МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

В.В. Пермякова

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
ДИНАМИКА

Тексты лекций

Москва
2019

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ (МГТУ ГА)»

Кафедра технической механики и инженерной графики

В.В. Пермякова

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА ДИНАМИКА

Тексты лекций

Утверждено Редакционно-издательским советом МГТУ ГА в качестве учебного пособия

Москва
2019

УДК
ББК 531
П-27

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Московского государственного технического университета ГА

Рецензенты:
Петров Ю.В. (МГТУ ГА) – профессор, д-р техн. наук;
Овчинников В.В. (МГТУ им. Н.Э. Баумана) – профессор, д-р техн. наук

Пермякова В.В.
П-27 Теоретическая механика. Динамика: тексты лекций. /В.В. Пермякова. — Воронеж: ООО «МИР», 2019. — 88 с.

ISBN

Тексты лекций издаются в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Теоретическая механика. Динамика» по учебному плану для студентов II курса направления 25.03.01 и специальности 25.05.05, 20.03.01 всех форм обучения.

Лекционная подача материала поможет обучающимся лучше усваивать изучаемый материал. Курс лекций удобен для самостоятельной работы студентов. В предлагаемом курсе лекций приведено большое количество примеров и задач. Особенно подробно рассматривается раздел «Аналитическая механика».

Рассмотрено и одобрено на заседании кафедры 20.06.2019 г. и методического совета 02.07.2019 г.

В авторской редакции.

ББК 531
Св. тем. план 2019 г.
поз. 5

ПЕРМЯКОВА Вера Владимировна

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. ДИНАМИКА

Тексты лекций

Подписано в печать 08.07.2019 г.
Формат 60x90/8 Печ. л. 3 Усл. печ. л. 2,79
Заказ 508/ Тираж 30 экз.

Московский государственный технический университет ГА
125993 Москва, Кронштадтский бульвар, д.20
Отпечатано ООО «МИР»
394033, г. Воронеж, Ленинский пр-т 119А, лит. Я, оф. 215

ISBN

ВВЕДЕНИЕ

Курс лекций предназначен для студентов 2 курса по направлению подготовки 25.03.01 – Техническая эксплуатация летательных аппаратов и двигателей, 20.03.01 – Техносферная безопасность, специальности 25.05.05 – Эксплуатация воздушных судов и организация воздушного движения. Он охватывает все темы раздела «Динамика» учебных программ, утвержденных ФГОС 3. В нем излагаются основы динамики материальной точки и механической системы.

Целью автора явилось стремление дать программный материал в более краткой и доступной форме, в то же время, не упрощая математических выкладок при доказательстве теорем.

При изучении теоретической механики наибольшую трудность у студентов вызывает усвоение раздела «Динамика», особенно применение теоретического материала при решении задач. Поэтому в предлагаемом курсе лекций приведено большое количество примеров и задач. Особенно подробно рассматривается раздел «Аналитическая механика».

При чтении лекций ввиду ограниченности аудиторного времени рассматриваются не все приведенные в пособии примеры. Можно менять порядок изложения лекций.

Данный курс лекций является опорным при чтении раздела «Динамика» теоретической механики на кафедре ТМ и ИГ. Рисунки к текстам расположены в приложении.

ЛЕКЦИЯ 1. ДИНАМИКА ТОЧКИ

Введение. Предмет динамики. Основные понятия и определения: масса, материальная точка, Законы классической механики. Задачи динамики.

Дифференциальные уравнения свободной и несвободной материальной точки в Декартовых координатах. Естественные уравнения движения.

Первая задача динамики, примеры решения. Вторая задачи динамики. Примеры интегрирования дифференциальных уравнений движения материальной точки для случая силы, зависящей от времени, от скорости, от положения точки.

Два предыдущих раздела. курса механики - статика и кинематика - в сущности, мало связаны между собой. Каждому из них соответствует свой особый круг понятий, задач и методов их решения. В статике рассматриваются задачи о равновесии, а также задачи об эквивалентных преобразованиях систем сил; причем при таких преобразованиях даже не ставится вопрос о том, какое движение тела вызывают приложенные силы. В кинематике изучается движение «само по себе», вне связи с теми силами, под действием которых оно происходит.

Изолированное рассмотрение двух указанных проблем вызывается чисто методическими соображениями построения курса механики и, строго говоря, не вытекает из существа задач механики. Дело в том, что между действующими силами и движением существует глубокая внутренняя связь, которая отмечается уже в самом определении понятия силы. Эта связь принимается во внимание в динамике, предметом которой является изучение движения с учетом действующих сил.

Среди практических задач механики лишь небольшое число допускает чисто статическое или чисто кинематическое исследование: в большинстве случаев необходимо полное, т.е. динамическое изучение тех или иных механических явлений. При этом используются установленные в статике способы приведения сил, а также разработанные в кинематике методы описания и изучения движения, поэтому статику и кинематику можно рассматривать как введение в динамику, хотя они имеют и самостоятельное значение.

При формулировании основных законов динамики пользуются моделью материальной точки, под которой понимают геометрическую точку, наделенную конечной массой, т.е. в сущности, под *материальной точкой* понимают тело конечной массы, размерами и различием в движении, отдельных точек которого по условиям задачи можно пренебречь. В дальнейшем будет показано, что поступательно движущееся тело можно рассматривать как материальную точку с массой, равной массе всего тела.

Законы классической механики

В принципе основные законы динамики играют роль постулатов, проверенных не только прямыми экспериментами, но многовековой практикой человека. В сжатом виде законы динамики можно сформулировать следующим образом:

1) *закон инерции: существует такая система отсчета, в которой материальная точка находится в покое или движется равномерно и прямолинейно, если на нее не действуют силы. Такая система отсчета называется инерциальной* (иногда ее условно называют неподвижной). В первом законе динамики рассматривается материальная точка, которая изолирована от всяких воздействий на нее со стороны окружающих тел и поэтому она не может изменить свою скорость и ускорение. Свойство материальных тел сохранять свою скорость неизменной по модулю и по направлению или сохранять покой называется *инертностью* тела (это свойство было установлено Галилеем);

2) II закон Ньютона, основной закон механики: в инерциальной системе отсчета сила, действующая на материальную точку, сообщает ей ускорение, прямо пропорциональное модулю силы и направленное по той же прямой в ту же сторону, что и сила:

$$\vec{F} = m\vec{a}\ , \qquad (1.1)$$

Из этого соотношения следует, что при одном и том же ускорении модуль силы пропорционален массе точки. Чтобы сообщить точке ускорение к ней нужно приложить силу больше, чем ее масса, поэтому, чем больше масса точки, тем больше ее способность сопротивляться изменению ее начального положения. *Масса является мерой инертности материальной точки*. В международной системе единиц СИ единицей массы служит *килограмм (кг)*;

3) *закон равенства действия и противодействия: силы, с которыми действуют друг на друга две материальные точки, всегда равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны*. Этот закон показывает, что силы сами по себе возникнуть не могут, должен быть источник происхождения этих сил. Силы всегда возникают попарно, не существует односторонне приложенных сил;

4) принцип независимости действия сил: если на материальную точку действует несколько сил, то они сообщают ей ускорение, равное геометрической сумме тех ускорений, которые они сообщили бы ей, действуя отдельно.

Пусть на материальную точку действуют силы $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}, \dots, \overrightarrow{F_n}$. Ускорение, которое сообщили бы эти силы точке, равно $\overline{a} = \overline{a_1} + \overline{a_2} + \overline{a_3} + \cdots + \overline{a_n}$: $\overline{a} = \frac{1}{m}\sum \overline{F_k}$ или $m\overline{a} = \sum \overline{F_k}$.

При всем разнообразии динамических задач выделяют две их категории. К первой категории относятся задачи, в которых движение тела (иди механической системы) является заданным, и требуется найти силы, под действием которых это движение происходит *(первая задача*). В другую категорию входят задачи противоположного характера: в них силы являются заданными, а движение - искомым (*вторая задача*). Эти задачи названы *основными задачами динамики*.

Дифференциальные уравнения свободной и несвободной материальной точки в декартовых координатах. Естественные уравнения движения

Положение материальной точки M в инерциальной системе отсчета будем определять ее радиус-вектором $\overline{r}$. Сила $\overline{F}$, действующая на точку, может зависеть от положения точки, т.е. от радиус-вектора $\overline{r}$ (например, сила тяготения), скорости $\overline{\vartheta} = d\overline{r}/dt$ точки (например, сила сопротивления) и времени t. Следовательно, в общем случае $\overline{F} = \overline{F}(r, dr/dt\,, t)$ и основное уравнение динамики точки (1.1) можно записать в следующей форме: $m\frac{d^2\overline{r}}{dt^2} = \overline{F}(r, \frac{dr}{dt}, t)$.

Это равенство, представляющее физический закон, устанавливающий связь между массой точки, ее ускорением и действующей на точку силой, можно рассматривать одновременно как дифференциальное уравнение, в котором радиус-вектор r является функцией, а время t - аргументом. Это уравнение называется дифференциальным уравнением движения материальной точки в векторной форме.

Дифференциальное уравнение в векторной форме, естественно, эквивалентно трем скалярным уравнениям. В зависимости от выбора осей координат, на которые проектируется основное уравнение динамики (1.1), можно получить различные формы скалярных дифференциальных уравнений движения материальной точки.

Так, например, если спроектировать обе части уравнения (1.1) на неподвижные оси декартовых координат, будем иметь

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx}, m\ddot{y} = \sum F_{ky}, m\ddot{z} = \sum F_{kz}, \tag{1.2}$$

где $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ - проекции ускорения точки $\overline{a}$ и F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} - проекции действующей силы, соответствующие оси координат.

Уравнения (1.2) называются *дифференциальными уравнениями движения материальном точки в координатной форме*.

Если пользоваться описанием движения в естественной форме, то нужно спроектировать основное уравнение динамики (1.1) на оси естественного трехгранника, в результате получим соотношения

$$ma_\tau = \sum F_{k\tau}, ma_n = \sum F_{kn}, ma_b = \sum F_{kb}, \tag{1.3}$$

где F_τ, F_n, F_b - проекции силы на касательную, главную нормаль и бинормаль. Вспоминая известные из кинематики выражения для пропорций ускорения a_τ, a_n, a_b на те же направления, получим

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = \sum F_{k\tau}, m\frac{\vartheta^2}{\rho} = \sum F_{kn}, 0 = \sum F_{kb}, \tag{1.4}$$

где ρ - радиус кривизны в текущей точке траектории. Из последнего уравнения следует, что сила F, под действием которой движется материальная точка, лежит 'в соприкасающейся к траектории плоскости.

Уравнения (1 .4) являются *дифференциальными уравнениями движения точки в естественной форме*, выведены для свободной материальной точки. Если точка не свободна, применяется принцип освобождаемости от связи, т.е. действия приложенной связи заменяются реакцией этой связи. Основное уравнение динамики для несвободной материальной точки имеет вид:

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_k + \sum \vec{N}_k, \tag{1,5}$$

где $\overline{F_k}$ - активные силы, $\overline{N_k}$ - реакции связей.

Первая задача динамики. Примеры решения первой задачи

Как было сказано ранее, в практике возникают различные постановки динамических задач. Прежде всего, остановимся на первой задаче, когда движение задано, и необходимо найти силу, под действием которой происходит это движение. Эта задача решается следующим образом: закон движения подставляется в дифференциальные уравнения (1.2), (1.4) или (1.5) (в зависимости от способа задания движения) и с помощью дифференцирования соответствующих функций определяются проекции силы. Проследим за ходом решения на примерах.

Задача 1.1. Материальная точка массы m движется в плоскости xy, причем закон движения задан в виде

$$x = asin(kt + \varepsilon), y = bsin(kt + \delta) + c,$$

где a, b, c, ε, δ - любые постоянные параметры. Найти силу, под действием которой происходит это движение.

Решение. В данном случае движение задано в Декартовых координатах, поэтому выражение координат из закона движения нужно подставить в дифференциальное уравнение (1.2). При этом находим

$$F_x = -mk^2 asin(kt + \varepsilon), F_y = -mk^2 bsin(kt + \delta)$$

или, приняв во внимание закон движения, получим

$$F_x = -mk^2 x, F_{xy} = -mk^2 y + mk^2 c.$$

Таким образом, сила, действующая на материальную точку будет $\vec{F} = -mk^2\vec{r} + mk^2 c\vec{j}$, где $\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j}$, $\overline{i}$ и $\overline{j}$ – единичные векторы осей x и y. Следовательно, материальная точка движется под действием силы притяжения, направленной к началу координат и пропорциональной расстоянию от начала координат до материальной точки, и постоянной силы, параллельной оси y.

Задача 1.2. Материальная точка массы m движется по окружности радиуса r с постоянной скоростью ϑ. Найти силу, под действием которой происходит такое движение.

Решение. Здесь движение задано естественным способом, поэтому согласно (1.4) находим $F_\tau = 0$, $F_n = \frac{m\vartheta^2}{r}$, т.е., заданное движение материальной точки происходит под действием силы, постоянной по модулю и направленной по радиусу к центру окружности.

Задача 1.3. Определить силу, действующую на точку массы m, закон движения которой задан уравнениями x$= at^2$, $y = bt$.

Решение. Исключив из этих уравнений время, найдем траекторию точки $x = \frac{a}{b^2}y^2$, т.е. траекторией является ветвь параболы, расположенная в первой четверти координатной плоскости. На основании уравнений (1.2) найдем $F_x = m\ddot{x} = 2ma$, $F_y = m\ddot{y} = 0$, т.е. $F = 2ma$.

Следовательно, точка будет описывать параболу под действием постоянной силы, параллельной оси x параболы.

Из рассмотренных примеров следует, что, зная закон движения точки, можно найти только равнодействующую всех сил, которые к ним приложены. Каждую силу в отдельности определить нельзя.

Вторая задача динамики. Примеры интегрирования дифференциальных уравнений движения материальной точки для случая силы, зависящей от времени, от скорости, от положения точки

Напомним, что во второй задаче требуется, зная приложенные: к точке силы, ее начальное положение, ее начальную скорость, а также массу точки m, определить движение точки.

Силы, действующие на материальную точку, весьма разнообразны по своей природе; можно указать три простейших типа переменных сил:

а) силы, заданные как явные функции времени и не зависящие от движения материальной точки;

б) силы, зависящие от координат материальной точки;

в) силы, зависящие от скорости материальной точки.

Однако возможны случаи, когда сила, действующая на точку может быть одновременно функцией от нескольких аргументов. Например, действующая на космический корабль сила аэродинамического сопротивления при его движении в атмосфере (при взлете или снижении) зависит и от положения корабля, и от его скорости, так как плотность атмосферы убывает с возрастанием высоты над поверхностью Земли.

Чаще всего на материальную точку одновременно действует несколько сил различных типов. Равнодействующая сил, приложенных к точке, в общем случае является функцией времени, координат движущейся точки и ее скорости, поэтому и проекции равнодействующей на оси выбранной системы координат будут функциями этих же переменных, а дифференциальные уравнения движения (1.2) примут вид

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x = f_1(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ m\ddot{y} &= F_y = f_2(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ m\ddot{z} &= F_z = f_3(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}). \end{aligned} \tag{1.6}$$

Чтобы найти уравнения движения точки $x = \varphi_1(t),\ y = \varphi_2(t),\ z = \varphi_3(t)$ необходимо проинтегрировать систему (1.6) трех обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. В результате интегрирования этой системы в решении появляются шесть произвольных постоянных, которые определяются по начальным условиям движения. Так, пусть в начальный момент времени при $t = t_0$ известны координаты точки и проекции ее скорости:

$$t = t_0, x = x_0, y = y_0, z = z_0, \dot{x} = \dot{x_0}, \dot{y} = \dot{y_0}, \dot{z} = \dot{z_0},$$

И пусть найдены общие решения дифференциальных уравнений (1.6):

$$\begin{aligned} x &= \varphi_1(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ y &= \varphi_2(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ z &= \varphi_3(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Продифференцировав уравнения (1.7), получим проекции скорости точки:

$$\dot{x} = \dot{\varphi_1}, \dot{y} = \dot{\varphi_2}, \dot{z} = \dot{\varphi_3}. \tag{1.8}$$

Подставив в уравнения (1.7) и (1.8) вместо времени, координат и проекций скоростей их начальные значения, получим систему шести алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ и, решив эту систему, выразим произвольные постоянные через начальные условия. Окончательно решение запишется в виде

$$\begin{aligned} x &= \varphi_1(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x_0}, \dot{y_0}, \dot{z_0}), \\ y &= \varphi_2(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x_0}, \dot{y_0}, \dot{z_0}), \\ z &= \varphi_3(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x_0}, \dot{y_0}, \dot{z_0}). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Если на материальную точку в течение интервала времени, рассматриваемого в задаче, действуют одни и те же силы, являющиеся непрерывными функциями времени, координат и скорости точки, то вторую задачу динамики материальной точки рекомендуется решать в следующем порядке:

1) выбрать систему координат, имеющую начало или в начальном положении точки и направить оси координат наиболее естественным образом;

2) записать начальные условия движения точки;

3) изобразить на рисунке точку, смещенную относительно начала координат в сторону положительных направлений осей координат;

4) изобразить на рисунке приложенные к точке активные силы и реакции связей; если сила определяется вектором скорости, а направление последнего заранее неизвестно, то вектор скорости направляют в сторону возрастания координат точки; если исследуется относительное движение, то приложить к точке ещё переносную и кориолисову силы инерции;

5) составить дифференциальные уравнения движения материальной точки;

6) проинтегрировать систему дифференциальных уравнений движения, т.е. найти закон движения точки;

7) выразить постоянные интегрирования через начальные условия и, используя закон движения, определить искомые величины.

Для исследования решения и проверки результата с помощью определения размерностей желательно всё решение проводить до конца в общем виде, подставляя численные данные только в окончательный результат.

