МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

О.Н. Пачкория,
М.В. Семакова

ИНЖЕНЕРНАЯ И КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРАФИКА

Учебно-методическое пособие
по выполнению контрольной работы №1
«Точка, прямая, плоскость»

для студентов
направления 25.03.01, 25.03.02
и специальности 25.05.03, 25.05.05
очной формы обучения

Москва
2019

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ (МГТУ ГА)»**

Кафедра технической механики и инженерной графики

О.Н. Пачкория, М.В. Семакова

ИНЖЕНЕРНАЯ
И КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРАФИКА

Учебно-методическое пособие

по выполнению контрольной работы №1

«Точка, прямая, плоскость»

для студентов
направления 25.03.01, 25.03.02
и специальности 25.05.03, 25.05.05
очной формы обучения

Москва
2019

ББК 607
П-21

Рецензент:
Петров Ю.В. – д-р техн. наук, профессор

Пачкория О.Н.
П-21 Инженерная и компьютерная графика: учебно-методическое пособие по выполнению контрольной работы №1 «Точка, прямая, плоскость». / О.Н. Пачкория, М.В. Семакова. – Воронеж: ООО «МИР», 2019. – 48 с.

Данное учебно-методическое пособие издается в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Инженерная и компьютерная графика» по учебному плану для студентов направления 25.03.01, 25.03.02 и специальности 25.05.03, 25.05.05 очной формы обучения.

Рассмотрено и одобрено на заседании кафедры 24.09.2019 г. и методического совета 25.09.2019 г.

В авторской редакции.

Подписано в печать 07.10.2019 г.
Формат 60x84/16 Печ.л. 3 Усл. печ. л. 2,79
Заказ 520/6750 Тираж 80 экз.

Московский государственный технический университет ГА
125993 Москва, Кронштадтский бульвар, д.20

Отпечатано ООО «МИР»
394033, г. Воронеж, Ленинский пр-т 119А, лит. Я, оф. 215
Тел.: 8 (958) 649-53-31 Email: 89586495331@mail.ru

Введение

Методические указания регламентируют еженедельное решение домашних задач и подготовку к контрольной работе №1.

Обозначения.

1. Точки пространства обозначают прописными буквами латинского алфавита: A, B, C, D… или цифрами 1, 2, 3, 4, …
2. Прямые и кривые линии пространства – строчными буквами латинского алфавита: a, b, c, d, …
3. Плоскости и поверхности (оригиналы) – прописными буквами греческого алфавита: Α(альфа), Β(бэта), Γ(гамма), Θ(тэта), Λ(ламбда), Σ(сигма), Φ(фи), Ψ(пси), Ω(омега), Τ(тау).
4. Углы обозначают строчными греческими буквами: α(альфа), β(бэта), γ(гамма), φ(фи), θ(тэта), λ(ламбда), ω(омега), τ(тау), δ(дельта).
5. Плоскости проекций обозначают буквой П (пи – прописная буква греческого алфавита) с добавлением подстрочного индекса 1, 2, 3, 4, 5…, при этом:
    - горизонтальная плоскость проекций обозначается – $П_1$;
    - фронтальная плоскость проекций – $П_2$;
    - профильная плоскость проекций – $П_3$;
    - новую плоскость проекций, отличную от указанных выше, обозначают: $П_4$, $П_5$, $П_6$, …
6. Проекции точек, линий и поверхностей обозначают теми же буквами, какими обозначены сами оригиналы с добавлением индекса плоскости проекций, на которую спроецирован объект.

Так, проекции точки A, прямой a и плоскости Θ соответственно обозначают:

- на плоскости $П_1$ – A_1, a_1, Θ_1;
- на плоскости $П_2$ – A_2, a_2, Θ_2;
- на плоскости $П_3$ – A_3, a_3, Θ_3;

7. Рекомендуется обозначать:
    - линию горизонтального уровня (горизонталь) – h;
    - линию фронтального уровня (фронталь) - f;
    - линию профильного уровня (профильная прямая) -p;
    - плоскость горизонтального уровня - Γ;
    - плоскость фронтального уровня - Φ;
    - плоскость профильного уровня - Ψ;
8. Последовательность точек, прямых, плоскостей и поверхностей обозначают верхним индексом 1, 2, 3, …
9. Действительную длину отрезка обозначают – dd
10. Символы, обозначающие отношения между геометрическими фигурами:
    - ≡ - совпадают. Например, (AB) ≡ (CD) – прямая, проходящая через точки A и B совпадает с прямой, проходящей через точки C и D.

- ~ - подобны. Например, $\Delta\ BAC \sim \Delta\ MNK$ – треугольники ABC и MNK подобны.
- ‖ – параллельны. Например, $\alpha \| \beta$ - плоскость α параллельна плоскости β.
- $\perp$ - перпендикулярны. Например, $a \perp b$ – прямые a и b перпендикулярны.
- $\overset{\circ}{\_}$ скрещиваются. Например, $c \overset{\circ}{\_} d$ – прямые c и d скрещиваются
- $\subset$ - включает, содержит. Например, $a \subset \alpha$ - прямая a принадлежит плоскости α, т.е. множество точек прямой a является подмножеством точек плоскости α.
- $\cap$ - пересечение множеств. Например, $a = \alpha \cap \beta$ - прямая *a* является результатом пересечения плоскостей α и β.
- \ - *отрицание знака.*

2. Предмет и метод начертательной геометрии

Начертательная геометрия относится к числу базовых общетехнических дисциплин. Этот раздел геометрии изучает пространственные формы объектов по их изображениям (по чертежам).

Изображения трехмерных пространственных объектов на двумерной плоскости чертежа получают *методом проецирования*.

<u>Проецирование</u> - *получение изображения объекта с помощью проецирующих прямых на плоскости*. На рис. 1 показана горизонтальная плоскость проекций, которая обозначена – $П_1$. Объекты проецирования – точки A, B. Проецирующие прямые – l, q. *Точка пересечения проецирующей прямой с плоскостью проекций называется* ***<u>проекцией точки</u>***.

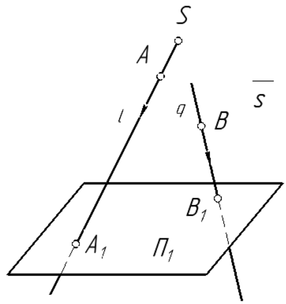


Рис. 1

Проецирующие прямые могут проходить, как через одну общую точку S – центр проецирования, точечный источник света (свеча, электрическая лампочка), так и параллельно заданному вектором s направлению, если центр проецирования удален в бесконечность проецирующая прямая $q \| s$ (рис. 1).

$l \cap П_1 = A_1$

A_1 – проекция точки A на плоскость $П_1$.

В зависимости от этого различают методы построения проекций объекта.

2.1. Центральное (коническое) проецирование

Свойства центрального проецирования:

1.Проекция точки – точка.

2.Проекция прямой – прямая.

3.Если точка принадлежит прямой, то проекция этой точки принадлежит проекции этой прямой.

$C \in AB \Leftrightarrow C_1 \in A_1B_1$

Этот метод используют при построении перспективы различных сооружений, в фото – и кино – искусстве.

2.2. Параллельное (цилиндрическое) проецирование

Это частный случай центрального проецирования при перемещении центра проецирования в бесконечность, в несобственную точку. При этом проецирующие прямые становятся параллельными, проведенными в заданном направлении.

Если направление проецирования и плоскость проекций образуют угол φ не равный 90°, проецирование называют **косоугольным**. Если $\varphi = 90°$, проецирование называют **ортогональным или прямоугольным**.

2.2.1. Косоугольное параллельное проецирование

Все приведенные ранее определения проекции точки, плоскости проекций, конкурирующих точек, сохраняются, так же как и перечисленные 1 – 3 свойства центрального проецирования. Однако, параллельные проекции обладают и некоторыми ***свойствами***, которые отсутствуют у центральной проекции.

4. Проекции взаимно параллельных прямых – параллельны.

5. Отношение отрезков одной прямой равно отношению их проекций. Поэтому середина любого отрезка проецируется в середину его проекции.

6. Точка пересечения проекций пересекающихся прямых является проекцией точки пересечения этих прямых линий.

7. Линия или плоскость, параллельные плоскости проекций проецируются на эту плоскость без искажения.

8. Из этого следует, что параллельный перенос плоскости проекций или объекта не меняет вид и размер его проекции, что позволяет отказаться от фиксации плоскостей проекций при построении технических чертежей.

Еще большее упрощение построения чертежа дает параллельное проецирование под углом $\varphi = 90°$.

2.2.2. Ортогональное (прямоугольное) проецирование.

Это частный случай параллельного проецирования, при котором направление проецирования перпендикулярно плоскости проекций. ($\varphi = 90°$).

Прямоугольной (ортогональной) проекцией точки *называют основание перпендикуляра, проведенного из точки на плоскость проекций*.

На рис. 2 пространственные точки А и В проецируются на горизонтальную плоскость $П_1$ и получаются их горизонтальные проекции - A_1 и B_1.

В этом случае можно установить, что **проекция отрезка всегда меньше его действительной длины** (см. рис. 2), на котором $BB_1 \perp П_1$, поэтому $BB_1 \perp$ любой прямой в этой плоскости, в том числе и прямой M_1K_1. Проведем отрезок $AK \parallel A_1B_1$.Так как Δ АВК – прямоугольный, $\mathbf{AK = AB \bullet \cos \alpha}$ или, что то же самое $\mathbf{A_1B_1 = AB \bullet \cos \alpha}$

Следовательно, *по величине проекции можно судить о размерах пространственного объекта.* Наряду со свойствами 1 – 8 косоугольного параллельного проецирования этот метод имеет особое свойство.

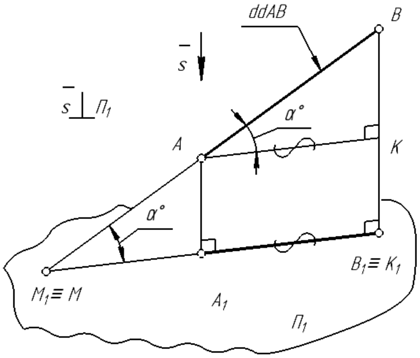


Рис. 2

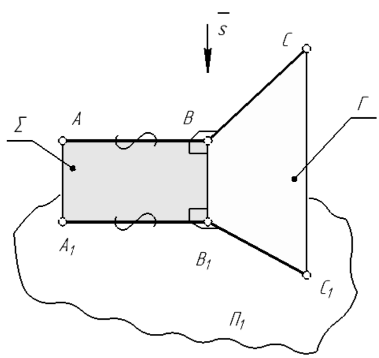


Рис. 3

9. Теорема о проецировании угла 90°.

Прямой угол проецируется без искажения, если одна его сторона параллельна плоскости проекций, а другая не перпендикулярна к ней. Если $AB \cap BC = 90$, $AB \parallel П_1$, то $A_1B_1 \perp B_1C_1$, рис. 3.

3. Образование комплексного чертежа

Из всех точек пространственного объекта выделим точку А. Затем выберем две плоскости проекций $П_1$ и $П_2$ и установим их на произвольных расстояниях y_A и z_A от точки А (рис. 4, а). Эти плоскости располагают под углом 90° друг к другу и называют $П_1$ - горизонтальная плоскость проекций, $П_2$

- фронтальная плоскость проекций. Линию пересечения этих плоскостей проекций называют осью проекций и обозначают – x_{12}. На рис. 4, а показаны положительные направления осей z и y. Точка O – начало координат.

$\Pi_2 \perp \Pi_1$, $\Pi_2 \cap \Pi_1 = x_{12}$

Спроецируем точку A с помощью проецирующих прямых q и l на эти плоскости.

$q \perp \Pi_2$; $l \perp \Pi_1$; (рис. 4, а)

$q \cap \Pi_2 = A_2$ - фронтальная проекция точки A

$l \cap \Pi_1 = A_1$ - горизонтальная проекция точки A

Перпендикуляры q и l, пересекаясь, задают проецирующую плоскость $\Gamma(q \cap l)$, которая перпендикулярна плоскостям проекций ($\Gamma \perp \Pi_1$, $\Gamma \perp \Pi_2$). Поэтому плоскость Г пересекает плоскости проекций Π_1 и Π_2 по прямым, которые образуют прямоугольник, а, следовательно, они перпендикулярны оси x_{12} и пересекают ось x_{12} в точке A_{12}.

