектно и объектно ориентированную парадигму (на частном примере) для построения и совершенствования: механической системы; программно-технической системы; человеко-машинной системы. Какие на Ваш взгляд алгебраические операции требуется использовать при построении и совершенствовании рассматриваемых систем.*

Задание 2-2а). *Сформулируйте в терминах «ε – δ» определение решения, не являющегося устойчивым по Ляпунову (неустойчивого решения).*

Задание 2-2б). *Приведите пример асимптотически, но не экспоненциально устойчивого решения дифференциального уравнения.*

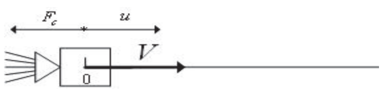
Задание 2-2в). *Приведите пример устойчивого по Ляпунову, но не асимптотически устойчивого решения дифференциального уравнения.*

Задание 2-3. *Задача оптимального управления. Самолет массой m, находящееся в начальный момент времени $t_0 = 0$ в состоянии покоя в точке с координатой $x = 0$, может перемещаться вдоль оси Ox под действием силы тяги двигателя, которым оно снабжено (рисунок 2.4). Максимальная по величине сила тяги u, которую может развить двигатель, равна a.*

При движении самолета на него действует сила сопротивления среды F_c, пропорциональная скорости движения тела V, т. е. $F_c = -kV$, где k – заданный коэффициент пропорциональности.

Расход горючего при работе двигателя пропорционален квадрату развиваемой им силы тяги, т. е. равен γu^2, где γ – заданная константа.

Необходимо управлять работой двигателя на промежутке времени [0, T] таким образом, чтобы при минимальном расходе горючего закон движения самолета (т. е. зависимость)x(t) как можно меньше отличался от требуемого закона движения φ(t).



Формализуйте поставленную задачу в виде задачи оптимального управления динамической системой.

2.2.5 Список рекомендуемой литературы

1. Шишмарев В.Ю. Основы автоматического управления: учеб. пособие для студентов высш. учебных заведений / В.Ю. Шишмарев. – М.: Издательский центр «Академия», 2008 г.–352 с.
2. Юркевич Е.В. Введение в теорию информационных систем/ 2-е изд. – М.: ООО «Группа Издательский дом «Технологии», 2007 – 272 с.
3. Новиков Д.А., Чхартитишвили А.Г. Рефлексия и управление: математические модели. – М.: Изд. Физ.-мат. Лит. 2013.-412с.
4. Теслинов А.Г. Развитие систем управления: методология и коцептуальные структуры. – М.: «Глобус», 1998. – 229 с.
5. Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. – Москва: Мир, 1980. – С. 7-8. – 300 с.

2.3 Практическое занятие № 3. Задача выпуклого программирования (2 часа)

2.3.1 Цель занятия

- знакомство с понятием об информации к об инварианте описания взаимосвязей между элементами системы и о математической теории связи между этими элементами.

2.3.2 Задачи по теме

- закрепление знаний по разделам:
  - понятие об энтропии и информации;
  - информационная система;
  - оценка ценности сообщений;
  - прагматический, семантический и синтактический аспекты восприятия информации;
  - основная теорема Шеннона о передаче информации без искажений в канале без шума. Закон необходимого разнообразия;
- изучение приемов анализа устойчивости работы системы.

2.3.3 Основные теоретические сведения

Случайные события принято описывать с использованием понятия *«вероятность»*. Для практики важна численная оценка такой неопределенности. В простейшем случае, опыт имеет n равновероятных исходов. Очевидно, что неопределенность каждого из них зависит от n, т. е. *мера неопределенности является функцией числа исходов (f(n))*:

Для определения явного вида функции $f(n)$ рассмотрим независимые опыты α и β с количествами равновероятных исходов, соответственно n_α, n_β. В силу независимости, α и β не могут повлиять друг на друга. Следовательно, мера суммарной неопределенности воздействия α на неопределенность β должна быть равна сумме мер неопределенности каждого из опытов, т. е. мера неопределенности аддитивна:

$$f(n_\alpha \cdot n_\beta) = f(n_\alpha) + f(n_\beta) \qquad (1)$$

Названным свойствам и соотношению (1) удовлетворяет функция вида

$$f(n) = log(n) \qquad (2)$$

В целом, *энтропия (Н) в данном курсе рассматривается как мера неопределенности опыта, имеющего n равновероятных исходов*. Количественно энтропия оценивается с помощью функции (2).

Выбор основания логарифма в данном случае значения не имеет, так как преобразование логарифма от одного основания к другому $log_b\ n = log_b\ a \cdot log_a\ n$ состоит во введении одинакового для обеих частей выражения (1) постоянного множителя $log_b\ a$, что равносильно изменению масштаба (т. е. размера единицы) измерения неопределенности.

В связи с тем, что для анализа таких событий принято использовать аппарат математической логики, поэтому за единицу измерения принимается неопределенность в опыте, имеющем лишь два равновероятных исхода: «истина» (*True*) и «ложь» (*False*) и выбирается основание логарифма *2*. В этом случае единица измерения неопределенности при двух возможных равновероятных исходах опыта называется бит (от англ. *binary digit* – «двоичный разряд»).

Из свойства аддитивности неопределенностей, а также того, что согласно (2) общая неопределенность равна $log_2\ n$, следует, что неопределенность, вносимая одним исходом, составляет $\frac{1}{n}\log_2 n = -\frac{1}{n}\log_2\frac{1}{n} = -p \cdot \log_2 p$, где $p = \frac{1}{n}$ - вероятность любого из отдельных исходов.

Таким образом, неопределенность, вносимая каждым из равновероятных исходов, равна:

$$H = - p \cdot log_2\ p \qquad (3)$$

Обобщая выражение (3) на случай, когда опыт α имеет *n* неравновероятных исходов ($A_1, A_2 \ldots A_n$), получим выражение энтропии опыта α.:

$$H(\alpha) = -\sum_{i=1}^{n} p(A_i)\cdot\log_2 p(A_i) \qquad (4)$$

Энтропия равна средней неопределенности всех возможных исходов опыта, в котором проявляются случайные события. При прочих равных условиях наибольшую энтропию имеет опыт с равновероятными исходами. Для обозначения опытов со случайными исходами используются греческие буквы (α, β и т. д.), для обозначения отдельных исходов опытов - латинские заглавные (А, В и т. д.). Для практики формула (4) важна тем, что позволяет сравнить неопределенности различных опытов со случайными исходами.

Пример 1. Имеются два ящика, в каждом из которых по 12 шаров. В первом – 3 белых, 3 черных и 6 красных; во втором – каждого цвета по 4. Опыты состоят в вытаскивании по одному шару из каждого ящика. Какова неопределенность исходов этих опытов?

Согласно (4) находим энтропии обоих опытов:

$$H_\alpha = -\frac{3}{12}\log_2\frac{3}{12} - \frac{3}{12}\log_2\frac{3}{12} - \frac{6}{12}\log_2\frac{6}{12} = 1{,}50\ \text{бит},$$

$$H_\beta = -\frac{4}{12}\log_2\frac{4}{12} - \frac{4}{12}\log_2\frac{4}{12} - \frac{4}{12}\log_2\frac{4}{12} = 1{,}58\ \text{бит},$$

$H_\beta > H_\alpha$, т. е. неопределенность результата в опыте β выше и, следовательно, предсказать его можно с меньшей долей уверенности, чем результат α.

