МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

И.Г. Хармац

ИНЖЕНЕРНАЯ И КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРАФИКА

Учебно-методическое пособие
по выполнению контрольной работы
«Позиционные и метрические задачи»

для студентов
направлений 25.03.01, 25.03.02
и специальносей 25.05.03, 25.05.05
очной формы обучения

Москва
2019

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ (МГТУ ГА)»

Кафедра технической механики и инженерной графики

И.Г. Хармац

ИНЖЕНЕРНАЯ И КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРАФИКА

Учебно-методическое пособие
по выполнению контрольной работы

«Позиционные и метрические задачи»

*для студентов
направлений 25.03.01, 25.03.02
и специальностей 25.05.03, 25.05.05
очной формы обучения*

Москва
2019

ББК 607
Х-21

Рецензент:
Пачкория О.Н. – старший преподаватель

Хармац И.Г.
Х-21 Инженерная и компьютерная графика: учебно-методическое пособие по выполнению контрольной работы «Позиционные и метрические задачи». / И.Г. Хармац. – Воронеж: ООО «МИР», 2019. – 48 с.

Данное учебно-методическое пособие издается в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Инженерная и компьютерная графика» по учебному плану для студентов направлений 25.03.01, 25.03.02 и специальностей 25.05.03, 25.05.05 очной формы обучения.

Рассмотрено и одобрено на заседании кафедры 24.09.2019 г. и методического совета 25.09.2019 г.

В авторской редакции.

Подписано в печать 07.10.2019 г.
Формат 60х84/16 Печ.л. 3 Усл. печ. л. 2,79
Заказ 521/3171 Тираж 80 экз.

Московский государственный технический университет ГА
125993 Москва, Кронштадтский бульвар, д.20

Отпечатано ООО «МИР»
394033, г. Воронеж, Ленинский пр-т 119А, лит. Я, оф. 215
Тел.: 8 (958) 649-53-31 Email: 89586495331@mail.ru

Введение

Учебно-методическое пособие предназначено для организации самостоятельной подготовки студентов к выполнению контрольной работы «Позиционные и метрические задачи». Пособие знакомит студентов с основными способами построения изображений геометрических образов на плоскости и способами решения некоторых геометрических задач по построенным изображениям. При изложении материала основное внимание уделено практике применения методов начертательной геометрии, рассмотрены стандартные алгоритмы решения задач, наиболее часто встречающихся в профессиональной деятельности инженера.

Вопросы и задачи, приведенные в пособии для самостоятельной работы студентов, помогают выработке практических навыков, необходимых для решения позиционных и метрических задач.

Для углубленного изучения изложенного материала рекомендуется литература, приведенная в конце методического пособия.

1. Способы преобразования комплексного чертежа

Способы преобразования комплексного чертежа — универсальный инструмент, позволяющий решить или упростить решение большинства пространственных задач, заданных на комплексном чертеже. Суть способов заключается в проведении таких преобразований комплексного чертежа, в результате которых пространственные элементы занимают частное положение относительно какой-либо плоскости проекций.

При применении способов преобразования комплексного чертежа важно правильно определять, какое результирующее положение должен занять объект (или система объектов — прямых, плоскостей и т.д.) для решения поставленной задачи.

В практике чаще всего используются два способа преобразования чертежа:

- способ замены плоскостей проекций;
- способ плоскопараллельного перемещения.

Частными случаями способа плоскопараллельного перемещения являются способ вращения вокруг проецирующих прямых и способ вращения вокруг прямых уровня.

1.1. Способ замены плоскостей проекций

Сущность способа заключается в том, что пространственное положение объекта не изменяется, а для получения необходимых частных проекций объекта вводится новая (дополнительная) плоскость проекций. Дополнительная плоскость проекций располагается таким образом, чтобы элементы фигуры или весь объект целиком проецировался на нее в удобном для решения задачи положении.

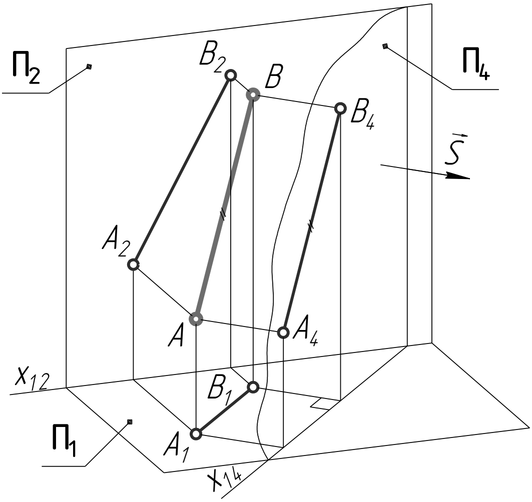


Рис. 1

При введении новой плоскости обязательно должно выполняться условие: **дополнительная плоскость должна быть перпендикулярна к одной из имеющихся плоскостей проекций**. В результате образуется новая система взаимно перпендикулярных плоскостей проекций, заменяющая прежнюю.

Процедура введения дополнительной плоскости иллюстрируется рис. 1. Например, в систему плоскостей проекций $\mathbf{П}_1/\mathbf{П}_2$ введем новую плоскость проекций $\mathbf{П}_4$, перпендикулярную $\mathbf{П}_1$ ($\mathbf{П}_4 \perp \mathbf{П}_1$) Пара $\mathbf{П}_1$ и $\mathbf{П}_4$ образует новую систему плоскостей $\mathbf{П}_1/\mathbf{П}_4$ с осью проекций x_{14}. При этом проецирование остается ортогональным — направление проецирования $\vec{S}$ на $\mathbf{П}_4$ перпендикулярно плоскости $\mathbf{П}_4$ ($\vec{S} \perp \mathbf{П}_4$). Очевидно, что новая ($\mathbf{П}_1/\mathbf{П}_4$) и старая ($\mathbf{П}_1/\mathbf{П}_2$) системы плоскостей проекций имеют общую, связывающую их плоскость проекций $\mathbf{П}_1$.

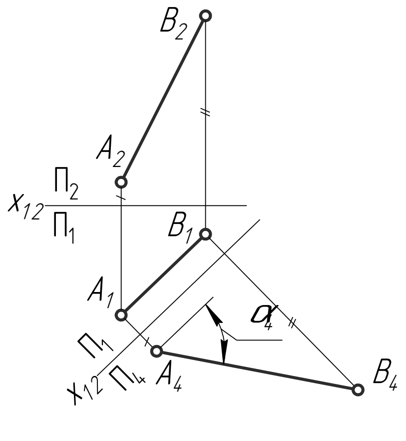


Рис. 2

После введения дополнительной плоскости каждая точка пространства, например, точка A, проецируется на три попарно перпендикулярные плоскости. Так как $\mathbf{П}_4 \perp \mathbf{П}_1$ и $\mathbf{П}_2 \perp \mathbf{П}_1$, то аппликаты точки A в плоскостях $\mathbf{П}_2$ и $\mathbf{П}_4$ будут равны между собой по построению. На рис. 1 для получения проекций отрезка AB аналогичные действия выполняются с точкой B.

Для получения плоского чертежа выполняют следующие действия:

- вращая плоскость $\mathbf{П}_4$ вокруг оси x_{14}, совмещают ее с плоскостью $\mathbf{П}_1$;
- полученный плоский чертеж ($\mathbf{П}_1/\mathbf{П}_4$) поворотом вокруг оси x_{12} совмещают с плоскостью $\mathbf{П}_2$.

В результате преобразований получим комплексный чертеж, представленный на рис. 2. Рис. 1 и 2 иллюстрируют решение простейшей задачи — определение натуральной величины отрезка прямой. Плоскость $\mathbf{П}_4$ введена параллельно отрезку AB ($\mathbf{П}_4 \perp \mathbf{П}_1$, $\mathbf{П}_4 \| A_1B_1$), поэтому AB проецируется на плоскость без искажения — $|AB| = |A_4B_4|$. Кроме того, угол α_4 наклона проекции A_4B_4 к $\mathbf{П}_1$ будет равен углу наклона отрезка AB к этой же плоскости ($\alpha_4 = \alpha$).

1.2. Способ плоскопараллельного перемещения

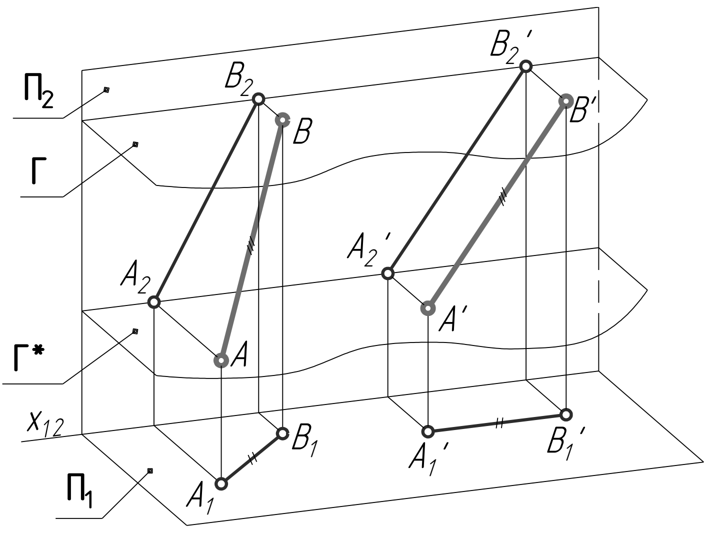


Рис. 3

Сущность способа заключается в таком изменении положения объекта относительно плоскостей проекций, в результате которого полученные проекции объекта позволяют решить поставленную задачу. В процессе изменения своего пространственного положения объект движется так, что все его точки перемещаются в плоскостях, параллельных друг другу и (как правило) одной из плоскостей проекций. При этом плоские траектории точек объекта могут быть произвольны. В терминах кинематики такое перемещение точек называется ***плоскопараллельным***.

На рис. 3 показано плоскопараллельное перемещение отрезка из первоначального положения *AB* в положение *A′B′*. Концы *A* и *B* отрезка перемещаются в плоскостях **Г** и **Г***, параллельных горизонтальной плоскости проекций $\mathbf{П}_1$. На рис. 4 представлен соответствующий комплексный чертеж.

При движении концов отрезка в плоскостях **Г** и **Г*** угол наклона отрезка к плоскости $\mathbf{П}_1$ остается постоянным, поэтому длина горизонтальной проекции отрезка в процессе перемещения также не изменяется ($A_1B_1=A_1'B_1'$). Этот факт дает возможность легко получать проекции объекта в новом положении, удобном для решения задач. Так, после перемещения отрезка *AB* в положение *A′B′* он станет параллелен $\mathbf{П}_2$, поэтому спроецируется на $\mathbf{П}_2$ без искажения — $|AB| = |A_2'B_2'|$. Кроме того, угол α_2 наклона проекции $A_2'B_2'$ к $\mathbf{П}_1$ будет равен углу наклона отрезка *AB* к этой же плоскости ($\alpha_2=\alpha$).

Рис. 4, как и рис. 2, иллюстрирует решение простейшей задачи — определение натуральной величины отрезка *AB* прямой.

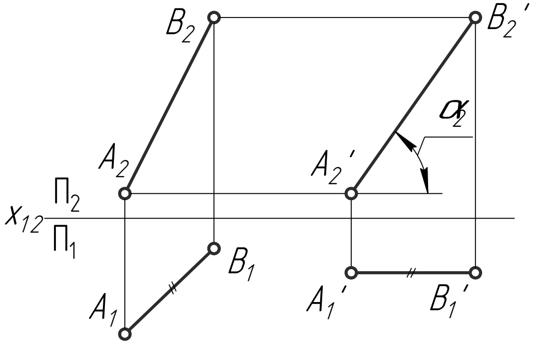


Рис. 4

Следует отметить, что способ плоскопараллельного перемещения предусматривает движение (относительно плоскостей проекций) всей системы геометрических объектов с обязательным сохранением их взаимного расположения. В некоторых задачах выполнение этого требования приводит к гораздо более громоздкому решению, чем при использовании способа замены плоскостей проекций, и применение способа плоскопараллельного перемещения становится нецелесообразным.

Для сокращения материала в данном пособии рассмотрены алгоритмы решения типовых задач только методом замены плоскостей проекций.

2. Общий алгоритм анализа позиционных и метрических задач, решаемых способами преобразования комплексного чертежа

Вне зависимости от способа преобразования комплексного чертежа, применяемого при решении задачи, следует использовать общий алгоритм формирования решения, состоящий из трех этапов:

Этап 1. На основе анализа условия задачи определить такое положение объекта (системы объектов) относительно плоскостей проекций, которое позволяет получить рациональное решение задачи. Соответственно, процесс решения сводится к переводу объекта (системы объектов) в это результирующее положение.

Этап 2. На основе анализа заданного (исходного) и результирующего (конечного) положения объекта (системы объектов) относительно плоскостей проекций определить, какие промежуточные преобразования и в какой последовательности их необходимо провести, чтобы объект (система объектов) занял результирующее положение относительно плоскостей проекций.

Этап 3. Для каждого преобразования, выбранного в процессе выполнения этапа 2, определить оптимальный алгоритм его выполнения.

По результатам выполнения указанных трех этапов формируется детальный алгоритм решения задачи. Все стандартные алгоритмы, изложенные в разделе 3, построены на основе приведенного общего алгоритма анализа позиционных и метрических задач.

3. Алгоритмы решения некоторых стандартных позиционных задач способами преобразования комплексного чертежа

К **позиционным** относят задачи, связанные с определением взаимного расположения геометрических объектов:

1) определение взаимной принадлежности объектов;
2) определение взаимного пересечения объектов.

Задачи на взаимную принадлежность решаются прямым приложением свойств ортогонального проецирования с учетом следующих аксиом:

- точка принадлежит плоскости, если она принадлежит любой линии, лежащей в этой плоскости;
- прямая принадлежит плоскости, если две любые ее точки принадлежат этой плоскости.

Задачи на определение взаимной принадлежности нецелесообразно решать способами преобразования комплексного чертежа, поэтому такие задачи здесь не рассматриваются.

Определение взаимного пересечения геометрических объектов заключается в построении точек, принадлежащих одновременно двум рассматриваемым объектам. В общем случае:

- пересечение прямой с плоскостью (поверхностью) определяется точкой (точками);

- пересечение двух плоскостей определяется прямой;
- пересечение плоскости с поверхностью определяется плоской кривой;
- пересечение двух поверхностей определяется пространственной кривой.

3.1. Взаимное расположение прямой и плоскости

Найти точку пересечения (*K*) прямой *MN* и ΔABC, заданных своими проекциями $\{M_2N_2; M_1N_1\}$ и $\{A_2B_2C_2; A_1B_1C_1\}$ (рис. 5).

Этап 1. Для получения решения достаточно перевести плоскость ΔABC в частное (проецирующее) положение. В таком положении проекцией плоскости будет прямая, а искомая точка *K* определяется пересечением полученной проекции плоскости с прямой (рис. 6).