$\Gamma \cap \Pi_2 = A_2A_{12}(z_A)$ – высота точки A (расстояние точки A до горизонтальной плоскости проекций)

$\Gamma \cap \Pi_1 = A_1A_{12}$ (y_A) – глубина точки A (расстояние точки A до фронтальной плоскости проекций)

$A_2A_{12} \perp x_{12}$; $A_1A_{12} \perp x_{12}$

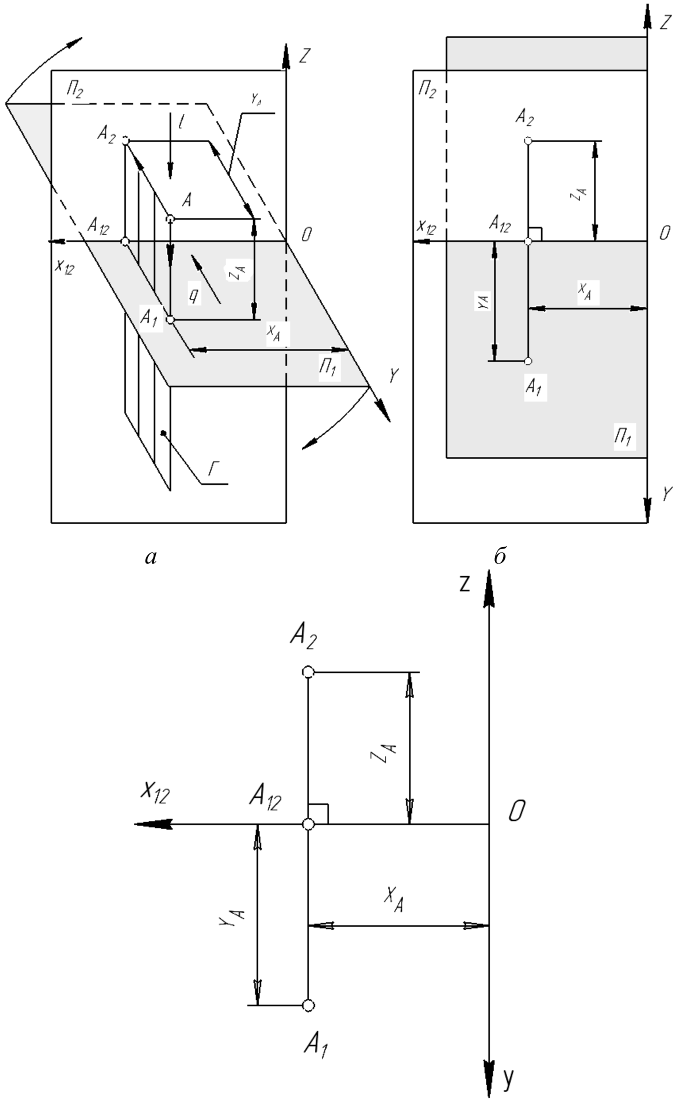
Полученные прямоугольные проекции точки – A_2 и A_1 позволяют точно определить расположение этой точки в пространстве. Для этого достаточно из них провести перпендикуляры к плоскостям проекций. Точка A – точка пересечения этих перпендикуляров.

Для того чтобы получить в одной плоскости (на чертеже) две проекции A_2 и A_1, которые в действительности лежат в разных плоскостях проекций, повернем плоскость Π_1 вокруг оси x_{12} на угол 90° в направлении, указанном стрелками на рис. 4, а до совмещения с плоскостью Π_2. Тогда проекции A_2 и A_1 окажутся в одной плоскости (рис. 4, б) и притом на одном общем перпендикуляре к оси проекций x_{12}. *Прямая $A_2A_{12}A_1 \perp x_{12}$, которая связывает две проекции точки A, называется* ***линией связи***.

Чертеж, показанный на рис. 4, б, упрощают, отбросив прямоугольные рамки, ограничивающие плоскости проекций, так как в действительности эти плоскости бесконечны. Достаточно на чертеже нанести только линию x_{12} пересечения плоскостей Π_1 и Π_2 и две проекции точки A_1, A_2, расположенные на общем перпендикуляре к оси x_{12}, как на рис. 4, в. Так получают **комплексный чертеж** точки или ее эпюр.

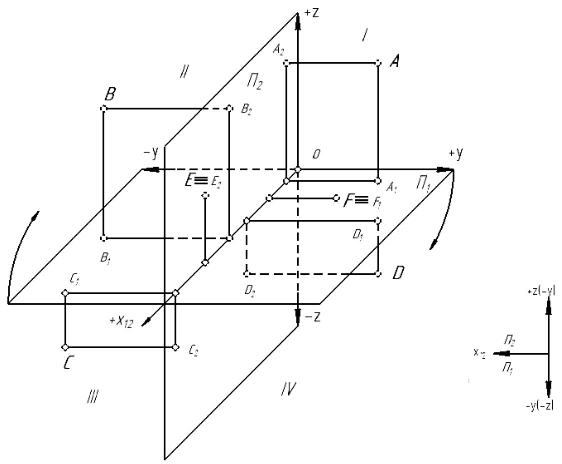
Комплексным *называют чертеж двух или более связанных ортогональных проекций объекта*.

Измерив расстояния проекций A_1 и A_2 до оси x_{12} на комплексном чертеже, можно судить на каких расстояниях z_A и y_A от плоскостей проекций Π_1 и Π_2 находится сама точка A в пространстве (на чертеже точка A отсутствует). При этом нанесение осей z и y на чертеже (рис. 4, в) необязательно.



в

Рис. 4



а *б*

Рис. 5

Плоскости проекций $П_2 \perp П_1$, продолженные в обе стороны от оси проекций x_{12} , делят все пространство на четыре четверти, которые называют квадрантами. На рис. 5, а показаны квадранты I, II, III, IV. Принято, что наблюдатель находится в первом квадранте, где направления осей координат x, y, z положительны, а противоположные направления z, y – отрицательны, что показано на рис. 5, б.

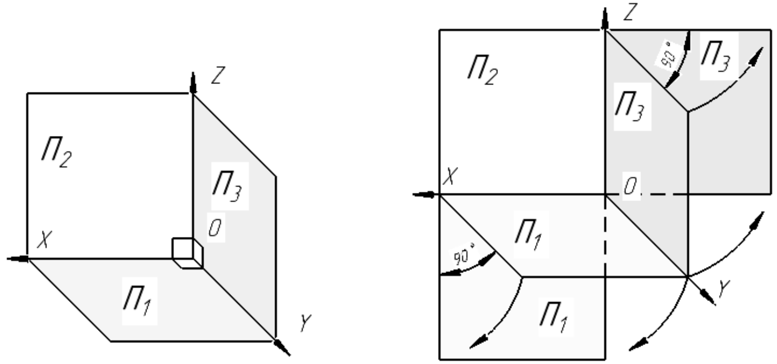
В дальнейшем, для упрощения решения задач будем считать, что геометрические фигуры расположены в первом квадранте.

3.1. Проецирование на три взаимно перпендикулярные плоскости проекций.

При выполнении чертежей сложных деталей и для решения ряда задач бывают необходимы три и более изображений. Поэтому часто вводят третью, вертикальную плоскость проекций. Эта плоскость перпендикулярна к $П_1$ и $П_2$, т.е. к оси x_{12}. Ее называют профильной плоскостью проекций и обозначают $П_3$ (рис.6). Трехмерные пространственные объекты удобно ориентировать относительно общепринятой прямоугольной декартовой системы координат. В этой системе оси проекций z и y являются линиями пересечения профильной плоскости проекций с фронтальной и горизонтальной. Точка О – начало координат – точка пересечения всех трех осей проекций (рис. 6, а).

На рис. 6, а представлены положительные направления осей проекций x, y, z. Обратные направления координатных осей, как указывалось ранее, считаются отрицательными (рис. 5, а).

Схема совмещения трех плоскостей проекций в одну плоскость чертежа показана на рис. 6, б. При этом ось y как бы “режется” на две части.



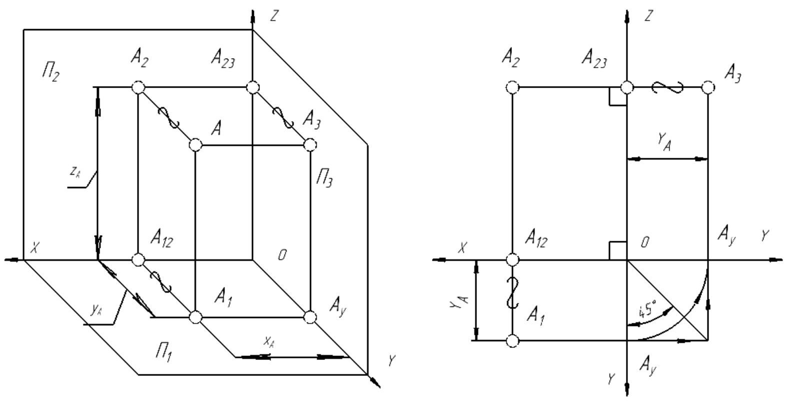
а *б*

Рис. 6

Наглядное изображение точки A и ее трех проекций A_1, A_2, A_3 приведены на рис. 7, а, на котором видно, что фронтальная и профильная проекции точки лежат на одной линии связи $A_2A_{23}A_3 \perp z$, аналогично

$A_2A_{12}A_1 \perp x$

Комплексный чертеж трех проекций точки A показан на рис. 7, б.



а *б*

Рис. 7

Если известны две проекции точки А, всегда можно построить ее третью проекцию (рис. 7, б). Для этого из фронтальной проекции А2 проводят линию связи перпендикулярно оси z и от оси z вправо откладывают отрезок равный координате y_A.

$A_{23}A_3 = y_A = A_{12}A_1$

Это способ точный, а потому предпочтительней, чем проведение постоянной чертежа под углом 45° к оси y или дуги окружности (рис. 7, б)

Точка на чертеже определяется двумя проекциями (третью всегда можно построить) или тремя координатами, что равнозначно.

$A\ (A_1, A_2) \Leftrightarrow A(x, y, x)$

Координата** – число, определяющее положение точки в пространстве, которое измеряется в миллиметрах (мм) по соответствующей оси и **равно расстоянию от точки до соответствующей плоскости проекций.

<u>Задача 1.</u>

Построить три проекции точки А(35, 25, 40), рис. 8.

Числовые величины, выражающие координаты точки А, например,

x = 35мм, y = 25мм, z = 40мм, записываются так: А(35, 25, 40).

Постройте три проекции точки А. Для этого по оси x_{12} от начала координат (0) отложите значение x = 35 мм влево. Проведите линию связи перпендикулярно оси x_{12}, на которой вниз по направлению оси y отложите его значение y_A = 25 мм. Это горизонтальная проекция точки A_1, а вверх – координату z_A = 40 мм. Это фронтальная проекция точки A_2. Из A_2 проведите линию связи перпендикулярно оси z и от оси z вправо отложите значение y_A = 25 мм, т.к. $A_{12}A_1 = A_{23}A_3 = y_A$ и обозначьте полученную профильную проекцию точки A_3.

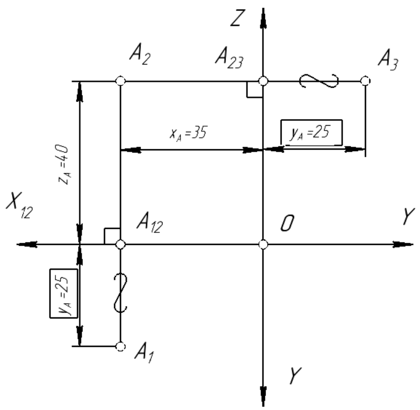


Рис. 8

На каком расстоянии от горизонтальной плоскости проекций находится точка А? Это высота точки – координата z, которая определяется следующим образом: $z_A = A_2A_{12}$ = 40 мм (рис. 8).

Как определить на каком расстоянии находится точка А от фронтальной плоскости проекций? Это глубина точки – координата y, которая определяется следующим образом: $y_A = A_1A_{12}$ = 25 мм (рис.8).

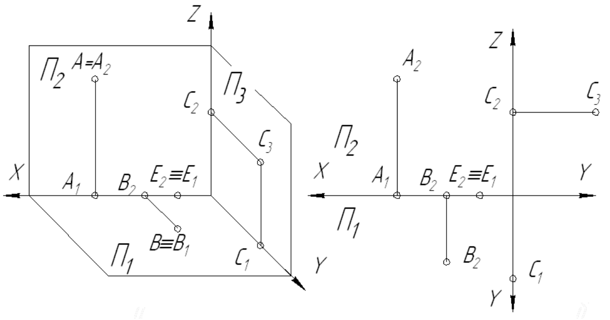
3.2. Точки общего и частного положения

По отношению к плоскостям проекций точка может занимать общее положение, т.е. находиться вне каждой из них, и частное положение – принадлежать одной из этих плоскостей проекций или сразу двум плоскостям проекций.

Такие точки показаны на наглядном рис. 9, а и на комплексном чертеже на рис. 9, б.

Если точка лежит в одной из плоскостей проекций, то одна из ее координат равна 0, т.е. одна из проекций находится на соответствующей оси проекций.

На рис. 9 точка $A \subset \Pi_2$, т.к. $y_A = 0$, точка $B \subset \Pi_1$, т.к. $z_B = 0$. Точка E принадлежит плоскостям и Π_2 и Π_1, т.к. $y_C = z_C = 0$.



а *б*

Рис. 9

4. Проекции прямой линии

В курсе элементарной геометрии прямую определяют двумя точками, как кратчайшее расстояние между ними или точкой и направляющим вектором перемещения этой точки. Поэтому чтобы получить комплексный чертеж прямой линии достаточно построить проекции двух ее точек и провести проекции прямой параллельно заданному направлению.

В системе плоскостей проекций прямая линия занимает некоторое определенное положение. Она может быть расположена произвольно относительно плоскостей проекций. Такая прямая АВ изображена на рис.17. *Это прямая* ***общего положения***.

Угол наклона прямой АВ к Π_1, обозначают $\alpha°$, а угол наклона к Π_2 - $\beta°$ (рис. 12).