Пример 2. В ящике имеются 2 белых шара и 4 черных. Из ящика извлекают последовательно два шара без возврата. Найти энтропию, связанную с первым и вторым извлечениями, а также энтропию обоих извлечений.

Будем считать опытом α извлечение первого шара. Он имеет два исхода: A_1 – вынут белый шар; его вероятность $p(A_1) = 2/6 = 1/3$; исход A_2 – вынут черный шар; его вероятность $p(A_2)=1 - p(A_1) = 2/3$. Эти данные позволяют сразу найти $H(\alpha)$:

$$H(\alpha)= - p(A_1)\log_2 p(A_1) - p(A_2)\log_2 p(A_2) = -1/3 \log_2 1/3 - 2/3 \log_2 2/3 = 0{,}918 \text{ бит}$$

Опыт β – извлечение второго шара также имеет два исхода: B_1 – вынут белый шар; B_2 – вынут черный шар, однако их вероятности будут зависеть от того, каким был исход опыта α:

$$\text{при } A_1: \quad p_{A_1}(B_1) = 1/5, \quad p_{A_1}(B_2) = 4/5;$$

$$\text{при } A_2: \quad p_{A_2}(B_1) = 2/5, \quad p_{A_2}(B_2) = 3/5.$$

Следовательно, энтропия, связанная со вторым опытом, является условной и равна:

$$H_{A_1}(\beta) = -1/5 \log_2 1/5 - 4/5 \log_2 4/5 = 0{,}722 \text{ бит},$$

$$H_{A_2}(\beta) = -2/5 \log_2 2/5 - 3/5 \log_2 3/5 = 0{,}971 \text{ бит},$$

$$H_\alpha(\beta) = p(A_1)\cdot H_{A_1}(\beta) + p(A_2)\cdot H_{A_2}(\beta) = 1/3\cdot 0{,}722 + 2/3\cdot 0{,}971 = 0{,}888 \text{ бит}$$

Наконец: $H(\alpha\beta\wedge) = 0{,}918 + 0{,}888 = 1{,}806$ *бит.*

Их рассмотренных примеров видно, как предшествующий опыт (α) может уменьшить. количество исходов и, следовательно, неопределенность последующего опыта (β) *Разность* $H(\alpha)$ *и* H_α, *показывает какие новые сведения относительно (*β*) получаются в результате опыта* α. *Эти сведения принято называть информацией, содержащейся в опыте α относительно опыта* β*:*

Данный подход позволяет численно измерять количество информации согласно оценке энтропии. Из него получаются следствия:

Следствие 1. *Единицей измерения энтропии является бит, тогда в этих же единицах измеряется количество информации.*

Следствие 2. *Если произведен единственный опыт α. Он несет полную информацию о себе самом, значит неопределенность его исхода полностью снимается, т. е.* $H_\alpha(\alpha) = H(\beta)$*. Тогда* $I(\alpha, \beta) = 0$*, т. е. можно считать, что энтропия равна информации относительно опыта, которая содержится в нем самом.* Можно уточнить: энтропия опыта равна той информации, которую получается в результате его осуществления.

Отметим ряд свойств информации:

1. $I(\alpha, \beta) \geq 0$, причем $I(\alpha, \beta) = 0$ тогда и только тогда, когда опыты α и β независимы.

2. $I(\alpha, \beta) = I(\beta, \alpha)$ т. е. информация симметрична относительно последовательности, опытов.

3. Следствие 2 и представление энтропии в виде (4) позволяют записать:

$$I = -\sum_{i=1}^{n} p(A_i)\cdot \log_2 p \tag{5}$$

т. е. *информация опыта равна среднему значению количества информации, содержащейся в каком-либо одном его исходе.*

Примеры применения формулы (5).

Пример 1. Задача: требуется определить количество информации, чтобы узнать исход броска монеты (орел или решка). В данном случае $n = 2$ и события равновероятны, т. е. $p_1 = p_2 = 0{,}5$. Согласно (5): $I = - 0{,}5\cdot\log_2 0{,}5 - 0{,}5\cdot\log_2 0{,}5 = 1$ *бит*

Пример 2. Игра «*Угадай-ка-4*». Некто задумал целое число в интервале от 0 до 3. Опыт состоит в угадывании этого числа. На наши вопросы Некто может отвечать лишь «*Да*» или «*Нет*». Какое количество информации мы должны получить, чтобы узнать задуманное число, т.

е. полностью снять начальную неопределенность? Как правильно построить процесс угадывания?

Исходами в данном случае являются: A_1 - «*задуман 0*», A_2 – «*задумана 1*», A_3 – «*задумана 2*», A_4 – «*задумана 3*». Конечно, предполагается, что вероятности быть задуманными у всех чисел одинаковы. Поскольку $n = 4$, следовательно, $p(A_i) = 1/4$, $\log_2 p(A_i) = -2$ и $I = 2$ *бит*. Таким образом, для полного снятия неопределенности опыта (угадывания задуманного числа) нам необходимо 2 бит информации.

Теперь выясним, какие вопросы необходимо задать, чтобы процесс угадывания был оптимальным, т. е. содержал минимальное их число. Здесь удобно воспользоваться так называемым выборочным каскадом (см. рис. 2.4):

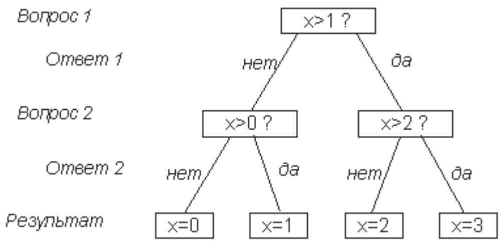


Рисунок 2.4 - Выборочный каскад

Таким образом, для решения задачи оказалось достаточно 2-х вопросов независимо от того, какое число было задумано. Совпадение между количеством информации и числом вопросов с бинарными ответами неслучайно.

Количество информации численно равно числу вопросов с равновероятными бинарными вариантами ответов, которые необходимо задать, чтобы полностью снять неопределенность задачи.

В рассмотренном примере два полученных ответа в выборочном каскаде полностью сняли начальную неопределенность. Подобная процедура позволяет определить количество информации в любой задаче, интерпретация которой может быть сведена к парному выбору. Например, определение символа некоторого алфавита, использованного для представления сообщения. Приведенное утверждение перестает быть справедливым в том случае, если возможные ответы не равновероятны.

Итак, для случая, когда все n исходов равновероятны из формулы (5) получим: $p(A_i) = \frac{1}{n}$ и, следовательно, $I = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \log_2 n = \log_2 n$.

$$I = \log_2 n \qquad (6)$$

Формула (6) выведена американским инженером Р. Хартли и носит его имя. Она связывает количество равновероятных состояний (n) и количество информации в сообщении (I) о том, что любое из этих состояний реализовалось. Итак, если некоторое множество содержит n элементов и x принадлежит данному множеству, то для его однозначной идентификации среди прочих требуется количество информации, равное $\log_2 n$.

Частным случаем применения формулы (6) является ситуация, когда $n = 2^k$; подставляя это значение в (6), очевидно, получим:

$$I = k \text{ бит} \qquad (7)$$

Анализируя результаты решения рассмотренных примеров, можно прийти к выводу, что k равно количеству вопросов с бинарными равновероятными ответами, которые определяли количество информации в решениях рассматриваемых задач.