Если на отдельных участках движения точки на нее действуют различные силы или же силы, действующие на точку, не являются непрерывными функциями, то интервал движения разбивается на отдельные участки так, чтобы на каждом из них силы, действующие на точку, были бы непрерывными функциями. Для каждого участка составляются свои дифференциальные уравнения движения точки, начальными условиями для каждого участка являются конечное положение и конечная скорость точки на предыдущем участке.

Задача 1.4. Тело массой m, принимаемое за материальную точку, начинает движение по гладкой горизонтальной прямой из состояния покоя под действием силы $\overline{F}$, направленной по той же прямой и изменяющейся по закону $\overline{F} = mgsin\omega t$, где ω – постоянная величина. Найти закон движения тела.

Решение. Направим ось Оx вдоль прямой, по которой движется тело, выбрав начало отсчета в начальном положении тела (рис. 1.1). В этом случае начальные условия движения примут наиболее простой вид, а именно t = 0, $x_0 = 0, \dot{x_0} = 0$. Изобразим тело вместе с действующими на него силами (активными $\overline{P} = m\overline{g}$, $\overline{F}$ и нормальной реакцией $\overline{N}$) в смещенном относительно начала отсчета положении. Дифференциальное уравнение движения в проекции на ось Оx запишется так: $m\ddot{x} = F = mgsin\omega t$.

Поскольку тело движется только вдоль оси Оx, то $\dot{x} = \vartheta, \ddot{x} = \dot{\vartheta}$ и поэтому $\frac{d\vartheta}{dt} = gsin\omega t$, или после разделения переменных $d\vartheta = gsin\omega tdt$. Интегрируя, получаем $\vartheta = -\frac{g}{\omega}cos\omega t + C_1$. Подставив в это уравнение начальные условия, найдем C_1 при $t = 0, x_0 = \dot{\vartheta}_0 = 0$, откуда $C_1 = \frac{g}{\omega}$ и $\vartheta = \frac{dx}{dt} = \frac{g}{\omega} - \frac{g}{\omega}cos\omega t$.

Разделяем переменные и интегрируем, что дает $x = \frac{g}{\omega}t - \frac{g}{\omega^2}sin\omega t + C_2$. По начальным условиям ($t = 0, x_0 \dot{=} 0$) находим C_2 = 0, и окончательно $x = \frac{g}{\omega}t - \frac{g}{\omega^2}sin\omega t$.

Из полученного решения следует, что при заданных начальных условиях на равномерное движение тела со скоростью g/ω накладываются колебания с амплитудой $A = \frac{g}{\omega^2}$ с частотой ω изменения силы $\overline{F}$.

Задача 1.5. Материальная точка A брошена с поверхности Земли вертикально с начальной скоростью ϑ_0. Пренебрегая сопротивлением воздуха; найти скорость точки как функцию ее расстояния от центра Земли. Точка притягивается к центру Земли силой, определяемой законом всемирного тяготения $F = \frac{kmM}{r^2}$, где m – масса точки, M – масса Земли, k - гравитационная постоянная, r – расстояние от центра Земли до точки.

Решение. Выберем начало отсчета на оси x, вдоль которой движется точка, в центре Земли (рис. 1.2). Тогда начальные условия будут таковы: при t = O, $x_0 = R, \dot{x_0} = \vartheta_0$, а выражение для силы тяготения примет вид $F = \frac{kmM}{r^2}$.

Составим дифференциальное уравнение движения в проекции на ось Ox: $m\ddot{x} = -F = -\frac{kmM}{r^2}$. Очевидно, что на поверхности Земли сила тяготения $F = mg$, где g=9,8 м/с^2, поэтому при x = R, $F = mg = \frac{kmM}{R^2}$, откуда $kM = gR^2$ и дифференциальное уравнение после сокращения на массу точки примет вид: $\ddot{x} = \frac{d\vartheta}{dt} = -g\frac{R^2}{x^2}$.

В данном уравнении три переменных: x, ϑ и t, а надо найти зависимость между двумя первыми (x и ϑ), поэтому исключим переменную t, перейдем к переменным x и ϑ: $\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{d\vartheta}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \vartheta\frac{d\vartheta}{dt}$ и получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными $\vartheta\frac{d\vartheta}{dt} = -g\frac{R^2}{x^2}$ или $\vartheta d\vartheta = -gR^2\frac{dx}{x^2}$.

При интегрировании уравнения воспользуемся определенными интегралами с переменными верхними пределами. При изменении скорости от ϑ_0 до ϑ координата точки изменится от $x_0 = R$ до x:

$$\int_{\vartheta_0}^{\vartheta}\vartheta d\vartheta = -\int_R^x \frac{dx}{x^2};\ \frac{\vartheta^2}{2}\Big|_{\vartheta_0}^{\vartheta} = \frac{gR^2}{x}\Big|_R^x \text{ или } \frac{\vartheta^2 - \vartheta_0^2}{2} = \frac{gR^2}{x} - gR,$$

откуда $\vartheta = \pm\sqrt{\vartheta_0^2 + \frac{2gR(R-x)}{x}}$.

В момент достижения точкой максимальной высоты $H = x_{max}$ ее скорость обращается в нуль, т.е.

$$0 = \sqrt{\vartheta_0^2 + \frac{2gR(R-x)}{x}},$$

откуда $H = \frac{2gR^2}{2gR - \vartheta_0^2}$.

Из этого выражения следует, что если $\vartheta_0^2 < \frac{2g}{R}$, то точка будет достигать некоторой наибольшей высоты H, после чего начнет падать на Землю. При $\vartheta_0^2 \geq 2gR$ точка будет все время удаляться от Земли. Приняв R = 6400 км, g = 0,0098 км/с^2, найдем, что предельная начальная скорость, при которой тело, брошенное с Земли, не вернется на Землю, равна ϑ_0 = 11,2 км/с.

Это так называемая вторая космическая скорость.

Задача 1.6. Тело с массой m брошено с начальной скоростью ϑ_0 под углом α к горизонту. Найти закон движения точки.

Решение. В процессе движения точки по траектории на точку действует сила тяжести $\overline{p} = m\overline{g}$ (рис. 1.3). Дифференциальное. уравнение точки имеет вид:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = p_x = 0 \\ m\ddot{y} = -p \end{cases}, \qquad \ddot{y} = -\frac{p}{m} = -g.$$

Определим закон движения вдоль оси x. $\frac{d\dot{x}}{dt} = 0$ – проинтегрируем это выражение. $\dot{x} = const = C_1$ (проекция скорости на ось x имеет постоянное значение для любого момента времени t). Определим C_1 из начальных условий. При t = 0, $\dot{x} = \dot{x_0} = \vartheta_0 cos\alpha$, тогда $\frac{dx}{dt} = \vartheta_0 cos\alpha$. Проинтегрируем полученное выражение:$\int dx = \int \vartheta_0 cos\alpha dt$, $x = \vartheta_0 t cos\alpha + C_2$;

определим постоянную интегрирования: при $t = 0$, $x=x_o=0$, тогда $0 = \vartheta_0 \cdot 0 \cdot cos\alpha + C_2$; $C_2 = 0$. Следовательно, $x = \vartheta_0 t cos\alpha$.

Рассмотрим второе дифференциальное уравнение движения точки и определим закон движения ее вдоль оси Y:

$\ddot{y} = -g$; $\frac{d\dot{y}}{dt} = -g, d\dot{y} = -gdt, \int d\dot{y} = -g\int dt\,; y = -gt + C_3,$

при $t = 0$; $\dot{y} = \dot{y}_0 sin\alpha, \vartheta_0 sin\alpha = g \cdot 0 + C_3, C_3 = \vartheta_0 sin\alpha, \dot{y} = -gt + \vartheta_0 sin\alpha$ – проинтегрируем его:

$\int dy = -\int gtdt + \int \vartheta_0 dt sin\alpha\,, y = -g\frac{t^2}{2} + \vartheta_0 t sin\alpha + C_4$, при $t = 0$ $y = y_0 = 0$, тогда $0 = -g\frac{0^2}{2} + \vartheta_0 0 sin\alpha + C_4$, т.е. $C_4 = 0$, откуда $y = \vartheta_0 0 sin\alpha \frac{gt^2}{2}$; $\begin{cases} x = \vartheta_0 t cos\alpha \\ y = \vartheta_0 t sin\alpha - \frac{gt^2}{2} \end{cases}$; выразим из первого уравнения $t = \frac{x}{\vartheta_0 cos\alpha}$, тогда $y = \vartheta_0 sin\alpha \frac{x}{\vartheta_0 cos\alpha} - \frac{g}{2}\left(\frac{x}{\vartheta_0 cos\alpha}\right)^2$.

Окончательно $y = xtg\alpha - \frac{gx^2}{2\vartheta_0^2 cos^2\alpha}$ – уравнение параболы.

Задача 1.7. Тело из состояния покоя падает с высоты 10 м в бассейн глубиной 5 м. Сопротивлением при движении тела в воздухе пренебречь. При движении в воде сила сопротивления движению тела равна $R = 0{,}01m\vartheta^2$, где m – масса тела, ϑ – его скорость, 0,01 – размерный коэффициент пропорциональности. Найти скорость тела, когда оно достигает дна бассейна.

Решение. За начало координат примем начальное положение тела (рис.1.4) и направим ось $0x$ вниз по вертикали, вдоль которой движется тело. Весь путь разбиваем на два участка, поскольку сила сопротивления действует на тело только при его движении в воде: 1) от точки $x = 0$ до точки $x = h_1$ (на этом участке тело движется под действием силы $P = mg$) и 2) от точки $x = h_1$ до точки $x = h_1 + h_2$ (на этом участке на тело действуют две силы: $P = mg$ и $R = 0{,}01m\vartheta^2$). Начальная скорость второго участка определяется как скорость в конце первого участка.

Рассмотрим движение тела на первом участке. Начальные условия: при t=0, $x_0 = 0, \vartheta_0 = 0$. Дифференциальное уравнение движения имеет вид:

$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{d\vartheta}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \vartheta\frac{d\vartheta}{dt}$, т.е. $\vartheta\frac{d\vartheta}{dt} = g$.

Поскольку нам надо знать скорость в конце первого участка ϑ_1, а известна его длина, перейдем в дифференциальном уравнении от переменных ϑ и t к переменным ϑ и x.

После разделения переменных и интегрирования получим (берется определенный интеграл, так как надо определить ϑ_1): $\int_0^{\vartheta_1} \vartheta d\vartheta = -\int_0^{h_1} gdx\,, \frac{\vartheta_1^2}{2} = gh_1$ или $\vartheta_1 = \sqrt{2gh_1}$

Рассмотрим движение тела на втором участке. Для него начальные и конечные условия запишутся так: при $x = h_1 + h_2$ $\vartheta = \vartheta_2$, где ϑ_2 - искомая скорость. Дифференциальное уравнение движения тела на этом участке таково: $m\frac{d\vartheta}{dt} = mg - 0{,}01m\vartheta^2$ или $\vartheta\frac{d\vartheta}{dt} = g - 0{,}01\vartheta^2$.

Это же уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя их и интегрируя, получаем

$$\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{\vartheta d\vartheta}{g - 0{,}01\vartheta^2} = \int_{h_1}^{h_1+h_2} dx, -\frac{1}{0{,}02} ln\left(\frac{g}{0{,}01} - \vartheta_2\right)\Bigg|_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} = x\Bigg|_{h_1}^{h_1+h_2}, ln\frac{100g - \vartheta_1^2}{100g - \vartheta_2^2} = 0{,}02h_2.$$

Из последнего равенства, заменив ϑ_1^2 его значением, получаем значение искомой скорости ϑ_2: $\vartheta_2 = \sqrt{100g - (100g - 2gh_1)e^{-0{,}02h_2}}$ =16,6 м/с.

ЛЕКЦИЯ 2. КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Свободные колебания материальной точки. Амплитудная форма свободных гармонических колебаний. Собственная или циклическая частота. Амплитуда, начальная фаза, частота и период колебаний. Изохронные колебания.

Случай вертикальных колебаний. Положение статического равновесия. Статическое отклонение. Различные случаи соединения пружин.

Среди различных сил, которые могут действовать на материальную точку, особое место занимают восстанавливающие силы. Такие силы зависят от величины отклонения точки от положения равновесия. Восстанавливающие силы придают движению материальной точки Колебательный характер. Природа этих сил разнообразна. Восстанавливающая сила определяется упругими свойствами пружины и возникает вследствие деформации пружины и направлена в сторону восстановления равновесия (рис. 2.1).

Если плавающий понтон вывести из состояния равновесия, т.е. погрузить в воду, возникает архимедова сила, которая направлена в противоположную сторону от глубины погружения и выполняет функцию восстанавливающей силы (рис. 2.2).

Восстанавливающая сила может быть вызвана упругими свойствами тела, т.к. в реальной действительности абсолютно твердых тел не существует. При взаимодействии тел возникают упругие силы деформирования наподобие действия пружины, при этом ка-ждое тело стремиться восстановить свою форму. Сила, отражающая это стремление, называется *силой упругости*, величина силы упругости пропорциональна деформации тела и определяется законом Гука: $F = c\lambda$, где λ - деформация тела, c - коэффициент жесткости, отражающий упругие свойства тела и зависящий от размеров тела и свойств материала,

Под действием этих сил, разнообразных по своему физическому содержанию, тела совершают колебательные движения, описываемые одинаковыми уравнениями.

Свободные гармонические колебания

Колебания, вызванные только силой упругости (без внешнего воздействия) называются *свободными*.

Колебания, происходящие по синусоидальному или косинусоидалъному закону, называются *гармоническими*.

Рассмотрим движение точки M вдоль горизонтальной прямой под действием только восстанавливающей силы $\bar{F}$, модуль которой прямо пропорционален расстоянию от точки M до центра 0 (рис. 2.3). (Выберем начало горизонтальной оси в точке 0. Изобразим точку M смещенной относительно начала отсчета в сторону положительного направления оси x. Тогда $|F| = c|x|$, где c – коэффициент пропорциональности, называемый обычно *коэффициентом жесткости.*

Составим дифференциальное уравнение движения точки:

$$m\ddot{x} = P_x + N_x + F_x.$$

В данном случае $P_x = 0,\ N_x = 0,\ F_x = -cx,$

$$m\ddot{x} = -cx, m\ddot{x} + cx = 0. \qquad (2.1)$$

Разделив полученное уравнение на массу точки m и обозначив

$$\frac{c}{m} = k^2, \qquad (2.2)$$

где величина k называется *круговой, или циклической частотой* свободных гармонических колебаний, запишем окончательно–

$$\ddot{x} + k^2 x = 0. \qquad (2.3)$$

Это однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами называется *дифференциальным уравнением гармониче-*

ских колебаний и, как известно из теории дифференциальных уравнений, его решение можно записать в виде

$$x = C_1 coskt + C_2 sinkt, \qquad (2.4)$$

где C_1, C_2 - постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий: $t = 0; x = x_0;\ \dot{x} = \vartheta_0$.

Предположим, что колебания начались в результате отклонения груза от равновесия на расстояние x_0, и грузу сообщена скорость ϑ_0; величины x_0 и ϑ_0 могут иметь как положительные, так и отрицательные значения. Продифференцировав уравнение (2.4), определим скорость:

$$\dot{x} = -C_1 ksinkt + C_2 kcoskt. \qquad (2.5)$$

Подставим значения начальных условий в уравнения (2.4) и (2.5):

$$x_0 = C_1\cos(k \cdot 0) + C_2 sin(k \cdot 0); x_0 = C_1$$

$$\vartheta_0 = -C_1\sin(k \cdot 0) + C_2 cos(k \cdot 0); \vartheta_0 = C_2 k;\ C_2 = \frac{\vartheta_0}{k}.$$

Окончательно уравнение свободных колебаний примет вид:

$$x = x_0 coskt + \frac{\vartheta_0}{k} sinkt. \qquad (2.6)$$

Очень часто употребляется *амплитудная форма* записи решения уравнений. Для ее вывода введем вместо C_1 и C_2 решения (2.4) новые постоянные A и α:

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= Asin\alpha, \\ C_2 &= Acos\alpha. \end{aligned}\right\},$$

Тогда

$$x = Asinktcos\alpha + Acosktsin\alpha = \ Asin(kt + \alpha). \qquad (2.6)$$

Полученное уравнение указывает, что под действием только восстанавливающей силы точка совершает гармонические колебания.

Максимальное отклонение от положения равновесия (от точки 0) достигается в момент, когда $sin(kt + \alpha) = 1$ равняется $x_{max} = A$ и называется амплитудой гармоническою колебания. Эта амплитуда остается постоянной, так что колебания являются незатухающими. Величина, стоящая под знаком синуса в уравнении (2.7), $\varphi = kt + \alpha$ называется фазой колебания, а вторая произвольная постоянная α – начальной фазой. График гармонических незатухающих свободных колебаний приведен на рис. 2.4. Произвольные постоянные A и α, как и C_1, C_2, находятся по начальным условиям. Для их определения выразим A и α через $C_1 = x_0 = Asin\alpha$, $C_1 = \frac{\vartheta_0}{k} = Acos\alpha$, откуда

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{x_0^2 + \frac{\vartheta_0^2}{k^2}}; \ (2.8)$$

$$tg\alpha = \frac{C_1}{C_2} = \frac{sin\alpha}{cos\alpha} = \frac{x_0 k}{\vartheta_0}; sin\alpha = \frac{x_0}{A}, \alpha = arctg\frac{x_0 k}{\vartheta_0}. \quad (2.9)$$

Значение амплитуды A считаем положительным, угол α изменяется в пределах от 0 до 2π. Поэтому для его определения надо кроме величины тангенса знать еще знак синуса этого угла.

Период гармонических колебаний T - это время между ближайшими одинаковыми состояниями движущейся точки, т.е. двумя моментами, когда точка имеет одинаковые отклонения и скорости. Фазы этих двух состояний на 2π радиан: $k(t + T) + \alpha = kt + \alpha + 2\pi$, откуда

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}. \qquad (2.10)$$

Число колебаний в единицу времени называют частотой. Ее величина $v = \frac{1}{T} = \frac{k}{2\pi}$. Частота измеряется в герцах (Гц) (один герц - это одно колебание в секунду), в то время как круговая частота измеряется в рад/с.