Прямая занимает ***частное положение****, если она параллельна или перпендикулярна одной из плоскостей проекций или принадлежит непосредственно плоскости проекций.*

4.1. Прямые частного положения

Частные положения прямых в пространстве можно разбить на группы:

1. Прямая расположена параллельно одной из плоскостей проекций. Такие прямые называют **прямыми уровня**. Их три – по числу плоскостей проекций. Если прямая принадлежит плоскости проекций, такую линию называют **прямой нулевого уровня**.
2. Прямая расположена перпендикулярно одной из плоскостей проекций (совпадает с направлением проецирования). Эти прямые называют **проецирующими**. Таких прямых по числу плоскостей проекций – три.

Прямую, параллельную горизонтальной плоскости проекций, называют **горизонтальной прямой уровня** или **горизонталью** и обозначают h,(рис. 10). A_1B_1 – натуральная величина.

Прямую, параллельную фронтальной плоскости проекций, называют **фронтальной прямой уровня** или **фронталью** и обозначают f, (рис. 11). A_2B_2 – натуральная величина.

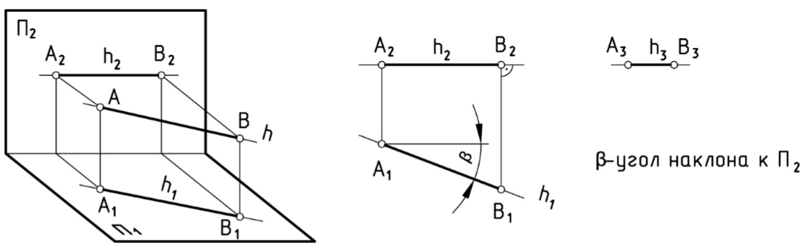


Рис. 10

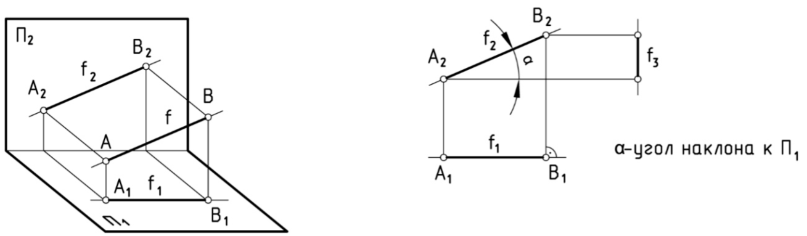


Рис. 11

Прямую, параллельную профильной плоскости проекций, называют **профильной прямой уровня** и обозначают p,(рис. 12). A_3B_3 – натуральная величина.

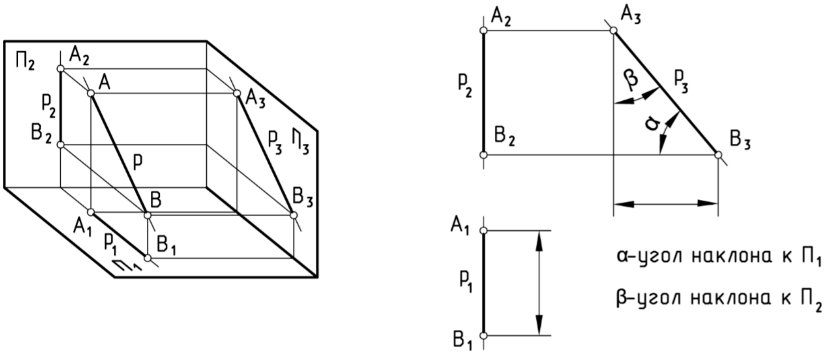
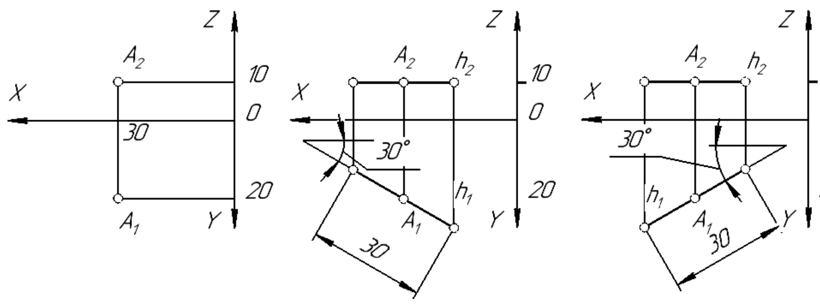


Рис. 12

<u>Задача 2.</u>

Постройте горизонталь длиной 30 мм, проходящую через точку A(30, 20, 10) под углом 30° к фронтальной плоскости проекций, рис. 13.

1. Постройте точку A по заданным координатам, рис. 13, а.
2. Так как на горизонтальную плоскость горизонталь проецируется без искажения, и угол наклона горизонтали к фронтальной плоскости проекций тоже проецируется без искажения, проведите через горизонтальную проекцию точки A отрезок длиной 30 мм под углом 30° к фронтальной плоскости проекций, рис. 13 ,б, в.
3. Фронтальную проекцию горизонтали проведите через фронтальную проекцию точки A параллельно оси проекций, рис. 13, б., в.



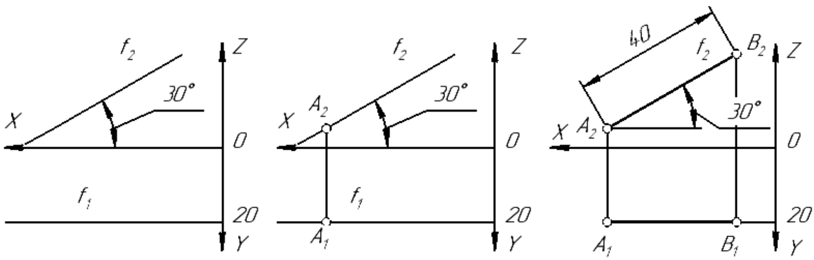
а б в

Рис. 13

<u>Задача 3.</u>

Постройте фронталь длиной 40 мм, удаленную от фронтальной плоскости проекций на расстоянии 20 мм под углом 30° к горизонтальной плоскости проекций, рис. 14.

1. Проведите горизонтальную проекцию фронтали параллельно оси X на расстоянии 20 мм от оси проекции, рис. , фронтальную проекцию фронтали – под углом 30°, рис. 14, а.
2. На построенной проямой выберите произвольную точку A, рис. 14, б.
3. На фронтальной проекции фронтали найдите фронтальную проекцию точки B на расстоянии 40 мм от точки A, рис. 14, в.
4. Определите горизонтальную проекцию точки B, используя линию связи., рис. 14, в.



а б в

Рис. 14

Прямые, перпендикулярные какой-либо плоскости проекции, называются **проецирующими** и обозначаются (i).

В зависимости от того, какой плоскости проекции перпендикулярна прямая, различают *(*рис. 15*):*

- горизонтально проецирующие прямые (AB),
- фронтально проецирующие прямые (CD) ,
- профильно проецирующие прямые (EF).

На рис. 15 показана видимость точек. У горизонтально-проецирующей прямой AB на горизонтальной проекции видна будет та точка, у которой координата Z будет больше. Это точка A. У фронтально-проецирующей прямой CD на фронтальной проекции видна будет та точка, у которой координата Y будет больше. Это точка C.

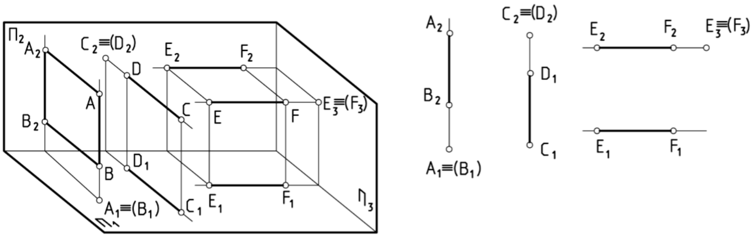


Рис. 15

Задача 4.

Проведите горизонтально-проецирующую прямую длиной 20 мм, удаленную от фронтальной плоскости проекций на 10 мм, а от профильной – на 15 мм, рис. 16.

,

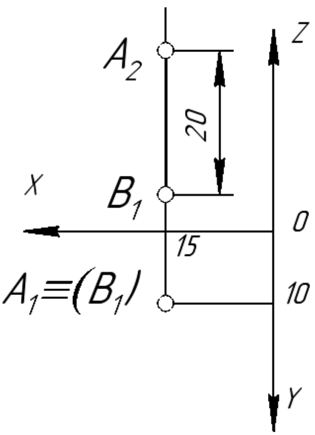


Рис. 16

Горизонтально-проецирующая прямая – это прямая перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций и параллельная фронтальной плоскости проекций. Следовательно, на фронтальную плоскость проекции прямая будет проецироваться без искажения, а горизонтальная проекция в виде точки. Проведите вертикальную прямую, отстоящую от начала координат на 15 мм. Горизонтальная проекция прямой – точка, отстоящая от оси x на 10 мм. На фронтальной проекции отложите отрезок АВ равный 20 мм.

4.2. Определение длины отрезка прямой общего положения и углов его наклона к плоскостям проекций.

Прямая, которая в системе плоскостей проекций занимает произвольное положение, т.е. не перпендикулярна и не параллельна к плоскостям проекций, называется ***прямой общего положения*** (рис. 17). Такая прямая пересекает плоскости проекций под некоторыми углами. Угол наклона прямой к плоскости проекций измеряется углом между самой прямой (ее dd) и соответствующей проекцией этой прямой.

На комплексном чертеже (рис. 18) даны проекции прямой. Поэтому для определения ее действительной длины (dd) необходимо воспользоваться правилом, которое следует из рис. 17.

Действительная длина прямой общего положения *– гипотенуза прямоугольного треугольника, который строят по двум катетам.*

Один катет-проекция отрезка, а второй – разность координат концов отрезка, взятая с другой проекции.

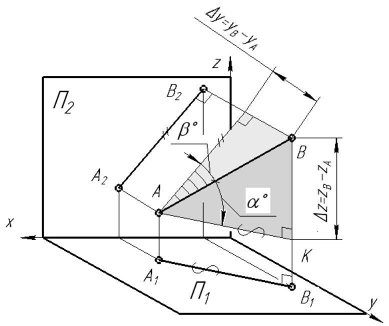


Рис. 17

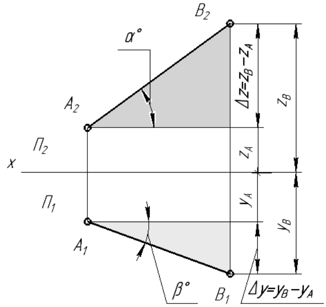
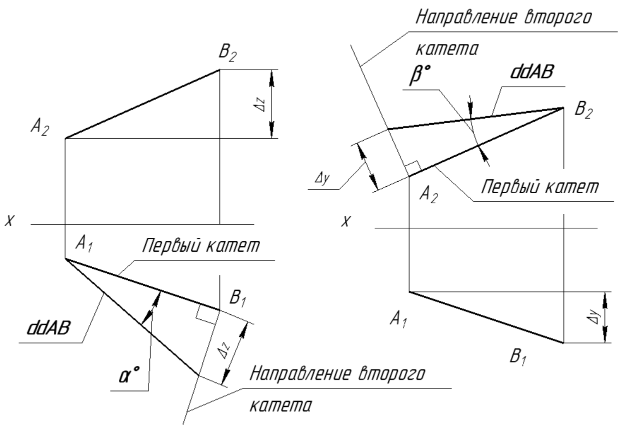


Рис. 18

На рис. 18 указаны разности соответствующих координат (Δz, Δy), а на рис. 19, а и б показано решение задач на определение по приведенному правилу действительной величины прямой AB и углов α°, β° ее наклона к $П_1$ и $П_2$.



а *б*

Рис. 19

Примем горизонтальную проекцию отрезка АВ за первый катет (рис.19, а). Тогда второй катет равен Δz. Постройте его направление под углом 90° к A_1B_1 (рис. 19, а) и отложите на нем величину Δz, измеренную на фронтальной проекции отрезка. Угол наклона прямой АВ к горизонтальной плоскости проекций ($\alpha°$) – это угол между действительной длиной прямой АВ (гипотенузой) и ее горизонтальной проекцией.

Если за первый катет взять фронтальную проекцию отрезка A_2B_2 (рис.19, б), то второй катет - Δy, величину которого измеряют на горизонтальной проекции и откладывают на перпендикуляре к A_2B_2. Угол наклона прямой АВ к фронтальной плоскости проекций ($\beta°$) – это угол между действительной длиной прямой АВ (гипотенузой) и ее фронтальной проекцией.

<u>Задача 5.</u>

Определите натуральную величину угла наклона прямой АВ к горизонтальной плоскости проекций, рис. 20.

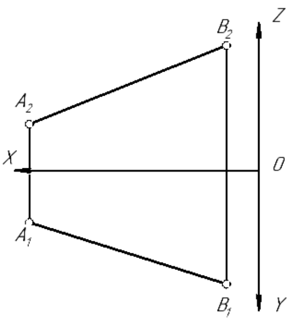


Рис. 20

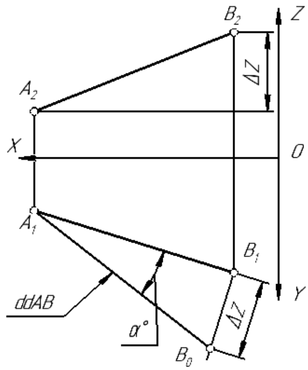


Рис. 21

Для определения натуральной величины угла наклона прямой АВ к горизонтальной плоскости проекций постройте прямоугольный треугольник, у которого один катет – это горизонтальная проекция отрезка A_1B_1, а второй катет – разность расстояний концов отрезка до горизонтальной плоскости проекций (ΔZ), рис. 21. Искомым углом наклона будет угол ($\alpha°$) между гипотенузой (A_1B_0) и горизонтальной проекцией (A_1B_1).