Пример 3. При угадывании результата броска игральной кости дается вопрос «*Выпало 6?*». Какое количество информации содержит ответ? $p = 1/6$, $1 - p = 5/6$, следовательно,

$$I = - 1/6 \cdot \log_2 1/6 - 5/6 \cdot \log_2 5/6 \approx 0{,}65 \text{ бит} < 1 \text{ бит}.$$

Из рассматриваемых примеров видна также ошибочность утверждения, встречающегося в некоторых учебниках информатики, что 1 бит является минимальным количеством информации - никаких оснований для такого утверждения в теории информации нет.

Пусть некоторый опыт имеет два исхода A и B, причем $p_A = 0{,}99$, а $p_B = 0{,}01$. В случае исхода A мы получим количество информации $I_A = - \log_2 0{,}99 = 0{,}0145$ *бит*. В случае исхода B количество информации оказывается равным $I_B = - \log_2 0{,}01 = 6{,}644$ *бит*. Другими словами, больше информации связано с теми исходами, которые менее вероятны. Действительно, то, что наступит именно A, мы почти наверняка знали и до опыта; поэтому реализация такого исхода очень мало добавляет к нашей осведомленности. Наоборот, исход B – весьма редкий; информации с ним связано больше (осуществилось трудно ожидаемое событие). Однако такое большое количество информации мы будем при повторах опыта получать редко, поскольку мала вероятность B. Среднее же количество информации равно $I = 0{,}99 \cdot I_A + 0{,}01 \cdot I_B \approx 0{,}081$ *бит*.

Итак, выражение для оценки количества информации можно интерпретировать следующим образом: если начальная энтропия опыта H_1, а в результате сообщения информации I энтропия становится равной H_2 (очевидно, $H_1 \geq H_2$), то $I = H_1 - H_2$, т. е. информация равна убыли энтропии. В частном случае, если изначально равновероятных исходов было n_1, а в результате передачи информации I неопределенность уменьшилась, и число исходов стало n_2 (очевидно, $n_2 \leq n_1$), и легко получить:

$$I = \log_2 n_1 - \log_2 n_2 = \log_2 \frac{n_1}{n_2}$$

Обобщая сказанное, можно пояснить: *Информация – это все то, что может понижать неопределенность некоторого опыта с неоднозначным исходом; убыль связанной с этим энтропии является количественной мерой информации. В случае равновероятных исходов информация равна логарифму отношения числа возможных исходов до и после (получения сообщения). В организационных системах отражение свойства одного объекта другим объектом при ненулевой ценности изменяет вероятность достижения цели такого отражения. Воспринятая информация называется сообщением. Сообщение, в результате которого его приемник начинает действовать, называется сигналом.*

В качестве свойств информации, вытекающих из ее количественного определения можно выделить:

1. Чем больше вероятность исхода до осуществления события, тем меньше информации требуется для его реализации;

2. «Полная информация» – количество информации, содержащееся в событии относительно всех его возможных исходов, равно среднему значению (математическому ожиданию) величин энтропии;

3. Ценность поступающего сообщения определяется его полезностью для решения задач, стоящих перед его приемником.

4. Энтропия сложного события равна энтропии заключительного шага в оценке этого события.

5. Приемник не воспринимает «абсолютную информацию», но только информацию относительно характеристик фиксированного события или объекта.

6. Информация передается только между элементами одной системы.

Если при анализе или синтезе системы рассматриваются процессы передачи, хранения или переработки информации, то такая система называется информационной. Информационная система имеет Источник, Приемник и Каналы информационной связи.

Информация может быть истинной и ложной. Истинная информация уменьшает мнения наблюдателя о свойствах рассматриваемой системы. Ложная – увеличивает эту неопределенность. Информация о системе может иметь как детерминированный характер, так и вероятностный. Вероятностная информация позволяет судить о статистических характеристиках.

Прагматический, семантический и синтактический аспекты восприятия информации**:**Оперируя с системой в соответствии со своими целями, наблюдатель рассматривает информацию в нескольких аспектах. Среди них наиболее важные: *прагматический* – с точки зрения цели получения информации; *семантический* – с точки зрения формы представления информации; *синтактический* – с точки зрения характеристик носителя информации. В каких бы аспектах ни рассматривалась информация она характеризуется не только *количеством,* но и *ценностью.*

Оценка ценности сообщений: Качественной характеристикой информации, содержащейся в сообщении, является его «Ценность». В настоящее время пока не известна универсальная количественная оценка качества информации, хотя развит ряд методов Одним из наиболее перспективных является подход академика А.А. Харкевича, основанный на оценке изменения вероятности достижения цели при получении конкретного сообщения. При этом количество информации, содержащееся в оцениваемом сообщении, не учитывается.

В процессе рассмотрения ценности сообщения учитываются ограничения:

1. Принимается во внимание только информация, передаваемая между элементами рассматриваемой системы. Информация, переданная от внешней среды, учитывается, если эта среда является элементом такой системы.

2. В соответствии индивидуальностью целеполагания (и других аспектов восприятия информации) каждый из активных элементов одной и той же системы может по-разному реагировать на одно и ту же сообщение. Сообщения, в которых вероятность появления каждого отдельного знака не меняется со временем, называются шенноновскими, а порождающий их отправитель – шенноновским источником.

Говоря об информации, будем понимать, что она воспринимается, хранится, перерабатывается и передается:

1) на уровне «знаков», т. е. в виде дискретных значений характеристик вещественного объекта. На этом уровне информация представляется с помощью метризуемых параметров. Например, показателей работы функционального модуля технической системы;

2) на уровне «образов», т. е. обобщенного описания конкретного объекта с помощью качественных характеристик (типа «хорошо» – «плохо»; «удобно» – «не удобно» и т. д.), в виде инструмента для решения задачи, согласно отношения приемника информации к данному объекту или его характеристикам;

3) на уровне «символов», т. е. абстрактно-понятийного описания типа (вида) объекта (не конкретного экземпляра) и не может представляться с помощью каких-либо характеристик. Информация, являясь абстрактным символом, служит критерием классификации объектов. С помощью этого сообщения элемент, воспринимающий информацию, может априори судить,

какого типа элементы исследуемой организационной системы он принимает для достижения поставленной цели и определить веса параметров второго уровня по важности.

Основная теорема Шеннона о передаче информации без искажений в канале без шума, Закон необходимого разнообразия: Условие передачи информации без искажений определяется основной теоремой К. Шеннона для передачи сообщения без шума: *«Если мощность источника информации не превышает пропускную способность канала связи, то сообщение можно закодировать так, что оно будет передано без искажений и очередей»*. На основании этой теоремы формулируется *Закон необходимого разнообразия*, который является фундаментальным выводом кибернетики и теории информации, практическое значение которого не оценено до сих пор в полной мере.

Обозначим разнообразие в поведении управляющего элемента символом энтропии $H_1(Y_1)$, а разнообразие управляемого элемента символом энтропии $H_2(Y)$. Запишем важное допущение: разнообразие в поведении управляющего элемента всегда должно быть больше разнообразия в поведении управляемого элемента: $H_1(Y_1) > H_2(Y)$.

Теоретически не исключены случаи, когда возможные реакции управляемого элемента будут более разнообразны, чем возмущения входного сигнала. Это допущение налагает ограничение: на каждое изменение входного сигнала элемент обратной связи должен реагировать дополнительной командой, повышающей возможности управляющего элемента. В конечном итоге разнообразие поведения всей системы управления в целом должно прийти к минимуму, к которому и стремится управляющий элемент. Этот минимум увеличивается, если увеличивается разнообразие команд при данном X и, соответственно, Y_1.