Из формул для амплитуды (2.8), начальной фазы (2.9) и периода (2.10) видно, что первые две величины A и α зависят от начальных условий, тогда как период T не зависит от них. Независимость периода колебаний от начальных условий называется *изохронностью*, а движение с таким периодом - *изохронным*.

Задача 2.1. К пружине AB, верхний конец B которой закреплен неподвижно, подвешен груз массой m. Статическое удлинение пружины равно δ_{cm}. Определить закон движения груза, если в начальный момент пружина не напряжена и грузу сообщена скорость $v_0 = \sqrt{\delta_{cm} g}$, направленная вертикально вверх (рис. 2.5). Массой пружины пренебречь.

Решение. Пусть l_0 - длина недеформированной пружины, l - переменная длина деформированной пружины, $\delta = l - l_0$ - деформация пружины, δ_{cm} - деформация пружины под действием силы тяжести груза $P = mg$, когда последний находится в покое, т.е. статическая деформация. При равновесии груза упругая сила пружины F равна силе тяжести груза P, т.е. $P = c\delta_{cm}$, где с - коэффициент жесткости пружины (усилие пружины прямо пропорционально ее деформации). Отсюда получаем формулу для практического определения коэффициента жёсткости пружины: $c = \frac{P}{\delta_{cm}}$.

Проведем ось Ox вертикально вниз, выбрав начало отсчета в положении статического равновесия груза. Сместим тело в сторону положительного направления оси Ox. Деформация пружины достигнет значения $\delta = \delta_{cm} + x$, а восстанавливающая сила пружины будет равна $F = c\delta = c(\delta_{cm} + x) = P + cx$. Составим дифференциальное уравнение движения груза: $m\ddot{x} = P - c\delta = P - P - cx = -cx$ или $m\ddot{x} + k^2 x = 0$, где $k^2 = \frac{c}{m}$.

Отсюда следует, что круговая частота k и период колебаний груза на пружине $T = 2\pi/k$ полностью определяются статической деформацией пружины. Решение полученного дифференциального уравнения ищем в амплитудной форме: $x = A sin(kt + \alpha)$. В начальном положении пружина не напряжена, т.е. имеет длину l_0 и груз расположен выше точки O, а скорость его направлена вверх, поэтому при $t = 0$, $x_0 = -\delta_{cm}$, $\dot{x_0} = -v_0 = -\sqrt{\delta_{cm} g}$, откуда

$$A = \sqrt{\delta_{cm}^2 + \frac{\delta_{cm} g}{k^2}} = \delta_{cm}\sqrt{2},\ tg\alpha = \frac{x_0 k}{\vartheta_0} = 1;\ sin\alpha = -\frac{\delta_{cm}}{A} < 0.$$

Так как $tg\alpha = 1$, а $sin\alpha < 0$, то угол α расположен в третьей четверти: $\alpha = 225^0 = 5\pi/4$. Итак, $x = \delta_{cm}\sqrt{2}\sin(kt + 5\pi/4)$, и период колебаний равен $T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{\delta_{cm}}{g}}$.

Задача 2.2. Груз весом P подвешен на двух пружинах с коэффициентом жесткости c_1 и c_2. Определить периоды колебаний груза при параллельном и при последовательном соединении пружин и когда пружины расположены по разные стороны тела (рис. 2.6, а, б, в).

Решение. Будем искать период колебаний по формуле $T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{\delta_{cm}}{g}}$

где δ_{cm} – статистическое удлинение системы пружин под действием веса P.

При последовательном соединении пружин каждая из них растягивается в положении равновесия одной и той же силой Р. Поэтому их статические удлинения равны $\delta_{1cm} = \frac{P}{c_1}$ и $\delta_{2cm} = \frac{P}{c_2}$, а их суммарное удлинение составляет

$$\delta = \delta_{1cm} + \delta_{2cm} = \frac{P}{c_1} + \frac{P}{c_2} = P\frac{c_1 + c_2}{c_1 c_2} = \frac{P}{c_{экв}}.$$

Величина $с_{экв} = \frac{с_1 с_2}{с_1 + с_2}$ называется коэффициентом жесткости эквивалентной пружины, заменяющей две исходные пружины. Искомый период колебания равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{P(с_1+с_2)}{g с_1 с_2}}.$$

При *параллельном соединении* (рис. 2.6,б) статические деформации пружин одинаковы, т.е. $\delta_{1cm} = \delta_{2cm} = \delta_{cm}$. Усилия, возникающие в пружинах при этих деформациях, равны $F_1 = c_1\delta_{1cm}$ и $F_2 = c_2\delta_{2cm}$. Их сумма уравновешивает вес груза, т.е. $P = c_1\delta_{cm} + c_2\delta_{cm} = (с_1 + с_2)\delta_{cm} = с_{экв}\delta_{cm}$, откуда $\delta_{cm} = \frac{P}{с_1+с_2} = \frac{P}{с_{экв}}$. В этом случае коэффициент жесткости эквивалентной пружины $с_{экв} = с_1 + с_2$, а период колебаний составляет $T = 2\pi\sqrt{\frac{P}{g(с_1+с_2)}}$.

При *соединении, когда пружины расположены по разные стороны груза* (рис. 2.6, в), отмечаем, что статические удлинения (сжатия) обеих пружин одинаковы и коэффициент жесткости эквивалентной пружины определяется, как и в случае параллельного соединения, по формуле

$$с_{экв} = с_1 + с_2$$

В отличие от горизонтальных колебаний в вертикальных колебаниях центром колебаний является положение статического равновесия, т.е. центр колебаний смещается на расстояние, равное величине статической деформации пружины.

ЛЕКЦИЯ 3. ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Затухающие колебания материальной точки при сопротивлении, пропорциональном скорости. Период затухающих колебаний, декремент и логарифмический декремент колебаний.

Вынужденные колебания материальной точки при действии гармонической возмущающей силы. Амплитуда вынужденных колебаний. Коэффициент динамичности. Соотношение частот вынужденной и собственной. Свойства вынужденных колебаний.

Затухающие колебания

Рассмотренный случай свободных колебаний точки является идеальным, так как в действительности при любом движении материального тела оно испытывает сопротивление окружающей его среды. Это могут быть силы сухого трения, сопротивление воздуха, воды и т.д., поэтому учет этих сил сопротивления необходим. Рассмотрим наиболее простой случай влияния на свободные колебания точки силы сопротивления, пропорциональной скорости движения точки.

Итак, пусть на горизонтально движущуюся точку *M* кроме восстанавливающей силы $\overline{F}$, пропорциональной отклонению точки от положения равновесия, действует сила сопротивления $\overline{R}$, пропорциональная первой степени скорости, т.е. $\overline{R} = -\mu\overline{v}$. Коэффициент пропорциональности μ называется *коэффициентом сопротивления*. Знак «минус» указывает на то, что сила $\overline{R}$ направлена в сторону, противоположную скорости точки.

Точка *M* с приложенными к ней силами и оси координат изображены на рис. 3.1. Начало оси Ox выбрано в положении равновесия точки *M*.

Дифференциальное уравнение движения запишется так $m\ddot{x} = R_x + F_x = -cx - \mu\dot{x}$, где $F_x = -cx$, $R_x = -\mu\dot{x}$. Перенесем все слагаемые в левую часть уравнения, разделим уравнение на m и введем следующие обозначения:

$k^2 = \frac{c}{m}$ - *круговая частота свободных гармонических колебаний*, $2b = \frac{\mu}{m}$ - *коэффициент затухания*.

В результате получим однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2x = 0. \qquad (3.1)$$

Составим его характеристическое уравнение и найдем корни последнего:

$$r^2 + 2br + k^2 = 0, r_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - k^2}. \; (3.2)$$

Решение уравнения (3.1) определяется значениями корней характеристического уравнения (3.2), а корни зависят от соотношения между b и k. Возможны три случая:

1. *Случай малого сопротивления среды* b <k. При этом

$$r_{1,2} = -b \pm \sqrt{k^2 - b^2} = -b \pm ik_1, k_1 = \sqrt{k^2 - b^2} > 0, i = \sqrt{-1}.$$

Так как характеристическое уравнение имеет комплексные корни, решение запишется в виде

$$x = e^{-bt}(C_1 cosk_1t + C_2 sink_1t). \quad (3.3)$$

Для определения постоянных интегрирования найдем предварительно скорость точки M: $\dot{x} = -be^{-bt}(C_1cosk_1t + C_2sink_1t) + e^{-bt}(-C_1k_1sink_1t - C_2k_1cosk_1t +)$. Используя начальные условия $t = 0, x = x_0, \dot{x} = v_0$, определим произвольные постоянные C_1 и C_2:

$$C_1 = x_0,\, C_2 = \frac{x_0b + v_0}{k_1}, \qquad (3.4)$$

и уравнение движения точки примет вид

$$x = e^{-bt}(x_0cosk_1t + \frac{x_0b + v_0}{k_1}sink_1t). \qquad (3.5)$$

Запишем уравнение в амплитудной форме, для этого введем новые постоянные интегрирования A и α:

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= Asin\alpha, \\ C_2 &= Acos\alpha. \end{aligned}\right\}$$

Тогда уравнение (3.5) запишется так:

$$x = e^{-bt}(Asink_1tcos\alpha + Acosk_1tsin\alpha) = Ae^{-bt}sin(k_1t + \alpha). \qquad (3.6)$$

Выразим A и α через начальные условия:

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{x_0^2 + \frac{(x_0b + v_0)^2}{k_1^2}};$$

$$tg\alpha = \frac{C_1}{C_2} = \frac{x_0k_1}{x_0b + v_0};\; sin\alpha = \frac{x_0}{A}.$$

Величина A положительна, угол α находится в пределах от 0 до 2π.

Движение, определяемое уравнением (3.6), имеет колебательный характер, так как координата x периодически меняет свой знак при изменении знака, входящего в уравнение синуса. Множитель e^{-bt} указывает на то, что амплитуда колебаний с течением времени уменьшается. Колебания такого вида называются затухающими. Их график изображен на рис. 3.2.

Период затухающих колебаний T_1 - это промежуток времени между двумя последовательными прохождениями точки в одном направлении через положение ее статического равновесия, т.е. точка совершает одно полное колебание. За это время фаза затухающих колебаний $\varphi = kt + \alpha$ меняется на 2π радиан. Следовательно

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - b^2}}. \qquad (3.7)$$

Представим последнее выражение в виде

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{T}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{k^2}}},$$

Где T - $2\pi/k$ – период гармонических колебаний этой же точки. Из полученной формулы вытекает, что $T_1 > T$, т.е. *период затухающих колебаний больше периода соответствующих гармонических*. В случае малого сопротивления $(b < k)$ можно приближённо считать, что $T_1 \approx T$, т.е. малое сопротивление почти не влияет на период колебаний.

Амплитудой затухающих колебаний называется наибольшее отклонение точки в ту и другую сторону от положения равновесия в течение каждого колебания. Последовательные максимальные отклонения наступают через каждые полпериода, т.е. если первое из них произошло в момент t_1, то второе - в момент $t_1 + T_1/2$. Тогда модуль отношения двух последовательных амплитуд равен

$$\left|\frac{x_{t_1}}{x(t_1+\frac{T_1}{2})}\right| = \left|\frac{Ae^{-bt_1}sin(k_1t_1+\alpha)}{Ae^{-b(t_1+T_1/2)}sin(k_1t_1+\frac{k_1T_1}{2}+\alpha)}\right| = \left|\frac{e^{\frac{-bT_1}{2}}sin(k_1t_1+\alpha)}{sin((k_1t_1+\alpha)+\pi)}\right| = e^{\frac{-bT_1}{2}},$$

т.е. максимальные отклонения точки от положения равновесия образуют убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем:

$$D = \left|\frac{x_{t_1}}{x(t_1+\frac{T_1}{2})}\right| = e^{\frac{-bT_1}{2}}, \qquad (3.8)$$

называемым *декрементом затухания*. Его натуральный логарифм называется *логарифмическим декрементом затухания*:

$$n = lnD = \frac{-bT_1}{2}. \qquad (3.9)$$

2.*Случай критического сопротивления среды* b=k.

В этом случае корни характеристического уравнения (3.2) будут действительными, равными и отрицательными, $r_{1,2} = -b$ и решение дифференциального уравнения (3.1) запишется в виде

$$x = e^{-bt}(C_1 + C_2t). \qquad (3.10)$$

3.*Случай большого сопротивления среды* $b > k$.

В этом случае корни характеристического уравнения (3.2) $r_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - k^2}$ будут действительными, различными и отрицательными, и поэтому решение уравнения (3.1) принимает вид

$$x = C_1e^{r_1}+C_2e^{r_2t}. \qquad (3.11)$$

В обоих последних случаях точка не будет совершать колебательное движение, так как в решения не входят знакопеременные периодические функций. С другой стороны, из-за отрицательности корней r_1 и r_2 с ростом времени, отклонение точки от положения статического равновесия при любых начальных условиях будет уменьшаться, стремясь к нулю. Такой вид движения называется *апериодическим*; его график в зависимости от начальной скорости точки показан на рис. 3.3.

Вынужденные колебания при действии гармонической силы

Пусть на прямолинейно движущуюся по горизонтали точку М (рис. 3.4) действуют восстанавливающая сила $\overline{F}$, пропорциональная расстоянию *OM*, и периодически изменяющаяся сила $\overline{F}_{\text{возм}}$, называемая *возмущающей силой*. Ограничимся простейшим, но практически весьма важным случаем, когда сила изменяется по гармоническому закону.

Пусть проекция возмущающей силы на ось x равна $F_{X\text{возм}} = Hsinpt$, где H - амплитуда и p - частота возмущающей силы. Тогда дифференциальное уравнение движения материальной точки вдоль оси x имеет вид

$$m\ddot{x} = -cx + Hsinpt$$

или

$$\ddot{x} + k^2x = H_0sinpt, \quad (3.12)$$

Получаем неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка. Решив дифференциальное уравнение (3.12), определим закон движения материальной точки. Общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения (3.12) равно сумме решений частного решения уравнения (3.12) и общего решения однородного уравнения: $\ddot{x}+k^2x=0$. Общее решение последнего уравнения мы уже знаем: $x_1=a\sin(kt+\alpha)$, где a и α - постоянные интегрирования. Если $p\neq k$, то частное решение уравнения (3.12) будем искать в виде $x_2=Bp^2\sin pt$, где B - постоянная, подлежащая определению. Для этого подставим выражения x_2 и $\ddot{x_2}=-Bp^2\sin pt$ в уравнение(3.12):

$$-Bp^2\sin pt+Bk^2\sin pt=H_0\sin pt$$

или $B(k^2-p^2)\sin pt=H_0\sin pt$.

Для тождественного выполнения этого равенства должно быть $B=\frac{H_0}{k^2-p^2}$.

Частное решение имеет вид

$$x_2=\frac{H_0}{k^2-p^2}\sin pt. \qquad (3.13)$$

Следовательно, общее решение уравнения (3.12) запишется в форме

$$x=a\sin(kt+\alpha)+\frac{H_0}{k^2-p^2}\sin pt. \qquad (3.14)$$

Таким образом, искомое движение материальной точки является суммой гармонических колебаний, происходящих с собственной частотой k, и гармонических колебаний, происходящих с частотой возмущающей силы p. Постоянные a и α зависят от начальных условий. Подробно исследуем второе слагаемое в (3.14), описывающее чисто вынужденные колебания и не зависящее от начальных условий.

Амплитуда чисто вынужденных колебаний равна

$$A=\frac{H_0}{|k^2-p^2|}. \qquad (3.15)$$

Перепишем решение (3.13), используя формулу (3.15): $x_2=A\sin(kt+\alpha)$ при $k>p$, $x_2=-A\sin pt=A\sin(pt-\pi)$ при $k<p$.

Из полученных соотношений следует, что при $p<k$ фаза вынужденных колебаний совпадает с фазой возмущающей силы; при $p>k$ вынужденные колебания сдвинуты по фазе от возмущающей силы на π.

Проследим зависимость амплитуды вынужденных колебаний от отношения частот *p/k*. Для этого преобразуем выражение амплитуды вынужденных колебаний

$$A=\frac{H_0}{|k^2-p^2|}=\frac{H}{c|1-p^2/k^2|}=\frac{x_{\text{см}}}{|1-p^2/k^2|}, \qquad (3.16)$$

где $x_{\text{см}}=H/c$ - *статическое отклонение* точки от положения равновесия при действии силы равной максимальному значению возмущающей силы. Обозначим

$$\mu=\frac{A}{x_{\text{см}}}\frac{1}{|1-p^2/k^2|}.$$

Величина μ представляет собой *коэффициент динамичности*; он показывает, во сколько раз амплитуда колебаний превосходит статическое отклонение. Из графика (рис. 3.5) видно, что при $p/k\to 1$ коэффициент динамичности резко возрастает.

Вернемся теперь к общему решению (3.12), записав его в виде

$$x=C_1\cos kt+C_2\sin kt+\frac{H_0}{|k^2-p^2|}sinpt, \qquad (3.17)$$

определим постоянные интегрирования. Начальные условия $t=0$; $x=x_0$; $\dot{x}=\dot{v}_0$. Подставив начальные условия в (3.17) и в выражение для скорости движения $\dot{x}=-C_1k\sin kt+C_2\cos kt+\frac{pH_0}{k^2-p^2}cospt\text{p}$, получим

$$C_1=x, C_2=\frac{v_0}{k}-\frac{p}{k}\cdot\frac{H_0}{k^2-p^2}.$$

Подставляя C_1 и C_2 в соотношение (3.17), будем иметь

$$x=x_0\cos kt+\frac{v_0}{k}\sin kt-\frac{H_0}{k^2-p^2}\frac{p}{k}\sin kt+\frac{H_0}{k^2-p^2}\frac{p}{k}\sin pt, \qquad (3.18)$$

Такая запись решения позволяет установить, что даже при нулевых начальных условиях ($x_0=0, v_0=0$) точка будет совершать колебания, происходящие с собственной частотой; они определяются третьим членом решения (3.18) $-\frac{H_0}{k^2-p^2}\frac{p}{k}\sin kt$, причем амплитуда этих колебаний не зависит от начальных условий.