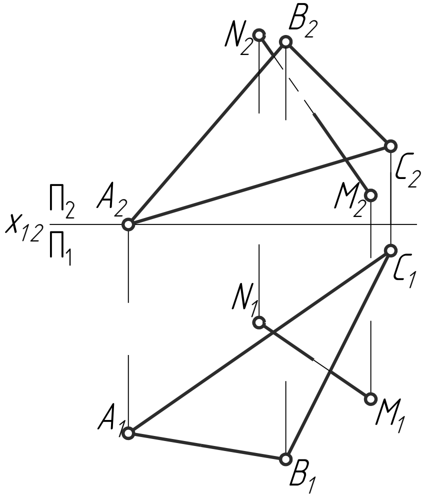


Рис. 5

Этап 2. Чтобы перевести плоскость в проецирующее положение, достаточно выполнить одну замену плоскостей проекций, при этом новая плоскость проекций **П**$_4$ должна быть перпендикулярна заданной плоскости ΔABC. Это условие может быть выполнено, если хотя бы одна прямая, лежащая в плоскости ΔABC, будет перпендикулярна новой плоскости проекций. В качестве такой прямой следует использовать прямую уровня (например, горизонталь *h* на рис. 7), тогда при построении **П**$_4$ можно воспользоваться теоремой о проецировании прямого угла (см. [1], §15).

Этап 3. На основе приведенных рассуждений алгоритм решения задачи можно сформулировать следующим образом:

1. Построить проекции любой прямой уровня, принадле-

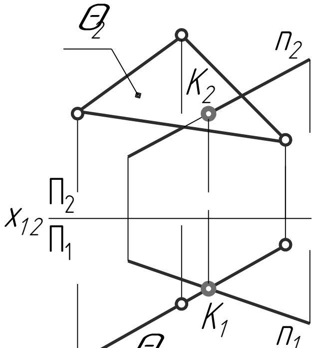


Рис. 6

жащей плоскости ΔABC. На рис. 7 построены проекции горизонтали h в последовательности: h_2 ($h_2 \| x_{12}$), 1_2 ($1_2 = h_2 \cap A_2B_2$), 1_1 ($1_1 \in A_1B_1$) и h_1 (через 1_1 и C_1).

2. Построить ось проекций x_{14} с учетом условия: ось проекций перпендикулярна построенной прямой уровня — $x_{14} \perp h_1$ (как на рис. 7) или $x_{14} \perp f_2$.
3. Построить проекции точек A, B, C, M и N на введенной плоскости проекций $\mathbf{\Pi}_4$. Так, чтобы построить проекцию точки B_4 на рис. 7, следует найти координату z_B (измерить расстояние от проекции B_2 до оси проекций x_{12}) и отложить ее от оси проекций x_{14} на линии связи B_1B_4. Проекции остальных точек на $\mathbf{\Pi}_4$ строятся совершенно аналогично.

   В результате построения точки A_4, B_4 и C_4 должны лежать на одной прямой. В противном случае следует искать ошибки в сделанных построениях.
4. Построить проекцию K_4 искомой точки пересечения: $K_4 = M_4N_4 \cap A_4B_4$.
5. Построить проекции точки K на плоскости $\mathbf{\Pi}_1$ и $\mathbf{\Pi}_2$. Так как по условию $K \in MN$, то $K_1 \in M_1N_1$ и $K_2 \in M_2N_2$. Поэтому для построения K_1, достаточно провести линию связи от K_4 до пересечения с M_1N_1. Положение проекции K_2 определяется аналогично.
6. При необходимости определить видимость прямой относительно плоскости ΔABC (например, с помощью метода конкурирующих точек, см. [1], §25).

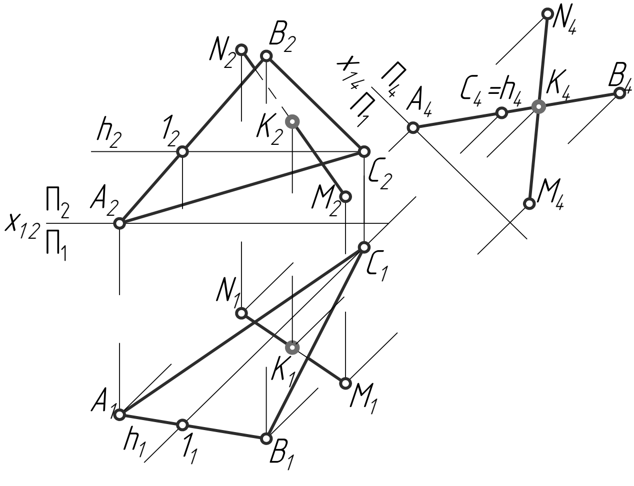


Рис. 7

Следует также отметить, что данную задачу можно решить с помощью метода секущей плоскости, рассмотренного, например, в [3], стр. 17.

3.2. Взаимное расположение двух плоскостей

Найти линию пересечения (KL) ΔABC и ΔMNQ, заданных своими проекциями $\{A_2B_2C_2; A_1B_1C_1\}$ и $\{M_2N_2Q_2; M_1N_1Q_1\}$ (рис. 8).

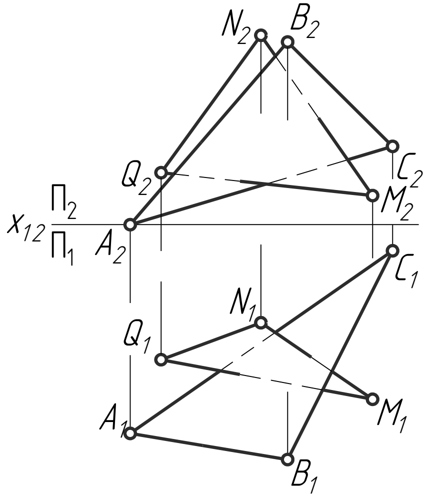


Рис. 8

Этап 1. Для получения решения достаточно перевести одну из заданных плоскостей в проецирующее положение. Тогда проекцией одной плоскости будет прямая, а искомая линия пересечения определяется пересечением полученной проекции плоскости с двумя любыми прямыми, принадлежащими другой плоскости (например, со сторонами треугольника, рис. 9).[1]

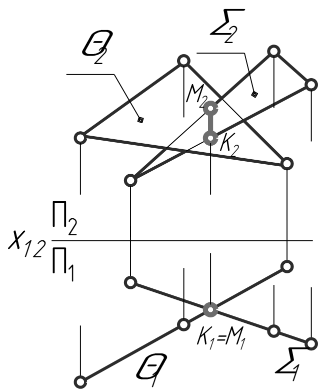


Рис. 9

Этап 2. Чтобы перевести одну из плоскостей (например, плоскость ΔABC) в проецирующее положение, достаточно выполнить одну замену плоскостей проекций, при этом новая плоскость проекций $\mathbf{\Pi}_4$ должна быть перпендикулярна заданной плоскости ΔABC. Это условие может быть выполнено, если хотя бы одна прямая, лежащая в плоскости ΔABC, будет перпендикулярна новой плоскости проекций. В качестве такой прямой следует использовать прямую уровня (например, горизонталь h на рис. 10), тогда при построении $\mathbf{\Pi}_4$ можно использовать теорему о проецировании прямого угла (см. [1], §15).

Этап 3. На основе приведенных рассуждений алгоритм решения задачи можно сформулировать следующим образом:

---

[1] Очевидно, что в такой постановке задачу можно рассматривать как нахождение точек пересечения плоскости с двумя прямыми, принадлежащими другой плоскости. Решение подобной задачи изложено в разделе 3.1.

1. Построить проекции любой прямой уровня, принадлежащей плоскости ΔABC. На рис. 10 построены проекции горизонтали h в последовательности: h_2 ($h_2 \| x_{12}$), 1_2 ($1_2 = h_2 \cap A_2C_2$), 1_1 ($1_1 \in A_1C_1$) и h_1 (через 1_1 и B_1).

2. Построить ось проекций x_{14} с учетом условия: ось проекций перпендикулярна построенной прямой уровня — $x_{14} \perp h_1$ (как на рис. 10) или $x_{14} \perp f_2$.

3. Построить проекции точек A, B, C, M, N и Q на введенной плоскости проекций $\mathbf{\Pi}_4$. Например, чтобы построить проекцию точки Q_4 на рис. 10, необходимо найти координату z_Q (измерить расстояние от проекции Q_2 до оси проекций x_{12}) и отложить ее от оси проекций x_{14} на линии связи Q_1Q_4. Проекции остальных точек на $\mathbf{\Pi}_4$ строятся в аналогичной последовательности.

   В результате построения точки A_4, B_4 и C_4 должны лежать на одной прямой. В противном случае следует искать ошибки в построениях.

4. Построить проекции K_4 и L_4, принадлежащих искомой линии пересечения KL: $K_4 = M_4N_4 \cap A_4B_4$, $K_4 = M_4Q_4 \cap A_4B_4$.

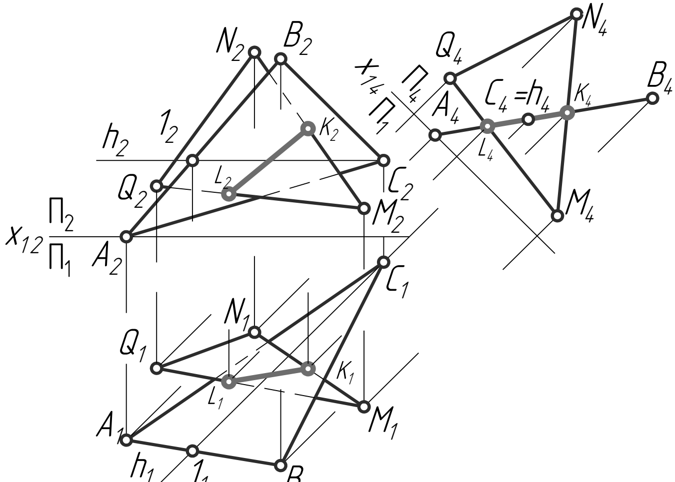


Рис. 10

5. Построить проекции линии KL на плоскости $\mathbf{\Pi}_1$ и $\mathbf{\Pi}_2$. Для этого достаточно найти проекции $\{K_2, K_1\}$ и $\{L_2, L_1\}$. Так как по построению $K \in MN$ и $L \in MQ$, то соответственно: $K_1 \in M_1N_1$ и $K_2 \in M_2N_2$; $L_1 \in M_1Q_1$ и $L_2 \in M_2Q_2$. Например, чтобы получить точку L_1, достаточно провести линию связи от L_4 до пересечения с M_1Q_1. Чтобы получить точку L_2, следует провести линию связи от L_1 до пересе-

чения с M_2Q_2. Положение проекций $\{K_2, K_1\}$ определяется в аналогичном порядке.

6. При необходимости определить видимость частей треугольников относительно друг друга (например, с помощью метода конкурирующих точек, см. [1], §25).

Следует также отметить, что данную задачу можно решить с помощью метода секущих плоскостей, рассмотренного, например, в [3], стр. 19.

4. Алгоритмы решения некоторых стандартных метрических задач способами преобразования комплексного чертежа

К **метрическим** относят задачи, связанные с определением истинных величин геометрических объектов, а также расстояний и углов между ними. Соответственно, все метрические задачи можно разбить на три группы:

- определение натуральной величины (площади) плоской фигуры или части поверхности;
- определение расстояния между двумя геометрическими объектами (между точкой и плоскостью, между двумя прямыми и т.д.);
- определение угла между двумя геометрическими объектами (между двумя прямыми, между прямой и плоскостью и т.д.).

Ниже рассмотрены решения наиболее часто встречающихся типовых метрических задач способом замены плоскостей проекций.

4.1. Расстояние от точки до прямой

Найти расстояние от точки M до прямой отрезка AB, заданных своими проекциями $\{M_2; M_1\}$ и $\{A_2B_2; A_1B_1\}$ (рис. 11).

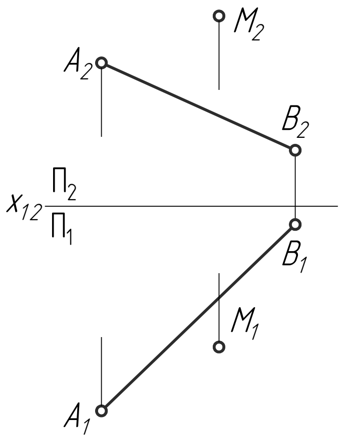


Рис. 11

Этап 1. Расстояние от точки до прямой определяется величиной перпендикуляра, опущенного из точки на заданную прямую. Для получения решения следует перевести прямую в проецирующее положение. В этом случае прямая будет перпендикулярна дополнительной плоскости проекций, и ее проекция выродится в точку. Тогда искомое расстояние равно величине отрезка прямой, ограниченного проекциями прямой и заданной точки (M) на дополнительной плоскости проекций (рис. 12).

Этап 2. Чтобы перевести прямую

общего положения в проецирующее положение, необходимо выполнить две замены плоскостей проекций, при этом первая вводимая дополнительная плоскость проекций **П**$_4$ должна быть параллельна заданной прямой, а вторая дополнительная плоскость **П**$_5$ — перпендикулярна прямой. При построении плоскости **П**$_5$ следует воспользоваться теоремой о проецировании прямого угла (см. [1], §15).

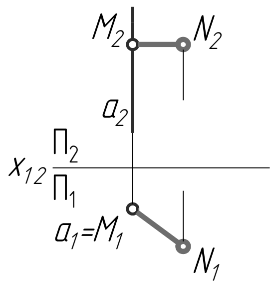


Рис. 12

Этап 3. На основе приведенных рассуждений алгоритм решения задачи можно сформулировать следующим образом:

1. Ввести дополнительную плоскость **П**$_4$, построив ось проекций x_{14} с учетом условия: ось проекций должна быть параллельна одной из проекций прямой (на рис. 13 построена $x_{14} \| A_1B_1$).
2. Построить проекции точек A, B, и M на дополнительной плоскости проекций **П**$_4$. Например, чтобы построить проекцию точки A_4 на рис. 13, необходимо провести (под прямым углом) линию связи от проекции A_1 на **П**$_4$, затем найти аппликату точки A (измерить расстояние от проекции A_2 до оси проекций x_{12}) и отложить ее от оси x_{14} на линии связи A_1A_4. Проекции остальных точек на **П**$_4$ строятся в аналогичной последовательности.

   Следует отметить, что прямая AB является прямой уровня по отношению к плоскости **П**$_4$.
3. Ввести дополнительную плоскость **П**$_5$, построив ось проекций x_{45} с учетом условия: ось проекций должна быть перпендикулярна проекции прямой на **П**$_4$ ($x_{45} \perp A_4B_4$).
4. Построить проекции точек A, B, и M на дополнительной плоскости проекций **П**$_5$. Например, чтобы построить проекцию точки A_5 на рис. 13, необходимо провести (под прямым углом) линию связи от проекции A_5 на **П**$_5$, затем измерить расстояние от проекции A_1 до оси проекций x_{14} и отложить ее от оси x_{45} на линии связи A_4A_5. Проекции остальных точек на **П**$_5$ строятся аналогично.

   Следует отметить, что прямая AB является проецирующей прямой по отношению к плоскости **П**$_5$. Если в результате окажется, что $A_5 \neq B_5$, следует искать ошибки в построениях.
5. Соединить проекции прямой ($A_5 = B_5$) с проекцией M_5 точки M. Величина полученного отрезка M_5N_5 ($N_5 = A_5 = B_5$) является искомым расстоянием между точкой M и прямой AB.
6. При необходимости построить проекции отрезка MN на остальных плоскостях проекций. Так, чтобы получить проекцию N_4, следует

из точки M_4 опустить перпендикуляр на A_4B_4 (если $MN \perp AB$ и AB является прямой уровня по отношению к $\mathbf{П}_4$, то на $\mathbf{П}_4$ прямой угол между MN и AB проецируется без искажения). Проекции N_1 и N_2 строятся по в соответствии с общими правилами способа замены плоскостей проекций (проекция N_1 — по известным проекциям N_5 и N_4, затем N_2 — по известным N_4 и N_1).