Иначе говоря, поведение объекта регулируется тем меньше, чем больше разных команд направляется управляющим органом в его адрес при данном возмущении, чем слабее связь между воздействиями среды и управляющими командами, чем хуже изучены закономерности воздействия среды. При однозначной зависимости между X и $Y_{ос}$, когда определенное возмущение вызывает однозначно определенную команду управления, $H(Y_{oc}) = 0$. Тогда

$$\min H(Y) = H(X) - H(Y_{oc})$$

В записанной формуле выражается *закон необходимого разнообразия: ограничение разнообразия в поведении управляемого объекта достигается только за счет увеличения разнообразия органа управления (управляющих команд).*

Следствие из закона необходимого разнообразия, касающееся информации на входе управляющего элемента, имеет принципиальное значение для построения рациональной информационной системы в целом. Оно сводится к утверждению: *существует минимум информации на входе управляющего элемента (органа управления), необходимый для достижения эффективного минимума разнообразия управляющих команд.*

2.3.4 Задания для самостоятельного решения

Получите у преподавателя вариант задания для сообщения на практическом занятии:

Задание 3-1. *Докажите, что функция* $f(n) = \log(n)$ *имеет единственный вид из всех существующих классов функций, удовлетворяющих соотношению* $f(n_\alpha \cdot n_\beta) = f(n_\alpha) + f(n_\beta)$, *и обладающих свойствами:*

$f(1) = 0$, *поскольку при* $n = 1$ *исход опыта не является случайным и, следовательно, неопределенность отсутствует;*

$f(n)$ *возрастает с ростом* n, *поскольку чем больше число возможных исходов, тем более затруднительным становится предсказание результата опыта.*

Задание 3-2. *Если случайным образом вынимается карта из колоды в 32 карты. Какое количество информации требуется, чтобы угадать, что это за карта? Как построить угадывание?*

Для данной ситуации $n = 2^5$, *значит,* $k = 5$ *и, следовательно,* $I = 5$ *бит. Придумайте последовательность вопросов.*

Задание 3-3. *В некоторой местности имеются две близкорасположенные деревни: А или В. Известно, что жители А всегда говорят правду, а жители В – всегда лгут. Известно также, что жители обеих деревень любят ходить друг к другу в гости, поэтому в каждой из деревень можно встретить жителя соседней деревни. Путешественник, сбившись ночью с пути оказался в одной из двух деревень и, заговорив с первым встречным, захотел выяснить, в какой деревне он находится и откуда его собеседник. Какое минимальное количество вопросов с бинарными ответами требуется задать путешественнику? Количество возможных комбинаций, очевидно, равно 4 (путешественник в А, собеседник из А; путешественник в А, собеседник из В; и т. д.), т. е.* $n = 2^2$ *и, следовательно, значит,* $k = 2$. *Придумайте последовательность вопросов.*

Задание 3-4. *Если сообщение является шенноновским, то набор знаков (алфавит) и вероятности их появления в сообщении могут считаться известными заранее. В этом случае, предложите оптимальные способы кодирования, уменьшающие суммарную длину сообщения при передаче по каналу связи.*

Интерпретация сообщения, представляющего собой последовательность сигналов, сводится к задаче распознавания знака, т. е. выявлению, какой именно знак находится в данном месте сообщения. Такая задача может быть решена серией парных выборов. Предложите алгоритм вычисления количества информации, содержащееся в знаке, как меру затрат по его выявлению.

Задание 3-5. *Дайте примеры практического использования информационных теорий в построении стратегии поведения активных элементов организационных систем.*

2.3.5 Список рекомендуемой литературы

1. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. — М.: Изд. иностр. лит., 1963. — 830 с.
2. Колмогоров А. Н. Три подхода к определению понятия «количество информации»/ «Проблемы передачи информации», 1:1 (1965), 3-11
3. Харкевич А.А. О ценности информации / «Проблемы кибернетики», вып.4, 1961.
4. Юркевич Е.В. Введение в теорию информационных систем/ 2-е изд. –М.: ООО «Группа Издательский дом «Технологии», 2007 – 272 с.
5. Бонгард М.М. «Проблема узнавания», М.: «Наука», 1967.

2.4 Практическое занятие №4. Задача нелинейного программирования с ограничениями типа равенств (2 часа)

2.4.1 Цель занятия

- знакомство с особенностями описания объектов и процессов для решения поставленной задачи.

2.4.2 Задачи по теме

- закрепление знаний по разделам:

1. Понятие о модели и методологии
2. Понятие о корреляции, регрессия и метод наименьших квадратов
3. Экстраполяция и интерполяция. Планирование эксперимента
4. Стохастические и детерминированные модели
5. Понятие о Марковских процессах
6. Основные этапы моделирования

- изучение приемов характеристики и анализа работы системы.

2.4.3 Основные теоретические сведения

Определение: *Модель – это условный образ объекта или процесса, созданный в качестве инструмента для достижения заранее определенной цели. Совокупность описания модели, как инструмента для достижения конкретной цели, и механизма использования этой модели, как инструкции по эксплуатации данного инструмента, составляет МЕТОДОЛОГИЮ.*

Модель бывают вербальные (описательные), графические (картины, чертежи, схемы, диаграммы, гистограммы и т. д.), физические (вещественное представление), математические (формализованные описания объекта или процесса). Математические модели разделяются на:

- аналитические (в виде аналитических зависимостей);
- статистические (в виде статистических зависимостей, регрессий и т. п.);
- числовые (в виде таблиц или протоколов испытаний);
- логические (в виде логических выражений);
- компьютерные (в виде компьютерных алгоритмов или программ).

Модели могут быть:

- ФЕНОМЕЛОГИЧЕСКИЕ, как результат непосредственного мониторинга характеристик объекта или процесса;
- АССИМПТОТИЧЕСКИЕ, как результат процесса дедукции, когда модель, необходимая для решения задачи, формируется в виде частного случая из некоторой более общей модели;
- МОДЕЛИ АНСАМБЛЕЙ как результат процесса индукции, когда новая модель является обобщением «частных» моделей.

Конструирование модели составляет содержание МОДЕЛИРОВАНИЯ, включающего в себя этапы:

1) формулирование цели и постановка задачи анализа (или синтеза) объекта или процесса;

2) построение собственно модели;

3) оценка адекватности модели (анализ точности описания объекта или процесса) и условий применимости модели;

4) оценка надежности модели, т. е. возможности её использования при изменении условий решения поставленной задачи. Обычно критерием надежности модели является оценка устойчивости характеристик её адекватности.

Среди задач моделирования выделяются:

1. Прямая задача: по известным x и M найти y, решением чего будет $y = f'(x)$.

2. Обратная задача: по известным y и M найти x, решением чего будет $x = f'(-1/y)$.

3. Задача настройки модели: по известным x и y найти M.

Первые две задачи – это задачи белого ящика, т. е. известно, как функционирует исследуемая система. Третья задача - задача черного ящика, которая с помощью гипотез сводится к задаче серого ящика, т. е. известно, как примерно функционирует часть системы, которой достаточно для получения адекватных результатов моделирования.