Рассмотрим несколько случаев движения в зависимости от соотношения частот p и k:

1) частота p вынужденных колебаний близка к собственной частоте k $(p \approx k)$.

Тогда выражение (3.18) при $x_0 = 0, v_0 = 0$ примет вид (приближенно полагаем $p/k = 1$, но $k^2-p^2 \neq 0$)

$$x \approx \frac{H_0}{k^2-p^2}(\sin pt - \sin kt)$$

или

$$x \approx 2\frac{H_0}{k^2-p^2}\sin\frac{p-k}{2}t\cos pt, \qquad (3.19)$$

Такое движение называется *биением* (рис. 3.6).

Показанные здесь биения представляют собой колебания, происходящие с частотой p возмущающей силы, причем амплитуда этих колебаний медленно меняется, следуя также периодическому закону;

2) собственная частота совпадает с частотой возмущающей силы, т.е. $p=k$. Частное решение уравнения (3.12) в этом случае нужно искать в виде

$$x_2 = Bt\cos pt. \qquad (3.20)$$

Подставив выражение (3.20) в дифференциальное уравнение (3.12), получим $-2Bp\sin pt = H_0 \sin pt$. Это равенство будет тождественно удовлетворено, если $B = -\frac{H_0}{2p}$.

Следовательно, общее решение имеет вид $x = a\sin(kt+\alpha) - \frac{H_0}{2p}\cos pt$.

При начальных условиях $x = x_0$; $\dot{x} = \dot{v}_0$ имеем

$$x = x_0\cos kt + \frac{v_0}{k}\sin kt + \frac{H_0}{2p^2}(\sin pt - pt\cos pt. \qquad (3.21)$$

На рис. 3.7 показан график функции x_2. Как видно, при $k=p$ происходит неограниченное возрастание амплитуды колебаний, причем рост амплитуды линеен во времени. Это явление носит название *резонанса*.

Задача 3.1. Груз M массы m прикреплен к нижнему концу B вертикально расположенной пружины, жесткость которой равна c, а длина в ненапряженном состоянии l_0. Верхний конец пружины A перемещают по закону $a\sin pt$ в вертикальном направлении (рис.3.8).

Определить вынужденные колебания груза M, приняв m=0,4кг, c=39,2 Н/м, l_0=30 см, p = 7с$^{-1}$, a=2 см.

Решение. Выберем начало координат в точке O и проведем ось x вертикально вниз. Если l_0 - длина пружины в ненапряженном состоянии, то удлинение пружины равно $x - a\sin pt - l_0$ и, следовательно, сила, действующая со стороны пружины, равна $F_x = -c(x - a\sin pt - l_0)$.

Дифференциальное уравнение движения имеет вид

$m\ddot{x} = -c(x - a\sin pt - l_0) + mg$ или $\ddot{x} + k^2x = g + H_0\sin pt + \frac{cl_0}{m}$, где $k^2 = c/m$, $H_0 = ca/m$.

Введем новую переменную z согласно равенству: $z = x - (mg/c - l_0)$, тогда дифференциальное уравнение движения преобразуется к следующей форме:

$$\ddot{z} + k^2z = H_0\sin pt.$$

Введение новой переменной z равносильно переносу начала координат в положение равновесия груза. Вынужденные колебания груза определяются формулой (3.13):

$$z = \frac{H_0}{k^2-p^2}\sin pt.$$

Подставляя сюда числовые значения параметров, получим $z = 4\sin 7t$. Так как $x = z + mg/c + l_0$, то

$$x = (4\sin 7t + 40) \text{ см}.$$

В этом случае амплитуда колебаний груза (4 см) вдвое больше амплитуды колебаний точки подвеса пружины. Заметим, что груз колеблется около среднего положения, удаленного от верхнего конца пружины на 40 см; этому положению соответствует состояние равновесия груза при отсутствии колебаний точки подвеса.

ЛЕКЦИЯ 4. ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ ТОЧКИ

Две меры механического движения. Количество движения материальной точки. Элементарный импульс силы и импульс силы за конечный промежуток времени. Теорема об изменении количества движения точки (теорема импульсов).

Момент количества движения материальной точки. Теорема об изменении момента количества движения точки (теорема моментов).

Количество движения материальной точки. Элементарный и полный импульсы силы

Теоремы динамики устанавливают связь между динамическими характеристиками (количествам: движения, кинетическим моментом, кинетической энергией) и действующими на точку силами. Применение теорем избавляет от необходимости каждый раз при непосредственном использовании дифференциальных уравнений движения точки производить операции интегрирования, которые уже были выполнены при выводе данных теорем. При некоторых условиях для действующих на точку сил теоремы позволяют просто получить первые интегралы, т.е. соотношения, в которые не входят производные, второго порядка от координат по времени.

Одной из динамических характеристик движения материальной точки является количество движения.

Количеством движения материальной точки называется векторная величина, равная произведению массы точки на вектор ее скорости:

$$\overline{q} = m\overline{v}. \qquad (4.1)$$

Направление вектора $\overline{q}$ совпадает с направлением вектора скорости точки $\overline{v}$ (рис. 4.1).

Единица измерения количества движения - кг·м/с, $[q] = \text{кг}\frac{\text{м}}{\text{с}}$ (СИ).

Проекции вектора количества движения на координатные оси записываются в следующем виде:

$$\begin{cases} q_x = m\overline{v}_x = m\dot{x}, \\ q_y = m\overline{v}_y = m\dot{y}, \\ q_z = m\overline{v}_z = m\dot{z}. \end{cases}$$

Эффект действия силы на материальную точку зависит не только от модуля силы и массы точки, но и от продолжительности действия силы. Для характеристики действия, которое производится приложенной к телу силой за некоторый промежуток времени, вводятся понятия элементарного импульса и импульса силы за конечный промежуток времени.

Элементарный импульс $d\overline{S}$ силы $\overline{F}$ - это векторная мера действия силы, равная произведению вектора силы $\overline{F}$ на элементарный промежуток времени ее действия dt.

$$d\overline{S} = \overline{F}dt \qquad (4.2)$$

Элементарный импульс направлен по вектору силы.

Импульс силы за конечный промежуток времени $\Delta t = t_1 - t_0$ равен интегральной сумме ее элементарных импульсов за этот промежуток времени:

$$\overline{S} = \int_{t_0}^{t_1} d\overline{S} = \int_{t_0}^{t_1} \overline{F}dt.$$

Для вычисления импульса силы можно воспользоваться его проекциями:

$$S_x = \int_{t_0}^{t_1} F_x dt,\ S_y = \int_{t_0}^{t_1} F_y dt,\ S_z = \int_{t_0}^{t_1} F_z dt.$$

Размерность импульса силы такая же, как у количества движения: $[S]$=Нс$=\frac{\text{кг м}}{\text{с}}$ (СИ). Модуль импульса силы равен $S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}$.

Направление вектора импульса силы определяется при помощи направляющих косинусов: $cos\alpha = \frac{S_x}{S}, cos\beta = \frac{S_y}{S}, cos\gamma = \frac{S_z}{S}$. В случае постоянной по модулю силы ее импульс определяется формулой $\overline{S} = \overline{F} \cdot t$, а проекции на координатные оси равны $S_x = F_x t,\ S_y = F_y t,\ S_z = F_z t$.

Теорема об изменениях количества движения точки (теорема импульсов)

Изменение количества движения точки за некоторый промежуток времени равно импульсу равнодействующих сил (действующих на точку) за тот же промежуток времени.

Для доказательства теоремы воспользуемся вторым законом Ньютона: $m\overline{a} = \overline{F}$ или $m\frac{d\overline{V}}{dt} = \overline{F}$, $\frac{d(m\overline{V})}{dt} = \overline{F}$, введем обозначение $m\overline{v} = \overline{q}$, с учетом которого уравнение принимает вид $\frac{d\overline{q}}{dt} = \overline{F}$, разделяем переменные $d\overline{q} = \overline{F}dt$ и интегрируем$\int_{q_0}^{q} d\overline{q} = \int_{t_0}^{t} \overline{S}dt$, окончательно получаем $\overline{q} - \overline{q_0} = \overline{S}$ или в более привычном виде $m\overline{v_1} - m\overline{v_0} = \overline{S}$.

Полученная формула отражает *теорему об изменении количества движения точки*. В проекциях на оси координат теорема имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} q_x - q_{0x} &= S_x \\ q_y - q_{0y} &= S_y \\ q_z - q_{0z} &= S_z \end{aligned}\right\} \begin{aligned} mv_{x1} - mv_{x0} &= S_x, \\ mv_{y1} - mv_{y0} &= S_y, \\ mv_{z1} - mv_{z0} &= S_z. \end{aligned}$$

Полученные уравнения (4.5) или (4.6) позволяют, зная, как при движении точки изменяется ее скорость, определить импульс действующих сил (первая задача динамики) или, зная импульсы действующих сил, определить, как изменяется при движении скорость точки (вторая задача динамики). При решении второй задачи, когда заданы силы, надо вычислить их импульсы. Как видно из равенств (4.2) или (4.3), это можно сделать лишь тогда, когда силы постоянны или зависят только от времени.

Таким образом, уравнения (4.5), (4.6) можно непосредственно использовать для решения второй задачи динамики, когда в задаче в число данных и искомых величин входят: действующие силы, время движения точки и ее начальная и конечная скорости (т.е. величины $F,\ t,\ v_0,\ v_1$), причем силы должны быть постоянными или зависящими только от времени.

Задача 4.1. Грузу, имеющему массу m и лежащему на горизонтальной плоскости, сообщают (толчком) начальную скорость v_0. Последующее движение груза тормозится постоянной силой $\overline{F}$. Определить, через какое время груз остановится.

Решение. По данным задачи видно, что для определения времени движения можно воспользоваться доказанной теоремой. Изображаем груз в произвольном положении (рис.4.2.). на него действуют: сила тяжести $\overline{P}$, реакция плоскости $\overline{N}$ и тормозящая сила $\overline{F}$. Направляя ось *Ox* в сторону движения, составляем первое из уравнений:

$$mv_{x1} - mv_{x0} = \sum S_{kx}. \qquad (4.6,\ а)$$

В данном случае $v_{x1} = 0$ (v_1 - скорость в момент остановки), а $v_{x0} = v_0$.

Из сил на ось Ох проецируется только сила $\overline{F}$. Так как она постоянна, то $S_x = F_x t_1 - F t_1$, где t_1 - время торможения. Подставляя все эти данные в уравнение (4.6,а), получаем $-mv_{x0} = -Ft_1$, откуда искомое время

$$t_1 = \frac{mv_0}{F}. \qquad (4.6, б)$$

Таким образом, время торможения растет пропорционально начальной скорости.

Решим эту же задачу, считая, что тормозящая сила равна Q и не постоянна, а с момента начала торможения растет пропорционально времени, т.е. Q=kt, где k – некоторый постоянный коэффициент, и становится равной F в момент остановки груза. Так как сила зависит от времени, то опять можно воспользоваться уравнением (4.6,а), определяя S_x по формуле (4.4). Учитывая , что $Q_x = -Q = -kt$, получим $S_x = -\int_{t_0}^{t} ktdt = -\frac{kt_{t_1}^2}{2}$. Тогда уравнение (4.6,а) дает $-mv_0 = -\frac{kt_{t_1}^2}{2}$. Значении k найдём из условия, что при $t = t_1$ Q=F, т.е. $kt_1 = F$, откуда $k = F/t_1$ и окончательно будет

$$t_1 = \frac{2mv_0}{F}, \qquad (4.6, в)$$

Следовательно, в этом случае время торможения удваивается.

Момент количества движения точки (кинетический момент точки) Относительно центра и оси

Во многих задачах динамики, например, в небесной механике, при изучении движения планет или комет вокруг Солнца, приходится учитывать не только количество движения данной точки, его величину и направление, но и ее положение к центру (к Солнцу).

Динамической характеристикой механического движения, учитывающей положение материальной точки по отношению к данному центру, является *момент количества движения (кинетический момент) точки* относительно данного центра. Этот момент определяют так же, как и момент силы.

Кинетическим моментом материальной точки относительно центра О (рис.4.3) называется векторная величина $\overline{k_0}$, равная векторному произведению радиуса-вектора материальной точки М, проведенного из центра О, на количество движения точки:

$$\overline{k_0} = \overline{r} \times \overline{q} = \overline{r} + m\overline{v}. \qquad (4.7)$$

Модуль кинетического момента точки $k_0 = r \cdot mv \cdot \sin(\overline{r}, m\overline{v})$ равен удвоенной площади треугольника *OAB*; вектор $\overline{k_0}$ направлен перпендикулярно плоскости этого треугольникав ту сторону, откуда мы видим кратчайшее совмещение $\overline{r}$ и $m\overline{v}$ (проведенных из одной точки) происходящим против хода часовой стрелки. Кинетический момент измеряется в кг $\cdot$ м^2/с.

Кинетическим моментом материальной точки относительно оси называется проекция на эту ось кинетического момента точки относительно любого выбранного на оси центра (рис. 4.4): $k_z = k_0 cos\alpha$.

Для практического нахождения кинетического момента относительно оси (например, оси z) надо вектор $\overline{q}$ спроецировать на плоскость, перпендикулярную оси (рис. 4.4). Момент данной проекции относительно точки пересечения оси с плоскостью

$$k_z = M_z(\overline{q}) = M_0\left(\overline{q}_{xy}\right) = \pm q_{xy} h. \qquad (4.8)$$

Момент положителен, если, глядя с положительного направления оси z, мы видим вращение вектора $\overline{q}$ вокруг оси против хода часовой стрелки.

Теорема об изменении кинетического момента точки (теорема моментов)

Производная по времени от момента количества движения, взятого относительно произвольного неподвижного центра, равна моменту действующей на точку силы относительно того же центра: $\frac{d}{dt}(\bar{r} \times m\bar{v}) = \bar{r} \times \bar{F}$.

Теорема моментов определяет изменение вектора $\bar{M}_0(m\bar{v})$ в течение времени. Чтобы доказать эту теорему, надо вычислить дифференциал:

$$\frac{d}{dt}(\bar{r} \times m\bar{v}) = \left(\frac{d\bar{r}}{dt} \times m\bar{v}\right) + \left(\bar{r} \times m\frac{d\bar{v}}{dt}\right) = (\bar{v} \times m\bar{v}) + (\bar{r} \times m\bar{a}),$$

но $v \times m\bar{v} = 0$, так как эо векторное произведение двух параллельных векторов:

$$\frac{d}{dt}(\bar{r} \times m\bar{v}) = \bar{r} \times \bar{F} \text{ или } \frac{d}{dt}(\bar{M}_0(m\bar{v})) = \bar{M}_0(\bar{F}). \qquad (4.9)$$

Векторное уравнение равносильно трем скалярным. Записывая векторные произведения в виде определителей третьего порядка, получим:

$$\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix},$$

откуда

$$m\frac{d}{dt}(yv_z - zv_y) = yF_z - zF_y,$$
$$m\frac{d}{dt}(zv_x - xv_z) = zF_x - xF_{zy},$$
$$m\frac{d}{dt}(xv_y - yv_x) = xF_y - yF_z.$$

Полученный результат можно сформулировать следующим образом: *производная по времени от момента количества движения материальной точки относительно какой-либо оси равна моменту силы, приложенной к точке, относительно той же самой оси.*

Задача 4.2. Шарик *M* привязан к нити *MBA*, часть *BA* которой продета сквозь вертикальную трубку (рис.4.5). в момент, когда шарик находится на расстоянии h_0 от оси *z* трубки, ему сообщают начальную скорость v_0, перпендикулярную плоскости *MBA*. Одновременно нить начинают медленно втягивать в трубку. Найти, какую скорость v_1 будет иметь шарик, когда его расстояние от оси z станет равно h_1.

Решение. На шарик действует сила тяжести $\bar{P}$, реакция нити $\bar{\mathrm{T}}$. Моменты этих сил относительно оси *z* равны нулю, так как сила $\bar{P}$ параллельна оси z, а сила $\bar{\mathrm{T}}$ эту ось пересекает, тогда $\frac{d}{dt}\left(\bar{M}_z(m\bar{v})\right) = 0$, откуда $\bar{M}_z(m\bar{v}) = mvh = const$. Так как масса m постоянна, то отсюда следует, что при движении шарика $v_0h_0 = v_1h_1$. Следовательно, $v_1 = \frac{v_0h_0}{h_1}$. По мере приближения шарика к оси его скорость растет.

ЛЕКЦИЯ 5. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Кинетическая энергия материальной точки. Элементарная работа силы. Мощность. Аналитическое выражение элементарной работы. Работа сил тяжести, сил упругости, силы, приложенной к вращающемуся телу. Теорема об изменении кинетической энергии точки. Потенциальная энергия.

Введем еще одну составляющую динамическую характеристику движения - кинетическую энергию точки.

Кинетической энергией материальной точки называется скалярная величина, (всегда положительная), равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости:

$$T = \frac{mv^2}{2}$$

Единица измерения кинетической энергии [T]=Дж.(СИ). Будучи величиной скалярной кинетическая, энергия не определяет направление движения, что позволяет использовать ее при изучении как поступательного движения, так и вращательного.

Работа силы

Эффект действия силы на материальное тело зависит не только от времени действия силы, но и от направления силы по отношению к перемещению точки ее приложения, а также от пути, на протяжении которого сила действует на тело. Для описания результата действия силы на материальное тело в зависимости от взаимного расположения векторов силы и перемещения и от пути, на котором действует сила, вводится понятие *работа силы*. Различают элементарную и полную работу силы.