4.3. Построение отрезка заданной длины.

<u>Задача 6</u>.

От заданной точки А отложите на прямой lотрезок длиной 30 мм, рис. 22.

На прямой l отметьте произвольную точку С. Постройте прямоугольный треугольник $A_1C_1C_0$, у которого катет C_1C_0 равен ΔZ, рис. 23.

Гипотенуза прямоугольного треугольника - это натуральная величина отрезка АС.

Отложите на построенной гипотенузе отрезок A_1D_0, равный 30 мм.

Проведите $D_0D_1 \parallel C_0C_1$, определив горизонтальную проекцию отрезка заданной длины.

Постройте фронтальную проекцию точки D_2, проведя линию связи.

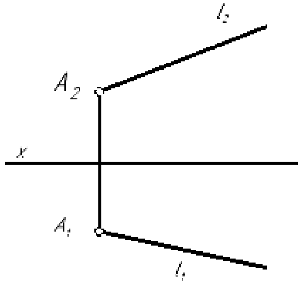


Рис. 22

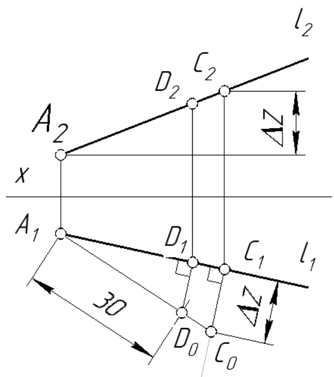


Рис. 23

4.4. Точка на прямой. Деление отрезка прямой в данном отношении.

Согласно свойству 3 метода проецирования, ***точка принадлежит прямой****, если ее одноименные проекции принадлежат одноименным с ней проекциям прямой и располагаются на одной, общей линии связи.*

Из четырех точек А, В, С, D, заданных своими проекциями на рис. 24 принадлежит прямой l только точка А ($A \in l \Leftrightarrow A_1 \in l_1$; $A_2 \in l_2$). Точка В расположена в пространстве перед прямой l, а точка С – под прямой l. Точка D находится в III квадранте (-z, -y), а прямая l – в первом.

<u>Задача 7.</u>

Разделите отрезок прямой АВ точкой С в отношении 2:3, рис. 25.

Если точка лежит на отрезке прямой, она делит этот отрезок в некотором отношении. Согласно свойству 5, в этом же отношении проекция точки делит и проекции отрезка.

Если требуется разделить отрезок АВ точкой С в некотором отношении, например, 2:3, то достаточно в этом отношении разделить любую проекцию отрезка АВ. На рис. 19 это пропорциональное деление выполнено на горизонтальной проекции. Для этого из точки A_1 проведена в произвольном направлении вспомогательная прямая m и на ней отложены пять (сумма величин, составляющих данное отношение отрезков 5=2+3) равных масштабных отрезков любых длин. Соединив B_1 и полученную на прямой m точку B_0, проводим параллельно этому направлению через C_0 прямую до пересечения с A_1B_1 (C_0C_1 II B_0B_1). Отрезку A_1C_0 на произвольной прямой m соответствуют два масштабных отрезка, а отрезку C_0B_0 – три таких отрезка. Определив горизонтальную проекцию – C_1 точки, которая делит отрезок в заданном отношении AC : CB = 2 : 3, легко с помощью линии связи построить C_2.

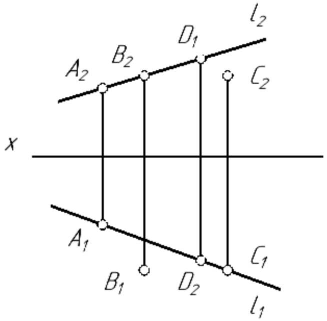


Рис. 24

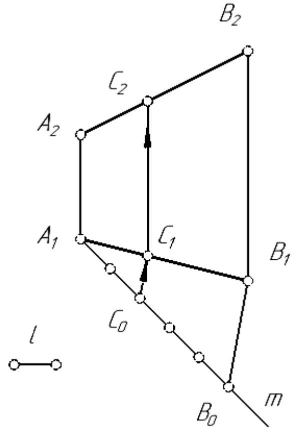


Рис. 25

Задача 8.

На прямой AB постройте проекции точки C, удаленной от горизонтальной плоскости проекций на расстояние 20 мм, рис. 26.

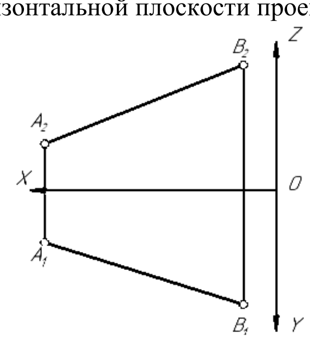


Рис. 26

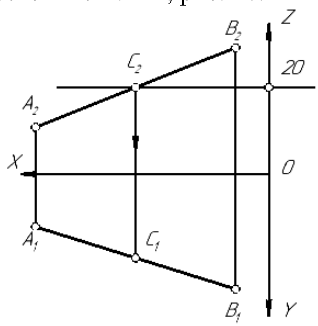


Рис. 27

Точка на прямой удалена от горизонтальной плоскости проекций на расстояние 20 мм, т.е. ее координата Z равна 20 мм. Поэтому проведите горизонтальную прямую, имеющую координату Z=20, до пересечения с фронтальной проекцией прямой A_2B_2. Так как точка C принадлежит прямой AB, проведите линию связи и найдите горизонтальную проекцию точки C.

4.5. Следы прямой.

***Следы прямой** – это точки ее пересечения с плоскостями проекций.*

<u>Задача 9.</u>

Постройте горизонтальный и фронтальный следы прямой АВ, рис. 28.

Для определения *горизонтального следа прямой* продлите фронтальную проекцию прямой до пересечения с осью проекций. В этом случае точка М будет принадлежать горизонтальной плоскости проекций (координата Z=0). Горизонтальную проекцию точки М определите, проведя линию связи.

Для определения *фронтального следа прямой* продлите горизонтальную проекцию прямой до пересечения с осью проекций. В этом случае точка N будет принадлежать фронтальной плоскости проекций (координата Y=0). Фронтальную проекцию точки N определите, проведя линию связи.

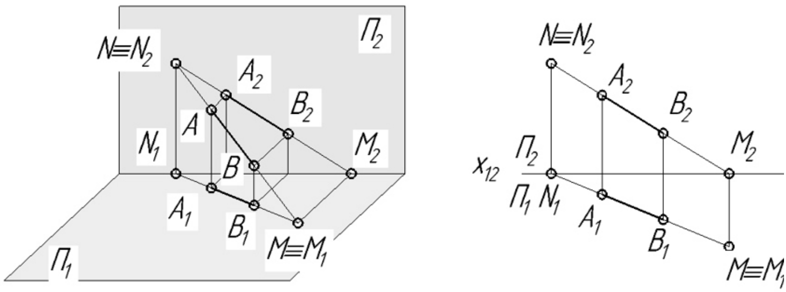


Рис. 28

M – горизонтальный след прямой АВ.
$M=AB\cap\Pi_1$
N –фронтальный след прямой АВ.
$N=AB\cap\Pi_2$

4.6. Взаимное расположение прямых в пространстве

Рассмотрим три случая взаимного расположения прямых в пространстве:

1. Прямые параллельные между собой
2. Прямые пересекаются между собой
3. Прямые скрещиваются, т.е. не пересекаются между собой.

***Пересекающиеся прямые** – это прямые, которые лежат в одной плоскости и имеют одну общую точку пересечения*. Согласно свойству 6 метода проецирования, если прямые пересекаются, то и их одноименные проекции пересекаются в точках, которые лежат на одной линии связи, т.е. на общем перпендикуляре к оси проекций (рис. 30).

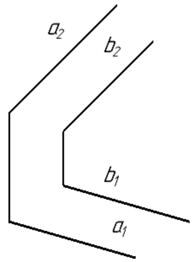


Рис. 29

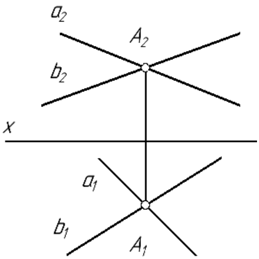


Рис. 30

Согласно свойству 4 метода проецирования ***параллельные прямые*** *имеют параллельные одноименные проекции*, что видно из рис. 29.

Задача 10.

Через точку *A* проведите горизонталь, пересекающую прямую *l*, рис. 31.

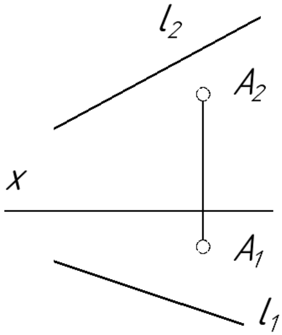


Рис. 31

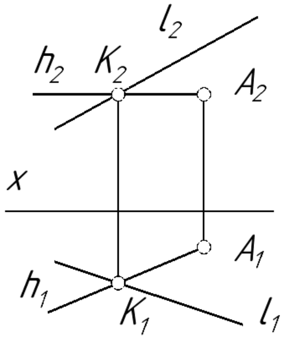


Рис. 32

Так как горизонталь – это прямая параллельная горизонтальной плоскости проекций, то ее фронтальная проекция будет параллельна оси x. Найдите фронтальную проекцию точки пересечения прямых l и h (K_2). Прямые l и h пересекаются. Поэтому их одноименные проекции пересекаются в точках, которые лежат на одной линии связи. Постройте горизонтальную проекцию точки пересечения двух прямых (K_1). Через точки A_1 и K_1 проведите прямую h_1.

Скрещивающиеся прямые *линии не пересекаются и не параллельны между собой*, т.е. эти прямые не имеют общих точек и не лежат в одной плоскости (рис.33, 34). Проекции таких прямых могут пересекаться, но точки их пересечения не лежат на общем перпендикуляре к оси, т.е. не лежат на одной линии связи (рис. 34). В этом случае нас будет интересовать, какая прямая проходит выше, а какая ниже, какая прямая расположена впереди, а какая – за ней и поэтому невидима.

Для этого нужно рассмотреть ***“конкурирующие точки”***, т.е. *точки, расположенные на проецирующей прямой.* На рис. 33, 34 это точки A и B, у которых совпадают их фронтальные проекции, а также точки C и D, у которых сливаются горизонтальные проекции, рис. 33, 34. Точка A расположена впереди и закрывает точку B на виде спереди. Аналогично, точка C расположена выше и закрывает точку D.

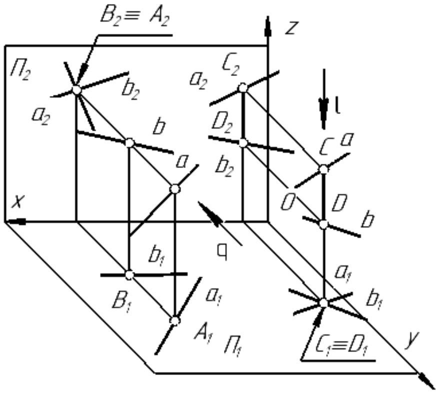


Рис. 33

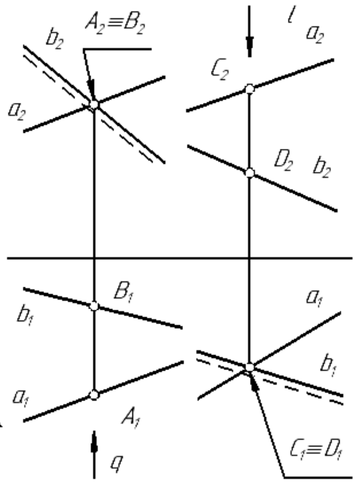


Рис. 34

4.7. Проецирование прямого угла

Прямой угол между пересекающимися прямыми проецируется в натуральную величину только в том случае, если одна из его сторон параллельна плоскости проекций, т.е. является линией уровня, согласно свойству 9 метода проецирования.

<u>Задача 11.</u>

Из точки A проведите перпендикуляр к прямой l, рис. 35.

Прямая 1 – общего положения. На рис. 35 приведены два варианта решения задачи. На рис. 35, а проведен перпендикуляр к l_2, а на рис. 35, б – к l_1. Чтобы угол 90° проецировался в натуральную величину, необходимо, чтобы одна его сторона была бы линией уровня. Так как 1 -–прямая общего положения, то линией уровня обязан быть проведенный перпендикуляр.

Итак, если $q_2 \perp l_2$, то q – фронталь, а следовательно постройте f_1 II x. Если $n_1 \perp l_1$, то n – горизонталь, поэтому - h_2 II x.

Задача.

Из точки А проведите перпендикуляр к прямой h, рис. 36. Чтобы угол 90° проецировался в натуральную величину, необходимо, чтобы одна его сторона была бы параллельна плоскости проекций. Прямая h – горизонталь, т.е. прямая параллельная горизонтальной плоскости проекций. Поэтому необходимо провести A_1K_1 перпендикулярно h_1, определив горизонтальную проекцию основания перпендикуляра K_1, а затем постройте фронтальную проекцию перпендикуляра с помощью линии связи.