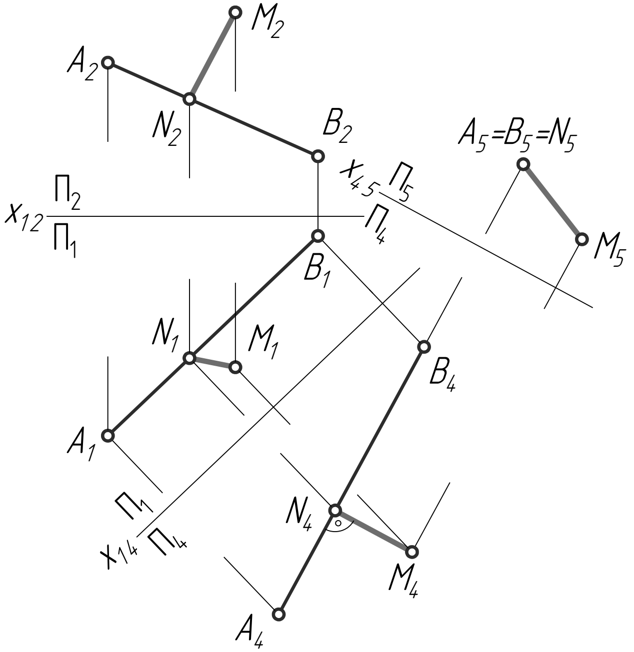


Рис. 13

4.2. Расстояние от точки до плоскости

Найти расстояние от точки M до плоскости ΔABC, заданных своими проекциями $\{M_2; M_1\}$ и $\{A_2B_2C_2; A_1B_1C_1\}$ (рис. 14).

Этап 1. Расстояние от точки до плоскости определяется величиной перпендикуляра, опущенного из точки на заданную плоскость. Для получения решения следует перевести плоскость в проецирующее положение. В таком положении проекцией плоскости будет прямая, а искомое расстояние определяется величиной перпендикуляра, опущенного из проекции точки на проекцию плоскости (рис. 15).

Этап 2. Чтобы перевести плоскость в проецирующее положение, достаточно выполнить одну замену плоскостей проекций, при этом новая плоскость проекций $\mathbf{П}_4$ должна быть перпендикулярна заданной плоскости ΔABC. Напомним: это условие может быть выполнено, если любая прямая (например, горизонталь h), лежащая в плоскости ΔABC, будет перпендикулярна новой плоскости проекций. В качестве такой прямой следует использовать прямую уровня, что позволяет при построении $\mathbf{П}_4$ воспользоваться теоремой о проецировании прямого угла.

Этап 3. На основе приведенных рассуждений алгоритм решения задачи можно сформулировать следующим образом:

1. Построить проекции любой прямой уровня, принадлежащей плоскости ΔABC. На рис. 16 построены проекции горизонтали h в последовательности: h_2 ($h_2 \| x_{12}$), 1_2 ($1_2 = h_2 \cap A_2C_2$), 1_1 ($1_1 \in A_1C_1$) и h_1 (через 1_1 и B_1).
2. Построить ось проекций x_{14} с учетом условия: ось проекций перпендикулярна построенной прямой уровня — $x_{14} \perp h_1$ (как на рис. 16) или $x_{14} \perp f_2$.
3. Построить проекции точек A, B, C и M на дополнительной плоскости проекций $\mathbf{П}_4$. Например, чтобы построить проекцию точки M_4 на рис. 16, следует найти координату z_M (измерить расстояние от проекции M_2 до оси проекций x_{12}) и отложить ее от оси проекций x_{14} на линии связи M_1M_4. Проекции остальных точек на $\mathbf{П}_4$ строятся в аналогичном порядке.

   В результате построения точки A_4, B_4 и C_4 должны лежать на одной прямой, иначе следует искать ошибки в сделанных построениях.
4. Опустить перпендикуляр из M_4 на проекцию $A_4B_4C_4$ ($M_4N_4 \perp A_4B_4C_4$). Величина построенного перпендикуляра MN определяет искомое расстояние от точки M до плоскости ABC. Построить проекцию M_4 искомой точки пересечения: $K_4 = M_4N_4 \cap A_4B_4$.
5. Построить проекции точки N на плоскости $\mathbf{П}_1$ и $\mathbf{П}_2$. Так как по условию $MN \perp ABC$, то MN перпендикулярна любой прямой, принадлежащей ABC. С учетом h

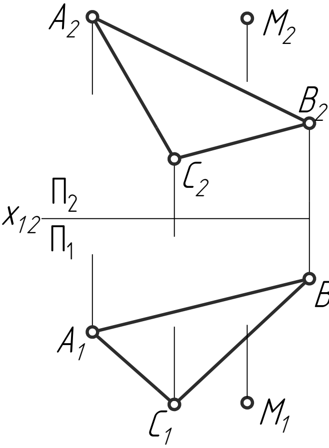


Рис. 14

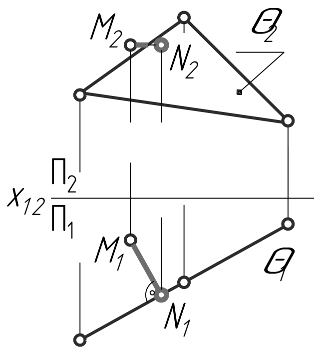


Рис. 15

$\subset ABC$ и $h \parallel \mathbf{П}_1$ получим, что $MN \perp h$ и прямой угол между MN и h спроецируется на $\mathbf{П}_1$ без искажения ($M_1N_1 \perp h_1$ по теореме о проецировании прямого угла). Определив положение N_1, по паре проекций $\{N_1; N_4\}$ легко найти N_2.

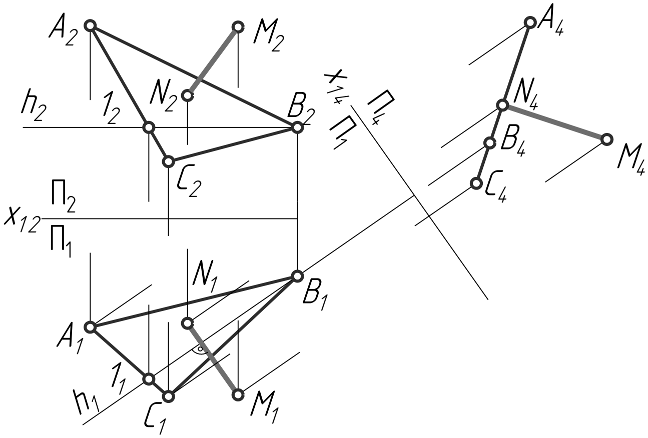


Рис. 16

6. При необходимости определить видимость перпендикуляра MN относительно плоскости ΔABC (например, с помощью метода конкурирующих точек, см. [1], §25).

4.3. Расстояние между двумя прямыми

Найти расстояние между скрещивающимися прямыми AB и CD, заданными своими проекциями $\{A_2B_2; A_1B_1\}$ и $\{C_2D_2; C_1D_1\}$ (рис. 17).

Этап 1. Определение расстояния между двумя прямыми имеет смысл в случаях, когда две прямые параллельны друг другу или скрещиваются. В этих случаях расстояние определяется величиной перпендикуляра, опущенного из любой точки одной прямой на другую прямую. Для получения решения следует перевести любую из двух прямых в проецирующее положение. Тогда проекцией выбранной прямой будет точка, а искомое расстояние определяется величиной перпендикуляра, опущенного из полученной точки на проекцию другой прямой (рис. 18).

Этап 2. Чтобы перевести прямую общего положения в проецирующее положение, необходимо выполнить две замены плоскостей проекций, при этом первая вводимая дополнительная плоскость проекций $\mathbf{П}_4$ должна быть параллельна заданной прямой, а вторая дополнительная плоскость $\mathbf{П}_5$ — перпендикулярна прямой. При построении плоскости $\mathbf{П}_5$ следует воспользоваться теоремой о проецировании прямого угла (см. [1], §15).

Этап 3. На основе приведенных рассуждений алгоритм решения задачи можно сформулировать следующим образом:

1. Выбрать прямую для перевода ее в проецирующее положение (на рис. 19 выбрана прямая, заданная проекциями отрезка *AB*).
2. Ввести дополнительную плоскость **П**$_4$, построив ось проекций x_{24} с учетом условия: ось проекций должна быть параллельна одной из проекций выбранной прямой (на рис. 19 построена $x_{24} \| A_2B_2$).
3. Построить проекции точек *A*, *B*, *C* и *D* на дополнительной плоскости проекций **П**$_4$. Например, чтобы построить проекцию точки C_4 на рис. 19, необходимо провести (под прямым углом) линию связи от проекции C_2 на **П**$_4$, затем найти ординату точки *C* (измерить расстояние от проекции C_1 до оси проекций x_{12}) и отложить ее от оси x_{24} на линии связи C_2C_4. Проекции остальных точек на **П**$_4$ строятся в аналогичной последовательности.

   Следует отметить, что прямая *AB* является прямой уровня по отношению к плоскости **П**$_4$.

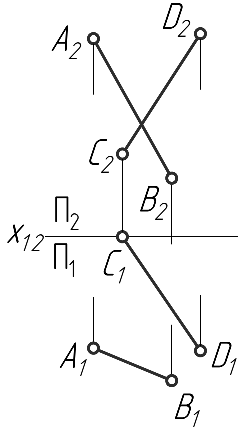


Рис. 17

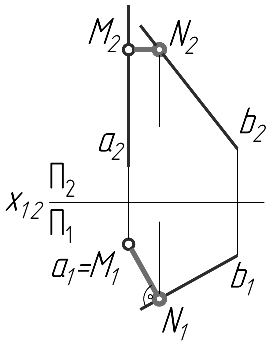


Рис. 18

4. Ввести дополнительную плоскость **П**$_5$, построив ось проекций x_{45} с учетом условия: ось проекций должна быть перпендикулярна проекции выбранной прямой на **П**$_4$ ($x_{45} \perp A_4B_4$).
5. Построить проекции точек *A*, *B*, *C* и *D* на дополнительной плоскости проекций **П**$_5$. Например, чтобы построить проекцию точки C_5 на рис. 19, необходимо провести (под прямым углом) линию связи от проекции C_4 на **П**$_5$, затем измерить расстояние от проекции C_2 до оси проекций x_{24} и отложить ее от оси x_{45} на линии связи C_4C_5. Проекции остальных точек на **П**$_5$ строятся в такой же последовательности.

   Следует отметить, что прямая *AB* является проецирующей прямой по отношению к плоскости **П**$_5$. Если в результате построений окажется, что $A_5 \neq B_5$, следует искать ошибки в чертеже.
6. Из проекции прямой A_5B_5 ($A_5 = B_5$) опустить перпендикуляр на проекцию другой прямой C_5D_5. Величина полученного отрезка M_5N_5

($M_5 = A_5 = B_5$) является искомым расстоянием между AB и CD.

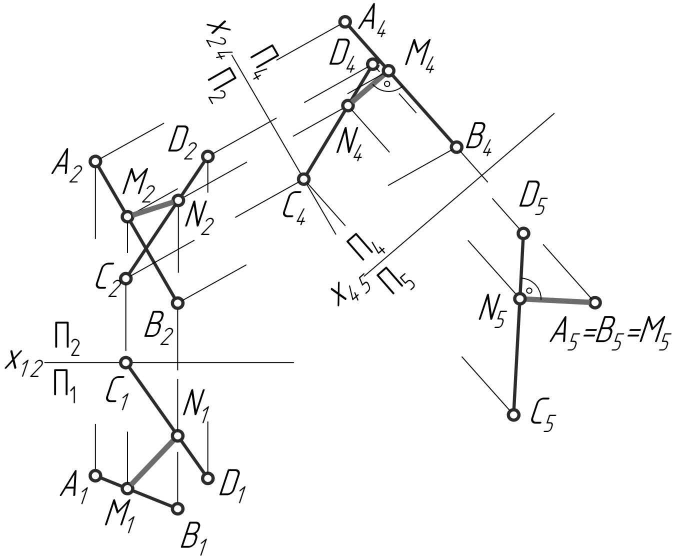


Рис. 19

7. При необходимости построить проекции отрезка MN на остальных плоскостях проекций. Так, чтобы получить проекцию N_4, следует провести линию связи из точки N_5 до ее пересечения с проекцией C_4D_4 ($N \in CD \Rightarrow N_4 \in C_4D_4$). Для получения проекции M_4 необходимо опустить перпендикуляр из N_4 на A_4B_4 (если $MN \perp AB$ и AB является прямой уровня по отношению к $\mathbf{П}_4$, то на $\mathbf{П}_4$ прямой угол между MN и AB проецируется без искажения). Остальные проекции точек M и N строятся в соответствии с общими правилами способа замены плоскостей проекций.

4.4. Расстояние между параллельными плоскостями

Найти расстояние между параллельными плоскостями, заданными $\Delta ABC\{A_2B_2C_2; A_1B_1C_1\}$ и $\Delta MNQ\{M_2N_2Q_2; M_1N_1Q_1\}$ (рис. 20).

Этап 1. Расстояние между двумя параллельными плоскостями определяется величиной отрезка общего к ним перпендикуляра, отсекаемого этими плоскостями. Для получения решения следует перевести плоскости в проецирующее положение. В таком положении проекции обоих плоскостей выродятся в параллельные прямые, при этом искомое расстояние определяется величиной общего перпендикуляра к полученным прямым (рис. 21).

Этап 2. Чтобы перевести плоскость в проецирующее положение, достаточно выполнить одну замену плоскостей проекций. Так как заданные плоскости параллельны, то новая плоскость проекций **П**$_4$ должна быть перпендикулярна обоим плоскостям (**П**$_4 \perp ABC \cup$ **П**$_4 \perp MNQ$). Напомним, что две плоскости взаимно перпендикулярны, если любая прямая одной плоскости (например, горизонталь h плоскости ABC), будет перпендикулярна другой плоскости (**П**$_4$). Поэтому при построении **П**$_4$ следует выполнить условие $h \perp$ **П**$_4$, что нетрудно сделать, применив теорему о проецировании прямого угла.

Этап 3. На основе приведенных рассуждений алгоритм решения задачи можно сформулировать следующим образом:

1. Построить проекции любой прямой уровня, принадлежащей одной из заданных плоскостей. На рис. 22 построены проекции горизонтали h в плоскости ABC: h_2 ($h_2 \| x_{12}$), 1_2 ($1_2 = h_2 \cap A_2C_2$), 1_1 ($1_1 \in A_1C_1$) и h_1 (через 1_1 и B_1).
2. Построить ось проекций x_{14} по условию: ось проекций перпендикулярна построенной прямой уровня — $x_{14} \perp h_1$ (рис. 22) или $x_{14} \perp f_2$.
3. Построить проекции точек A, B, C, M, N и Q на дополнительной плоскости проекций **П**$_4$. Например, чтобы построить проекцию точки Q_4 на рис. 22, следует найти координату z_Q (измерить расстояние от проекции Q_2 до оси проекций x_{12}) и отложить ее от оси проекций x_{14} на линии связи Q_1Q_4. Проекции остальных точек на **П**$_4$ строятся в аналогичном порядке.