Элементарная работа силы

Пусть материальная точка *M* под действием силы $\overline{F}$ совершила элементарное перемещение $d\overline{r}$ (рис. 5.1). Тогда *элементарной работой dA силы* $\overline{F}$ *на перемещении* $d\overline{r}$ *называется скалярное произведение силы* $\overline{F}$ *на элементарное перемещение* $d\overline{r}$ *точки ее приложения*:

$$dA = \overline{F} \cdot |d\overline{r}| = \left|\overline{F}\right| \cdot |d\overline{r}| cos\alpha, \qquad (5.1)$$

где α - угол между направлениями векторов $\overline{F}$ и $d\overline{r}$.

Так как $d\overline{r} = \overline{v}dt$, где $\overline{v}$ - скорость точки *M*, то можно записать еще одно выражение элементарной работы:

$$dA = \overline{F} \cdot \overline{v}dt = \left|\overline{F}\right| \cdot |\overline{v}| cos\alpha. \qquad (5.2)$$

Из формул элементарной работы следует, что эта величина может быть положительной, отрицательной или же равной нулю.

Если угол α между векторами $\overline{F}$ и $d\overline{r}$ (или $\overline{v}$) острый ($\cos\alpha$>0), то элементарная работа положительна, если угол α тупой ($\cos\alpha$<0), то элементарная работа отрицательная, если угол α прямой ($\cos\alpha$ =0), то элементарная работа равна нулю.

Кроме последнего случая ($\overline{F} \perp d\overline{r}$), элементарная работа равна нулю, если в данный момент $\overline{F} = 0$, а также, если элементарное перемещение равно нулю, т.е. в момент, когда точка *M* неподвижна. В частности, силы, приложенные в мгновенном центре скоростей тела, не совершают работы.

Обозначим проекции силы *F* на оси декартовой системы координат через F_x, F_y, F_z, а проекции элементарного перемещения dr через *dx, dy, dz*. Тогда выражение для элементарной работы (по известному свойству скалярного произведения векторов) можно записать в виде

$$dA = \overline{F} \cdot d\overline{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \qquad (5.3)$$

В случае, когда к точке М приложена система сил ($\overline{F}_1, \overline{F}_2, \dots, \overline{F}_n$), имеющая равнодействующую $\overline{R} = \sum \overline{F}_k$, элементарная работа равнодействующей на перемещении *A* равна алгебраической сумме элементарных работ сил на том же перемещении.

Работа силы на конечном перемещении

Пусть материальная точка *M* под действием силы $\overline{F}$ переместилась из точки *B* в точку *C* по кривой l (рис.5.2). разобьем кривую l на бесконечное число элементарных отрезков и определим на каждом из них элементарную работу силы $\overline{F}$. Алгебраическая сумма всех этих элементарных работ и будет полной работой силы $\overline{F}$ на конечном перемещении BC точки ее приложения вдоль кривой l, $A = lim \sum dA_k$.

Записанная сумма является интегральной и может быть заменена криволинейным интегралом, взятым вдоль кривой l на перемещении BC:

$$A = \int_B^C dA = \int_B^C \overline{F} \cdot d\overline{r} = \int_B^C (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

или $A = \int_0^t \overline{F} \cdot \overline{v} dt = \int_0^t (F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z) dt.$ (5.4)

Единицей измерения работы в системе СИ является Дж, [A]= [1 Дж]=[Нм].

В качестве примеров вычисления полной работы силы найдем работу силы тяжести и силы упругости.

Работа силы тяжести

Пусть точка М, на которую действует сила тяжести $\overline{P} = m\overline{g}$, переместилась из положения M_0 с координатами x_0, y_0, z_0 в положение M_1с координатами x_1, y_1, z_1 (рис. 5.3) (ось Oz направлена вертикально вверх). Определим элементарную и полную работу $\overline{P}$ на этом перемещении. Вблизи поверхности Земли силу тяжести можно считать постоянной и направленной по вертикали оси, поэтому она имеет проекции $P_x = P_y = 0$, $P_z = -mg$, и ее элементарная работа равна $dA = P_x dx + P_y dy + P_z dz = -mgdz$.

Полная работа силы $\overline{P}$ на перемещении M_0M_1

$$A = \int_{M_0}^{M_1} dA = -mg \int_{z_0}^{z_1} dz = -mg(z_1 - z_0) = mg(z_0 - z_1)$$

или

$$A = mgh, \qquad (5.5)$$

где $h = z_0 - z_1$ – высота, на которую опустилась точка. Таким образом, работа силы тяжести положительна, когда точка опускается, и отрицательна, когда точка поднимается.

Работа силы упругости

Рассмотрим груз M, лежащий на горизонтальной плоскости и прикрепленный к пружине жесткостью c (рис.5.4). выберем начало координат в положении, при котором пружина не напряжена, и определим работу, которую совершит сила упругости пружины $\overline{F}$ при перемещении тела M из положения $M_0(x_0)$ в положение $M_1(x_1)$ (рис.5.4). находим проекции силы $\overline{F}$: $F_y = F_z = 0$, $F_x = -cx$, затем ее элементарную работу $dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -cxdx$, и, наконец, полную работу: $A = \int_{M_0}^{M_1} dA = -\int_{x_0}^{x_1} cxdxdz = -\frac{c}{2}(x_1^2 - x_0^2)$ или окончательно

$$A = \frac{c}{2}(x_1^2 - x_0^2). \qquad (5.6)$$

При данном выборе начала координат координаты x_0 и x_1 представляют собой начальную и конечную деформации пружины, т.е. $x_0 = \Delta l_{\text{нач.}}$, $x_1 = \Delta l_{\text{кон.}}$. Поэтому

$$A = \frac{c}{2}[(\Delta l_{\text{нач.}})^2 - (\Delta l_{\text{кон.}})^2]. \qquad (5.7)$$

Работа силы упругости положительна, если начальная деформация пружины больше конечной, т.е. если точка M приближается к положению, при котором пружина не деформирована.

В разобранных примерах работа силы не зависит от пути, по которому двигалась точка ее приложения. Такие силы называются *потенциальными*.

Работа силы, приложенной к вращающемуся твердому телу

Пусть к точке M твердого тела, вращающегося вокруг оси Oz, с угловой скоростью ω приложена сила $\overline{F}$ (рис.5.5). Определим элементарную работу этой силы: $dA = \overline{F} \cdot \overline{v} dt$.

По формуле Эйлера $\overline{v} = \overline{\omega} \times \overline{r}$, где $\overline{r}$ – радиус-вектор точки M относительно точки O, лежащей на оси вращения. Тогда

$$dA = \overline{F} \cdot (\overline{\omega} \times \overline{r}) dt = \overline{\omega} \cdot \left(\overline{r} \times \overline{F}\right) dt,$$

так как по свойству смешанного произведения векторов $\overline{F} \cdot (\overline{\omega} \times \overline{r}) = \overline{\omega} \cdot \left(\overline{r} \times \overline{F}\right)$.

Но $\overline{r} \times \overline{F} = \overline{M}_0(\overline{F})$ – момент силы $\overline{F}$ относительно точки O, поэтому $dA = \overline{\omega} \cdot \overline{M}_0\left(\overline{F}\right) dt = \omega M_0(\overline{F}) cos\alpha dt$. По определению момента силы относительно оси имеем $-M_x\left(\overline{F}\right) = \left[M_0(\overline{F})\right]_x = M_0(\overline{F}) cos\alpha$, кроме того, $\omega dt = \frac{d\varphi}{dt} \cdot dt = d\varphi$. Следовательно,

$$dA = M_z(\overline{F}) d\varphi, \qquad (5.8)$$

т.е. *элементарная работа силы, приложенной к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси, равна произведению момента этой силы относительно оси вращения на элементарный угол поворота тела*. Эта работа положительна, если направления момента и поворота совпадают.

Работа этой силы на конечном перемещении определяется из равенства

$$A = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} M_z(F) d\varphi. \qquad (5.9)$$

Если $M_z\left(\overline{F}\right) = const$, то

$$A = M_z(\overline{F})(\varphi_1 - \varphi_0), \qquad (5.10)$$

т.е. работа равна моменту силы относительно оси вращения, умноженному на угол поворота тела.

Мощность силы

Мощность силы определяется работой, совершаемой силой в единицу времени. Так, если за время dt сила совершила работу, равную $dA = \overline{F} \cdot d\overline{r}$, то выражение для мощности силы принимает вид

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{\overline{F} \cdot d\overline{r}}{dt} = \overline{F} \cdot \overline{v} = \left|\overline{F}\right| \cdot |\overline{v}| \cdot cos\alpha, \qquad (5.11)$$

т.е. мощность силы – это величина, равная скалярному произведению силы на скорость точки ее приложения. Таким образом, при постоянной мощности увеличение скорости ведет к уменьшению силы и наоборот. Единицей измерения мощности является Ватт (1Вт=1дж/с). Если сила приложена к телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси, то ее мощность

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{M_z(\overline{F}) d\varphi}{dt} = M_z(\overline{F}) \omega, \qquad (5.12)$$

аналогично определяется и мощность пары сил. Мощность момента положительна, если его направление совпадает с направлением вращения тела.

Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки

Определим связь между работой сил, приложенных к материальной точке, и изменением скорости точки. Для этого воспользуемся основным уравнением динамики: $m\frac{d\overline{v}}{dt} = \overline{F}$, где $\overline{F}$ – равнодействующая всех сил, приложенных к материальной точке. Умножим обе части этого равенства скалярно на дифференциал радиус-вектора $d\overline{r}$:

$$m\frac{d\overline{v}}{dt} d\overline{r} = \overline{F} \cdot d\overline{r}, \qquad (5.13)$$

В правой части стоит элементарная работа dA равнодействующей всех сил, приложенных к материальной точке, левую часть можно представить в следующей форме:

$$m\frac{d\overline{v}}{dt} d\overline{r} = m\frac{d\overline{r}}{dt} d\overline{v} = m\overline{v} \cdot d\overline{v} = d\left(\frac{mv^2}{2}\right),$$

при этом учтено, что скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля $\overline{v} \cdot \overline{v} = v^2$. Тогда

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dA, \qquad (5.14)$$

т.е. *полный дифференциал кинетической энергии материальной точки равен элементарной работе всех действующих на эту точку сил.*

Будем рассматривать все члены, входящие в равенство, как функции времени *t*. Тогда, деля обе части равенства (5.14) на *dt*, получим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \frac{dA}{dt} = N, \qquad (5.15)$$

т.е. *полная производная по времени от кинетической энергии материальной точки равна суммарной мощности всех действующих на эту точку сил.*

Пусть теперь материальная точка *M* перемещается по кривой *BC* от положения M_1 до положения M_2 (рис.5.2). обозначим через $\overline{v}_1$ и $\overline{v}_2$ скорость точки *M* в положениях M_1 и M_2 соответственно и проинтегрируем обе части равенства (5.14) по кривой M_1M_2: $\int_{M_1M_2} d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \int_{M_1M_2} dA$.

Правая часть этого равенства равна работе $A_{1,2}$ силы $\overline{F}$ на пути M_1M_2; при вычислении левой части следует иметь в виду, что криволинейный интеграл от полного дифференциала некоторой функции равен самой функции. Таким образом, будем иметь

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = A_{1,2}, \qquad (5.16)$$

т.е. *изменение кинетической энергии материальной точки при переходе ее из начального в конечное (текущее) положение равно сумме работ на этом перемещении всех сил, приложенных к точке.*

С помощью только что доказанной теоремы об изменении кинетической энергии можно решать следующие две основные задачи. В первой определяется скорость материальной точки в конце или начале движения. Решение этой задачи с помощью равенства (5.16) имеет смысл, конечно, только в том случае, если работу всех сил, приложенных к материальной точке, можно вычислить, не знаю закона движения, т.е. не интегрируя уравнение движения. К задачам второго типа относится вычисление работы силы по заданной скорости.

Задача 5.1. Какова длина разбега самолета, масса которого *m*=18000 кг, тяга, развиваемая двигателем, *Ф*=40кН, общая сила сопротивления R=10кН, взлетная скорость *v*=216 км/ч.

Решение. Применим теорему об изменении кинетической энергии: $\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = (\Phi - R)s$, полагая начальную скорость $v_0 = 0$, получим $s = \frac{mv^2}{2(\Phi - R)} = \frac{18000 \cdot 60^2}{2 \cdot 30000} = 1080$ м.

Задача 5.2. Самолет, масса которого m=10^4 кг, совершает посадку. В момент касания колес земли самолет имеет вертикальную скорость снижения $u_0 = 2$ м/с. Вертикальная составляющая полной аэродинамической силы равна *N*=80 кН, жесткость амортизационной системы *c*=10 кН/см. Сопротивление в амортизационных стойках шасси при прямом ходе постоянно и равно *R*=30 кН. Определить наибольшую осадку самолета, считая, что за время срабатывания стойки горизонтальная скорость остается неизменной (рис. 5.6).

Решение. Применим теорему об изменении кинетической энергии. В начальный момент вертикальная составляющая скорости $u_0 = 2$ м/с, в конечный момент $u_1 = 0$. Работу восттанавляивающей силы пружины определим по формуле (5.7). Полагая *OM* = λ, получим для работы всех сил (силы тяжести mg, силы сопротивления *R*, подъемной силы *N* и силы упругости амортизаторов)

$$A_{\text{OM}} = mg\lambda - R\lambda - N\lambda - \frac{c\lambda^2}{2}.$$

Величина полной начальной скорости равна $v_0 = \sqrt{v^2 + u^2}$; величина скорости в конце процесса сжатия амортизационной системы равна v. Поэтому приращение кинетической энергии составляет

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{m(v^2+u_0^2)}{2} = -\frac{mu_0^2}{2}.$$

По теореме об изменении кинетической энергии имеем

$$-\frac{mu_0^2}{2} = mg\lambda - R\lambda - N\lambda - \frac{c\lambda^2}{2},$$

откуда

$$\lambda = \frac{1}{c}\left(mg - R - N \pm \sqrt{(mg - R - N)^2 + mu_0^2 c}\right).$$

Для крайнего нижнего положения следует перед корнем поставить знак «+», после подстановки численных значений найдем $\lambda \approx 18{,}8$ см.

ЛЕКЦИЯ 6. ВВЕДЕНИЕ В ДИНАМИКУ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Масса системы. Центр масс системы.
Момент инерции твердого тела относительно оси. Вычисление моментов инерции. Радиус инерции.
Моменты инерции относительно параллельных осей (теорема Гюйгенса-Штейнера).

Ранее мы изучали законы движения одной материальной точки, находящейся под действием приложенных к ней сил. В практике чаще встречаются более сложные случаи, когда движение одной материальной точки или одного тела нельзя изучать изолированно от движения других материальных точек (тел). Так, например, движение Луны относительно Земли существенным образом зависит от движения Земли относительно Солнца, вращение коленчатого вала двигателя внутреннего сгорания зависит от движения его поршней и т.п. Эти и многочисленные другие примеры заставляют нас перейти от изучения движения одной материальной точки к изучению движения материальных систем.

В механике под *материальной системой понимают совокупность материальных точек, движения которых взаимосвязаны*. Твердое тело рассматривается как неизменяемая материальная система с распределенной по объему массой. Эта модель представляет, конечно, некоторую идеализацию твердого тела, так как при этом не учитываются расстояния между молекулами или кристаллами тела. Однако эти расстояния настолько малы по сравнению размерами самого тела, что предположение о сплошном распределении массы не вносит сколько-нибудь заметных погрешностей в вычисления.

Масса системы. Центр масс

Массой М материальной системы называется сумма масс всех точек, входящих в систему:

$$M = \sum_{k=1}^{n} m_k, \qquad (6.1)$$

где m_k – масса материальной точки с номером k; n – число точек системы.

Центром масс или *центром инерции* материальной системы называется геометрическая точка, радиус-вектор $\overline{r}$ которой определяется равенством

$$\overline{r}_C = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k \overline{r}_k, \qquad (6.2)$$

т.е. точка со следующими координатами:

$$x_C = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k x_k,\ y_C = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k y_k,\ z_C = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k z_k. \qquad (6.3)$$

В этих формулах r_k и x_k, y_k, z_k – соответственно радиус-векторы координаты k-й материальной точки.

При непрерывном распределении массы суммы, стоящие в правых частях формул (6.2) и (6.3), переходят в соответствующие интегралы. Легко видеть, что центр масс твердого тела, находящегося в однородном поле силы тяжести, совпадает с его центром тяжести. Действительно, умножим числитель и знаменатель правой части формулы (6.2) на модуль ускорения силы тяжести g:

$$\overline{r}_C = \frac{1}{Mg}\sum_{k=1}^{n} m_k g\,\overline{r}_k,\;\; \overline{r}_C = \frac{1}{P}\sum_{k=1}^{n} p_k\,\overline{r}_k.$$

Учитывая, что произведение Mg равно весу P тела, а $m_k g$ – весу p_k материальной точки, получим $\overline{r}_C = \frac{1}{P}\sum_{k=1}^{n} p_k\,\overline{r}_k$, что совпадает с выражением для радиус-вектора центра тяжести твердого тела.

В динамике следует говорить о центре масс материальной системы, а не о центре тяжести. При определении центра масс материальной системы можно пользоваться методами, установленными в статике для определения центра тяжести (метод симметрии, метод расчленения, метод отрицательных масс и т.п.). Необходимо отметить, что положение центра масс твердого тела не меняется относительно точек тела. Если же система состоит из перемещающихся друг относительно друга материальных точек, то положение центра масс системы относительно ее точек может изменяться.

Момент инерции относительно оси

Движение механической системы материальных точек зависит не только от массы системы, но и от распределения этой массы. Так, из двух маховиков одинаковой массы (веса) быстрее раскрутится при одинаковых силах маховик меньшего диаметра. Распределение масс в механической системе характеризуется моментами инерции.

Моментом инерции материальной точки относительно некоторой оси называется произведение массы m *этой точки на квадрат ее расстояния* h *до оси, т.е. величина* mh^2. *Моментом инерции материальной системы относительно оси называется сумма моментов инерции всех точек системы относительно той же оси.*

Так, например, момент инерции материальной системы относительно оси z равен

$$I_z = \sum_{k=1}^{n} m_k h_{kz}^2, \qquad (6.4)$$

где h_{kz} - расстояние от точки с номером k до оси z.