Задача настройки модели часто связана с применением статистических методов, в частности с применением корреляционного и регрессионного анализа. В этом случае, для нахождения связи между значениями x и y, принято учитывать корреляцию между их значениями. *Корреляция – статистическая характеристика взаимосвязи двух или нескольких величин, при которой изменения одной или нескольких из них приводят к изменению другой или других*.

Корреляция считается простой, когда речь идет об отношениях между двумя величинами (например, между весом и габаритами устройства), и множественной, если в ней участвуют три и более переменных (например, вес, габариты и стоимость разработки функционального модуля). Частичная корреляция определяет отношения между двумя переменными, когда для третьей переменной берется величина фиксированная для некоторых условий (например, корреляция между весом и габаритами устройства при заданной стоимости его разработки для использования по конкретному назначению). Оценкой такой величины является коэффициент корреляции *К*, имеющих пределы изменения от 0 до 1, т. е. $0 \leq K \geq 1$.

Можно условно принять, что все характеристики любого объекта (процесса) связаны между собой.

Если в формируемой математической модели статистический разброс значений величин, связь между которыми исследуется, характеризуется коэффициентом корреляции, то ставится задача нахождения регрессии. *Регрессия – это представление корреляционной связи между значениями рассматриваемых параметров в виде функции, соответствующей зависимости средних значений одного из параметров от случайных значений другого или других параметров, входящих в данную модель*.

Например, если при каждом значении x_i наблюдается n_i значений случайной величины Y, т. е. $\{y_{i1},..., y_{in}\} \in Y$, то зависимость средних арифметических $\overline{y}_i = \frac{1}{n_i}(y_{i1} + ... + y_{in_i})$ этих значений от x_i является регрессией в статистическом понимании этого термина. При обнаруженной закономерности изменения $\overline{y}$ с изменением x предполагается, что в основе наблюдаемого явления лежит вероятностная зависимость: при каждом фиксированном значении x случайная величина Y имеет определенное распределение вероятностей с математическим ожиданием, которое является функцией x: $\exists(Y / x) = m(x)$. График регрессии называется кривой регрессии величины Y по x. Точность, с которой регрессия Y по x передает изменение Y в среднем при изменении x, оценивается дисперсией величины Y для каждого значения x: $D(Y / x\} = \sigma^2(x)$.

Понятие регрессии обобщается на случай, когда вместо одной регрессионной переменной рассматривается некоторое множество переменных. Если случайные величины X_1 X_2, . . ., X_n имеют совместное распределение вероятностей, то множественная регрессия определяется как регрессия X_1 по x_2, ...x_n: $.\exists(X_1 / X_2 = x_2,...X_n = x_n) = m_1(x_2,..., x_n)$ *Метод наименьших квадратов* (МНК, OLS, Ordinary Least Squares) – один из базовых методов регрессионного анализа для оценки неизвестных параметров регрессионных моделей по выборочным данным. Метод основан на минимизации суммы квадратов остатков регрессии.

Пример регрессии как математической модели. Одной из распространенных моделей описания характеристик работы предприятия может явиться производственная функция Кобба-Дугласа.

Пусть имеется модель в виде регрессии $Y = 2.248\ K^{0.404}\ L^{0.803}$. Степень однородности такой производственной функции: $\gamma = 0.404 + 0.803 = 1.207$. Это означает, что при увеличении капитальных и трудовых затрат в λ раз объем производства увеличится в $\lambda^{1.207}$ раз. Вывод: полученное значение γ характерно для развивающейся экономики.

С помощью данной модели проанализируем экономические возможности в работе данного предприятия. Предельная норма замещения *i*-фактора производства *j*-фактором M_{ij} описывается функционалом изоквант, определяемым соотношением: $M_{ij} = -\frac{MY_{xi}}{MY_{xj}} = \frac{\varepsilon_{xi} x_j}{\varepsilon_{xj} x_i}$. Для нашей модели: $M_{LK} = \frac{\beta}{\alpha}\frac{K}{L} = \frac{0.803}{0.404}\frac{K}{L} = 1.988\frac{K}{L}$. Не трудно видеть, что норма замещения фондов трудовыми ресурсами**:** $RST_{K,L} = L/K$, а норма замещения трудовых ресурсов производственными фондами**:** $RST_{L,K} = K/L$

Множество точек области определения производственной функции, для которых предельная норма замещения *i*-го фактора производства *j*-м постоянна называют изоклиной. Для наших данных получаем искомое уравнение семейства изоклин: $K = 1.988 M_{LK} \cdot L$ Как и следовало ожидать, семейство изоклин является семейством прямых линий, выходящих из начала координат. Каждому значению предельной нормы замещения труда капиталом соответствует своя линия.

Графически изокванты и изоклины для производственной функции $Y = 2.248K^{0.404}L^{0.803}$ с изоклинами семейства для значений $M_{LK} = 5$ и $M_{LK} = 2$ представим на рис. 2.5:

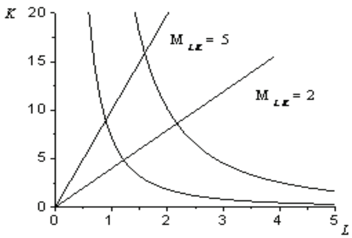


Рисунок 2.5- Изокванты и изоклины для производственной функции

Рис. 2.5 показывает, что движение вдоль линии изокванты возможно лишь при изменении технологии производства, которая сопровождается изменением фондовооруженности занятых в производстве.

Важным видом практического представления объектов или процессов являются стохастические модели сложных систем. Они строятся с использованием понятий случайных процессов. Значения переменных, которые входят в такие модели, определяют состояние системы в данный момент времени. Будем говорить, что случайный процесс совершает перевод системы из одного состояния в другое, если значения переменных, задающих одно состояние, изменяются на значения, которые определяют другое состояние.

Число возможных состояний (пространство состояний) случайного процесса может быть конечным или бесконечным. Случайный процесс $g(t)$ является процессом с дискретным временем, если переходы процесса из состояния в состояние возможны только в строго определенные, заранее фиксированные моменты времени $t_0, t_1, t_2, \ldots$. Если переход процесса из состояния в состояние возможен в любой, заранее неизвестный момент времени, то случайный процесс называется процессом с непрерывным временем. В первом случае, очевидно, что интервалы времени между переходами являются детерминированными, а во втором - случайными величинами.

Случайные процессы с дискретными состояниями могут изображаться в виде графа переходов (или состояний), в котором вершины соответствуют состояниям, а ориентированные дуги – переходам из одного состояния в другое. Если из состояния E_i возможен переход только в одно состояние E_j, то этот факт на графе переходов отражается дугой, направленной из вершины E_i в вершину E_j. Переходы из одного состояния в несколько других состояний и из нескольких состояний в одно состояние отражается на графе переходов.

Количественно случайный процесс описывается случайной функцией времени t, которая может принимать различные значения с заданным распределением вероятностей. Таким образом, для любого $t = t_i$ значение $\xi = \xi(ti)$ является случайной величиной. Случайный процесс определяется совокупностью функций времени и законами, характеризующими свойства этой совокупности. Каждая из функций этой совокупности называется реализацией случайного процесса. Реализация обозначается $\xi(q)(t)$, где q = 1,2,...

Последовательность случайных событий с конечным или счётным бесконечным числом исходов, характеризующаяся тем свойством, что при фиксированном настоящем будущее независимо от прошлого, названа цепью Маркова.