   В результате построения каждая группа точек — {A_4, B_4, C_4} и {M_4, N_4, Q_4} должна лежать на одной из параллельных прямых. В противном случае следует искать

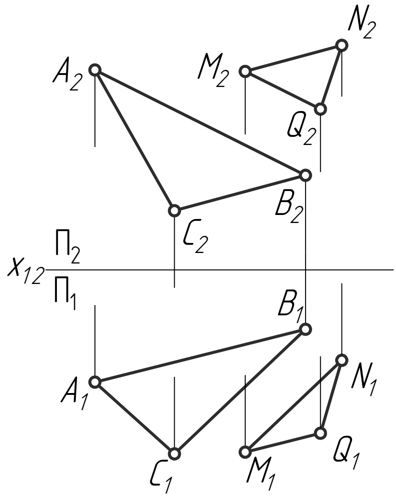


Рис. 20

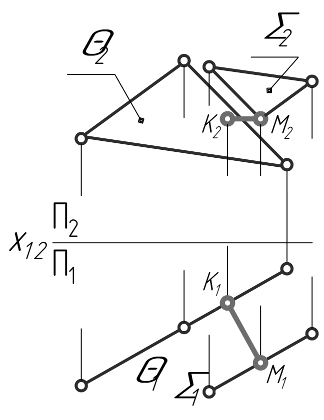


Рис. 21

ошибки в сделанных построениях.

4. Провести произвольно перпендикуляр к полученным отрезкам прямых. Например, на рис. 22 перпендикуляр проведен через проекцию M_4 точки M. Использование заданных точек облегчает построение проекций перпендикуляра на исходных плоскостях проекций $\mathbf{\Pi}_1$ и $\mathbf{\Pi}_2$. Величина полученного отрезка MK ($|MK| = |M_4K_4|$) — искомое расстояние между параллельными плоскостями.
5. Построить проекции перпендикуляра на плоскости $\mathbf{\Pi}_1$ и $\mathbf{\Pi}_2$. Так как по условию $MK \perp ABC$ и $MK \perp MNQ$, то MK перпендикулярен любой прямой, принадлежащей ABC или MNQ. С учетом $h \subset ABC$ и $h \| \mathbf{\Pi}_1$ получим, что $MK \perp h$ и прямой угол между MK и h спроецируется на $\mathbf{\Pi}_1$ без искажения ($M_1K_1 \perp h_1$ по теореме о проецировании прямого угла). Если одна точка перпендикуляра уже задана (как точка М на рис. 22), то для построения других его проекций достаточно определить положение проекций K_1 и K_2.
6. При необходимости определить видимость перпендикуляра MN относительно плоскостей ΔABC и ΔMNQ (например, с помощью метода конкурирующих точек, см. [1], §25).

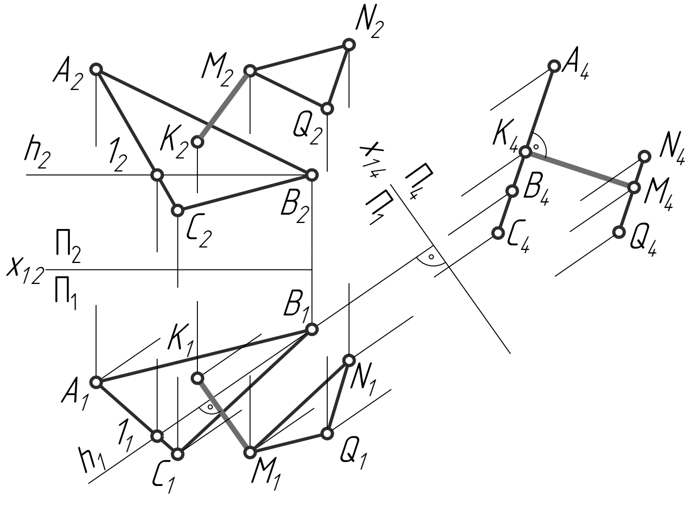


Рис. 22

4.5. Угол между скрещивающимися прямыми

Найти угол между скрещивающимися прямыми отрезков AB и CD, заданными своими проекциями $\{A_2B_2; A_1B_1\}$ и $\{C_2D_2; C_1D_1\}$ (рис. 23).

Этап 1. Определение угла между двумя прямыми имеет смысл в случаях, когда две прямые пересекаются или скрещиваются. При этом угол между скрещивающимися прямыми определяется посредством двух пересекающихся прямых, каждая из которых параллельна соответствующей скрещивающейся прямой. Таким образом, если прямые пересекаются, то для нахождения угла между ними следует перевести плоскость, в которой лежат пересекающиеся прямые, в положение плоскости уровня (тогда искомый угол спроецируется в натуральную величину, рис. 24). Если же прямые скрещиваются, то для нахождения угла их вначале следует заменить пересекающимися прямыми — спроецировать скрещивающиеся прямые на плоскость, параллельную обоим прямым, а затем перевести эту плоскость в положение плоскости уровня.

Этап 2. Чтобы перевести плоскость общего положения в положение плоскости уровня, необходимо выполнить две замены плоскостей проекций. При этом первая вводимая дополнительная плоскость проекций $\mathbf{П}_4$ должна быть перпендикулярна заданной плоскости, а вторая дополнительная плоскость $\mathbf{П}_5$ — параллельна ей. При построении плоскости $\mathbf{П}_4$ следует применить теорему о проецировании прямого угла (см. [1], §15).

Этап 3. На основе приведенных рассуждений алгоритм решения задачи можно сформулировать следующим образом:

1. Определить, как взаимно располагаются заданные прямые. В примере рис. 23 видно, что прямые, заданные проекциями отрезков *AB* и *CD*, скрещиваются (точки пересечения проекций отрезков не лежат на одной линии связи).
2. Если прямые скрещиваются — спроецировать их на плоскость, параллельную обоим прямым. Напомним: прямая параллельна плоскости, если в плоскости найдется хотя бы одна прямая, параллельная заданной прямой. Тогда для проецирования скрещивающихся прямых достаточно построить пересекающиеся прямые, каждая из которых параллельна соответствующей скрещивающейся прямой. При построении следует воспользоваться свойством ортогонального проецирования: если прямые параллельны, то их одноименные проекции так же параллельны.

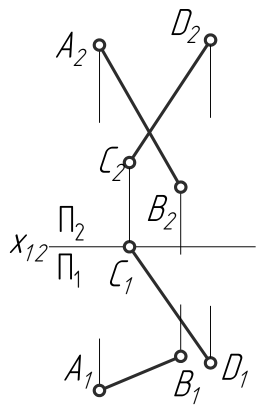


Рис. 23

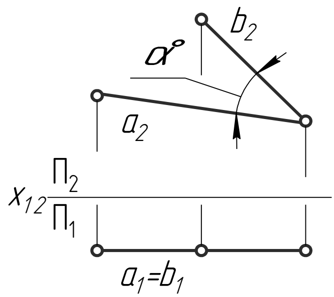


Рис. 24

Например, на рис. 25 построены проекции прямых m ($m \| AB$) и n ($n \| CD$). Исходя из приведенных рассуждений, проекции прямых построены с учетом следующих условий:

- если $m \| AB$, то $m_1 \| A_1B_1$ и $m_2 \| A_2B_2$. Аналогично $n \| CD \Rightarrow n_1 \| C_1D_1 \cup n_2 \| C_2D_2$;
- если прямые m и n пересекаются ($n \cap m$), то точки пересечения их проекций (K_1 и K_2) является проекцией их точки пересечения (свойство ортогонального проецирования) — $K = n \cap m \Rightarrow K_1 = n_1 \cap m_1 \cup K_2 = n_2 \cap m_2$.

Таким образом, построение прямых m и n можно выполнить в следующем порядке: в произвольном месте чертежа построить $m_2 \| A_2B_2$ и $n_2 \| C_2D_2$; найти их точку пересечения K_2; произвольно (соблюдая, связь проекций) построить K_1; через K_1 провести $m_1 \| A_1B_1$ и $n_1 \| C_1D_1$.

3. Построить проекции любой прямой уровня, принадлежащей полученной в п. 2 плоскости (плоскость задана как $m \cap n$). На рис. 25 построены проекции фронтали f: f_1 ($f_1 \| x_{12}$), 1_1 ($1_1 = f_1 \cap n_1$), 2_1 ($2_1 = f_1 \cap m_1$), 1_2 ($1_2 \in n_2$), 2_2 ($2_2 \in m_2$) и f_2 (через 1_2 и 2_2).
4. Ввести дополнительную плоскость $\mathbf{П}_4$, построив ось проекций x_{24} с учетом условия: ось проекций должна быть перпендикулярна построенной прямой уровня (на рис. 25 построена $x_{24} \perp f_2$).
5. Построить проекции точек K, 1 и 2 на дополнительной плоскости проекций $\mathbf{П}_4$. Например, чтобы построить проекцию точки K_4 на рис. 25, необходимо провести (под прямым углом) линию связи от проекции K_2 на $\mathbf{П}_4$, затем найти ординату точки K (измерить расстояние от проекции K_1 до оси проекций x_{12}) и отложить ее от оси x_{24} на линии связи K_2K_4. Проекции остальных точек на $\mathbf{П}_4$ строятся в аналогичной последовательности.

   Следует отметить, что на $\mathbf{П}_4$ проекции точек 1 и 2 должны совпадать ($1_4 = 2_4$).
6. Ввести дополнительную плоскость $\mathbf{П}_5$, построив ось проекций x_{45} с учетом условия: ось проекций должна быть параллельна проекции плоскости на $\mathbf{П}_4$ ($x_{45} \| 1_4K_4$).
7. Построить проекции точек K, 1 и 2 на дополнительной плоскости проекций $\mathbf{П}_5$. Так, чтобы построить проекцию точки 1_5 на рис. 25, необходимо провести (под прямым углом) линию связи от проекции 1_4 на $\mathbf{П}_5$, затем измерить расстояние от проекции 1_2 до оси проекций x_{24} и отложить ее от оси x_{45} на линии связи 1_41_5. Проекции остальных точек на $\mathbf{П}_5$ строятся в такой же последовательности.

По отношению к $\mathbf{П}_5$ плоскость, образованная пересечением прямых m и n, занимает положение плоскости уровня, а следовательно, угол α между *m* и *n* проецируется на Π_5 без искажения. Угол между *AB* и *CD* также равен α (исходя из условий построения *m* и *n*).

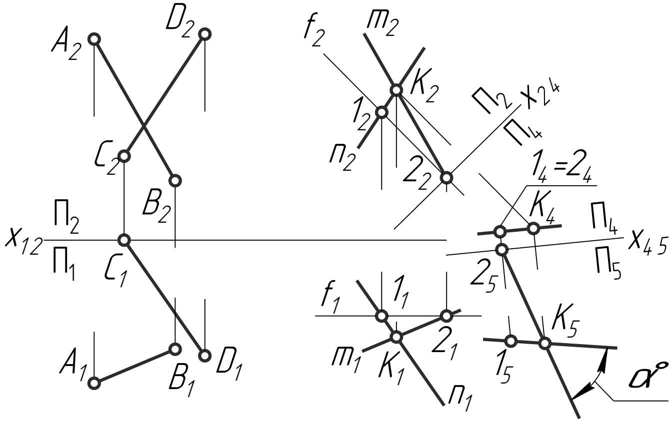


Рис. 25

4.6. Угол между прямой и плоскостью

Найти угол между отрезком прямой *MN* и плоскостью *ABC*, заданными своими проекциями $\{M_2N_2; M_1N_1\}$ и $\{A_2B_2C_2; A_1B_1C_1\}$ (рис. 26).

Этап 1. Определение угла между прямой и плоскостью имеет смысл в случаях, когда прямая и плоскость пересекаются. При этом угол α между прямой и плоскостью определяется как угол между прямой и ее проекцией на заданную плоскость. Вместе с тем решение задачи значительно упрощается, если искать не α, а дополнительный к нему угол β ($\beta = 90° - \alpha$). Проекции этого угла можно получить, опустив из любой точки прямой перпендикуляр на плоскость. Чтобы получить натуральную величину угла β (а с ним, очевидно, и угла α), необходимо перевести плоскость, в которой лежит β, в положение плоскости уровня (см. рис. 24 в подразделе 4.5).

Этап 2. Исходя из особенностей задачи, выявленных на этапе 1, решение можно разбить на две части:

1) из любой точки, принадлежащей прямой *MN*, опустить перпендикуляр на плоскость *ABC*;

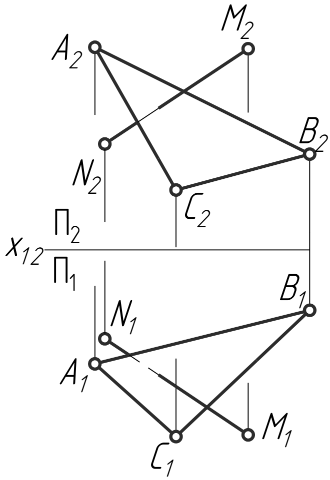


Рис. 26

2) перевести плоскость, образованную заданной прямой MN и построенным перпендикуляром, в положение плоскости уровня.

Для решения первой части задачи — построения перпендикуляра, следует воспользоваться прямыми частного положения.

Во второй части решения все операции производятся только над плоскостью (обозначим её $\mathbf{\Omega}$), образованной пересечением MN и построенного перпендикуляра. Чтобы перевести плоскость общего положения в положение плоскости уровня, необходимо выполнить две замены плоскостей проекций. При этом первая вводимая дополнительная плоскость проекций $\mathbf{\Pi}_4$ должна быть перпендикулярна плоскости $\mathbf{\Omega}$, а вторая дополнительная плоскость $\mathbf{\Pi}_5$ — параллельна ей. При построении плоскости $\mathbf{\Pi}_4$ следует воспользоваться теоремой о проецировании прямого угла (см. [1], §15).

Этап 3. На основе приведенных рассуждений алгоритм решения задачи можно сформулировать следующим образом:

1. Построить проекции фронтали и горизонтали, принадлежащих плоскости ABC. На рис. 27 проекции прямых уровня построены следующим образом:

- горизонталь h: h_2 ($h_2 \| x_{12} \cup B \in h$), 1_2 ($1_2 = h_2 \cap A_2C_2$), 1_1 ($1_1 \in A_1C_1$), и h_1 (через 1_1 и B_1);
- фронталь f: f_1 ($f_1 \| x_{12} \cup A \in f$), 2_1 ($2_1 = f_1 \cap B_1C_1$), 2_2 ($2_2 \in B_2C_2$), и f_2 (через A_2 и 2_2);

2. Построить проекции перпендикуляра k из точки M на плоскость ABC из условий: $k_2 \perp f_2$, $k_1 \perp h_1$.
3. Построить в полученной плоскости $\mathbf{\Omega}(MN \cap k)$ любую прямую уровня, с помощью которой можно будет перевести плоскость в проецирующее положение. На рис. 27 в плоскости $\mathbf{\Omega}$ построена фронталь f^*: f_1 ($f^*_1 = f_1$), 3_1 ($3_1 = f^*_1 \cap M_1N_1$), 4_1 ($4_1 = f^*_1 \cap k_1$), 3_2 ($3_2 \in M_2N_2$), 4_2 ($4_2 \in k_2$) и f^*_2 (через 3_2 и 4_2).
4. Ввести дополнительную плоскость $\mathbf{\Pi}_4$, построив ось проекций x_{24} с учетом условия: ось проекций должна быть перпендикулярна построенной прямой уровня (на рис. 27 построена $x_{24} \perp f^*_2$).
5. Построить проекции точек M, N, 3 и 4 на дополнительной плоскости проекций $\mathbf{\Pi}_4$. Например, чтобы построить проекцию точки M_4 на рис. 27, необходимо провести линию связи от проекции M_2 на $\mathbf{\Pi}_4$ (перпендикулярно x_{24}), затем найти ординату точки M (измерить расстояние от проекции M_1 до оси проекций x_{12}) и отложить ее от оси x_{24} на линии связи M_2M_4. Проекции остальных точек на $\mathbf{\Pi}_4$ строятся в аналогичной последовательности.