Размерность момента инерции в системе СИ равна кг·м^2. При непрерывном распределении массы сумма переходит в интеграл.

Примеры вычисления моментов инерции

Рассмотрим примеры вычисления моментов инерции.

Определим момент инерции однородного тонкого стержня массы M и длины l относительно оси z, проходящей перпендикулярно к стержню через его конец (рис. 6.1.).

1. *Момент инерции стержня*

Направим ось x вдоль стержня и выделим на нем элемент длины dx. Расстояние h_z от этого элемента до оси z равно x, масса единицы длины стрежня M/l, а масса выделенного элемента $dm = (M/l)dx$. Внесем эти значения для h_z и dm в выражение (6.4) и учтем, что переменная интегрирования x изменяется от 0 до l. Тогда

$$I_z = \int h_k^2 dm = \int_0^l x^2 \frac{M}{l} dx$$

или, интегрируя, получаем $I_z = \frac{1}{3}Ml^2$.

Таково значение момента инерции однородного тонкого стержня относительно *оси, проходящей перпендикулярно к стержню через его конец.*

Момент инерции I_{cz} однородного тонкого стержня длины l и массы M относительно *оси, проходящей перпендикулярно к стержню через его центр тяжести С,* будет равен $I_{Cz} = \frac{1}{12}Ml^2$.

2. *Момент инерции круглой однородной пластины или кругового цилиндра массой M*

Вычислим момент инерции круглой пластины относительно оси C_z, перпендикулярной пластине и проходящей через его центр. Для этого выделим элементарное кольцо радиусом r и шириной dr (рис.6.2,а). Площадь этого кольца $2\pi r \cdot dr$, а масса $dm = \rho 2\pi r \cdot dr$, где $\rho = M/\pi R^2$ – масса единицы площади пластины. Тогда по формуле (6.4)

$$I_{Cz} = 2\pi\rho \int r^3 dr = \frac{\pi\rho R^4}{2}.$$

Заменяя здесь ρ его значением $M/\pi R^2$, найдем окончательно $I_{Cz} = \frac{1}{2}MR^2$.

Это выражение для момента инерции не зависит от высоты цилиндра *H* (рис.6.2, б), и поэтому оно справедливо для и для однородного кругового цилиндра.

Очень часто вводят *радиус инерции тела* относительно оси, *понимая под ним расстояние ρ от оси до точки, в которой нужно сосредоточить массу M всего тела, чтобы момент инерции точки относительно данной оси равнялся моменту инерции тела относительно той же оси.* По определению имеем

$$I_z = M\rho^2. \qquad (6.5)$$

Моменты инерции относительно параллельных осей (теорема Гюйгенса-Штейнера)

Моменты инерции тела относительно разных осей будут разными. Связь между моментами инерции тела относительно параллельных осей, одна из которых проходит через центр масс, устанавливается теоремой Гюйгенса-Штейнера: *момент инерции I тела относительно некоторой оси равен сумме момента инерции I_C тела относительно оси, проходящей через центр масс параллельно данной, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями.*

Пусть оси I и II параллельны, причем ось I проходит через центр масс *C* тела. Возьмем начало координат в точке *C*, совместим ось *z* с осью I, а ось *y* направим так, чтобы она пересекала ось II (рис. 6.3). выделим в теле произвольный элемент массой *dm* и опустим из него перпендикуляры на оси I и II, обозначив их соответственно через ρ и ρ_1. Согласно определению моментов инерции будем иметь $I_C = \int \rho^2 dm,\ I = \int \rho_1^2 dm$. По теореме косинусов найдем $\rho_1^2 = \rho^2 + d^2 - 2\rho d cos\alpha$, или, учитывая, что $\rho cos\alpha = y$, где y – ордината элемента, $\rho_1^2 = \rho^2 + d^2 - 2dy$. Подставим это выражение для ρ_1 в формулу, определяющую момент инерции:

$$I = \int(\rho^2 + d^2 - 2yd)dm = \int \rho^2 dm + d^2 \int dm - 2d \int ydm.$$

Первый интеграл равен I_C, второй – массе тела *M*, а третий – нулю, так как начало координат совпадает с центром масс. Следовательно,

$$I = I_C + Md^2. \qquad (6.6)$$

Формула (6.6) широко используется в практических расчетах при определении моментов инерции тел относительно осей, не проходящих через центр масс. Кроме того, применяя метод разбиения, с помощью этой формулы можно определить осевые моменты инерции тел сложной формы. Поясним это примером.

Задача 6.1. Маятник, изображенный на рис. 6.4, состоит из тонкого однородного стержня длиной l и массой m_1 и круглого однородного диска радиусом R и массой m_2. Определить момент инерции I_z маятника относительно оси его вращения *Oz* (ось *Oz* направлена перпендикулярно к плоскости рисунка).

Решение. Маятник состоит из двух тел: стержня и диска. Поэтому $I = I_{См} + I_{Д}$, где $I_{См}$ и $I_{Д}$ – моменты инерции относительно оси *Oz* соответствующих тел.

Момент инерции стержня $I_{См} = \frac{1}{3}Ml^2$, а момент инерции диска найдем по формуле (6.6): $I = I_C + Md^2$, где $I_{Д} = \frac{1}{2}m_2R^2$ – момент инерции диска относительно оси, проходящей через его центр масс параллельно оси *Oz*, а $d=l+R$ – расстояние от центра диска до оси *Oz*. Имеем

$$I_Д = \frac{1}{2}m_2R^2 + m_2(l+R)^2/$$

Пользуясь выражением для моментов инерции стержня и диска, найдем момент инерции маятника относительно оси *Oz*: $I = \frac{1}{3}m_1l^2 + m_2\left(\frac{1}{2}R^2 + (l+R)^2\right)$.

Внешние и внутренние силы

В курсе статики мы делили все силы, приложенные к твердому телу или к системе тел, на активные силы и реакции связей. Но силы можно разделить и на две другие группы, а именно на внешние и внутренние.

Силы, действующие на точки системы, называются *внешними*, сели не вызваны действием тел, не входящих в систему. Силы, вызванные взаимодействием точек, входящих в систему, называются *внутренними*. Обозначаются внешние силы верхним индексом «е», а внутренние – верхним индексом «i»: $\overline{F}^{\mathrm{e}}$ – внешняя сила, $\overline{F}^{i}$ – внутрення сила.

В качестве примера рассмотрим силы, приложенные к движущемуся прямолинейно по горизонтальной дороге автомобилю (рис. 6.5). на автомобиль действует сила тяжести $\overline{G}$. Эта сила внешняя, так как вызвана действием Земли – тела, не входящего в рассматриваемую систему (автомобиль). Одновременно это и активная сила, так как не зависит от связей. К активным внешним силам относится также аэродинамическая сила сопротивления воздуха $\overline{F}_c$. Эта сила вызвана сопротивлением окружающей среды и также непосредственно не зависит от связей. Применим теперь принцип освобождаемости и заменим действие связи (дороги) ее реакциями $\overline{N}_1$, $\overline{N}_2$, $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$. Первые две силы составляют равнодействующие нормальных составляющих реакций дороги к передним и задним колесам, а силы $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ – равнодействующие сил трения, вызванных вращением ведомых и ведущих колес. $\overline{N}_1$, $\overline{N}_2$, $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$ – внешние силы, так как они обусловлены действием дороги, которая в систему не входит. Таким образом, к автомобилю приложены шесть внешних сил: $\overline{G}, \overline{F}_c, \overline{N}_1$, $\overline{N}_2$, $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$.

Сила давления газов на поршни двигателя, силы давления поршней на шатуны и шатунов на кривошипы коленчатого вала, силы трения на осях колес и т.п. – это все внутренние силы системы.

Отметим, что в некоторых случаях внешние силы появляются за счет действия внутренних сил. Так, например, внешняя сила трения скольжения $\overline{F}_2$ между задними колесами автомобиля и дорогой (рис.6.5) не может возникнуть без внутренних сил, передающих вращающий момент на ведущие колеса.

Рассмотрим еще один пример. Если пренебречь силами притяжения звезд, то нашу Солнечную систему можно рассматривать как изолированную механическую систему, на которую не действуют никакие внешние силы. Силы притяжения между отдельными телами всей Солнечной системы являются внутренними силами.

Свойства внутренних сил

Из третьего закона Ньютона следует, что внутренние силы входят попарно, причем, если точка *B* действует на точку *A* с силой $\overline{F}_1^{i}$, а точка *A* действует на точку *B* с силой $\overline{F}_2^{i}$, то эти силы равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны (рис. 6.6): $\overline{F}_1^{i} = -\overline{F}_2^{i}$. Из этого следуют два свойства внутренних сил системы:

1) *геометрическая сумма всех внутренних сил системы (главный вектор внутренних сил) равна нулю*:

$$\sum_{k=1}^{n}\overline{F}_k^{i} = 0, \qquad (6.7)$$

где $\overline{F}_k$ – равнодействующая внутренних сил, приложенных к точке с номером k;

2) *геометрическая сумма моментов всех внутренних сил относительно произвольной точки пространства (главный момент внутренних сил) равна нулю:*

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{r}_k \times \overline{F}_k^i = 0. \qquad (6.8)$$

Для системы, состоящей из двух точек A и B с силами $\overline{F}_1^i$ и $\overline{F}_2^i$ (рис. 6.6) это свойство очевидно. Действительно, так как $\overline{F}_1^i = -\overline{F}_2^i$, а плечи относительно точки 0 у обеих сил равны, то моменты этих сил численно равны, но направлены в противоположные стороны. Доказательство указанных свойств для любого количества внутренних сил следует из того, что они входят в систему попарно.

Равенство нулю главного вектора и главного момента внутренних сил материальной системы не означает, что эти силы уравновешены.

ЛЕКЦИЯ 7. ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ

Дифференциальное уравнение движения механической системы.

Главный вектор количества движения системы. Теорема об изменении главного вектора количеств движения системы (теорема импульсов) в дифференциальной и интегральной формах. Закон сохранения импульса системы.

Теорема Эйлера.

Теорема о движении центра масс. Закон сохранения центра масс системы.

Дифференциальные уравнения движения системы материальных точек

Рассмотрим систему, состоящую из n материальных точек. Применим принцип освобождаемости и заменим связи их реакциями. Обозначим через $\overline{F}_k^i$ и $\overline{F}_k^e$ равнодействующие всех внешних и внутренних сил, приложенных к k-й материальной точке. Тогда каждую точку можно рассматривать как свободную, движущуюся под действием сил $\overline{F}_k^i$ и $\overline{F}_k^e$. Применим к каждой точке второй закон Ньютона:

$$m_k \ddot{\overline{r}} = \overline{F}_k^i + \overline{F}_k^e \qquad (7.1)$$

или в проекциях на неподвижные оси декартовых координат:

$$m_k \ddot{x}_k = F_{kx}^e + F_{kx}^i,\ m_k \ddot{y}_k = F_{ky}^e + F_{ky}^i,\ m_k \ddot{z}_k = F_{kz}^e + F_{kz}^i \qquad (7.2)$$

Уравнения (7.1) и (7.2) представляют дифференциальные уравнения движения материальных точек всей системы. Число дифференциальных уравнений в векторной форме равно n, а число дифференциальных уравнений в координатной форме равно $3n$. Следовательно, общее решение зависит от $6n$ произвольных скалярных постоянных.

Задача 7.1. Два тела массой m_1 и m_2 связаны между собой тросом, перекинутым через блок (рис. 7.1). пренебрегая силами трения, а также массой троса и блока, определить закон движения грузов и натяжения троса.

Решение. Система состоит из двух материальных точек (оба тела перемещаются поступательно), движущихся параллельно одной прямой. Следовательно, мы будем иметь два дифференциальных уравнения движения в проекциях на ось x. Предположим, что правый груз движется с ускорением $\ddot{x}_1$ вниз; тогда левый груз будет двигаться вверх с ускорением $\ddot{x}_2 = -\ddot{x}_1$. Мысленно освободимся от связи (троса) и заменим ее реакциями $\overline{T}_1$ и $\overline{T}_2$. Считая теперь оба тела свободными, составим дифференциальные уравнения движения в проекции на ось x: $m_1\ddot{x}_1 = -m_1 g - T_1$, $m_2\ddot{x}_2 = -m_2 g - T_2$. Учтем теперь, что $\ddot{x}_2 = -\ddot{x}_1$ и $T_1 = T_2 = T$ (так как силами трения, а также массой троса и блока пренебрегаем); тогда получим $m_1\ddot{x}_1 = m_1 g - T$, $-m_2\ddot{x}_1 = m_2 g - T$. Решая эти уравнения относительно ускорения $\ddot{x}_1$ и натяжения T троса, найдем $\ddot{x}_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$, $T = 2\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$.

Из этого решения видно, что правый груз движется равноускорено вниз, если $m_1 > m_2$ и вверх, если $m_1 < m_2$. При $m_1 = m_2$ оба груза находятся в покое или движутся равномерно (это зависит от начальных условий). Отметим, что натяжение троса при $m_1 \neq m_2$ не равно силе тяжести соответствующего груза.

На первый взгляд может показаться, что изучение движения материальной системы можно свести к составлению и решению дифференциальных уравнений движения. В принципе эта точка зрения справедлива, но практически реализовать такой путь исследования удается только для систем, состоящих из небольшого числа материальных точек свободных или имеющих сравнительно простые связи. Сложность использования дифференциальных уравнений движения состоит, прежде всего, в том, что, как правило, мы не знаем аналитического выражения внутренних сил и реакций связей.

В теоретической механике разработаны методы, которые позволяют обойти указанные трудности. Для решения многих задач динамики, особенно в динамике системы, вместо непосредственного интегрирования дифференциальных уравнений движения оказывается более эффективным пользоваться так называемыми общими теоремами, являющимися следствиями основного закона динамики.

Значение общих теорем состоит в том, что они устанавливают наглядные зависимости между соответствующими динамическими характеристиками движения материальных тел и открывают тем самым новые возможности исследования движения механических систем, широко применяемые в инженерной практике.

Главный вектор количества движения системы

Количеством движения системы n материальных точек называется геометрическая сумма количеств движения всех точек системы:

$$\overline{Q} = \sum_{k=1}^{n} \overline{q}_k = \sum_{k=1}^{n} m\overline{v}_k. \qquad (7.3)$$

Из определения центра масс механической системы следует, что $M\overline{r}_C = \sum_{k=1}^{n} m_k \overline{r}_k$. Взяв производную по времени от этого равенства, получим, что $M\frac{d\overline{r}_C}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_k \frac{d\overline{r}_k}{dt}$ или $M\overline{v}_C = \sum_{k=1}^{n} m_k \overline{v}_k$, следовательно,

$$\overline{Q} = \sum_{k=1}^{n} m\overline{v}_k = M\overline{v}_C, \qquad (7.4)$$

Где M – масса системы, а $\overline{v}_C$ - скорость ее центра масс.

Проекции количества движения на оси прямоугольной системы координат записываются в следующем виде:

$$Q_x = \sum_{k=1}^{n} mv_{kx} = Mv_{cx},$$
$$Q_y = \sum_{k=1}^{n} mv_{ky} = Mv_{cy},$$
$$Q_z = \sum_{k=1}^{n} mv_{kz} = Mv_{cz}.$$

Из формулы (7.4) следует, что количество движения системы определяется движением ее центра масс, т.е. движением лишь одной точки системы. Если рассматривать движение системы как сложное, состоящее из поступательного переносного движения вместе с центром масс и относительного движения по отношению к системе, имеющей начало в центре масс и движущейся поступательно, то количество движения характеризует только переносное поступательное движение, т.е. не характеризует движение системы в целом. Например, если тело вращается вокруг неподвижной оси, проходящей через центр масс системы, то скорость центра масс, а, следовательно, и количество движения тела равны нулю, поэтому в данном случае количество движения никак не определяет движение тела.

Рассмотрим пример определения количества движения механической системы.

Задача 7.2. Найти количество движения механической системы (рис. 7.2, а), состоящей из тела A массой $m_A = 2$ кг, блока B массой $m_B = 1$ кг и колеса D массой $m_D = 4$ кг. Тела A движется со скоростью $v = 2$ м/с, колесо D катится без скольжения.

Решение. Для определения количества движения каждого тела применим формулу $\overline{Q} = M\overline{v}_C$, а для определения количества движения системы тел формулу $\overline{Q} = \sum_{k=1}^{n} m\overline{v}_k = M\overline{v}_C$. Тело A движется поступательно, поэтому $\overline{Q}_\text{A} = m_A\overline{v}$, т.е. $Q_A = 4$ кгм/с, и направление $\overline{Q}_\text{A}$ совпадает с $\overline{v}$. Центр масс блока B неподвижен, следовательно, $Q_B = 0$. Мгновенный центр скоростей колеса D находится в точке P, поэтому скорость его центра масс точки C_2 равна $v_{C2} = v/2$, количество движения $Q_D = m_D v_{C2} = 4$ кгм/с и вектор Q_D направлен горизонтально влево.

Количество движения системы равно

$\overline{Q} = \overline{Q}_\text{A} + \overline{Q}_B + \overline{Q}_D = \overline{Q}_\text{A} + \overline{Q}_D$.

Решив это уравнение графически (рис. 7.2, б), найдем, что $Q = 4\sqrt{2}$ кгм/с.

Теорема об изменении количества движения системы

Для механической системы, состоящей из n материальных точек, запишем дифференциальные уравнения движения в векторной форме:

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{d\overline{v}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^e + \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^i, \text{ k=1, 2, } n,$$

где $\overline{F}_k^e$ и $\overline{F}_k^i$ – равнодействующие приложенных к точке внешних и внутренних сил соответственно.