Определение: *Последовательность дискретных случайных величин $\{X_n\}$при $n \geq 0$ называется цепью Маркова (с дискретным временем), если*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n).$$

Образ случайных величин $\{X_n\}$ называется пространством состояний цепи, n - номером шага.

Переходная матрица и однородные цепи матрица $P(n)$, где $P_{ij}(n) \equiv \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$ называется матрицей переходных вероятностей на n-ом шаге, а вектор $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots)^\top$, где $p_i \equiv \mathbb{P}(X_0 = i)$ – начальное распределение цепи Маркова.

Очевидно, матрица переходных вероятностей является стохастической, т. е. $\sum_{j=1}^{\infty} P_{ij}(n) = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Из свойств условной вероятности и определения однородной цепи Маркова получаем:

$$\mathbb{P}(X_n = i_n, \ldots, X_0 = i_0) = P_{i_{n-1},i_n} \cdots P_{i_0,i_1} p_{i_0},$$

откуда вытекает специальный случай уравнения Колмогорова – Чепмена:

$\mathbb{P}(X_n = i_n \mid X_0 = i_0) = (P^n)_{i_0,i_n}$, то есть матрица переходных вероятностей за n шагов однородной цепи Маркова есть n-ая степень матрицы переходных вероятностей за 1 шаг.

Наконец, $\mathbb{P}(X_n = i_n) = (P^n \mathbf{p})_{i_n}$.

Определение: *Семейство дискретных случайных величин $\{X_t\}_{t \geq 0}$ называется цепью Маркова (с непрерывным временем), если*

$$\mathbb{P}(X_{t+h} = x_{t+h} \mid X_s = x_s,\ 0 < s \leq t) = \mathbb{P}(X_{t+h} = x_{t+h} \mid X_t = x_t).$$

Цепь Маркова с непрерывным временем называется однородной, если

$$\mathbb{P}(X_{t+h} = x_{t+h} \mid X_t = x_t) = \mathbb{P}(X_h = x_h \mid X_0 = x_0).$$

Аналогично случаю дискретного времени конечномерные распределения однородной цепи Маркова с непрерывным временем полностью определены начальным распределением $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots)^\top$, $p_i = \mathbb{P}(X_0 = i)$, $i = 1, 2, \ldots$ и матрицей переходных функций

2.4.4 Задания для самостоятельного решения

Получите у преподавателя вариант задания для сообщения на семинарском занятии:

Задание 4-1. *Провести анализ модели с помощью проверки её адекватности и статистической значимости параметров парной регрессии.*

Задание 4-2. *Объяснить почему функционалы изоквант и изоклин имеют форму, показанную на рисунке.*

Задание 4-3. *Расскажите о свойствах Марковской цепи и дайте пример её расчета. Дайте практические примеры цепей Маркова в виде ветвящегося процесса; опишите особенности «случайного блуждания». Предложите алгоритм расчета Марковской цепи с доходами, где в качестве доходов рассматривается ценность сообщения о событиях, между которыми существуют статистические связи (корреляции), т. е. оцените динамику вероятности достижения цели построения цепи.*

2.4.5 Список рекомендуемой литературы

1. Кейслер Г., Чен Ч. Теория моделей. – М.: Мир, 1977. – с. 14.
2. Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика. – М.: Наука, 1987. – 336 с.
3. Юркевич Е.В. Введение в теорию информационных систем/ 2-е изд. –М.: ООО «Группа Издательский дом «Технологии», 2007 – 272 с.
4. Пригожин И., Стенгерс И. «Время, хаос, квант» Эдиториал УРСС, М., 2000.

2.5 Практическое занятие №5 Выбор наилучших алгоритмов оптимизации (2 часа)

2.5.1 Цель занятия

- знакомство с понятием оптимальности характеристик объекта или процесса

2.5.2. Задачи по теме

- закрепление знаний по разделам:
    1. Понятие об оптимальности
    2. Аналитическая функция. Геометрический и аналитический смысл производных
    3. Монотонность функции и условие её унимодальности
    4. Алгоритм поиска минимума одномерных унимодальных функций
    5. Абсолютный и условный экстремум
    6. Локальный экстремум функции нескольких переменных
    7. Критерий Сильвестра
- выполнение заданий по расчету характеристик объекта или процесса.

Задание 5-1. Установить характер знакоопределённости квадратичной формы

$f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 6x_2^2 + 2x_3^2 + 6x_1 \cdot x_2$.

Задание 5-2. Найти точки экстремума (критические точки) для функций:

1) $V_5(x_1, x_2) = x_1 - 3\ x_2 + x_1\ x_2$,
2) $V_6(x_1, x_2) = x_1^3 - x_2^2 - 2x_1^2$,
3) $V_7(x_1, x_2) = 3x_1^2 + x_2^2 - x_1^3$,
4) $V_8(x_1, x_2) = x_1^3 + 4\ x_2^3 + x_2^4$.

Задание 5-3. Какие точки экстремума следующих функций являются изолированными, какие неизолированными:
1) $V_6(x_1, x_2) = x_1^3 - x_2^2 - 2x_1^2$,
2) $V_7(x_1, x_2) = 3x_1^2 + x_2^2 - x_1^3$,
3) $V_9(x_1, x_2) = x_1^2 + 4\ x_1x_2 + 4x_2$
4) $V_{10}(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2$,

Задание 5-4. Используя определения 2-4, выявить знакопеременные, знакопостоянные и знакоопределенные свойства следующих функций:

1) $V\ (x_1, x_2) = 4\ x_1 + 2\ x_2 + x_1^2 + x_1^2$,

2) $V\ (x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - x_1^3$,

3) $V\ (x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 - x_2^5$,

4) $V\ (x_1, x_2) = - x_1^2 - 2x_2^2 + 5x_1^3$,

5) $V\ (x_1, x_2) = 3x_1^2 + x_2^2 - x_1^3$,

6) $V\ (x_1, x_2) = x_1^3 + 4\ x_2^3 + x_2^4$.

7) $V\ (x_1, x_2) = 3\ x_1 + x_2^2 + 2x_1^2 + x_1^3$,

8) $V\ (x_1, x_2) = x_1^2 + 4\ x_1x_2 + 4x_2^2$,

9) $V\ (x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2$,
10) $V(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 + 3x_3^{2.}$

Замечания:
1. Знакоопределенная (положительно-определенная и отрицательно-определенная) функция имеет в нуле изолированный экстремум (изолированный минимум или изолированный максимум).
2. Знакопостоянная (постоянно-положительная и постоянно-отрицательная) функция имеет в нуле неизолированный экстремум (неизолированный минимум или неизолированный максимум), поскольку в любой окрестности нуля найдутся другие точки, в которых функция имеет минимум или максимум.

Задание 5-5. Найти условный экстремум функции $z = 8-(x + 2)^2 - (y - 4)^2$, если её аргументы связаны уравнением $x + 3y = 0$.

Задание 5-6. Найти экстремумы функции $z = 1 - 4x\ -8y$ при условии $x^2 - 8y^2 = 2$. Решению этого задания поможет рассмотрение его геометрической сути, т. е. определение линии 2-го порядка, задаваемой уравнением $x^2 - 8y^2 = 2$, также поверхности, порождаемой этой линией в пространстве. В результате анализа формы кривой, которая образуется при пересечении плоскости и цилиндра, можно найти на этой кривой минимум и максимум.