   Следует отметить, что на $\mathbf{\Pi}_4$ проекции точек 3 и 4 должны совпадать ($3_4 = 4_4$).

6. Ввести дополнительную плоскость $\mathbf{П}_5$, построив ось проекций x_{45} с учетом условия: ось проекций должна быть параллельна проекции плоскости $\mathbf{\Omega}$ на $\mathbf{П}_4$. Так как $MN \subset \mathbf{\Omega}$, то ось проекций x_{45} можно построить параллельно M_4N_4 ($x_{45} \| 1_4K_4$).
7. Построить проекции точек M, N, 3 и 4 на дополнительной плоскости проекций $\mathbf{П}_5$. Так, чтобы построить проекцию точки N_5 на рис. 27, необходимо провести (под прямым углом) линию связи от проекции N_4 на $\mathbf{П}_5$, затем измерить расстояние от проекции N_2 до оси проекций x_{24} и отложить ее от оси x_{45} на линии связи N_4N_5. Проекции других точек на $\mathbf{П}_5$ строятся в такой же последовательности.

   В результате построений получим проекцию угла NM_4 (угол между MN и перпендикуляром к плоскости) в натуральную величину.

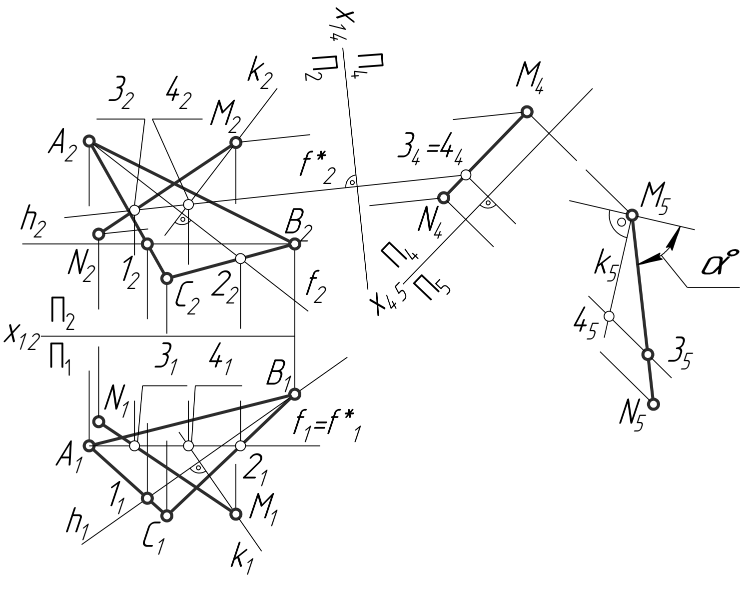


Рис. 27

8. Построить угол, дополнительный к углу NM_4: провести прямую перпендикулярно проекции прямой k_5. Полученный угол α — искомый угол между прямой MN и плоскостью ABC.

4.7. Угол между двумя плоскостями

Найти угол между плоскостями $\mathbf{\Omega}(ABC)$ и $\mathbf{\Sigma}(MBC)$, заданными своими проекциями $\{A_2B_2C_2; A_1B_1C_1\}$ и $\{M_2B_2C_2; M_1B_1C_1\}$ (рис. 28).

Этап 1. Угол между двумя плоскостями определяется как угол между двумя прямыми, каждая из которых принадлежит соответствующей плоскости и перпендикулярна линии пересечения этих плоскостей. Угол легко найти, если обе заданные плоскости займут проецирующее положение относительно плоскости проекций (рис. 29); при этом линия пересечения плоскостей также займет проецирующее положение. Таким образом, чтобы найти угол между двумя плоскостями, необходимо перевести их линию пересечения в проецирующее положение.

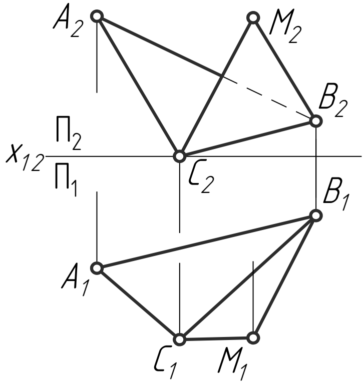


Рис. 28

Этап 2. Чтобы перевести прямую общего положения в проецирующее положение, необходимо выполнить две замены плоскостей проекций, при этом первая вводимая дополнительная плоскость проекций $\mathbf{\Pi}_4$ должна быть параллельна заданной прямой, а вторая дополнительная плоскость $\mathbf{\Pi}_5$ — перпендикулярна прямой. При построении плоскости $\mathbf{\Pi}_5$ следует использовать теорему о проецировании прямого угла (см. [1], §15).

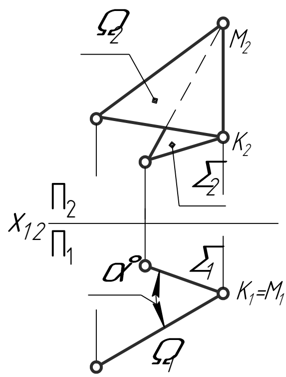


Рис. 29

Этап 3. Если линия пересечения плоскостей задана на чертеже явно (на рис. 30 — линия *BC*), то алгоритм решения задачи можно сформулировать следующим образом:

1. Ввести дополнительную плоскость $\mathbf{\Pi}_4$, построив ось проекций x_{24} с учетом условия: ось проекций должна быть параллельна одной из проекций линии пересечения плоскостей (на рис. 30 построена $x_{14} \| B_1C_1$).
2. Построить проекции точек *A*, *B*, *C* и *M* на дополнительной плоскости проекций $\mathbf{\Pi}_4$. Например, чтобы построить проекцию точки B_4 на рис. 30, необходимо провести (под прямым углом) линию связи от проекции B_1 на $\mathbf{\Pi}_4$, затем найти аппликату точки *B* (измерить расстояние от проекции B_2 до оси проекций x_{12}) и отложить ее от оси x_{14} на линии связи B_1B_4. Проекции остальных точек на $\mathbf{\Pi}_4$ строятся в аналогичной последовательности.

Следует отметить, что прямая *BC* является прямой уровня по отношению к плоскости $\mathbf{\Pi}_4$.

3. Ввести дополнительную плоскость **П**$_5$, построив ось проекций x_{45} с учетом условия: ось проекций должна быть перпендикулярна проекции линии пересечения BC на **П**$_4$ ($x_{45} \perp B_4C_4$).

4. Построить проекции точек A, B, C и M на дополнительной плоскости проекций **П**$_5$. Например, чтобы построить проекцию точки B_5 на рис. 30, необходимо под прямым углом провести линию связи от проекции B_4 на **П**$_5$, затем измерить расстояние от проекции B_1 до оси проекций x_{14} и отложить ее от оси x_{45} на линии связи B_4B_5. Проекции других точек на **П**$_5$ строятся в такой же последовательности.

   Следует отметить, что прямая BC является проецирующей прямой по отношению к плоскости **П**$_5$. Если после построений окажется, что $B_5 \neq C_5$, следует найти и исправить ошибки в чертеже.

   В результате искомый угол α определяется как угол между проекциями A_5B_5 и M_5B_5 плоскостей.

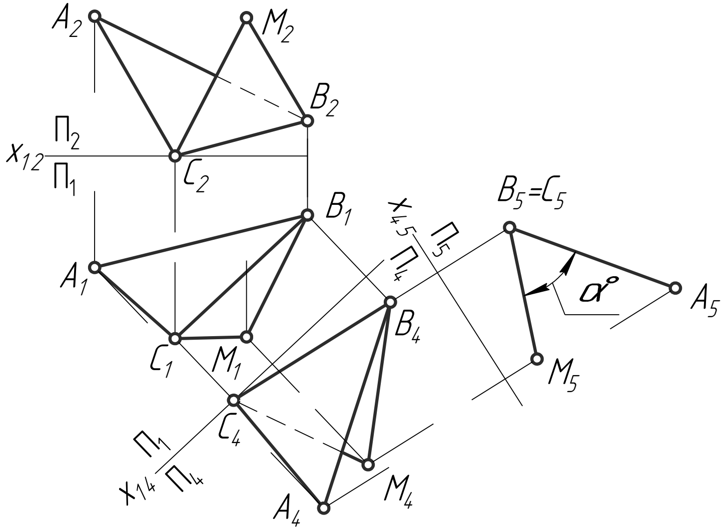


Рис. 30

Если линия пересечения явно не задана на чертеже, то перед выполнением рассмотренных построений следует найти линию пересечения (способом секущей плоскости или одним из способов преобразования чертежа, рассмотренных в разделе 3.2). Пример решения приведен на рис. 31.

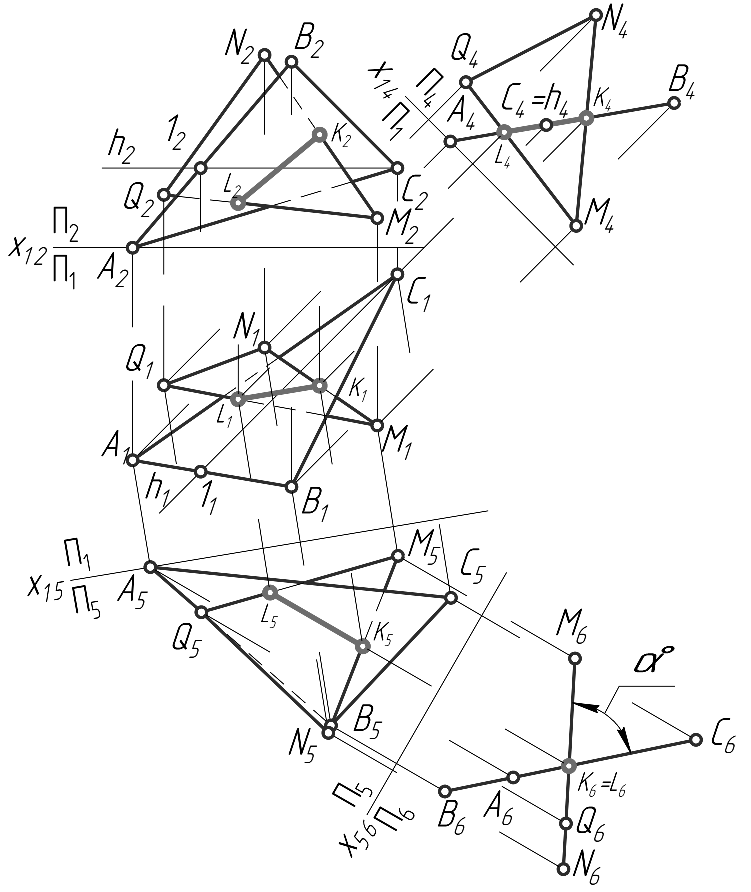


Рис. 31

4.8. Площадь плоской фигуры

Найти площадь плоской фигуры — треугольника ABC, заданного своими проекциями $\{A_2B_2C_2; A_1B_1C_1\}$ (рис. 32).

Этап 1. В общем случае для определения (по чертежу) площади плоской фигуры следует получить изображение этой фигуры в натуральную величину. Для этого необходимо перевести плоскость, которой принадлежит фигура, в положение плоскости уровня (рис. 33).

Этап 2. Чтобы перевести плоскость общего положения в положение плоскости уровня, необходимо выполнить две замены плоскостей проекций. При этом первая вводимая дополнительная плоскость проекций $\mathbf{\Pi}_4$ должна быть перпендикулярна плоскости фигуры, а вторая дополнительная плоскость $\mathbf{\Pi}_5$ — параллельна ей. При построении плоскости $\mathbf{\Pi}_4$ следует воспользоваться теоремой о проецировании прямого угла (см. [1], §15).

Этап 3. На основе приведенных рассуждений алгоритм решения задачи можно сформулировать следующим образом:

1. Построить проекции прямой уровня, принадлежащей плоскости фигуры. На рис. 34 построены проекции горизонтали h: h_2 ($h_2 \| x_{12} \cup B \in h$), 1_2 ($1_2 = h_2 \cap A_2C_2$), 1_1 ($1_1 \in A_1C_1$), и h_1 (через 1_1 и B_1).

2. Ввести дополнительную плоскость $\mathbf{\Pi}_4$, построив ось проекций x_{14} с учетом условия: ось проекций должна быть перпендикулярна построенной прямой уровня (на рис. 34 построена $x_{14} \perp h_1$).

3. Построить проекцию фигуры на введенной дополнительной плоскости. Для треугольника ABC (рис. 34) достаточно построить проекции его вершин — точек A, B и C на $\mathbf{\Pi}_4$. Например, чтобы построить проекцию точки A_4 на рис. 34, необходимо провести линию связи от проекции A_1 на $\mathbf{\Pi}_4$ (перпендикулярно x_{14}), затем найти аппликату точки A (измерить расстояние от проекции A_2 до оси проекций x_{12}) и отложить ее от оси x_{14} на линии связи A_1A_4. Проекции остальных точек на $\mathbf{\Pi}_4$ строятся аналогично.

   Следует отметить, что на $\mathbf{\Pi}_4$ проекции точек A, B и C должны лежать на одной прямой. В противном случае следует найти и исправить ошибки в построениях.

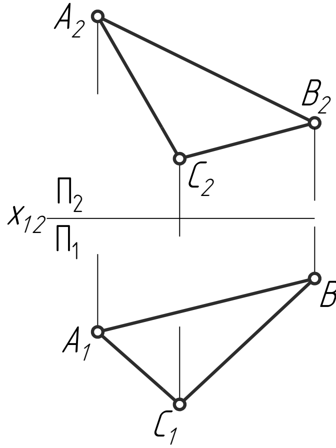


Рис. 32

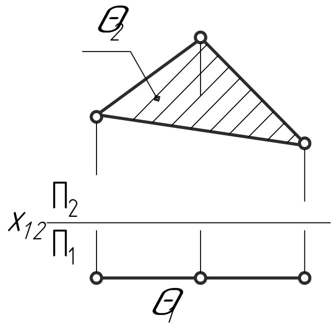


Рис. 33

4. Ввести дополнительную плоскость $\mathbf{\Pi}_5$, построив ось проекций x_{45} с учетом условия: ось проекций должна быть параллельна проекции фигуры на $\mathbf{\Pi}_4$ ($x_{45} \| A_4B_4C_4$).

5. Построить проекции точек A, B и C на дополнительной плоскости проекций $\mathbf{\Pi}_5$. Построения выполняются в той же последовательности, что и построения проекций точек на $\mathbf{\Pi}_4$. Так, чтобы построить проекцию точки A_5 на рис. 34, необходимо провести (под прямым

углом) линию связи от проекции A_4 на $\mathbf{П}_5$, затем измерить расстояние от проекции N_1 до оси проекций x_{14} и отложить ее от оси x_{45} на линии связи A_4A_5.