Так как масса каждой точки постоянна, внесем ее под знак производной, после чего просуммируем все эти n уравнений: $\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n}(m_k\overline{v}_k) = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^e + \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^i$. Поскольку операции суммирования и дифференцирования переместимы, а главный вектор внутренних сил равен нулю ($\sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^i = 0$), мы имеем $\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n}(m_k\overline{v}_k) = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^e$. По определению, количество движения системы равно $\overline{Q} = \sum_{k=1}^{n} m\overline{v}_k$ и мы получаем теорему об изменении количества движения системы в дифференциальной форме:

$$\frac{d\overline{Q}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^e, \qquad (7.5)$$

т.е. *производная по времени от количества движения системы материальных точек равна главному вектору внешних сил, действующих на систему*.

Отсюда следует, что *внутренние силы не влияют на изменение количества движения системы*.

Эту же формулу можно переписать иначе:

$$d\overline{Q} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^e dt = \sum_{k=1}^{n} d\overline{S}_k^e, \qquad (7.6)$$

что представляет вторую дифференциальную форму теоремы: *дифференциал количества движения системы количества движения системы равен векторной сумме элементарных импульсов действующих на систему внешних сил.*

После интегрирования последнего равенства в пределах от t_0 до t_1 получим теорему об изменении количества движения системы в интегральной форме:

$$\overline{Q}_1 - \overline{Q}_0 = \sum_{k=1}^{n} \overline{S}_k^e, \qquad (7.7)$$

т.е. изменение количества движения системы за промежуток времени $\Delta t = \mathrm{t}_0 - \mathrm{t}_1$ равно векторной сумме подействовавших на систему за это же время внешних импульсов.

Спроецировав формулы (7.5) и (7.7) на оси прямоугольной системы координат, получим запись теоремы в координатном виде в дифференциальной форме:

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}^e, \quad \frac{dQ_y}{dt} = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}^e, \quad \frac{dQ_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}^e \qquad (7.8)$$

и в интегральной форме:

$$Q_{1x} - Q_{0x} = \sum_{k=1}^{n} S_{kx}^e, \quad Q_{1y} - Q_{0y} = \sum_{k=1}^{n} S_{ky}^e, \quad Q_{1z} - Q_{0z} = \sum_{k=1}^{n} S_{kz}^e. \qquad (7.9)$$

Если главный вектор внешних сил равен нулю, т.е. $\sum_{k=1}^{n} F_{kx}^{e} = 0$, тогда $dQ/dt = 0$ и, следовательно, $\overline{Q} = const = \overline{Q}_0$, т.е. *при равенстве нулю главного вектора внешних сил, действующих на систему, количество движения последней остается неизменным*. Это утверждение носит название *закона сохранения количества движения*.

Если одна из проекций главного вектора внешних сил равна нулю, то неизменной остается соответствующая проекция количества движения, например, если $\sum_{k=1}^{n} F_{kx}^{e} = 0$, то $\frac{dQ_x}{dt} = 0$ и $Q_x = const = Q_{0x}$.

Примеры выполнения закона сохранения количества движения механической системы часто встречаются в природе и технике. Так, если человек переходит с кормы на нос первоначально неподвижной лодки, то между ним и лодкой возникают внутренние силы взаимодействия, за счет которых человеку и лодке сообщаются соответствующие количества движений, сумма которых равна нулю. Поэтому во время перемещения человека относительно лодки последняя будет двигаться в направлении, противоположном движению человека. Но как только человек остановится, прекратится и движение лодки, система снова станет неподвижной.

Принцип реактивного движения также основан на законе сохранения количества движения. Действительно, если рассматривать ракету и вылетающие из нее газы как одну систему, то силы взаимодействия газов и корпуса ракеты являются внутренними и не могут изменить общего количества движения системы. Поэтому при вылете газов корпус ракеты должен двигаться в противоположном направлении со скоростью, обеспечивающей равенство нулю общего количества движения системы *ракета – газы*.

Задача 7.4. На Железнодорожной платформе, свободно стоящей на рельсах, установлена лебедка A с барабаном радиусом r (рис.7.3). Лебедка предназначена для перемещения по платформе груза B массой m_1. Масса платформы с лебедкой m_2. При включении лебедки барабан вращается по закону $\omega = f(t)$. В начальный момент система неподвижна. Пренебрегая трением, найти закон изменения скорости платформы после включения лебедки.

Решение. Чтобы исключить неизвестные силы взаимодействия между лебедкой и платформой, лебедкой и грузом, грузом и платформой, рассмотрим платформу, лебедку и груз как единую механическую систему. Тогда все внешние силы, действующие на эту систему (силы тяжести $P = m_1 g$, $Q = m_2 g$ и реакции N_1, N_2), будут вертикальными. Проведем ось x перпендикулярно им и запишем теорему об изменении количества движения системы в проекции на эту ось: $\frac{dQ_x}{dt} = \sum F_{kx} = 0$. Таким образом, мы имеем случай сохранения проекции количества движения системы: $Q_x = const = Q_{x0}$, поскольку в начальный момент система неподвижна, $Q_{x0} = 0$, и решение задачи сводится к тому, чтобы найти количество движения в момент времени $t > 0$ и приравнять полученное выражение нулю. Обозначим скорость тележки через v_1 и направим ее в сторону положительного направления оси x. Скорость груза B относительно платформы обозначим v_2; при этом $v_2 = \omega r$. Абсолютная скорость груза равна $v_s = v_1 + v_2 = v_1 + \omega r$. Тогда $Q_x = m_2 v_1 + m_1(v_1 + \omega r) = 0$, откуда $v_1 = -\frac{m_1 \omega r}{m_1 + m_2}$. Знак минус показывает, что платформа будет перемещаться в сторону, противоположную относительному движению груза.

Теорема Эйлера

Дифференциальная форма теоремы об изменении количества движения материальной системы имеет важные и интересные приложения в механике сплошной среды. Рассмотрим одно, самое простое, но очень интересное приложение.

Пусть некоторая сплошная среда (жидкость, газ) движется внутри трубы переменного сечения. Выделим часть трубы объемом ω (рис. 7.4). Будем считать, что этот объем ограничен боковой поверхностью трубы и двумя ее поперечными сечениями σ_1 и σ_2, причем σ_1 и σ_2 означают одновременно и площади поперечных сечений (рис. 7.4). Обозначим через v_1, v_2 и v средние скорости частиц среды, протекающих соответственно через сечения σ_1 и σ_2 и некоторое среднее сечение σ. Тогда в единицу времени через сечение σ_1 будет протекать масса жидкости, равная $\rho_1\sigma_1 v_1$, а через сечения σ_2 и σ – массы $\rho_2\sigma_2 v_2$ и $\rho\sigma v$, где ρ_1, ρ_2 и ρ - плотность среды в соответствующих сечениях.

Будем считать, что движение среды установившееся. Это означает, что скорости отдельных частиц среды и ее плотность в каждом сечении не изменяются с течением времени t. В этом предположении (оно является основным) через каждое сечение в единицу времени будут протекать разные количества массы среды, т.е.

$$M_c = \rho_1\sigma_1 v_1 = \rho_2\sigma_2 v_2 = \rho\sigma v,$$

где через M_c обозначена *секундная масса – масса среды, протекающей через любое сечение трубы в единицу времени*. Размерность секундной массы в системе СИ равна кг·с$^{-1}$.

Перейдем теперь к вычислению изменения количества движения среды, заполняющей объем ω. Пусть в момент времени t рассматриваемая среда занимала объем ω, заключенный между сечениями σ_1 и σ_2, а в момент времени $t + dt$ эта же масса среды занимает объем, ограниченный сечениями σ'_1 и σ'_2 (рис. 7.4). Тогда изменение количества движения рассматриваемой массы среды произойдет только за счет потери количества движения в объеме между сечениями σ_1 и σ'_1 и возрастания количества движения в объеме между сечениями σ_2 и σ'_2.

Так как при установившемся движении в единицу времени через сечения σ_1 и σ_2 проходят одинаковые массы, равные M_c, то за время dt через эти сечения пройдут массы $M_c dt$. Их количества движения будут $M_c dt\overline{v}_1$ и $M_c dt\overline{v}_2$, а изменение количества движения $d\overline{Q}$ рассматриваемой массы среды за то же время определяется равенством $d\overline{Q} = M_c dt\overline{v}_2 - M_c dt\overline{v}_1$. Отсюда $\frac{d\overline{Q}}{dt} = M_c\overline{v}_2 - M_c\overline{v}_1$. В этом равенстве произведения $M_c\overline{v}_1$ и $M_c\overline{v}_2$ называются *секундными количествами движения среды* в сечениях σ_1 и σ_2.

Внешние силы, действующие на среду, можно разбить на две категории:

1) силы *массовые*, или *объемные*, т.е. такие, которые действуют на каждую частицу рассматриваемой среды независимо от того, находятся ли эти частицы внутри выделенного объема или на его поверхности;
2) силы *поверхностные*, действующие только на частицы, лежащие на поверхности объема.

К массовым силам относятся силы тяжести. Поверхностные силы – это силы давления стенок на среду, силы трения среды о стенки и т.п.

Обозначим через $\overline{F}_{\text{об}}$ главный вектор всех внешних объемных сил, а через $\overline{F}_{\text{пов}}$ – главный вектор всех внешних поверхностных сил. Тогда, применяя к рассматриваемой массе среды теорему об изменении количества движения материальной системы в ее дифференциальной форме, получим $\frac{d\overline{Q}}{dt} = \overline{F}_{\text{об}} - \overline{F}_{\text{пов}}$ или $\overline{F}_{\text{об}} + \overline{F}_{\text{пов}} + M_c\overline{v}_1 - M_c\overline{v}_2 = 0$.

Это равенство представляет теорему Эйлера, которую можно прочитать следующим образом: *сумма главных векторов объемных и поверхностных сил, а также секундных количеств движения среды, протекающей через два поперечных сечения трубы, равна нулю, если векторы секундных количеств движения направить внутрь выделенного сечениями объема*.

Теорема о движении центра масс

В формулу теоремы об изменении количества движения (7.5) подставим выражение количества движения системы (7.4), где M – масса системы, а v_C - скорость ее центра масс. В результате получим формулу *теоремы о движении центра масс:* $\frac{d}{dt}(M\overline{v}_C) = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^e$. Так как масса системы постоянна, то окончательно

$$M\frac{d\overline{v}_C}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^e \text{ или } M\overline{a}_C = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^e. \qquad (7.10)$$

По внешнему виду это уравнение совпадает с дифференциальным уравнением движения материальной точки, и поэтому теорема о движении центра масс формулируется следующим образом: *центр масс механической системы движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы и к которой приложены все внешние силы, действующие на систему.*

В проекциях на оси координат теорема запишется так:

$$M\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}^e,\ M\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}^e,\ M\ddot{z}_C = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}^e. \qquad (7.11)$$

Из этих формул следует, что движение центра масс зависит только от внешних сил, внутренними же силами изменить положение центра масс нельзя. Так, при отсутствии сил трения автомобиль не мог бы двигаться по горизонтальной дороге, потому что силы давления в цилиндрах двигателя являются внутренними и не влияют на движение центра масс, при отсутствии же сил трения между колесами и дорогой внешние силы – вес автомобиля и реакций дороги – вертикальны и сумма их проекций на горизонтальную ось равна нулю. Поэтому вначале неподвижный автомобиль будет буксовать на месте, а двигавшийся с определенной скоростью будет продолжать равномерное прямолинейное движение, что и встречается на практике, когда машина застревает в грязи или теряет управление, попадая на скользкий участок дороги. Движение автомобиля происходит за счет сил трения между его ведущими колесами и дорогой; эти силы препятствуют пробуксовыванию колес и «толкают» машину вперед.

Если главный вектор внешних сил равен нулю, т.е. $\sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^e = 0$, то скорость центра масс остается постоянной: $v_C = const$.

Если же одна из проекций главного вектора внешних сил равна нулю, то соответствующая проекция скорости центра масса остается постоянной. Например, если $\sum_{k=1}^{n} F_{kx}^e$, то $v_{Cx} = const$ и т.д. Эти положения носят название *закона сохранения движения центра масс.*

Теорема о движении центра масс всегда применяется при исследовании движения центра масс системы. Ее особенно удобно применять в тех случаях, когда выполняется закон сохранения движения центра масс.

Задача 7.5. Центр масс вала мотора смещен от оси вращения на величину $AB = b$. Масса вала m_1, а масса всех остальных частей мотора m_2. Определить, по какому закону будет двигаться мотор, поставленный на гладкую горизонтальную плоскость, когда вал вращается с постоянной угловой скоростью ω. Найти дополнительно, какое максимальное усилие будет испытывать болт D, если с его помощью неподвижно закрепить мотор.

Решение. Чтобы исключить силы, вращающие вал, сделав их внутренними, рассмотрим весь мотор свалом как одну систему.

- При незакрепленном моторе все действующие на него силы (силы тяжести $\overline{P}_1 = m_1\overline{g}$ и $\overline{P}_2 = m_2\overline{g}$ и реакция плоскости) будут вертикальными, здесь будет иметь место закон сохранения движения центра масс вдоль оси $0x$. Изображаем мотор в произвольном положении (рис. 7.5), считая начальным то положение, когда точки B и A лежат на одной вертикали (на оси Оy). Тогда в произвольном положении $\xi_A = x,\ \xi_B = x + bsin\varphi$. Отсюда, учитывая, что $\varphi = \omega t$, найдем координату центра масс x всей системы: $m_2x + m_1(x + bsin\omega t) = 0$, откуда $x = -\frac{m_1 b}{m_1+m_2}sin\omega t$. Следовательно, мотор будет совершать гармонические колебания с круговой частотой ω.

- Когда мотор закреплен, то по первому из уравнений (7.11) горизонтальная реакция R_x болта будет $R_x = M\ddot{x}_C$, $x_C = \frac{m_1 x_B + m_2 x_A}{m_1 + m_2}$.

В этом случае точка A неподвижна и $x_A = l\ (l = const)$, а $x_B = l + bsin\omega t$. В результате, дифференцируя выражение x_C и умножая его на M (здесь $M = m_1 + m_2$ – масса всей системы), находим $R_x = M\ddot{x}_C = m_1\ddot{x}_B = -m_1 b\omega^2 sin\omega t$.

Сила давления на болт равна по модулю $|R_x|$ и направлена в противоположную сторону; ее максимальное значение будет $m_1 h\omega^2$. Во избежание ударов мотора по болтам при его работе затяжка болтов Q должна быть такой, чтобы суммарная сила трения мотора о плоскость, на которой он установлен, т.е. fQ, была не меньше $m_1 h\omega^2$.

ЛЕКЦИЯ 8. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА СИСТЕМЫ (ТЕОРЕМА МОМЕНТОВ). КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ СИСТЕМЫ

Кинетический момент системы материальных точек относительно точки и относительно оси. Кинетический момент твердого тела. Теорема моментов. Закон сохранения кинетического момента.

Кинетическая энергия системы. Вычисление кинетической энергии твердого тела. Работа внутренних сил в твердом теле. Теорема об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной и интегральной формах.

Кинетический момент системы материальных точек

Кинетическим моментом системы материальных точек относительно центра О называется геометрическая сумма кинетических моментов всех точек системы относительно того же центра:

$$\overline{K}_0 = \sum_{k=1}^{n} \overline{k}_{k0} = \sum_{k=1}^{n} \overline{r}_k \times m_k \overline{v}_k. \qquad (8.1)$$

Кинетический момент системы $\overline{K}_0$ приложен к точке О, относительно которой он вычисляется.

Если спроецировать кинетический момент относительно центра О на оси координат, проходящие через этот центр, то получим проекции кинетического момента на эти оси (кинетические моменты системы относительно осей координат):

$$K_x = \sum_{k=1}^{n} k_{kx} = \sum_{k=1}^{n} m_k (y_k v_{zk} - z_k v_{yk}),$$
$$K_y = \sum_{k=1}^{n} k_{ky} = \sum_{k=1}^{n} m_k (z_k v_{xk} - x_k v_{zk}),$$
$$K_z = \sum_{k=1}^{n} k_{kz} = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k v_{yk} - y_k v_{xk}).$$

Определим кинетический момент тела относительно его неподвижной оси вращения z (рис.8.1). для этого разобьем тело на бесконечно большое количество элементов массой Δm_k и получим $K_z = \sum M_z(\Delta m_k \overline{v}_k) = \sum \overline{r}_k \Delta m_k v_k$. Так как $v_k = \omega r_k$, то $K_z = \sum r_k \Delta m_k \omega r_k = \omega \sum \Delta m_k r^2$. Как известно, входящая в данное выражение сумма равна моменту инерции тела относительно оси z: $I_z = \sum \Delta m_k r^2$. Тогда окончательно

$$K_z = I_z \omega. \qquad (8.2)$$

Следовательно, *кинетический момент твердого тела относительно оси вращения равен произведению момента инерции тела относительно данной оси на угловую скорость тела*.

В общем случае кинетический момент определяется теоремой, которую мы сформулируем без доказательства: *кинетический момент механической системы относительно неподвижного центра равен геометрической сумме момента относительно этого центра количества движения системы, условно приложенного в центре масс, и кинетического момента системы относительно центра масс в ее относительном движении по отношению к центру масс.*

Теорема об изменении кинетического момента системы материальных точек

Запишем для механической системы, состоящей из n материальных точек, дифференциальные уравнения движения в векторной форме:

$$m_k = \frac{d\overline{v}}{dt} = \overline{F}_k^e + \overline{F}_k^i,\ k=1,\ 2,\ \mathrm{n},$$

где $\overline{F}_k^e$ и $\overline{F}_k^i$ – равнодействующие приложенных к k-й точке внешних и внутренних сил соответственно.