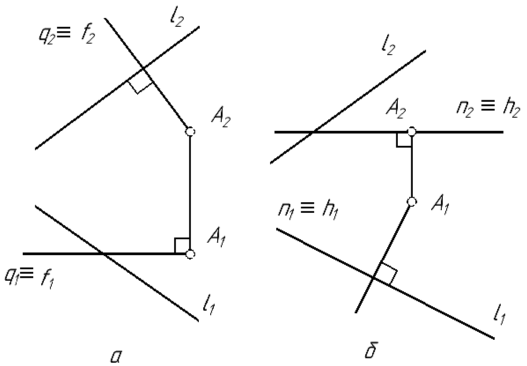


Рис. 35

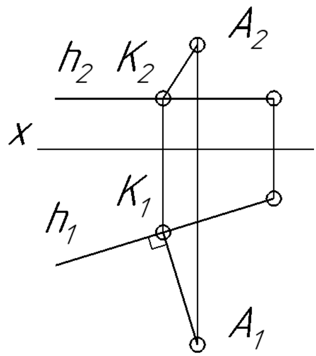


Рис. 36

5. Проецирование плоских фигур

Под плоской фигурой будем подразумевать какую-то часть (отсек) заданной плоскости, т.к. плоскость бесконечна.

Положение плоскости в пространстве определяется положениями задающих ее отдельных элементов.

Как известно, можно провести плоскость и притом только одну

1) Через три точки, не лежащие на одной прямой,
2) Через прямую и точку, не лежащую на этой прямой
3) Через две параллельные прямые
4) Через пересекающиеся прямые

5.1. Задание плоскости на комплексном чертеже

Плоскости, как и прямые, могут быть *общего и частного положений*.

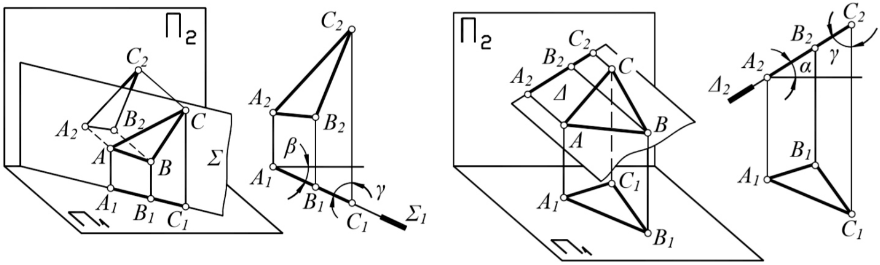
Плоскость, которая не параллельна и не перпендикулярна ни одной из плоскостей проекций, называют ***плоскостью общего положения***.

5.2. Плоскости частного положения

Плоскости частного положения можно разбить на две группы:

- Проецирующие плоскости.
- Плоскости уровня.

1. ***Проецирующие плоскости****, перпендикулярные к одной из плоскостей проекций (расположены под произвольными углами к двум другим плоскостям проекций)*. Таких положений три (по числу плоскостей проекций).



а *б*

Рис. 37

На рис. 37, а показана горизонтально - проецирующая плоскость, а на рис. 37, б - фронтально - проецирующая плоскость.

β°-угол наклона горизонтально-проецирующей плоскости к фронтальной плоскости проекций.

α°- угол наклона фронтально – проецирующей плоскости к горизонтальной плоскости проекций

На рис.38 показана профильно – проецирующая плоскость

У проецирующей плоскости одна проекция является прямой линией, которая называется вырожденной проекцией плоскости. На ней располагаются проекции всех точек, линий и фигур, лежащих в этой плоскости.

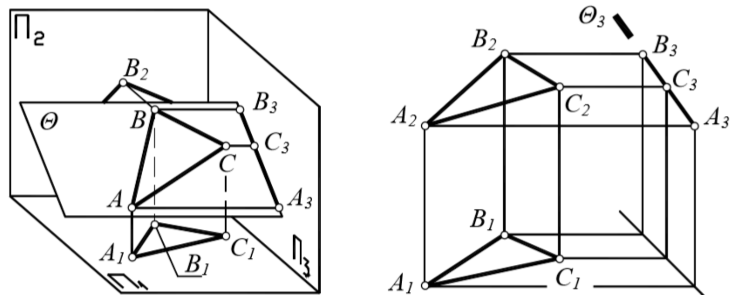
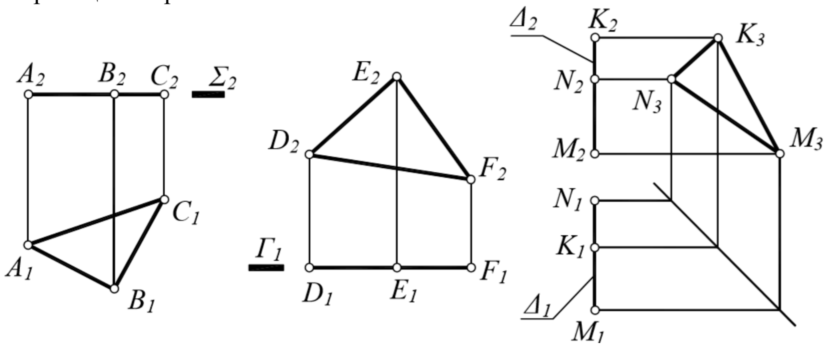


Рис. 38

2. *Плоскость, параллельная одной из плоскостей проекций, называется* ***плоскостью уровня.*** Таких плоскостей в системе трех плоскостей проекций – три.



а б в

Рис. 39

На рис. 39, а изображена горизонтальная плоскость уровня, на рис.39 , б - фронтальная плоскость уровня, на рис. 39, в – профильная плоскость уровня. Любая фигура, лежащая в плоскости уровня, проецируется без искажения на плоскость проекции, параллельно которой расположена заданная плоскость.

5.3. Прямая и точка в плоскости

Решение задач на взаимную принадлежность точки и прямой в плоскости общего положения основывается на известных положениях геометрии.

Положение 1

Прямая принадлежит плоскости*, если она проходит:*

a) *через две точки, принадлежащие плоскости;*

b) *через одну точку, но параллельно прямой в этой плоскости (рис. 43)*

Задача 12.

Постройте горизонтальную проекцию прямой l, принадлежащую плоскости ΔABC, если задана ее фронтальная проекция, рис. 40.

Если прямая l лежит в плоскости ΔABC, то построить ее недостающую проекцию l_1 по заданной фронтальной проекции – l_2 просто. Для этого необходимо, согласно положению: а) обозначить две точки этой прямой – 1_2 и 2_2, рис. 40, которые принадлежат соответственно прямым AB и AC этой плоскости. Перестроив горизонтальные проекции этих точек – 1_1 и 2_1 с помощью линий связи и соединив их, получим l_1, рис. 41.

Задача13.

Постройте фронтальную проекцию прямой m, если она принадлежит плоскости ΔABC, проходит через точку D, параллельна прямой AB, рис. 42.

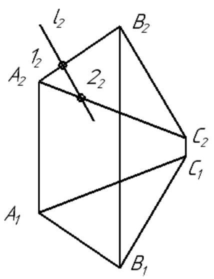


Рис. 40

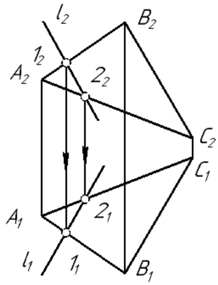


Рис. 41

На рис. 42, построена прямая m, которая пересекает прямую CB в точке D и параллельна AB. Так как $m_1 \| A_1B_1$, а $m_2 \| A_2B_2$, то по положению 1 прямая m принадлежит плоскости ΔABC.

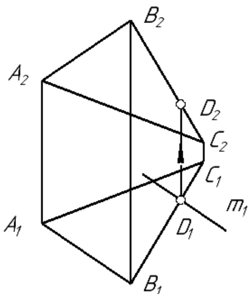


Рис. 42

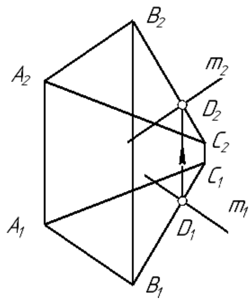


Рис. 43

Положение 11

Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит прямой этой плоскости.

На рис. 44 задана плоскость ΔABC. Следовательно, известен ряд точек, которые принадлежат этой плоскости. Это точки A, B, C, проекции которых принадлежат одноименным проекциям соответствующих прямых AB, BC, CA (согласно свойству 3) и лежат на общих линиях связи.

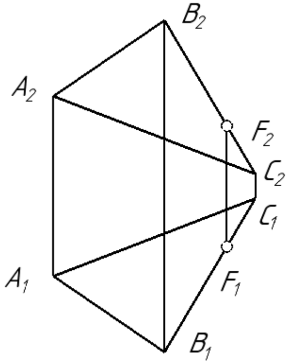


Рис. 44

Любая точка на одной из этих прямых, например, точка F на прямой BC, принадлежит плоскости ΔABC, если ее проекции $F_2 \subset B_2C_2$, а $F_1 \subset B_1C_1$ и при этом она лежит на одной линии связи, как показано на рис. 44.

Чтобы определить какую-либо точку плоскости, не лежащую на одной из ее прямых, необходимо через эту точку провести в плоскости дополнительную вспомогательную прямую согласно положению 11.

Задача 14.

Постройте горизонтальную проекцию точки E, если задана ее фронтальная проекция и она принадлежит плоскости ΔABC, рис. 45.

На рис. 46, показано построение горизонтальной проекции точки E по ее заданной фронтальной проекции – E_2, если точка E принадлежит плоскости ΔABC. Для этого необходимо через E провести любую вспомогательную прямую, например, BN. Для этого через E_2 проведите B_2N_2, затем - точку N_1 на соответствующих проекциях прямых на $П_1$ с помощью линий связи. На прямую B_1N_1 перенесите по линии связи искомую проекцию E_1 (согласно свойству 3).

Точка находится в плоскости, если на чертеже ее проекции расположены на одноименных проекциях вспомогательной прямой, лежащей в этой плоскости.

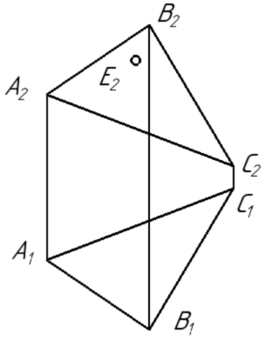


Рис. 45

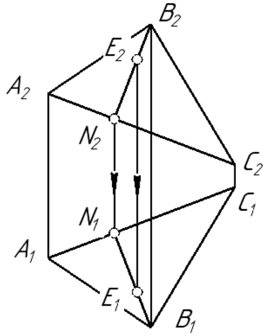


Рис. 46

<u>Задача 15.</u>

Постройте горизонтальные проекции точки А и горизонтально-проецирующей прямой m, если заданы их фронтальные проекции и они принадлежат горизонтально-проецирующей плоскости Г, рис. 47.

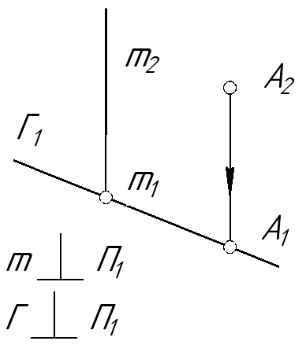


Рис. 47

Если точка А принадлежит горизонтально проецирующей плоскости Г $\perp$ Π_1, то ее горизонтальная проекция обязана совпадать с вырожденной проекцией такой плоскости. Аналогично определяют принадлежность проецирующей прямой m плоскости Г.

Особые линии плоскости

Среди прямых линий в плоскости особое место занимают главные линии этой плоскости, линии уровня – горизонтали и фронтали плоскости. Таких линий уровня в плоскости, которые параллельны между собой, можно провести бесчисленное множество.

Горизонтали – прямые, лежащие в плоскости и параллельные плоскости $П_1$. При этом фронтальная проекция горизонтали $h_2 \| OX$ (перпендикулярна линиям связи, как на рис. 48, а).

Фронтали – прямые, расположенные в плоскости и параллельные плоскости $П_2$. Их горизонтальные проекции всегда горизонтальны, т.е. $f_1 | \; | OX$ (перпендикулярны линиям связи, что видно на рис. 48, б).

<u>Задача 16.</u>

В плоскости ΔABC постройте горизонталь h, рис. 48, а.

На рис. 48 показаны построения проекций h и f в плоскости ΔABC. Построение h (рис.48, а) начинают с ее известной фронтальной проекции, т.к. $h_2 \perp$ линиям связи ($h_2 | \; | OX$). При этом можно h_2 провести в любом месте плоскости, например, $3_2 2_2$, но рациональнее провести h_2 через вершину треугольника – точку A для сокращения числа построений. При этом нужно по линии связи построить только одну точку 1_1 и h_1 построена.

<u>Задача 17.</u>

В плоскости ΔABC постройте фронталь f, рис. 48, б.

На рис. 48, б показано построение проекции f в ΔABC. Их начинают с проведения известной горизонтальной проекции фронтали, поскольку она перпендикулярна линиям связи ($f_1 | \; | OX$). Проводим f_1 через вершину C. Отметим 1_1 и по линии связи перестроим 1_2 на A_2B_2. Через 1_2 проводим f_2.