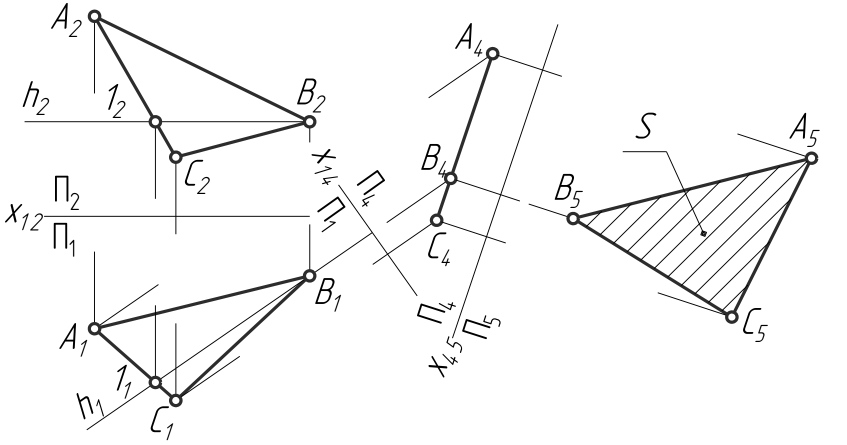


Рис. 34

В результате построений получим проекцию фигуры (треугольника *ABC*) в натуральную величину, что позволяет определить ее площадь.

На примере указанной задачи рассмотрим частный способ плоскопараллельного перемещения — способ вращения геометрических объектов вокруг прямой уровня. Способ позволяет получить решение задачи, используя только одно перемещение фигуры.

Условие задачи приведено на рис. 35. Иллюстрация решения приведена на рис. 36. В плоскости треугольника ABC построена горизонталь h (проекции h_1 и h_2), которая будет служить осью вращения треугольника.

Все точки треугольника вращаются вокруг h по окружностям, причем все траектории движения точек (окружности) спроецируются на $\mathbf{П}_1$ в прямые линии (траектории вращения перпендикулярны h и, следовательно, перпендикулярны $\mathbf{П}_1$). Кроме того, точки B и 1 треугольника не изменят своего положения в результате вращения, так как они принадлежат горизонтали h.

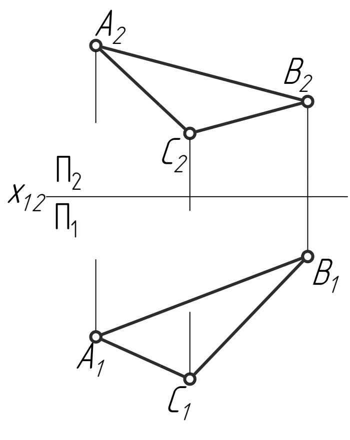


Рис. 35

На основании этих рассуждений можно найти траектории вращения других точек плоской фигуры относительно h. Отметим также, что для треугольника достаточно найти новое положение одной точки (не лежащей на h), чтобы определить результирующее положение всей фигуры.

В качестве такой точки на рис. 36 взята точка A. Радиус вращения A вокруг горизонтали h равен длине отрезка $A2$. Проекции этого отрезка $A_1 2_1$ и $A_2 2_2$ строятся (согласно теореме о проецировании прямого угла) из условия $A2 \perp h$: из точки A_1 опускается перпендикуляр на h_1, на пересечении перпендикуляра с h_1 отмечается проекция 2_1, проекция 2_2 лежит на линии связи с 2_1 и принадлежит h_2.

Чтобы найти радиус траектории вращения точки A (R_A), найдем величину отрезка $A2$. На рис. 36 натуральная величина A_2 определена методом прямоугольного треугольника: найдено превышение Δz_A проекции A_2 над 2_2, и по катетам $A_1 2_1$ и Δz_A на горизонтальной проекции построен прямоугольный треугольник. Гипотенуза треугольника определяет величину отрезка A_2, а следовательно, и величину радиуса траектории ddR_A.

Зная, что траектория вращения A проходит через точку 2 (напомним, что $A_2 \perp h$), а также зная радиус траектории R_A, нетрудно найти новое положение точки A (A'), при котором плоскость треугольника ABC будет параллельна $\mathbf{П}_1$: $|A_1'2_1| = |R_A|$. На рис. 36 положение точки A_1' найдено с помощью циркуля.

Новое положение C_1' проекции C_1 найдено из двух условий: во-первых, точка C должна лежать на прямой отрезка A_1 (и следовательно, $C_1' \in A_1'1_1$), а во-вторых, движение точки C также перпендикулярно h. Таким образом, проекция C_1' определяется как пересечение прямой отрезка $A_1'1_1$ и перпендикуляра, опущенного из C_1 на проекцию h_1.

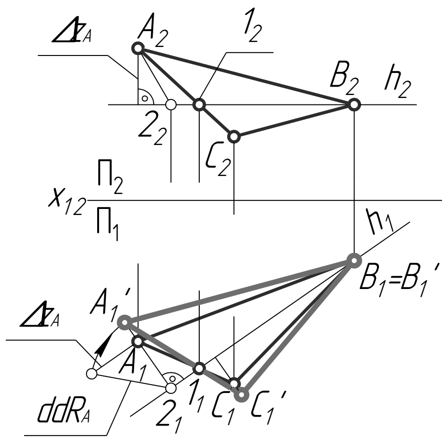


Рис. 45

Соединяя проекции точек A_1', C_1' и B_1 ($B_1 = B_1'$), получим проекцию треугольника ABC, расположенного параллельно плоскости $\mathbf{П}_1$. То есть в этом положении ABC проецируется на $\mathbf{П}_1$ в натуральную величину, что дает возможность определить его площадь.

5. Контрольная работа

Контрольная работа (КР) должна быть выполнена в срок, установленный графиком самостоятельной работы студента, и оформлена в соответствии с требованиями, изложенными в разделе 5.2 пособия. Выбор варианта задания производится по порядковому номеру студента в группе из таблицы, приведенной в разделе 5.4. Задание на вторую часть КР выдается преподавателем индивидуально каждому студенту.

Студент должен исправить все ошибки, найденные при проверке КР, и представить работу к защите. В случае неудовлетворительной защиты КР преподаватель имеет право выдать новый вариант задания.

5.1. Задание на контрольную работу

Часть 1.

Построить проекции пирамиды высотой m = 50 мм, в основании которой лежит правильный треугольник со стороной n = 40 мм. Основание пирамиды лежит в плоскости $\boldsymbol{\Theta}$, заданной точками A, B и C, причем точка A является одной из вершин основания, а одна из прилегающих к этой точке сторон основания лежит на биссектрисе угла BAC.

Часть 2.

Найти точки пересечения прямой l с гранями пирамиды и показать относительную видимость элементов.

5.2. Требования к оформлению чертежа

Все геометрические построения выполняются на листе плотной бумаги стандартного формата А3 (297х420). Надписи и размерные числа на чертеже должны быть нанесены чертежным шрифтом согласно ГОСТ 2.304-81. Толщина основных и тонких линий должна соответствовать требованиям ГОСТ 2.303-68.

Построения следует выполнять в масштабе 1:1. При необходимости студент может самостоятельно выбрать другой масштаб из ряда, приведенного в ГОСТ 2.302-68.

Чертеж должен иметь рамку и основную надпись. Основную надпись располагают в правом нижнем углу чертежа. Ее форма, размер граф и их содержание должны соответствовать ГОСТ 2.104-2006, форма 1.

Шифр чертежа КР формируется по шаблону:

НГ. КР{№ КР}.{№ варианта}*.00*

Например: *НГ.КР01.24.00*

В правом верхнем углу чертежа должна помещаться таблица с исходными данными варианта.

5.3. Методические указания к выполнению контрольной работы

Задача первой части КР относится к группе метрических задач, связанных с определением на комплексном чертеже истинных величин расстояний, углов и плоских фигур. Задача является комплексной, поэтому для формирования алгоритма решения проведем краткий предварительный анализ задачи.

Итак, для построения пирамиды по её высоте и основанию *ADE* необходимо преобразовать плоскости проекций так, чтобы и высота, и основание проецировались на них в натуральную величину. Но поскольку ΔADE лежит в плоскости $\boldsymbol{\Theta}(ABC)$, первоначально требуется построить натуральную величину этого треугольника. Для этого нужно перевести $\boldsymbol{\Theta}$ в частное положение плоскости уровня (плоскости, параллельной одной из плоскостей проекций) путем преобразования чертежа, например, способом замены плоскостей проекций.

Тогда решение задачи можно представить в виде последовательного решения стандартных задач:

1. Построение проекций треугольника *ABC* по координатам вершин.
2. Определение натуральной величины плоской фигуры (ΔABC).
3. Построение биссектрисы угла *BAC*.
4. Построение равностороннего треугольника *ADE* в плоскости $\boldsymbol{\Theta}$.
5. Построение перпендикуляра к плоскости $\boldsymbol{\Theta}$.
6. Построение отрезка заданной длины, принадлежащего прямой (перпендикуляру).
7. Построение проекций пирамиды по известным координатам вершин.
8. Определение относительной видимости элементов пирамиды.

Методы решения задач 3, 4, должны быть известны студентам из курса геометрии средней школы. Задачи 1, 6, 8 рассматривается в разделе «Точка. Прямая. Плоскость». Алгоритмы решения задач 2, 5, 7 приведены в данном методическом пособии.

Дальнейшее изложение решения будет разделено на семь этапов по количеству указанных стандартных задач (решение задач 5 и 6 объединено в один этап). Каждый этап включает общий анализ рассматриваемой задачи и рекомендуемую последовательность (алгоритм) выполнения геометрических построений.

1. Построение проекций треугольника *ABC* по координатам вершин

Чтобы знать форму и расположение плоской фигуры, состоящей из отрезков прямых, в пространстве, достаточно построить проекции этой фигуры на две взаимно перпендикулярные плоскости. В качестве таких плоскостей используем фронтальную плоскость проекций $\mathbf{\Pi}_2$ и горизонтальную плоскость проекций $\mathbf{\Pi}_1$. При этом оси координат x, y и z располагаются на комплексном чертеже, как показано на рис. 37. Фронтальную проекцию точки определяет пара координат (x, z), горизонтальную проекцию точки — (x, y).

1.1 На листе выберите положение начала координат. Постройте оси координат x, y и z.

1.2 Отложите на оси x значение координаты x_A точки A.

1.3 Проведите через x_A прямую, перпендикулярную оси x.

1.4 Сделайте аналогичные построения, используя координаты y_A и z_A (на осях y и z).

1.5 В местах пересечения построенных прямых отметьте точки A_2 и A_1 — фронтальную и горизонтальную проекцию точки A.

1.6 Повторите п. 1.2 – 1.5 алгоритма для построения проекций точек B и C.

1.7 Постройте проекции $A_2B_2C_2$ и $A_1B_1C_1$ треугольника, соединив одноименные проекции точек.

2. <u>Определение натуральной величины плоской фигуры (треугольника ABC)</u>

Так как плоскость Θ(ABC) занимает общее положение, то есть не перпендикулярна ни одной из основных плоскостей проекций, а необходимо получить ее изображение как плоскости уровня, прибегают к двойной замене плоскостей проекций. При первой замене плоскость Θ становится проецирующей (перпендикулярной плоскости проекций), а при второй — плоскостью уровня.

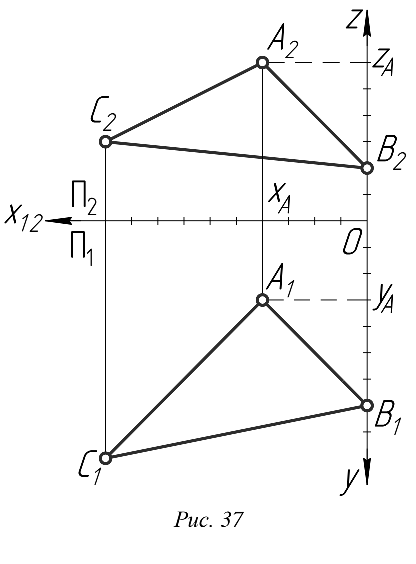


Рис. 37

Известно, что для перевода плоскости в проецирующее положение необходимо и достаточно перевести в проецирующее положение хотя бы одну прямую, лежащую в этой плоскости. В качестве такой прямой рационально взять прямую уровня — либо горизонталь h, либо фронталь f. Горизонталь параллельна горизонтальной плоскости проекций, а фронталь — фронтальной. Соответственно фронтальная проекция горизонтали h_2 (смотри рис. 38) и горизонтальная проекция фронтали f_1 параллельны оси проекций $\mathbf{\Pi_2/\Pi_1}$, под которой подразумевают линию пересечения двух плоскостей проекций. Эти свойства дают возможность легко построить линии уровня на комплексном чертеже.

2.1. Проведите в плоскости **Θ** горизонталь h, для чего сначала постройте ее фронтальную проекцию h_2, проведя из точки A_2 прямую параллельно $\mathbf{\Pi}_2/\mathbf{\Pi}_1$. Точка 1_2 представляет собой фронтальную проекцию точки 1 пересечения горизонтали h со стороной BC треугольника ABC. Из 1_2 проведите линию связи до пересечения с B_1C_1 и постройте горизонтальную проекцию этой точки 1_1. Горизонтальную проекцию горизонтали h_1 постройте, соединяя прямой линией точки A_1 и 1_1.

2.2. Введите новую плоскость проекций $\mathbf{\Pi}_4$, перпендикулярную $\mathbf{\Pi}_1$ и h. В этом случае ось проекций $\mathbf{\Pi}_4/\mathbf{\Pi}_1$ будет пересекать h_1 под прямым углом, а горизонталь h займет в системе плоскостей ($\mathbf{\Pi}_1$, $\mathbf{\Pi}_4$) проецирующее положение.

Необходимо отметить, что плоскости $\mathbf{\Pi}_2$ и $\mathbf{\Pi}_4$ перпендикулярны одной плоскости $\mathbf{\Pi}_1$, поэтому расстояния от нее до проекций одной и той же точки пространства на $\mathbf{\Pi}_2$ и $\mathbf{\Pi}_4$ будут одинаковыми. Так, например, $|B_{12}B_2|=|B_{14}B_4|$. Плоскость **Θ** займет проецирующее положение по отношению к $\mathbf{\Pi}_4$, что обусловливает вырождение ее проекции $\mathbf{\Theta}_4$ в прямую. Таким образом, для построения $\mathbf{\Theta}_4$ достаточно определить положение на $\mathbf{\Pi}_4$ проекций любых двух точек, принадлежащих **Θ**, соединив их прямой линией. В соответствии с приведенными рассуждениями выполните построения:

2.3. Под прямым углом к h_1 произвольно проведите ось проекций $\mathbf{\Pi}_1/\mathbf{\Pi}_4$.

2.4. В системе плоскостей проекций ($\mathbf{\Pi}_1$, $\mathbf{\Pi}_4$) из точек A_1, B_1, C_1 проведите линии связи (под углом 90° к $\mathbf{\Pi}_1/\mathbf{\Pi}_4$).

2.5. Найдите положения проекций A_4, B_4, C_4, откладывая на линиях связи отрезки $|A_{14}A_4| = |A_{12}A_2| = z_A$, $|B_{14}B_4| = |B_{12}B_2| = z_B$ и $|C_{14}C_4| = |C_{12}C_2| = z_C$ от оси $\mathbf{\Pi}_1/\mathbf{\Pi}_4$.

2.6. Точки A_4, B_4 и C_4 соедините отрезком прямой, представляющей собой вырожденную проекцию $\mathbf{\Theta}_4$ плоскости **Θ**. Угол α^0 есть угол наклона этой плоскости к плоскости $\mathbf{\Pi}_1$. **Если A_4, B_4 и C_4 не лежат на одной прямой, это означает, что в процессе построения были допущены ошибки.**

Для перевода **Θ** в положение плоскости уровня необходимо выполнить вторую замену плоскостей проекций, при которой вводится новая плоскость $\mathbf{\Pi}_5$, параллельная плоскости **Θ** (см. рис. 38). Чтобы обеспечить параллельность плоскостей $\mathbf{\Pi}_5$ и **Θ,** достаточно провести ось проекций $\mathbf{\Pi}_4/\mathbf{\Pi}_5$ параллельно вырожденной проекции $\mathbf{\Theta}_4$. Так как плоскости $\mathbf{\Pi}_1$ и $\mathbf{\Pi}_5$ по построению перпендикулярны плоскости $\mathbf{\Pi}_4$, то расстояния от нее до проекции одной и той же точки пространства на $\mathbf{\Pi}_1$ и $\mathbf{\Pi}_5$ будут одинаковыми. Тогда натуральная величина треугольника (ABC) определяется в результате следующих построений:

2.7. На произвольном расстоянии от $\mathbf{\Theta}_4$ параллельно ей проведите ось проекций $\mathbf{П}_4/\mathbf{П}_5$.