2.5.3 Основные теоретические сведения

Понятие оптимизации вошло в практику проектирования и эксплуатации технических систем не только в авиации. Оно широко используется в экономике, в административной и даже общественной практике. Знание оптимального конструкторского решения в построении сложной системы важно для оценки не только её существующего состояния, но и для определения перспектив ее развития. При очевидной полезности идей оптимизации практика требует осторожности.

Во-первых, обычно рассматриваемый модуль входит в состав некоторой системы, поэтому локальная оптимизация его конструкции не обязательно приведет к тому же результату, что и оптимизация системы, где этот модуль является элементом.

Во-вторых, результаты оптимизации существенно зависят от адекватности модели системы и её элементов. Всегда имеется величина ε, характеризующая экспертно-допустимое отклонение результатов расчета от их действительных значений.

В-третьих, важен тот факт, что чем больше данных (больше размерность модели), тем она точнее. Но, чем больше данных, тем сложнее расчеты, т. е. проявляется «проклятие размерности». Это влечет за собой: трудоемкость вычислений; необходимость хранения огромного количества данных; увеличение доли шумов; в линейных классификаторах увеличение числа признаков ведет к проблемам мультиколлинеарности; в метрических классификаторах расстояния обычно вычисляются как средний модуль разностей по всем признакам. Согласно Закону Больших Чисел, сумма n слагаемых стремится к некоторому фиксированному пределу при $n \to \infty$. Таким образом, расстояния во всех парах объектов стремятся к одному и тому же значению, а значит, становятся неинформативными. Для устранения «проклятия размерности» используются ряд способов. Например, факторный анализ, Метод Главных Компонент и др.

В целом, методы оптимизации делятся на аналитические и численные. Большинство задач сводится к численным методам, т. е. к задачам линейного и нелинейного (выпуклого) программирования. Для относительно небольшой части инженерных задач, к которым применимы аналитические решения, наиболее часто для оптимизации применяется метод неопределенных множителей Лагранжа. Его сущность заключается в использовании функции Лагранжа, которая позволяет перевести задачу из класса условных экстремальных задач в класс обычных безусловных.

Определение: *Если сформирована модель объекта или процесса, включающая в себя некоторое множество параметров, то, исходя из существа задачи, выделяется подмножество системообразующих параметров. В этом подмножестве выбирается параметр, значение которого несет наиболее ценную информацию. Такой параметр принимается в качестве критерия оптимизации. Оптимальным значением этого параметра является его величина, при которой целевая функция построения рассматриваемого объекта или процесса достигает экстремального значения (максимума или минимума).*

Физический аспект. В качестве критерия принимают значения параметра, характеризующего энергетическое или надежностное совершенство проектируемого объекта или процесса. Оценка производится с использованием физических законов. Например, в механике для этого часто применяется оценка КПД устройства, как отношение двух работ $\eta = A_o/A$, где A_o – минимальная работа теоретически достаточная для осуществления заданного процесса; A – фактически затрачиваемая работа.

На практике часто возникает необходимость оценивать инженерное решение в построении устройства на основе не единственного, а нескольких критериев. Существующие стандарты на качество могут содержать до десятка различных показателей технического, технологического, экономического, экологического, энергономического и потребительского характера. В этом случае один из общего списка критериев принимается за основной. Для всех других критериев устанавливаются ограничения: $P \Rightarrow Sup.$ $P_i > A_i$ или $P_i < A_i$. Более общим является формирование векторного критерия (P): $P = f(a_1P_1\ , a_2P_2\ ,\ldots\ a_n\ P_n) \Rightarrow Sup$, где a_i– весовые коэффициенты; Sup – обозначение для максимального значения функции в заданных ограничениях.

Недостатком этих подходов является трудность объективных оснований для введения весовых коэффициентов и ограничений. Для этой цели обычно используются экспертные оценки. В этом случае для выбора альтернативного варианта принимается один из критериев. Теперь, последовательно заменяя основной критерий, решается столько задач, сколько критериев введено в модель рассматриваемого устройства. В результате формируется множество решений равное числу критериев.

Важным случаем таких решений является возникновение области Парето, когда требуется увеличивать значения параметра X, но необходимо уменьшение значения параметра Y. Например, резервирование механического блока повышает его надежность, но увеличивает весогабаритные характеристики. Разработчику требуется оценить функциональные особенности данного блока, и находить компромисс согласно условиям его использования. В практических задачах (при изменяющихся условиях) ценность такой информации также может быть величиной переменной.

Информационный аспект. Данный подход является инвариантным к физическим (или экономическим) аспектам оптимизации. Для его использования выделяют параметры:

- интенсивные: варьирование ими приводит к повышению эффективности управления при неизменных затратах ресурсов;

- экстенсивные: варьирование ими приводит к повышению эффективности управления за счёт дополнительных вложений ресурсов.

В решении практических задач приходится иметь дело с векторными критериями, включающими в себя несколько частных критериев оптимальности. В этом случае каждому критерию ставится в соответствие весовой коэффициент, определяющий ценность такого критерия для решения поставленной задачи. При этом может возникнуть проблема обеспечения согласованности частных критериев между собой.

Определение: *Функция f(x) называется аналитической (гладкой) на отрезке [a,b], если она имеет непрерывную производную на этом отрезке.*

Определение: *Производной функции f(x) в точке x_0 ($f'(x_0)$) называется число, к которому стремится разностное отношение* $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ при Δx*, стремящемся к нулю.*

Геометрический смысл производной: *производная в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в этой точке. Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 :* $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Точка, в которой первая производная равно нулю называется *стационарной точкой.*

Физический смысл производной *– скорость (первая производная – это скорость процесса; вторая производная, т. е. ускотение – это скорость (изменения скорости процесса). Если точка движется вдоль оси x и ее координата изменяется по закону x(t), то мгновенная скорость точки:* $v(t) = x'(t)$

Замечание. *В практических задачах найти значения производных целевых функций вида f ($x_1,\ldots,x_n$) аналитически, как правило, не удается и их вычисляют приближенно:*

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_i} \approx \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_i + \delta x_i, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots x_n)}{\delta x_i}.$$

Выбор величин приращений по координатам $\delta x_i,\ i=1,2,\ldots,n$ *зависит от возможностей используемой ЭВМ и необходимой точности вычислений.*

Определение: *Функция $f(x)$, заданная на интервале $a<=x<=b$ называется унимодальной на $[a,b]$, если существует единственная точка x^* минимума $f(x)$, т. е. $f(x^*) = \min F(x)$ {на $a<=x<=b$} если для любых двух точек x_1,x_2 принадлежащих $[a,b]$ выполняется соотношение: из неравенств $x_2<x_1<=x^*$ следует $f(x_1)>f(x_2)$; и из неравенств $x_2>x_1=>x^*$ следует $f(x_1)< f(x_2)$.* Таким образом, *унимодальной* называется функция одной переменной $y = f(x)$, имеющая в интервале исследования один горб (впадину).

Введем обозначение: $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ является n-мерным вектором.

Определение: *Функция $f(x)$, определенная на выпуклом множестве D, называется функцией выпуклой вниз тогда и только тогда, когда для любых двух точек $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ принадлежащих D, и любого числа L ($0<=L<=1$) выполняется неравенство:*

$f(Lx^{(1)} +(1-L)x^{(2)})<=Lf(x^{(1)})+(1-L)f(x^{(2)})$.