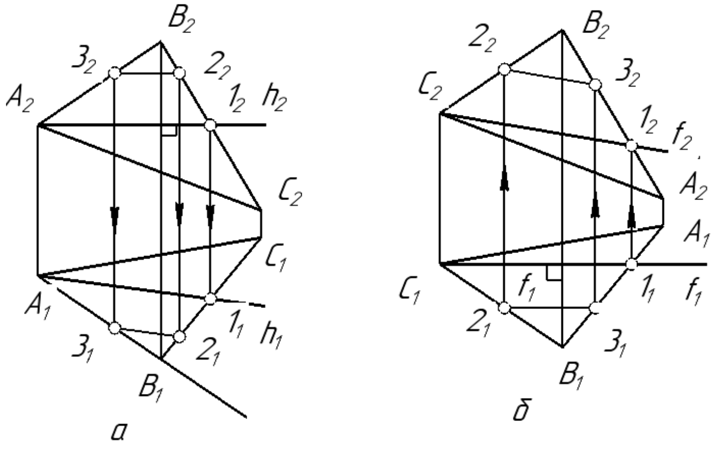


Рис. 48

6. Взаимное расположение прямой и плоскости, двух плоскостей

Рассмотрим следующие частные варианты относительного расположения прямой и плоскости, а также двух плоскостей: их параллельность и взаимную перпендикулярность, а в следующем параграфе – их пересечение.

6.1. Параллельность прямой и плоскости. Параллельность плоскостей.

Из стереометрии известны следующие положения:

1. Прямая параллельна плоскости, если она параллельна прямой, лежащей в этой плоскости.
2. Плоскости параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости.

<u>Задача 18.</u>

Через точку E проведите прямую l параллельную плоскости Δ ABC, а через точку N – плоскость Ω параллельную плоскости Δ ABC.

На рис. 49 показаны построения на комплексном чертеже прямой l и плоскости Ω. Прямая l и плоскость Ω параллельны заданной плоскости Δ ABC согласно положениям 1 и 2.

1. Через точку E проведена прямая l || Δ ABC (l_1 | | A_1B_1; l_2 | | A_2B_2);
2. Через точку N проведена плоскость Ω || Δ ABC. Плоскость Ω задана двумя пересекающимися прямыми $m \cap q = N$, при этом построены
   m || AB и q || AC.

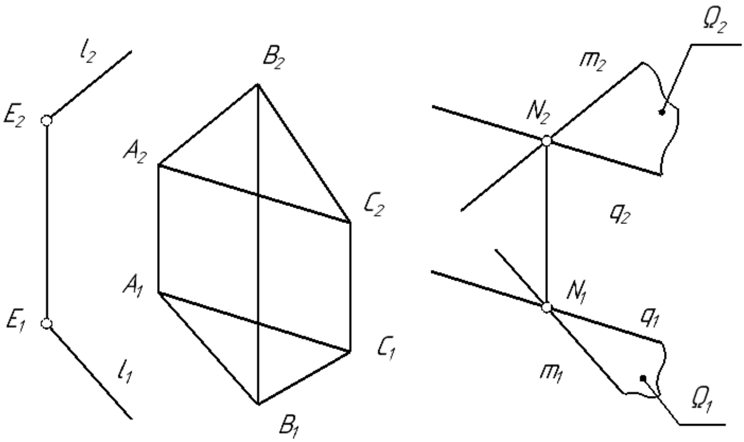


Рис. 49

6.2. Перпендикулярность прямой и плоскости; двух плоскостей

Прямая l перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым в этой плоскости. По теореме о проецировании прямого угла угол 90° проецируется без искажения, если одна его сторона – линия уровня. Следовательно, в качестве таких пересекающихся прямых в плоскости Г можно использовать ***только линии уровня h и f.***

Прямая l перпендикулярна плоскости Г в пространстве, если на комплексном чертеже $l_1 \perp h_1$, а $l_2 \perp f_2$ этой плоскости.

Две плоскости взаимно перпендикулярны, если одна из них проходит через перпендикуляр к другой плоскости.

Чтобы провести плоскость Ω перпендикулярно плоскости Г, ее нужно задать двумя пересекающимися прямым $\Omega(l^* \cap q)$. При этом l^* провести перпендикулярно Г.

$\Gamma(h \cap f) \perp \Omega(l^* \cap q)$,
$l^* \perp \Gamma \Rightarrow l^*_1 \perp h_1$; $l^*_2 \perp f_2$

<u>Задача 19.</u>

Через точку D провести прямую $l \perp \Delta ABC$, а через точку К – плоскость Ω перпендикулярно плоскости Δ ABC (рис. 50).

Постройте перпендикуляр l из точки D к плоскости Δ ABC. Для этого проводите в Δ ABC проекции горизонтали h и фронтали f согласно рис. 48. Через точку D проводите $l_1 \perp h_1$, а $l_2 \perp f_2$.

Постройте плоскость Ω перпендикулярно заданной плоскости Δ ABC. Задайте плоскость Ω двумя пересекающимися прямыми $\Omega(l^* \cap q = K)$, при этом $\Omega \perp \Delta ABC$, если $\Omega \supset l^*$ и $l^* \perp \Delta ABC$, следовательно через точку К необходимо провести $l^* \perp \Delta ABC$

В Δ ABC проекции горизонтали h и фронтали f уже построены
Через точку К постройте $l^*_1 \perp h_1$, а $l^*_2 \perp f_2$. Чтобы задать плоскость Ω проекции q_2 и q_1 проводим произвольно, но так, чтобы прямая q пересекала прямую l в точке К.

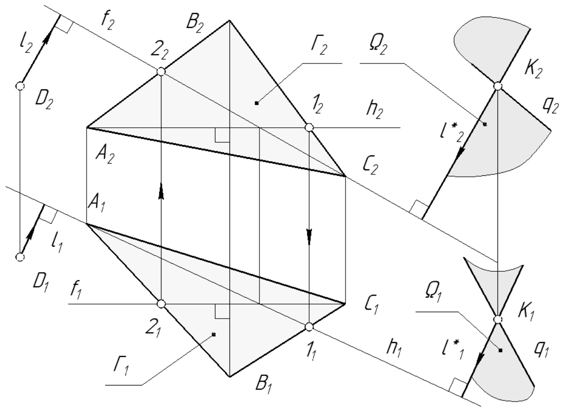


Рис. 50

<u>Задача 20.</u>

Из точки A плоскости Σ(ABC) проведите перпендикуляр AN длиной 20 мм.

Для построения перпендикуляра к плоскости необходимо провести в плоскости горизонталь и фронталь, рис. 51. Фронтальная проекция перпендикуляра n_2 будет перпендикулярна фронтальной проекции фронтали f_2, а горизонтальная проекция перпендикуляра n_1 – горизонтальной проекции горизонтали h_1, рис. 52.

Затем нужно решить задачу на построение отрезка заданной длины. На рис. 53 приведены необходимые построения. Точка M – произвольная, принадлежащая перпендикуляру n. Определите натуральную величину произвольного отрезка A_1M_0 способом прямоугольного треугольника. Для этого постройте прямоугольный треугольник, у которого один катет – это горизонтальная проекция отрезка A_1M_1, второй катет – это разность расстояний точек A и M до горизонтальной плоскости (ΔZ). Гипотенуза построенного треугольника (A_1M_0) будет натуральной величиной отрезка AM.

На построенном отрезке A_1M_0 отложите отрезок A_1N_1 длиной 20 мм. Определите горизонтальную проекцию точки N_1, проведя отрезок $N_0N_1 \parallel M_1M_0$, а затем, используя линию связи, – фронтальную проекцию точки N_2., рис. 53.

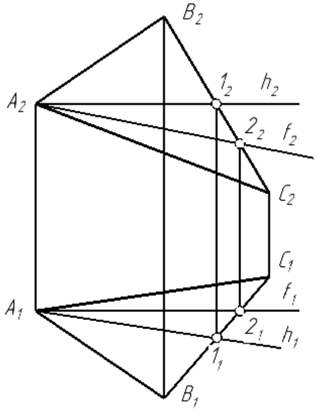


Рис. 51

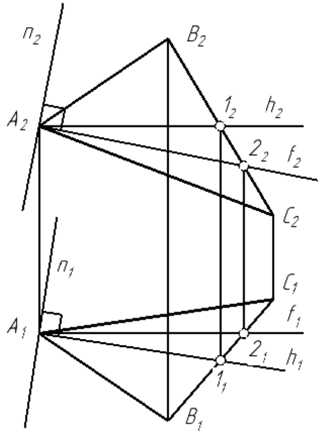


Рис. 52

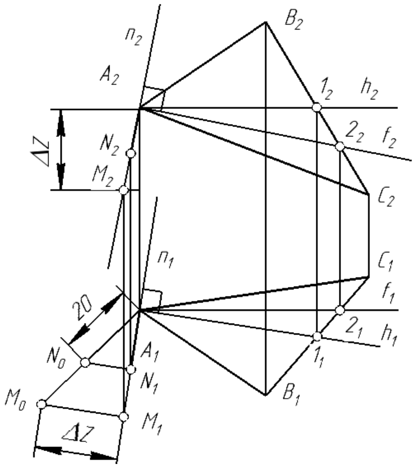


Рис. 53

<u>Задача 21</u>.

Определите кратчайшее расстояние от точки D до плоскости Σ(ABC), рис. 54.

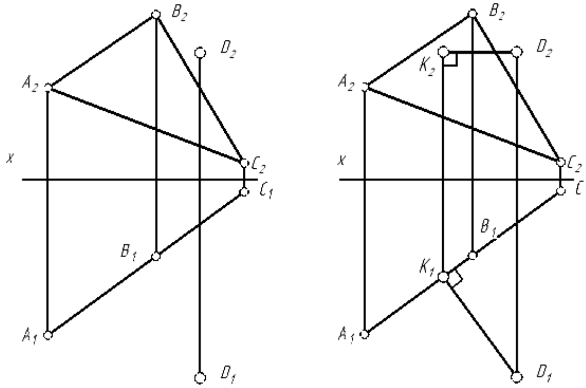


Рис. 54

Так как плоскость Σ(ABC) – горизонтально-проецирующая, то перпендикуляр, проведенный к плоскости из точки D будет параллелен горизонтальной плоскости проекций, рис. 54. Следовательно, согласно теореме о проецировании прямого угла, $D_1K_1 \perp A_1B_1C_1$. D_1K_1 - это натуральная величина кратчайшего расстояния от точки D до плоскости Σ(ABC). Фронтальная проекция перпендикуляра (D2K2) будет параллельна оси проекций X.

<u>Задача 22.</u>

Определите кратчайшее расстояние между скрещивающимися прямыми, рис.55.

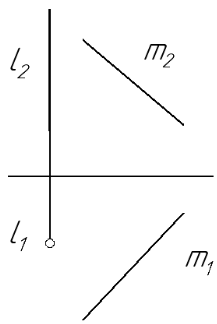


Рис. 55

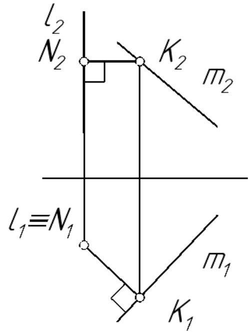


Рис. 56

Даны две скрещивающиеся прямые, одна из которых – горизонтально-проецирующая. Если провести перпендикуляр к горизонтально-проецирующей прямой, то он будет параллелен горизонтальной плоскости проекций. Следовательно, на основании теоремы о проецировании прямого угла, $N_1K_1 \perp m_1$ (рис.56)

Точка К – это точка пересечения перпендикуляра и прямой m. Ее фронтальная проекция определяется с помощью линии связи. $K_2N_2 \perp l_2$ на основании теоремы о проецировании прямого угла.

Точка N – это точка пересечения перпендикуляра и прямой l. Горизонтальная проекция точки N совпадает с горизонтальной проекцией прямой l.

6.3. Перпендикулярность прямых общего положения

Как известно, *две прямые взаимно перпендикулярны, если одна из них принадлежит плоскости Ω, перпендикулярной к другой прямой.*

Следовательно, эта задача является обратной предыдущей. Необходимо построить плоскость Ω, перпендикулярную заданной прямой общего положения l. Такую плоскость Ω зададим пересекающимися в точке А линиями уровня $\Omega(h \cap f = A)$.

<u>Задача 23.</u>

Через точку А проведите плоскость Ω, перпендикулярную прямой l общего положения (рис. 57).

Постройте проекции q - прямой общего положения, чтобы $l \perp q$ – прямой общего положения.

Постройте проекции плоскости Ω перпендикулярно прямой l. Для этого плоскость Ω задайте пересекающимися горизонталью и фронталью $\Omega(h \cap f = A)$.

- Проведите $h_1 \perp l_1$, а h_2 - перпендикулярно линиям связи.
- Проведите $f_2 \perp l_2$, а f_1 - перпендикулярно линиям связи.

В плоскости Ω любая прямая общего положения будет перпендикулярна прямой l. Таких прямых в плоскости Ω можно построить множество.