2.8. В системе плоскостей проекций ($\mathbf{П}_4$, $\mathbf{П}_5$) из точек A_4, B_4, C_4 проведите линии связи (под углом 90° к $\mathbf{П}_4/\mathbf{П}_5$).

2.9. Найдите положения проекций A_5, B_5, C_5, откладывая на линиях связи отрезки $|A_{45}A_5| = |A_{14}A_1|$, $|B_{45}B_5| = |B_{14}B_1|$ и $|C_{45}C_5| = |C_{14}C_1|$ от оси $\mathbf{П}_4/\mathbf{П}_5$.

2.10. Соедините точки A_5, B_5 и C_5 отрезками прямых. Результатом построений является треугольник $A_5B_5C_5$, равный по величине треугольнику ABC.

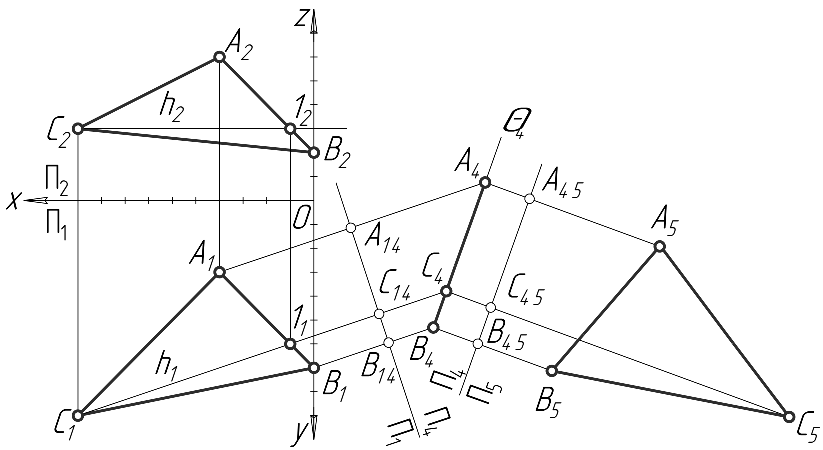


Рис. 38

Следует отметить, что иногда для удобства компоновки чертежа бывает целесообразно переводить плоскость в проецирующее положение, используя ее фронталь, а не горизонталь. В этом случае в плоскости $\mathbf{\Theta}$ строится фронталь (начиная с построения f_1), а затем аналогично предыдущему вводится плоскость $\mathbf{П}_5$, перпендикулярная фронтали.

3. <u>Построение биссектрисы угла *BAC*</u>

Рассмотрим наиболее рациональный метод построения биссектрисы угла с помощью циркуля:

3.1. Из вершины угла (точки A_5) циркулем, установленным на некий произвольный радиус R, поставьте одинаковые засечки на отрезках A_5B_5 и A_5C_5. Отметьте точки 2 и 3 (см. рис. 39), для которых, очевидно, выполняется условие $|A_52|=|A_53|=R$.

3.2. Из точек 2 и 3 тем же радиусом проведите дуги окружностей внутри угла BAC. В месте пересечения дуг поставьте точку 4.

3.3. Соедините точки A_5 и 4. Полученная прямая A_54 является биссектрисой угла BAC.

4. <u>Построение равностороннего треугольника ADE в плоскости $\mathbf{\Theta}$</u>

Основание пирамиды представляет собой треугольник ADE. Так как плоскость $\mathbf{\Theta}$ является плоскостью уровня по отношению к $\mathbf{\Pi}_5$, и ADE лежит в плоскости $\mathbf{\Theta}$, то ADE проецируется на $\mathbf{\Pi}_5$ в натуральную величину: $|ADE| = |A_5D_5E_5|$. Из условия задачи известно, что $|AD| = |AE| = |DE| = 40$ мм (треугольник равносторонний), и одна из сторон лежит на биссектрисе угла BAC: $A_5D_5 \subset A_54$. Тогда построение проекции треугольника $A_5D_5E_5$ удобно выполнить в такой последовательности (рис. 39):

4.1. На прямой A_54 отложите отрезок A_5D_5 длиной 40 мм.

4.2. Проведите дуги радиусом $R = 40$ мм из точек A_5 и D_5. На пересечении дуг отметьте точку E_5.

4.3. Постройте проекцию треугольника, соединив точку E_5 с точками A_5 и D_5.

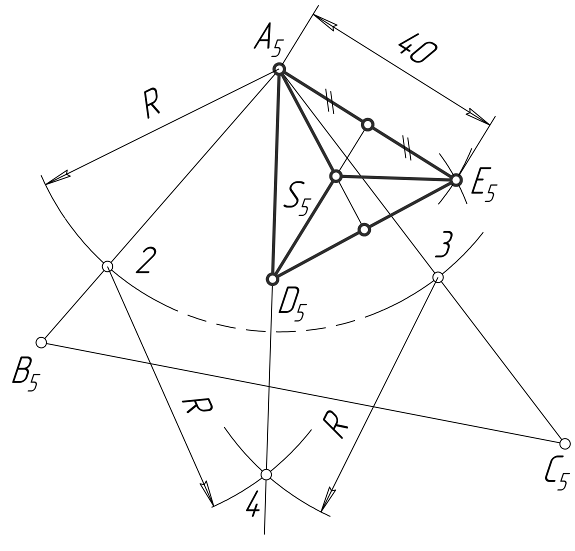


Рис. 39

Если пирамида правильная, а $|ADE| = |A_5D_5E_5|$, легко найти проекцию вершины пирамиды S_5 — вершина проецируется в центр треугольника $A_5D_5E_5$. Так как $A_5D_5E_5$ — равносторонний, то центр треугольника лежит на пересечении его биссектрис, медиан или высот. Наиболее просто и точно выполняются геометрические построения медианы как отрезка, соединяющего вершину угла и середину противолежащей стороны треугольника, поэтому:

4.4. Найдите середины двух любых сторон треугольника $A_5D_5E_5$.

4.5. Постройте две медианы, соединив полученные точки с противолежащими вершинами треугольника. С точкой пересечения медиан

$A_5D_5E_5$ совпадает проекция S_5 (рис. 39).

Фигура *SADE* является частным случаем пирамиды — тетраэдром. Кроме ребер основания тетраэдр имеет три боковых ребра — *SA*, *SD* и *SE*. Если точка *S* лежит ниже плоскости **Θ** (относительно $\mathbf{П}_5$), то боковые грани пирамиды «заслоняются» от наблюдателя основанием (в проекции на $\mathbf{П}_5$). В этом случае боковые ребра пирамиды следует чертить штриховыми линиями.

Если точка *S* лежит выше плоскости **Θ** (относительно $\mathbf{П}_5$), то боковые грани пирамиды видны наблюдателю (в проекции на $\mathbf{П}_5$). В этом случае боковые ребра пирамиды следует чертить основными линиями (рис. 39).

4.6. Постройте проекции боковых ребер пирамиды на $\mathbf{П}_5$, соединив точку S_5 с точками A_5, D_5 и E_5.

Студент самостоятельно выбирает положение точки S относительно плоскости **Θ**.

5. <u>Построение перпендикуляра к плоскости **Θ**. Построение отрезка заданной длины, принадлежащего прямой (перпендикуляру)</u>

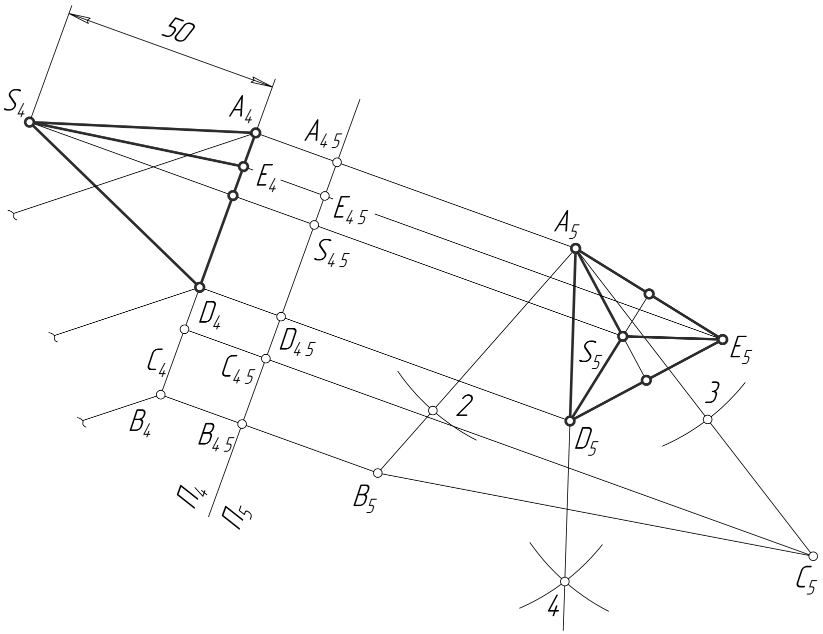


Рис. 40

Далее следует построить проекции пирамиды *SADE* на плоскости проекций $\mathbf{П}_4$, $\mathbf{П}_1$ и $\mathbf{П}_2$, используя проекцию $S_5A_5D_5E_5$ и значение высоты пирамиды. Поскольку высота пирамиды *SS'* перпендикулярна основанию пирамиды, то на $\mathbf{П}_5$ эта высота проецируется в точку: $SS'\perp ADE \cup ADE\subset\Theta \cup \Theta\,|\,|\,\mathbf{П}_5 \Rightarrow SS'\perp\mathbf{П}_5 \Rightarrow S_5\equiv S'_5$. С учетом $\mathbf{П}_4\perp\mathbf{П}_5$ получим, что высота пирамиды параллельна плоскости $\mathbf{П}_4$, поэтому отрезок SS' проецируется на $\mathbf{П}_4$ без искажения: $|S_4S'_4| = |SS'| = 50$ мм.

Таким образом, чтобы построить проекции высоты SS' и ребер пирамиды на плоскость $\boldsymbol{П}_4$, выполните следующие построения (рис. 40):

5.1. Проведите линию связи от проекций точек $S_5\equiv S'_5$ на плоскость $\mathbf{П}_4$.

5.2. На пересечении линии связи и проекции Θ_4 плоскости Θ укажите проекцию S'_4 точки S' ($S'\in\Theta \Rightarrow S'_4\in\Theta_4$)

5.3. Проведите перпендикуляр к Θ_4 из точки S'_4 (совпадающий с построенной в п. 5.1 линией связи).

5.4. На перпендикуляре постройте точку S_4 из условия $|S_4S'_4|$=50 мм.

6. <u>Построение проекций пирамиды по известным координатам вершин</u>

Проекции остальных вершин пирамиды на $\mathbf{П}_4$ нетрудно построить из условия их принадлежности плоскости Θ:

6.1. Проведите линии связи от проекций A_5, D_5 и E_5 на плоскость $\mathbf{П}_4$.

6.2. На пересечении линий связи и проекции Θ_4 постройте точки A_4, D_4 и E_4 (рис. 40).

6.3. Постройте проекции боковых граней пирамиды на $\mathbf{П}_4$, соединив полученные проекции вершин.

6.4. Определите видимость боковых ребер пирамиды в проекции на $\mathbf{П}_4$.

Далее следует построить проекции пирамиды на плоскости проекций $\mathbf{П}_1$ и $\mathbf{П}_2$. По своей сути эта задача является аналогом рассмотренной выше задачи этапа 2. Так как плоскости $\mathbf{П}_1$ и $\mathbf{П}_5$ по построению перпендикулярны плоскости $\mathbf{П}_4$, то расстояния от нее до проекции одной и той же точки пространства на $\mathbf{П}_1$ и $\mathbf{П}_5$ будут одинаковыми. Из этого следует, что $|D_{14}D_1| = |D_{45}D_5|$, $|E_{14}E_1| = |E_{45}E_5|$ и $|S_{14}S_1| = |S_{45}S_5|$. Это позволяет найти проекции вершин пирамиды на $\boldsymbol{П}_1$:

6.5. В системе плоскостей проекций ($\mathbf{П}_1$, $\mathbf{П}_4$) из точек D_4, E_4, S_4 проведите линии связи (под углом 90° к $\mathbf{П}_1/\mathbf{П}_4$).

6.6. Найдите положения проекций D_1, E_1, S_1, откладывая на линиях связи отрезки $|D_{14}D_1| = |D_{45}D_5|$, $|E_{14}E_1| = |E_{45}E_5|$ и $|S_{14}S_1| = |S_{45}S_5|$ от оси $\mathbf{П}_1/\mathbf{П}_4$ (рис. 40).

6.7. Постройте проекции ребер пирамиды на $\mathbf{П}_1$, соединив между собой проекции вершин пирамиды отрезками прямых.

Для определения проекций вершин пирамиды на плоскость $\mathbf{П}_2$ проведем аналогичные рассуждения: так как плоскости $\mathbf{П}_2$ и $\mathbf{П}_4$ по построению перпендикулярны плоскости **П**$_1$, то расстояния от нее до проекции одной и той же точки пространства на **П**$_2$ и **П**$_4$ будут одинаковыми. Отсюда:

6.8. В системе плоскостей проекций (**П**$_2$, **П**$_1$) из точек D_1, E_1, S_1 проведите линии связи (под углом 90° к **П**$_2$/**П**$_1$).

6.9. Найдите положения проекций D_2, E_2, S_2, откладывая на линиях связи отрезки $|D_{12}D_2| = |D_{14}D_4| = z_D$, $|E_{12}E_2| = |E_{14}E_4| = z_E$ и $|S_{12}S_2| = |S_{14}S_4| = z_S$ от оси **П**$_2$/**П**$_1$ (рис. 41).

6.10. Постройте проекции ребер пирамиды на **П**$_2$, соединив между собой проекции вершин пирамиды отрезками прямых.

7. <u>Определение относительной видимости элементов пирамиды</u>

В простейших случаях видимость элементов пространственных фигур определяется с использованием пространственного воображения. Если картина недостаточно очевидна, рекомендуется определять видимость элементов по взаимному расположению точек, лежащих на одной проецирующей прямой (так называемых ***конкурирующих точек***).

Рассмотрим применение конкурирующих точек для определения видимости элементов пирамиды в проекции на **П**$_1$ (рис. 41). Введем в чертеж две вспомогательные точки 5 и 6, принадлежащие боковым ребрам SD и AE пирамиды, причем проекции этих точек на **П**$_1$ совпадают $5_1 \equiv 6_1$. Таким образом, относительно плоскости проекций **П**$_1$ эти точки являются конкурирующими.