Пример. Нахождение стационарной точки. Пусть задана функция (квадратичная форма):

$f(x_1,x_2)=(x_1-a)^2+(x_2-b)^2+x_1\cdot x_2$,

пусть a = 9, b = 2. тогда она примет вид: $f(x_1,x_2)=(x_1-9)^2+(x_2-2)^2+x_1\cdot x_2$

$f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2-18\cdot x_1-4\cdot x_2+x_1\cdot x_2+85$

Производные по x_1 и x_2:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}=2x_1+x_2-18 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}=2x_2+x_1-4 \end{cases}$$

Приравняв полученные выражения к нулю, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-18=0 \\ 2x_2+x_1-4=0 \end{cases}$$

Решение системы уравнений даёт результат: $x_1 = 8$; $x_2 = 2$.

Таким образом, стационарной является точка с координатами x* = [8;2], в которой значение функции: $f(x^*) = 17$.

Определение: *Условным (относительным) называется экстремум, который достигается при выполнении определённого условия (или относительно условий).*

Важной проблемой оптимизации технологических процессов является алгоритмизация определения условных экстремумов функций нескольких переменных. Прежде всего, это условные экстремумы функций двух и трёх переменных, которые встречаются в подавляющем большинстве практических задач.

Пример. Пусть имеется произвольная «наклонная» плоскость в декартовой системе *OXYZ*, а также имеется эллиптический цилиндр (бесконечная круглая «труба», параллельная оси *OZ)*. Очевидно, что эта «труба» «высечет» из нашей плоскости эллипс**,** описываемый функцией, на которой наша «наклонная» (задающая) плоскость, достигает экстремумов при условии, что её пересёк данный круговой цилиндр. Условный экстремумов (минимум или максимум) будут зависеть от того, на какой высоте и под каким углом осуществлено пересечение. В качестве универсального метода нахождения таких условных экстремумов принято рассматривать Метод множителей Лагранжа.

Критерий Сильвестра: *функция нескольких переменных имеет локальный экстремум, если её квадратичная форма является знакоопределённой*, в том числе:

1) для того чтобы квадратичная форма была положительно определённой необходимо и достаточно, чтобы все главные диагональные миноры матрицы *A* этой квадратичной формы были положительны:

$$\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ - & - & \cdots & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0;$$

2) для того чтобы квадратичная форма была отрицательно определённой, необходимо и достаточно, чтобы знаки главных диагональных миноров матрицы *A* этой квадратичной формы чередовались, начиная со знака «–» для Δ_1, т. е.

$$\Delta_1 < 0,\ \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n = \begin{cases} < 0,\ n = 2k-1, \\ > 0,\ n = 2k,\ k \in N. \end{cases}$$

Определение 1:

Если в точке $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ функция $V(x)$ имеет локальный минимум или максимум и в любой малой окрестности этой точки нет других экстремумов, то данная точка $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ называется точкой ***изолированного экстремума.***

Если в любой малой окрестности нуля существуют другие экстремумы функции $V(x)$, то точка $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ называется точкой ***неизолированного экстремума.***

Пример. Для $V_1 = x_1^2 + x_2^2$ точка $x_1 = x_2 = 0$ является точкой изолированного минимума.
Для $V_2 = (x_1 — x_2)^2$ точка $x_1 = x_2 = 0$ является точкой неизолированного минимума.

Определение 2:

Если в некоторой заданной области функция $V(x)$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения, то она называется знакопеременной.

Определение 3:

Функция $V(x)$ называется знакопостоянной (постоянно-положительной или постоянно-отрицательной), если в заданной области она может принимать только положительные, или отрицательные значения.

Определение 4:

*Если в заданной области функция $V(x)$ может принимать значения только одного знака и обращается в нуль только при $x = 0$, то она называется знакоопределенной (положительно-определенной или отрицательно-определенной), т. е.*1. $V(0) = 0$ при $x = 0$.
2. $V(x) > 0$ (либо $V(x) < 0$) при $x \neq 0$.

Пример. $V_1 = x_1^2 + x_2^2$ положительно-определенная функция;
$V_2 = (x_1 - x_2)^2$ постоянно-положительная функция,
$V_3 = x_1^2 - x_2^2$ знакопеременная функция,
$V_4(x_1, x_2) = x_1^2$ постоянно-положительная функция.

2.5.4 Задания для самостоятельного решения

Задание 5-1. *Предложите функцию, имеющую стационарные точки, не являющиеся экстремумами. Дайте её график.*

Задание 5-2. *Расскажите о киберфизических системах. Приведите пример использования технологического критерия, определяющего эффективность разработки* *функционального блока в авиастроении, или критерия, повышающего надежность проектируемой программно-технической системы.*

Задание 5-3. *Используя покрытие множества допустимых значений вектора варьируемых параметров D_x равномерной сеткой с шагом, равным 1 по обеим координатным направлениям, постройте приближенно множество Парето для следующей задачи двухкритериальной оптимизации (S = 2):*

$$\phi_1(x, y) = (x-2)^2 + (y-1)^2;$$

$$\phi_2(x, y) = (x-5)^2 + (y-5)^2;$$

$$D_X = \{\mathbf{X} \mid 0 \le x \le 5,\ 1 \le y \le 5\} \subset R^2.$$

Изобразите на рисунках множества D_X, D^*_X, D_Φ, D^*_Φ.

Задание 5-4. *Расскажите о возможностях алгоритмизации построения технических систем, характеризуемых значениями параметров множества Парето. Приведите пример выбора решений на множестве Парето при разработке функциональных блоков в авиастроении.*

Задание 5-5. *Пусть имеется некоторый функциональный блок в бортовой аппаратуре самолета. Надежность его работы можно обеспечить: с помощью резервирования информационных каналов, введением интеллектуального элемента, адаптирующего его работу к изменяющимся условиям. Примером такого элемента может быть программируемая логическая интегральная схема (ПЛИС), но возможно и упрощенное решение - дополнительный защитный кожух. Предложите работы данного блока, т. е. формализованную запись вариантов условий, при которых каждое из решений является наиболее рациональным. При использовании нескольких критериев, т. е. компромиссных решений, дайте схему согласования критериев оптимизации.*

Задание 5-6. *Пусть имеется функциональный модуль с одним ненагруженным резервом. Покажите во сколько раз увеличится объем вычислений надежности этого модуля с двумя ненагруженными резервами, с пятью ненагруженными резервами, с десятью ненагруженными резервами.*

Задание 5-7. *Дайте понятие об условных и безусловных экстремальных задачах. Предложите пример использования метода неопределенных множителей Лагранжа.*

2.5.5 Список рекомендуемой литературы.

1. Аттетков А.В, Зарубин В.С., Канатников А.Н. Методы оптимизации. Учеб. пособие. – М.: Инфра-М, ФиС, 2008. – 272 с.
2. Юркевич Е.В. Введение в теорию информационных систем/ 2-е изд. –М.: ООО «Группа Издательский дом «Технологии», 2007 – 272 с.
3. Бычков А.Г. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и методам оптимизации: учеб. пособие. – М.: ФОРУМ, 2008. – 224 с.
4. Струченков В.И. Методы оптимизации. Основы теории, задачи, обучающие компьютерные программы. – М.: Экзамен, 2007. – 256 с.
5. Андреева Е.А., Цирулева В.М. Вариационное исчисление и методы оптимизации: Учебное пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 2006. – 320 с.