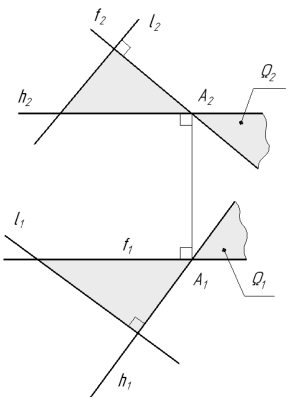


Рис. 57

7. Взаимное пересечение прямой с плоскостью; двух плоскостей.

***Задача построения** – найти общие элементы, т.е. такие точки или линии, которые принадлежат одновременно двум пересекающимся фигурам.*

Если одна из фигур занимает частное положение, задачи решаются просто. На рис. 58, а плоскость Ω - горизонтально – проецирующая. Так как точка К – общий элемент, принадлежащий и прямой l и плоскости Ω, то K_1 определяется сразу на пересечении $l_1 \cap \Omega_1 = K_1$, а $K_2 \subset l_2$ и строится при помощи линии связи.

На рис. 58, б прямая l – горизонтально – проецирующая. Так как К – принадлежит l, то $K_1 \equiv l_1$. Проведя через K_1 вспомогательную прямую, например, C_1D_1, строим K_2, $K_2 \subset l_2$.

На рис. 58, в плоскость Г – фронтально – проецирующая пересекает плоскость ΔABC по линии 1-2, которая является общим элементом. При этом $1_2 2_2 \equiv Г_2$. Построение проекций точек 1_1 и 2_1 не вызывает затруднений и ясно из рис. 58, в.

В общем случае решение таких задач сводится к построению линий l и m, которые бы пересекались между собой. Так, на рис. 59, а прямая l пересекает плоскость Ω в точке К. Точка К принадлежит Ω, а, следовательно, и прямой m в этой плоскости, т.е. решение задачи сводится к построению $K = l \cap m$. На рис. 59, б изображено построение линии пересечения двух плоскостей $\Sigma \cap \Omega = KM$.

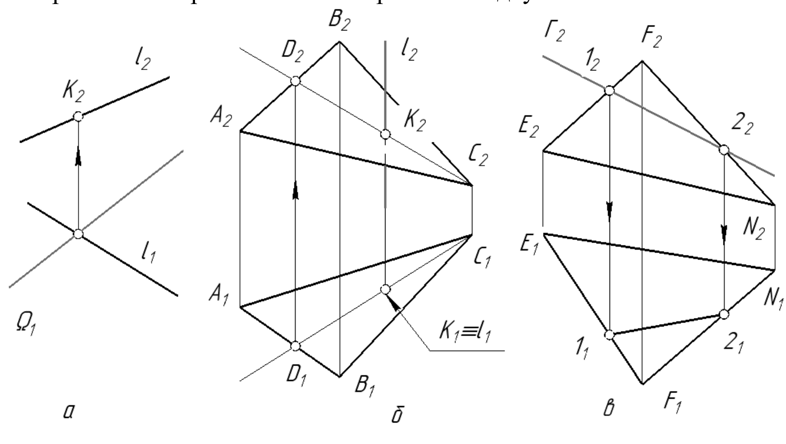


Рис. 58

Если точка К принадлежит двум плоскостям Σ и Ω, то она принадлежит соответственно и прямым l и m в этих плоскостях. Известно, что линии l и m пересекаются, если они расположены в одной плоскости Г (рис. 59, в).

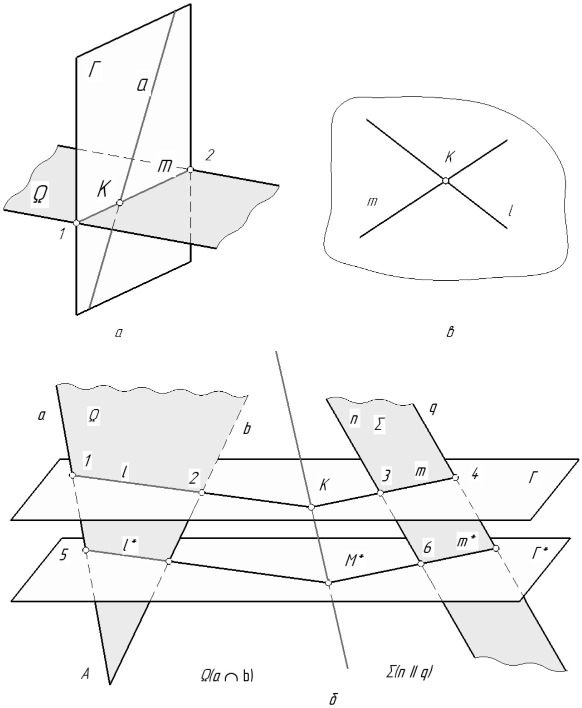


Рис. 59

Поэтому ***все задачи на пересечение решаются с помощью вспомогательной плоскости – посредника Г.***

Тогда на рис. 59, а $m = Г \cap \Sigma$, а $K = l \cap m$, а на рис.59, б $l = Г \cap \Sigma$, а $m = Г \cap \Omega$. В этом случае $K = l \cap m$. Чтобы линии l и m легко строить, вспомогательная плоскость – посредник Г (в нашем курсе) – всегда плоскость частного положения, рис. 59, б.

7.1. Построение точки пересечения прямой с плоскостью

<u>Задача 24.</u>

На рис. 60, а приведен пример решения этой задачи на наглядном, а на рис. 60, б на комплексном чертеже.

1. Заключаем прямую l во вспомогательную плоскость – посредник Г. Так

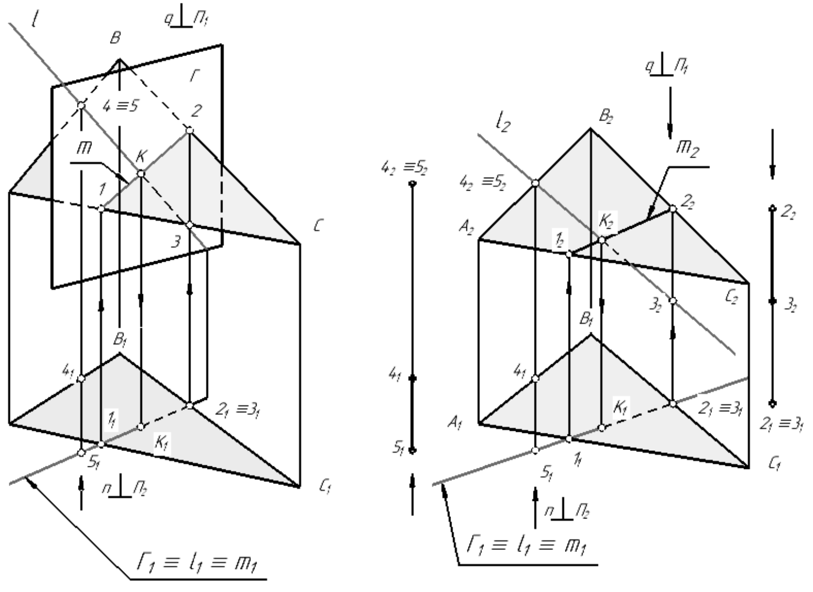
как $\Gamma \perp \Pi_1$ на рис.60, б строим только ее вырожденную проекцию, которая совпадает с горизонтальной проекцией прямой ($\Gamma_1 \equiv l_1$).

2. Строим линию пересечения двух плоскостей $\Gamma \cap \Delta$ ABC = 1-2. Так как $\Gamma \perp \Pi_1$, проекция линии $1_1 2_1$ определяется сразу, поскольку $\Gamma_1 \equiv 1_1 2_1$, а $1_2 2_2$ строится при помощи линий связи.
3. Построенная линия пересекается с заданной прямой l в общей точке К. $1\text{-}2 \cap l = K$ ($1_2 2_2 \cap l_2 = K_2$; $K_2 \rightarrow K_1$).

В заключение решения задачи, определяем видимость прямой l и плоскости ΔABC. Видимость определяют с помощью «конкурирующих» точек, которые согласно рис. 34, принадлежат общей проецирующей прямой. О видимости таких точек судят одновременно по двум проекциям.

Относительно горизонтальной плоскости проекций конкурирующие точки 2 и 3 принадлежат прямой $q \perp \Pi_1$. При этом, как видно из рис. 60, б, $2_1 \equiv 3_1$, но 2_2 расположена выше и загораживает 3_2, а, следовательно, на Π_1 видна прямая B_1C_1, а l_1 – невидима до точки К, в которой видимость меняет знак.

Относительно фронтальной плоскости проекций конкурирующие точки – 4, 5 принадлежат $n \perp \Pi_2$. При этом $4_2 \equiv 5_2$, но $5_1 \subset l_1$ и расположена на рис. 60, б впереди точки 4_1, поэтому и прямая l_2 на виде спереди видима в этом месте до точки К.



а *б*

Рис. 60

Задача 25.

Определите кратчайшее расстояние от точки D до плоскости Σ(ABC), рис. 61.

Для определения натуральной величины кратчайшего расстояния от точки D до плоскости общего положения Σ(ABC) необходимо:

1. Постройте перпендикуляр к плоскости. Для этого в заданной плоскости проведите горизонталь и фронталь, рис. 62. Проведите фронтальную проекцию перпендикуляра (n_2) перпендикулярно фронтальной проекции фронтали (f_2), а горизонтальную проекцию перпендикуляра (n_1) перпендикулярно горизонтальной проекции горизонтали (h_1), рис. 63.
2. Определите точку пересечения построенного перпендикуляра n с заданной плоскостью Σ(ABC), рис. 64. Для этого заключите прямую n во фронтально-проецирующую плоскость Ω, найдите линию пересечения (l) фронтально-проецирующей плоскости Ω с заданной плоскостью Σ(ABC). $l(3\text{-}4) = \Omega \cap \Sigma(ABC)$. Постройте точку пересечения перпендикуляра n с построенной линией l. $K = n \cap l$. Построенная точка K будет точкой пересечения перпендикуляра с заданной плоскостью, а D_2K_2 и D_1K_1 – проекции кратчайшего расстояния от точки D до заданной плоскости.
3. Определите натуральную величину кратчайшего расстояния от точки D до плоскости., рис. 65. Для этого воспользуйтесь способом прямоугольного треугольника. Постройте прямоугольный треугольник, у которого один катет – это горизонтальная проекция расстояния от точки D до плоскости (D_1K_1), а второй катет – это разность расстояний точек D и K до горизонтальной плоскости проекций (ΔZ). Гипотенуза построенного треугольника будет натуральной величиной кратчайшего расстояния от точки D до плоскости Σ(ABC).

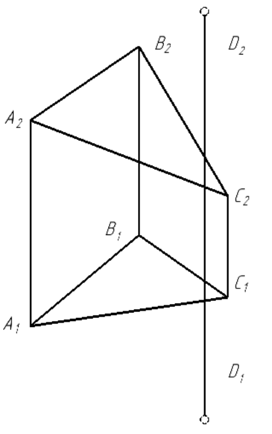


Рис. 61

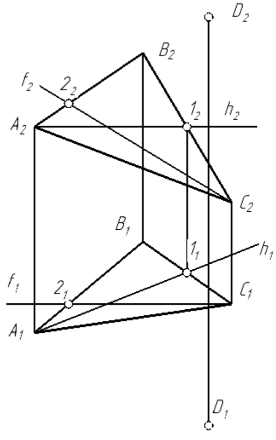


Рис.62

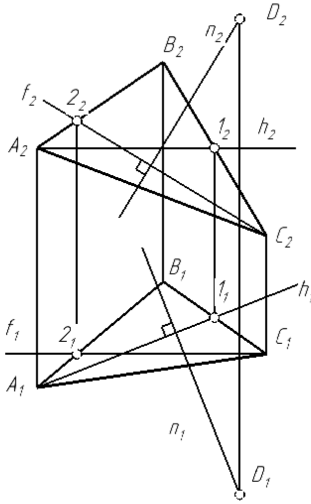


Рис. 63

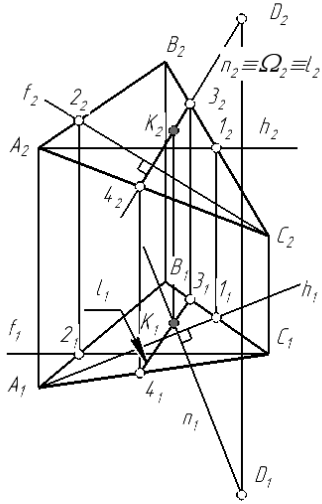


Рис. 64

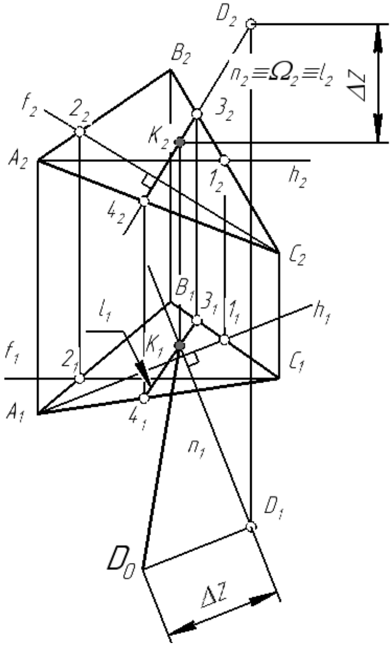


Рис. 65

7.2. Построение линии пересечения двух плоскостей.

Задача 26.