Принимаем $5 \in SD$, а $6 \in AE$. Из свойств ортогонального проецирования известно, что если точка принадлежит прямой, то проекции точки принадлежат проекциям прямой. Соответственно $5_1 \in S_1D_1$, $6_1 \in A_1E_1$ и $5_4 \in S_4D_4$, $6_4 \in A_4E_4$, если $5 \in SD$, а $6 \in AE$. Используя это свойство, легко найти проекции точек 5 и 6 на плоскость **П**$_4$:

7.1. Укажите проекции конкурирующих точек 5 и 6 на плоскость **П**$_1$. Определите (произвольно) принадлежность конкурирующих точек ребрам пирамиды.

7.2. В системе плоскостей проекций (**П**$_1$, **П**$_4$) из точек $5_1 \equiv 6_1$ проведите линию связи.

7.3. Постройте проекцию точки 5_4 на пересечении линии связи и S_4D_4.

7.4. Постройте проекцию точки 6_4 на пересечении линии связи и A_4E_4.

Далее требуется определить видимость точек 5 и 6 в проекции на **П**$_1$ по полученной проекции на **П**$_4$. Расстояние точки от **П**$_1$ определяется ее координатой по оси z — чем больше значение z, тем дальше лежит точка от **П**$_1$. Следовательно, в проекции на **П**$_1$ будет видна конкурирующая точка, имеющая большее значение координаты z.

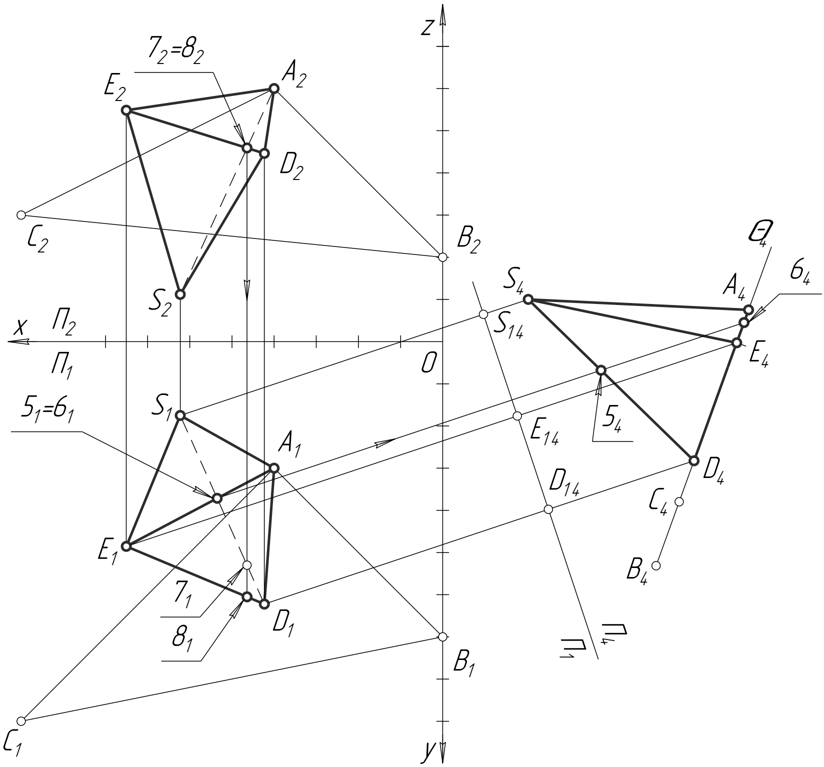


Рис. 41

Из рассуждений, приведенных в этапе 2, можно сделать вывод, что положение проекции точки на **П**$_4$ относительно **П**$_1$/**П**$_4$ определяет ее координату z: $|5_{14}5_4| = z_5$, $|6_{14}6_4| = z_6$. Из рис. 41 видно, что $z_6 > z_5$ (точка 6_4 лежит дальше от оси **П**$_1$/**П**$_4$, чем точка 5_4). Поэтому в проекции на **П**$_1$ видимой будет точка 6.

Так как точка 6 принадлежит отрезку *AE*, то на **П**$_1$ именно этот отрезок будет видимым, а отрезок *SD* «закрыт» гранями *SEA* и *DEA* пирамиды. Напомним, что невидимые отрезки следует чертить штриховой линией.

В соответствии с приведенными рассуждениями необходимо выполнить следующие действия:

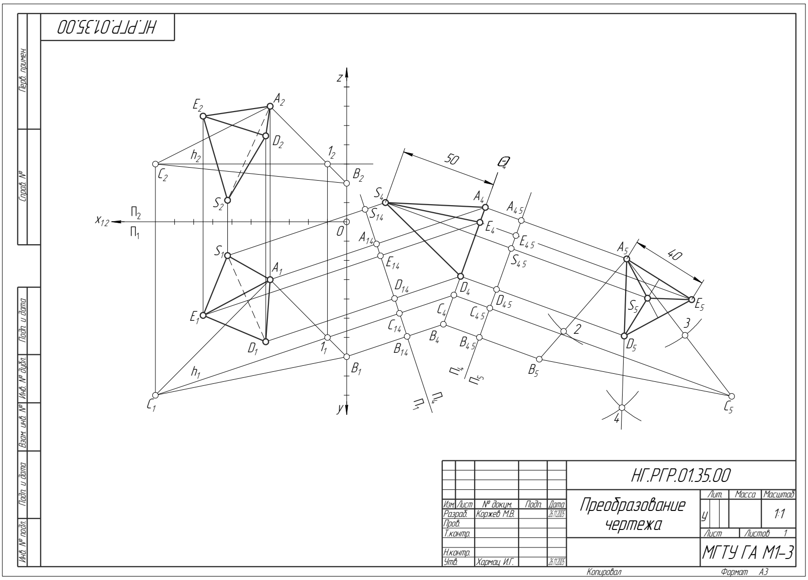
7.5. Определите, проекция какой из конкурирующих точек лежит дальше от **П**$_1$/**П**$_4$. В рассматриваемом примере это точка 6.

7.6. Ребро, которому принадлежит точка, определенная в п. 7.5, является видимым в проекции на **П**$_1$. Постройте проекцию этого ребра на **П**$_1$ основной линией. В рассматриваемом примере таким ребром является *AE*, поэтому основной линией построен отрезок A_1E_1.

Используя приведенный алгоритм, определите видимость элементов пирамиды в проекции на $\mathbf{П}_2$. На рис. 41 для этих целей введены конкурирующие точки 7 и 8.

После определения видимости элементов проверьте правильность выполненных построений. При проверке дополнительно рекомендуется применять некоторые свойства ортогонального проецирования. Например, если проекция какого-либо отрезка больше натуральной величины этого отрезка, то это свидетельствует об ошибке, совершенной при построении проекций отрезка.

После проверки построений окончательно оформите чертеж согласно требованиям раздела 5.2 пособия. Пример выполнения контрольной работы приведен на рис. 42.



НГ.РГР.01.35.00
Перв. примен.
Справ. №
Подп. и дата
Инв. № дубл.
Взам. инв. №
Подп. и дата
Инв. № подл.
Изм. Лист № докум. Подп. Дата
Разраб. Каржев М.В.
Пров.
Т.контр.
Н.контр.
Утв. Хармац И.Г.
НГ.РГР.01.35.00
Преобразование чертежа
Лит. Масса Масштаб
У
1:1
Лист
Листов 1
МГТУ ГА М1-3
Копировал
Формат А3

Рис. 42

5.4. Варианты заданий

Варианты заданий приведены в таблице 5.1.

Таблица 5.1. Варианты заданий к контрольной работе

№ вар.	Плоскость Θ								
	A			*B*			*C*		
	X	**Y**	**Z**	**X**	**Y**	**Z**	**X**	**Y**	**Z**
1	110	17	30	70	60	60	30	35	10
2	0	20	47	42	50	10	87	0	70
3	95	45	20	52	10	53	7	10	0
4	15	35	45	98	0	7	57	77	74
5	95	45	35	13	7	0	53	73	77
6	10	30	17	50	60	60	90	10	35
7	108	52	20	55	5	95	10	100	65
8	5	20	53	60	98	5	103	65	100
9	0	0	75	40	74	13	93	58	55
10	108	78	0	68	12	75	15	55	58
11	115	50	50	80	10	0	0	85	80
12	60	30	95	0	35	20	102	110	8
13	133	30	30	75	20	98	23	100	18
14	57	42	103	13	95	26	132	42	26
15	0	52	40	82	78	90	106	18	0
16	10	53	50	45	0	10	125	90	85
17	75	48	100	0	48	20	120	100	20
18	18	18	0	132	50	43	50	75	90
19	75	105	20	135	30	30	24	18	100
20	0	30	28	58	108	20	110	18	100
21	75	110	10	0	18	90	140	82	50
22	16	11	86	81	81	21	130	51	81
23	122	92	11	57	27	81	5	85	50
24	18	14	90	87	82	27	132	52	82
25	22	14	95	85	92	40	137	50	87
26	130	58	50	60	110	80	0	15	10
27	162	15	10	102	112	78	30	62	53
28	20	92	12	85	27	81	137	85	50
29	118	76	40	53	7	110	1	39	48
30	80	108	10	15	85	50	155	15	90
31	100	60	10	55	0	60	15	40	27
32	17	0	45	55	50	65	95	22	35
33	78	45	0	38	66	50	0	25	23
34	0	77	0	40	13	73	92	55	58
35	110	0	77	70	75	13	18	57	57

5.5. Задачи для самостоятельной подготовки

Для самостоятельного закрепления изложенного материала рекомендуется решить задачи, используя методическое пособие и приведенный ниже список литературы.

Задачи

Задача №1. Методом плоскопараллельного перемещения найти угол наклона отрезка к горизонтальной плоскости проекций (рис. 43).

Задача №2. Найти множество точек, равноудаленных от прямых a, b и c (рис. 44).

Задача №3. Построить геометрическое место точек, равноудаленных от точек A и B (рис. 45).

Задача №4. Построить проекции окружности, вписанной в треугольник ABC (рис. 46).

Задача №5. Построить проекции кругового цилиндра высотой 80 мм и осью OO', если известно, что точка A принадлежит его боковой поверхности, а точки B — одному из оснований цилиндра (рис. 47).

Задача №6. На прямой a определить точку, ближайшую к точке N (рис. 48).

Задача №7. Построить геометрическое место точек, равноудаленных от точек A, B и C (рис. 49).

Задача №8. Используя способ плоскопараллельного перемещения, найти высоту равнобедренной трапеции $ABCD$, если отрезок AB является одним из оснований трапеции, а отрезок AC — одной из боковых сторон (рис. 50).

Задача №9. Построить проекции плоскости $\mathbf{\Gamma'}$, касательной к сфере $\mathbf{R}$ и параллельной плоскости $\mathbf{\Gamma}(a \cap b)$ (рис. 51).

*Задача №10**. Построить проекции правильного тетраэдра, вписанного в сферу $\mathbf{R}$, если известно, что одна из его вершин является точкой сферы, наиболее удаленной от плоскости $\mathbf{\Gamma}(a \cap b)$ (рис. 51).

*Задача №11**. Плоскость $\mathbf{\Gamma}(ABC)$ является плоскостью раздела двух сред $\mathbf{\Theta}$ и $\mathbf{\Sigma}$, относительный показатель преломления которых равен $\frac{n_\Theta}{n_\Sigma} = 0.5$. Найти расстояние от точки N ($N \in \mathbf{\Sigma}$) до траектории движения светового луча, исходящего из точки M ($M \in \mathbf{\Theta}$) и преломляющегося на границе раздела сред $\mathbf{\Gamma}$ в точке, равноудаленной от точек A, B и C (рис. 52).

Примечание: символом «*» отмечены задачи повышенной сложности.

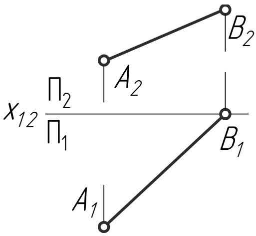


Рис. 43

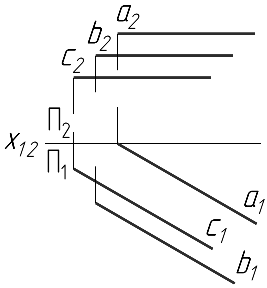


Рис. 44

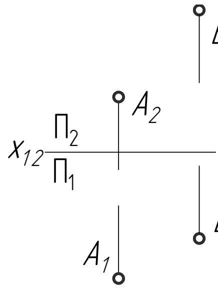


Рис. 45

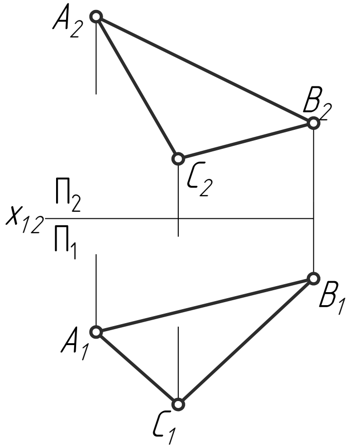


Рис. 46

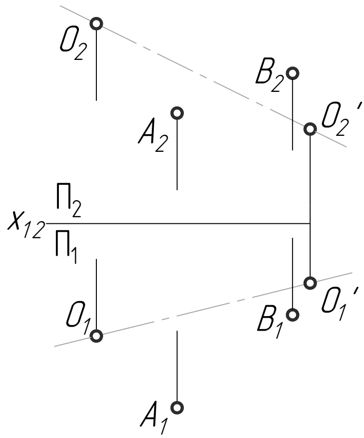


Рис. 47

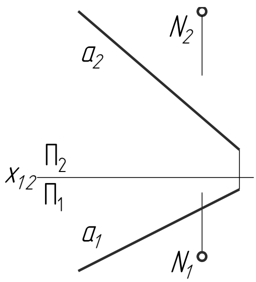


Рис. 48

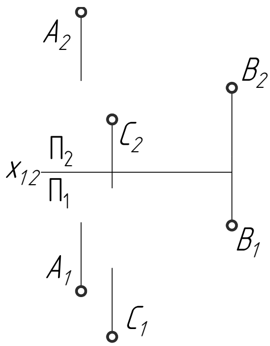


Рис. 49

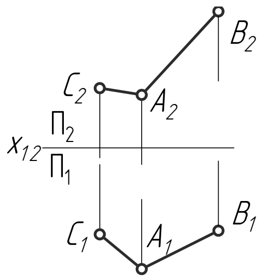


Рис. 50

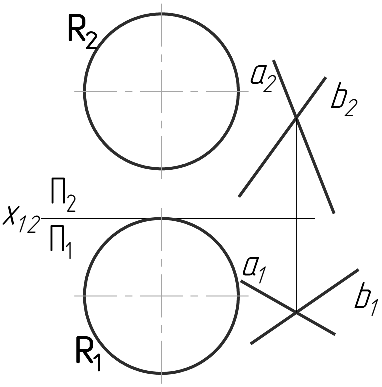


Рис. 51

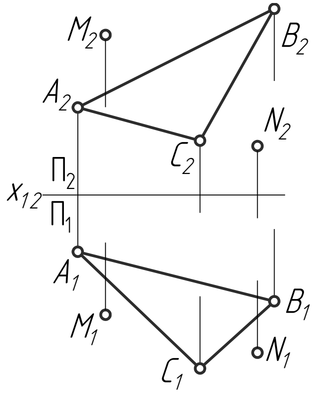


Рис. 52

Рекомендуемая литература

1. Гордон В.О., Семенцов-Огиевский М.А. Курс начертательной геометрии. — М.: Наука, 2000.
2. Лагерь А.И. Инженерная графика. — М., Высшая школа, 2009.
3. Михненков Л.В. Основы начертательной геометрии. — М.: КолосС, 2004.
4. Фролов С.А. Начертательная геометрия. — М.: Высшая школа, 2006.

Содержание