Постройте линию пересечения (KM) плоскости Ω, которая задана двумя пересекающимися прямыми Ω(a∩b=A) и плоскостью Σ, которая задана двумя параллельными прямыми Σ (n II q), как на рис. 59, б. Линия пересечения определяется двумя точками К, М. Решение задачи на комплексном чертеже дано на рис. 66.

1. Проведите вспомогательную плоскость-посредник Г. Рационально плоскость Г провести параллельно горизонтальной плоскости проекций. (Можно Г││$П_2$)
2. Постройте линии пересечения плоскости Г с плоскостями Ω и Σ. Ω∩Г=12 ($1_2 2_2 \rightarrow 1_1 2_1$); Г∩Σ=34 ($3_2 4_2 \rightarrow 3_1 4_1$).
3. Точка К пересечения построенных линий – общий элемент 12∩34=К ($1_1 2_1 \cap 3_1 4_1 = K_1$; $K_1 \rightarrow K_2$)

Для определения второй точки М линии пересечения двух плоскостей повторите все построения еще раз, вводя посредник Г*││Г. Поэтому линии пересечения будут попарно параллельны. Соединив одноименные проекции точек К и М, получите проекции линии пересечения двух плоскостей.

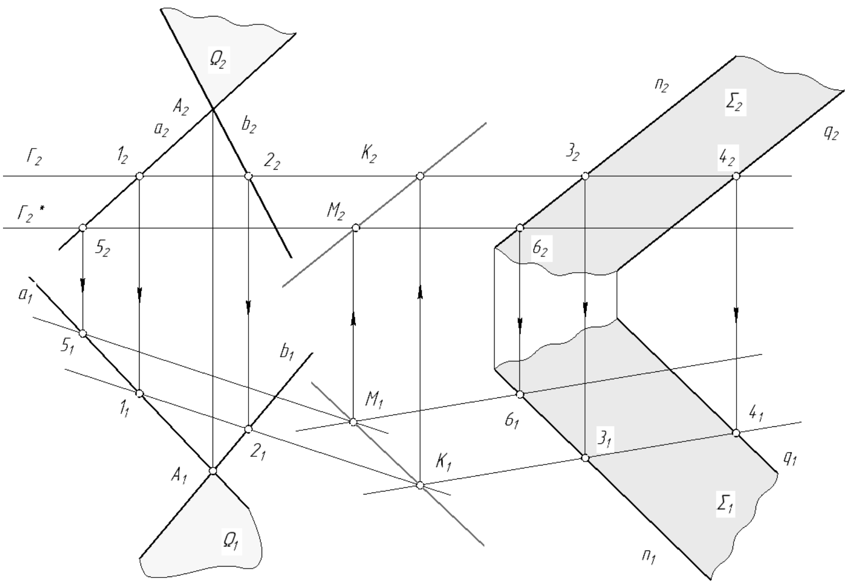


Рис. 66

8. Вопросы для подготовке к контрольной работе № 1

1. Какие методы проецирования Вы знаете?
2. Сформулируйте основные свойства центрального проецирования и приведите примеры.
3. Сформулируйте основные свойства прямоугольного (ортогонального) проецирования, приведите примеры.
4. Как определить действительную длину прямой общего положения?
5. Как определить угол наклона прямой к $П_1$?
6. Как определить угол наклона прямой к $П_2$?
7. Когда используют осный чертеж, а когда безосный?
8. Приведите примеры чертежей прямых частного положения, укажите их названия (шесть прямых).
9. Какие прямые называют линиями уровня? Укажите их на приведенных примерах.
10. Какие прямые называют проецирующими?
11. Приведите пример пропорционального деления отрезка в заданном отношении AB:BC=m:n
12. Расскажите о взаимном расположении прямых линий. Приведите примеры.
13. Как изображаются на чертежах пересекающиеся и скрещивающиеся прямые (приведите примеры)?
14. Расскажите о проецировании угла 90°.
15. Как определить расстояние от точки до прямой частного положения на чертеже?
16. Покажите примеры задания плоскости общего положения на чертежах.
17. Покажите примеры задания плоскостей частных положений и назовите их (шесть вариантов).
18. Покажите на примерах особенности проецирующих плоскостей.
19. Покажите примеры построения в плоскости общего положения проекций точки и линии.
20. Как построить в плоскости общего положения горизонталь и фронталь?
21. Как построить в проецирующей плоскости горизонталь и фронталь?
22. Как построить точку пересечения двух прямых общего положения на чертеже?
23. Покажите на примерах построение прямой в плоскости общего положения.
24. Как построить прямую перпендикулярно плоскости общего положения на чертеже? Приведите пример.
25. Приведите примеры построения прямой перпендикулярной проецирующим плоскостям.
26. Как определить расстояние от точки до проецирующей плоскости? Приведите примеры.

27. Сформулируйте условия перпендикулярности двух прямых общего положения и покажите эти построения на чертеже.
28. Как построить на чертеже плоскость перпендикулярную другой плоскости общего положения. Приведите пример.
29. Покажите построение на чертеже плоскости параллельной другой плоскости.
30. Покажите алгоритм построения линии пересечения двух плоскостей общего положения.

9. Задачи для подготовки к контрольной работе № 1

1. Разделить отрезок AB точкой M в отношении AM:MB=3:4
2. В плоскости ΔABC (рис. 67) построить недостающие проекции точек K, M и прямые a и b.
3. Через точку A провести горизонталь, а через точку B фронталь, которые пересекают прямую q (рис. 68).
4. Построить горизонталь (фронталь) длиной 60 мм на расстоянии 30 мм от $П_1$ ($П_2$) с углом наклона к $П_2$ ($П_1$) - 60°
5. Построить горизонтально-проецирующую прямую длиной 50 мм на расстоянии от $П_2$ равном 30 мм.
6. Через точку A, удаленную от $П_1$ на 60 мм, а от $П_2$ – на 30 мм, провести профильно - проецирующую прямую длиной 30 мм.

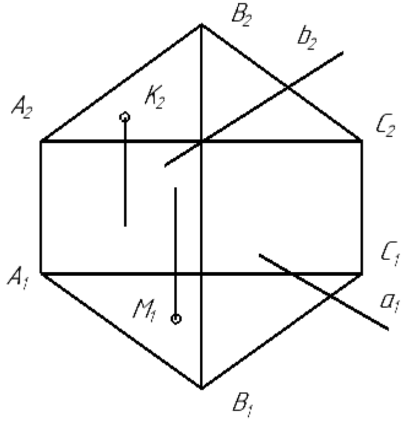


Рис. 67

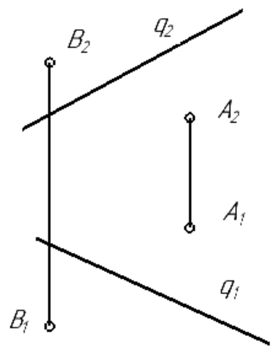


Рис. 68

7. Определить действительную длину (dd) отрезка AB (рис. 69) и углы α, (β) его наклона к $П_1$ ($П_2$).
8. На прямой m (рис. 70) от точки B отложить отрезок BC=40 мм.

9. На прямой m (рис. 70) построить проекции точки К, удаленной от Π_2 на 40 мм. Определить действительную длину КВ.

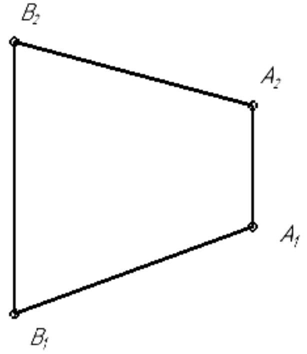


Рис. 69

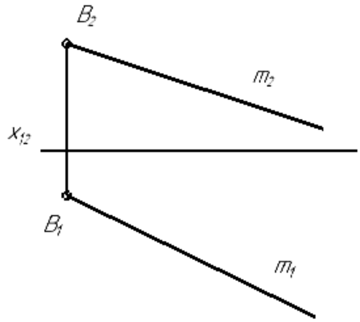


Рис. 70

10. В треугольнике АВС построить его высоту BD и определить действительную длину отрезка BD. В треугольнике АВС построить фронтальную проекцию точки Е, если точка Е принадлежит треугольнику АВС (рис. 71).Построить фронтальную проекцию точки А, если $A\subset\Gamma(a\cap b)$ и определить действительную длину отрезка ОА (рис. 72).
11. Через точку А провести h (f) перпендикулярную прямой а (рис.73)
12. Определить расстояние от точки А (рис.74) до прямой l.

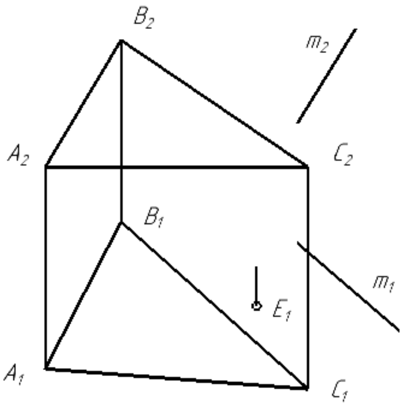


Рис. 71

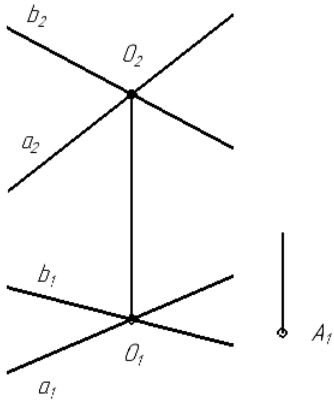


Рис. 72

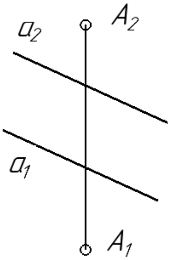


Рис. 73

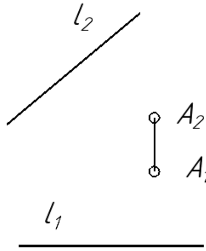


Рис. 74

13. Определить расстояние между скрещивающимися прямыми (рис.75).
14. Определить расстояние от точки А до плоскости Г⊥П1 (Ω⊥П2). Указать названия плоскостей Г, Ω и перпендикуляров к ним (рис.76, а, б).

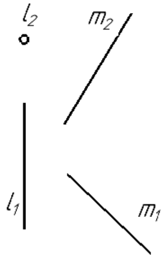


Рис. 75

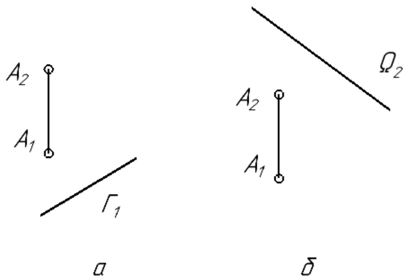


Рис. 76

15. Определите, параллельна ли прямая m плоскости ΔABC (рис.71)?
16. Через прямую a проведите плоскость параллельную прямой b (рис.77, а). Через точку В проведите плоскость параллельную прямым n и m (рис.77, б).

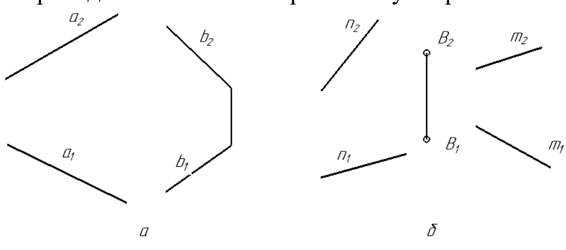


Рис. 77

17. Постройте проекции точки пересечения прямой a с плоскостью ABC. Укажите видимость элементов (рис.78).
18. Постройте линию пересечения плоскостей ABC и EFD. Назовите плоскость EFD (рис.79).

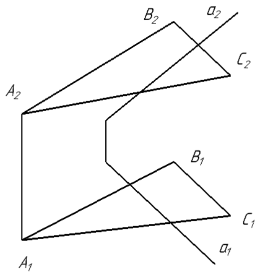


Рис. 78

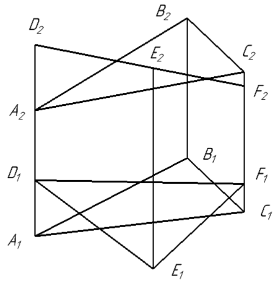


Рис. 79

19. Постройте линию пересечения двух плоскостей Г(a⌒b) и Ω(c II d) (рис. 80).

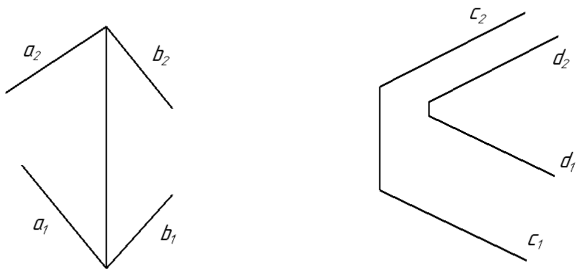


Рис. 80

10. Литература

1. Михненков Л.В. Основы начертательной геометрии. М. 2004 г. 250 с.

2. Левицкий В.С. Машиностроительное черчение: - М.: Высшая школа, 1988. – 351с
3. Фролов С.А. Начертательная геометрия. –М. : Машиностроение, 1978. – 239с.
4. Гордон В.О., Семенцов-Огиевский М.А. Курс начертательной геометрии. – М. : Наука, 1988. –271с.

Оглавление