Умножим левые и правые части этих равенств слева векторно на радиус-вектор каждой точки относительно неподвижного центра О:

$$\overline{r}_k \times m_k \frac{d\overline{v}}{dt} = \overline{r}_k \times \overline{F}_k^e + \overline{r}_k \times \overline{F}_k^i, \quad k=1,\ 2,\ \mathrm{n},$$

но $\frac{d}{dt}(\overline{r}_k \times \overline{v}_k) = \frac{d\overline{r}_k}{dt} \times \overline{v}_k + \overline{r}_k \times \frac{d\overline{v}}{dt} = \overline{v}_k \times \overline{v}_k + \overline{r}_k \times \frac{d\overline{v}}{dt} = \overline{r}_k \times \frac{d\overline{v}}{dt}$,

так как $\overline{v}_k \times \overline{v}_k = 0$ (как векторное произведение коллинеарных векторов). Постоянный множитель m_k можно внести под знак производной, следовательно,

$$\overline{r}_k \times m_k \frac{d\overline{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\overline{r}_k \times m_k \overline{v}_k) = \overline{r}_k \times \overline{F}_k^e + \overline{r}_k \times \overline{F}_k^i, \qquad k=1,\ 2,\ \mathrm{n}.$$

Сложим все эти n уравнений:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dt}(\overline{r}_k \times m_k \overline{v}_k) = \sum_{k=1}^{n} \overline{r}_k \times \overline{F}_k^e + \sum_{k=1}^{n} \overline{r}_k \times \overline{F}_k^i, \qquad k=1,\ 2,\ \mathrm{n}.$$

Операции суммирования и дифференцирования переместимы, и поэтому

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dt}(\overline{r}_k \times m_k \overline{v}_k) = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{n} (\overline{r}_k \times m_k \overline{v}_k) = \frac{dK_0}{dt},$$

где K_0 – кинетический момент относительно неподвижного центра О.

По свойству внутренних сил их главный момент равен нулю, т.е. $\overline{r}_k \times \overline{F}_k^i = 0$. Кроме того, $\sum_{k=1}^{n} \overline{r}_k \times \overline{F}_k^e = \sum_{k=1}^{n} \overline{M}_0 \left(\overline{F}_k^e\right)$ - главный момент внешних сил системы относительно точки О. поэтому окончательная запись теоремы об изменении кинетического момента системы принимает вид

$$\frac{dK_0}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \overline{M}_0 \left(\overline{F}_k^e\right), \qquad (8.3)$$

т.е. *производная по времени от кинетического момента системы материальных точек относительно неподвижного центра равна главному моменту внешних сил системы относительно того же центра*.

Спроецировав равенство (8.3) на неподвижные оси прямоугольной системы координат, получим запись теоремы об изменении кинетического момента в проекциях на эти оси:

$$\begin{aligned} \frac{dK_x}{dt} &= \sum_{k=1}^{n} M_x \left(\overline{F}_k^e\right), \\ \frac{dK_y}{dt} &= \sum_{k=1}^{n} M_y \left(\overline{F}_k^e\right), \\ \frac{dK_z}{dt} &= \sum_{k=1}^{n} M_z \left(\overline{F}_k^e\right). \end{aligned} \qquad (8.4)$$

Из формулы (8.4) следует, что *внутренние силы не виляют на изменение кинетического момента системы.* Поэтому применение теоремы для исследования движения механической системы позволяет исключить из рассмотрения внутренние силы.

Из уравнения (8.3) следует, что *если главный момент внешних сил относительно какого-нибудь неподвижного центра равен нулю, то кинетический момент относительно этого центра остается постоянным, т.е.* если $\sum_{k=1}^{n} \overline{M}_0 \left(\overline{F}_k^e\right) = \frac{dK_0}{dt} = 0$, то

$$K_0 = const. \qquad (8.5)$$

Если же сумма моментов внешних сил системы относительно какой-либо неподвижной оси равна нулю, то соответствующая проекция кинетического момента остается постоянной, т.е. если $\sum_{k=1}^{n} M_x \left(\overline{F}_k^e\right) = 0$, то

$$K_x = const. \qquad (8.6)$$

Утверждения (8.5) и (8.6) представляют собой *закон сохранения кинетического момента системы*.

Закон сохранения кинетического момента часто встречается в природе и используется в технических приложениях. Так, выполнение одного из элементов фигурного катания на коньках – вращение на месте с переменной угловой скоростью – основано на этом законе. Действительно, сумма моментов действующих на фигуристов внешних сил (веса и реакции льда) относительно оси вращения равна нулю, и кинетический момент фигуриста относительно этой оси остается постоянным, т.е. $K_z = I_z\omega = const$. Поэтому для увеличения угловой скорости ω фигурист прижимает руки к туловищу: момент инерции I_z уменьшается, а угловая скорость увеличивается. Если же фигурист хочет замедлить вращение, то он разводит руки в стороны; при этом I_z увеличивается, а ω уменьшается.

Задача 8.1. На барабан весом P и радиусом r (рис. 8.2) намотана нить с грузом A весом Q на конце. Пренебрегая весом нити, определить угловое ускорение барабана при вертикальном движении груза, если радиус инерции барабана относительно его оси равен ρ и на барабан действует постоянный момент сил трения $M_{\text{тр}}$.

Решение. Рассмотрим систему *барабан-груз*, тогда неизвестные силы натяжения нити будут внутренними. Воспользуемся теоремой моментов относительно оси *Ox*:

$$\frac{dK_{0x}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} M_{0x}\left(\overline{F}_k^e\right). \qquad (8.6, а)$$

Для данной системы $K_{0x} = K_{0x}^{\text{гр}} + K_{0x}^{\text{бар}}$. Груз движется поступательно и его скорость $v = \omega r$. Барабан вращается вокруг неподвижной оси и для него $I_{0x} = \frac{P}{g}\rho^2$. Тогда $K_{0x}^{\text{гр}} = \frac{Q}{g}vr$, $K_{0x}^{\text{бар}} = \frac{P}{g}\rho^2\omega$ и $K_{0x} = \frac{(Qr^2 + P\rho^2)}{g}\omega$.

Для моментов сил получим $\sum_{k=1}^{n} M_{0x}\left(\overline{F}_k^e\right) = Qr - M_{\text{тр}}$.

Подставляя все эти величины в равенство (8.6,а), найдем $\frac{(Qr^2+P\rho^2)}{g}\frac{d\omega}{dt} = Qr - M_{\text{тр}}$, отсюда $\varepsilon = \frac{(Qr - M_{\text{тр}})g}{Qr^2 + P\rho^2}$.

Задача 8.2. Твердое тело приводится во вращение вокруг неподвижной вертикальной оси из состояния покоя парой сил с постоянным моментом М (Н·см). при этом возникает момент сил сопротивления M_1, пропорциональный угловой скорости тела: $M_1 = \alpha \cdot \omega$ (Н·см). Момент инерции тела относительно оси вращения равен 1 кг·см^2. Найти уравнение движения тела.

Решение. Для решения задачи применим дифференциальное уравнение $I_z\ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} M_z\left(\overline{F}_k^e\right)$. Сила тяжести $\overline{P}$ и реакции $\overline{R}_1$ и $\overline{R}_2$ не создают моментов относительно оси z, т.к. первая параллельная оси, а две другие ее пересекают. Следовательно, $I\frac{d\varphi}{dt} = M - \alpha \cdot \omega$. Разделим переменные ω, t и проинтегрируем: $\int I\frac{d\omega}{M - \alpha\cdot\omega} = \int dt$, $-\frac{I}{\alpha}\ln(M - \alpha\cdot\omega) = t + C_1$. Используя начальные условия $(t = 0, \omega_0 = 0)$, находим C_1: $C_1 = -\frac{I}{\alpha}\ln M$. Отсюда $-\frac{I}{\alpha}\ln(M - \alpha\omega) = t - \frac{I}{\alpha}\ln M$, или $\ln\left(\frac{M - \alpha\omega}{M}\right) = -\frac{t\alpha}{I}$. Потенцируя и разрешая относительно ω, находим закон изменения угловой скорости:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha t/I}\right).$$

Кинетическая энергия системы материальных точек

Несмотря на то, что кинетический момент раскрывает дополнительные свойства движения механической системы по сравнению с ее количеством движения, даже совокупность этих динамических характеристик не может описать движения системы, происходящего за счет внутренних сил. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть следующий пример. Пусть два одинаковых тела, соединенных пружиной, покоятся на гладкой горизонтальной поверхности. Растянем пружину и отпустим грузы, не сообщая им начальной скорости. Под действием внутренних сил они начнут совершать прямолинейные колебания, такие, что скорости тел в каждый момент времени равны между собой и противоположно направлены. Общее количество движения системы и ее кинетический момент относительно любой неподвижной точки тождественно равны нулю, хотя система находится в движении; таким образом, в данном случае эти две величины никак не характеризуют движения системы. Поэтому в механике рассматривается еще одна мера механического движения, называемая кинетической энергией.

Кинетической энергией системы n материальных точек называется арифметическая сумма кинетических энергий всех точек системы:

$$T = \sum_{k=1}^{n} T_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k v_k^2}{2}. \qquad (8.7)$$

Кинетическая энергия механической системы равна нулю только в том случае, когда все точки системы неподвижны. В противном случае кинетическая энергия – величина заведомо положительная, отличная от нуля, независимо от того, какими силами вызвано движение точек системы. Однако, будучи величиной скалярной, кинетическая энергия не определяет направления движения, поэтому она (так же, как и количество движения, и кинетический момент) не является универсальной мерой движения механической системы.

Для твердого тела выражение для кинетической энергии зависит от характера его движения.

Поступательное движение. В этом случае скорости всех точек тела одинаковы, $v_k = v$ и поэтому *кинетическая энергия твердого тела при поступательном движении*

$$T = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k v_k^2}{2} = \frac{v^2}{2} \sum_{k=1}^{n} m_k = \frac{Mv^2}{2}, \qquad (8.8)$$

где $M = \sum_{k=1}^{n} m_k$ – масса тела.

Вращательное движение. Скорости точек тела определяются в этом случае выражением $v_k = \omega h_k$, где h_k – расстояние от точки тела до оси вращения, а ω – угловая скорость тела, одинаковая для всех его точек. Тогда

$$T = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k v_k^2}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k \omega^2 h_k^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{k=1}^{n} m_k h_k^2.$$

По определению, $\sum_{k=1}^{n} m_k h_k^2 = I$ является моментом инерции тела относительно оси вращения (например, оси z), т.е. $\sum_{k=1}^{n} m_k h_{kz}^2 = I_z$ и окончательно *кинетическая энергия твердого тела при его вращательном движении*

$$T = \frac{I_z \omega^2}{2}. \qquad (8.9)$$

Плоскопараллельное движение. Пусть плоская фигура движется в плоскости Oxy (рис. 8.3) и ее мгновенный центр скоростей находится в точке P. Скорость каждой точки фигуры определяется как скорость при вращении точки вокруг мгновенного центра скоростей: $v_k = \omega(M_k P) - \omega \rho_k$, где ω – угловая скорость фигуры, одинаковая для всех ее точек, а ρ_k – расстояние от k-й точки до мгновенного центра скоростей. Таким образом, выражение для кинетической энергии принимает вид

$$T = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k v_k^2}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k \omega^2 \rho_k^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{k=1}^{n} m_k \rho_k^2.$$

Полученная сумма $\sum_{k=1}^{n} m_k \rho_k^2$ представляет собой момент инерции фигуры относительно оси $z_{\text{р}}$, перпендикулярной плоскости движения фигуры и проходящей через мгновенный центр скоростей. Обозначим его через $I_{zP} = \sum_{k=1}^{n} m_k \rho_k^2$ и окончательно получим

$$T = \frac{I_{zP} \omega^2}{2}. \qquad (8.10)$$

Этой формулой удобно пользоваться в том случае, когда в процессе движения момент инерции I_{zP} остается величиной постоянной или же его вычисление для каждого положения фигуры не вызывает затруднения. Однако чаще всего это условие не соблюдается, и для определения кинетической энергии пользуются другим выражением. Для его вывода выразим момент инерции I_{zP} через момент инерции относительно центральной оси z_{c}, параллельной оси z_{p} и проходящей через центр масс С:

$$I_{zP} = I_{z\text{C}} + M(CP)^2 = I_{z\text{C}} + M\rho_C^2,$$

здесь M – масса тела. Подставим это значение в формулу кинетической энергии:

$T = \frac{I_{zP}\omega^2}{2} = \frac{I_{z\text{C}}\omega^2}{2} + \frac{M\rho_C^2\omega^2}{2}$. Так как $\omega\rho_{\text{C}} = v_{\text{C}}$ – скорость центра масс тела, то

$$T = \frac{Mv_C^2}{2} + \frac{I_{z\text{C}}\omega^2}{2}, \qquad (8.11)$$

т.е. *кинетическая энергия твердого тела при плоскопараллельном движении равна сумме кинетической энергии центра масс, в котором условно сосредоточена масса всего тела, и кинетической энергии тела при его вращении вокруг центральной оси, перпендикулярной плоскости движения.*

Задача 8.3. Вычислить кинетическую энергию однородного круглого диска массой m, катящегося без скольжения по прямолинейному рельсу, если скорость центра диска равна v_{C}.

Решение. Диск совершает плоскопараллельное движение, и поэтому $T = \frac{Mv_C^2}{2} + \frac{I_{z\text{C}}\omega^2}{2}$. Для однородного круглого диска $I_{z\text{C}} = \frac{1}{2}mr^2$ точка касания с рельсом является мгновенным центром скоростей, так что $\omega = \frac{v_{\text{C}}}{r}$, и окончательно $T = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{mr^2}{2}\frac{v_C^2}{r^2} = \frac{3}{4}mv_C^2$.

ЛЕКЦИЯ 9. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ СИСТЕМЫ. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Теорема об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной и интегральной формах.

Понятие о силовом поле. Потенциальное силовое поле и силовая функция. Выражение проекций силы через силовую функцию. Поверхности равного потенциала. Работа силы на конечном перемещении точки. Потенциальная энергия. Закон сохранения механической энергии.

Теорема об изменении кинетической энергии

Запишем для механической системы, состоящей из n материальных точек, дифференциальные уравнения движения в векторной форме:

$$m_k\overline{a}_k = m_k\frac{d\overline{v}_k}{dt} = \overline{F}_k^e + \overline{F}_k^i, \qquad k=1,\ 2,\ \text{n}$$

где $\overline{F}_k^e$ и $\overline{F}_k^i$ - соответственно равнодействующие внешних и внутренних сил системы, приложенных к k-й точке. Умножим скалярно каждое из этих уравнений на элементарное перемещение соответствующей точки:

$$m_k\overline{a}_k = m_k\frac{d\overline{v}_k}{dt}d\overline{r}_k = \overline{F}_k^e \cdot d\overline{r}_k + \overline{F}_k^i \cdot d\overline{r}_k,$$

и преобразуем левую часть полученного равенства:

$$m_k\frac{d\overline{v}_k}{dt} \cdot d\overline{r}_k = m_k\frac{d\overline{v}_k}{dt}\overline{v}_k dt = m_k\overline{v}_k \cdot d\overline{v}_k.$$

Учитывая, что $m_k\overline{v}_k \cdot d\overline{v}_k = d\left(\frac{m_k\overline{v}_k^2}{2}\right) = dT_k$, где $T_k = \frac{m_k v_k^2}{2}$ – кинетическая энергия k-й точки, а $\overline{F}_k^e \cdot d\overline{r}_k = dA_k^e$ и $\overline{F}_k^i \cdot d\overline{r}_k = dA_k^i$ соответственно элементарные работы равнодействующих внешних и внутренних сил, приложенных к k-й точке, получаем $dT_k = dA_k^e + dA_k^i$, k=1, 2, …, n. Сложим эти равенства: $\sum_{k=1}^n dT_k = \sum_{k=1}^n dA_k^e + \sum_{k=1}^n dA_k^i$, k=1, 2, …, n.

Так как операции суммирования и дифференцирования переместимы, то $\sum_{k=1}^{n} dT_k = d\sum_{k=1}^{n} T_k = dT$, где $T = \sum_{k=1}^{n} dT_k$ – кинетическая энергия системы. Итак, окончательно теорема об изменении кинетической энергии системы материальных точек запишется в виде

$$dT = \sum_{k=1}^{n} dA_k^e + \sum_{k=1}^{n} dA_k^i, \qquad (9.1)$$

т.е. *дифференциал кинетической энергии системы равен сумме элементарных работ всех действующих на систему внешних и внутренних сил*.

Если механическая система является неизменяемой или состоит из твердых тел, соединенных идеальными связями, то сумма работ внутренних сил равна нулю и в правой части формулы теоремы остается только сумма элементарных работ внешних сил, т.е. в этом случае $dT = \sum_{k=1}^{n} dA_k^e$. Разделим уравнение (9.1) на элементарный отрезок времени dt: $\frac{dT}{dt} = \sum_{k=1}^{n}\frac{dA_k^e}{dt} + \sum_{k=1}^{n}\frac{dA_k^i}{dt}$, но так как $\sum_{k=1}^{n}\frac{dA_k^e}{dt} = N_k^e$ – мощность внешней силы $\overline{F}_k^e$, $\sum_{k=1}^{n}\frac{dA_k^i}{dt} = N_k^i$ - мощность внутренней силы $\overline{F}_k^i$, то мы получаем вторую форму записи теоремы об изменении кинетической энергии системы:

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{k=1}^{n}\frac{dA_k^e}{dt} + \sum_{k=1}^{n}\frac{dA_k^i}{dt}, \quad (9.2)$$

которая читается так: *производная по времени от кинетической энергии системы материальных точек равна сумме мощностей всех внешних и внутренних сил, действующих на систему.* Обе формы теоремы являются дифференциальными.

Проинтегрируем обе части формулы (9.2) от начального положения системы A до конечного положения B, в которых кинетическая энергия системы соответственно равна T_0 и T_1:

$$\int_{T_0}^{T_1} dT = \int_A^B \sum_{k=1}^{n} dA_k^e + \int_A^B \sum_{k=1}^{n} dA_k^i = \sum_{k=1}^{n}\int_A^B dA_k^e + \sum_{k=1}^{n}\int_A^B dA_k^i$$

или

$$T_1 - T_0 = \sum_{k=1}^{n}\frac{dA_k^e}{dt} + \sum_{k=1}^{n}\frac{dA_k^i}{dt}, \qquad (9.3)$$

где $A_k^e = \int_A^B dA_k^e$ и $A_k^i = \int_A^B dA_k^i$ соответственно работы внешних и внутренних сил, приложенных к k-й точке системы, на ее перемещении из A в B. Выражение (9.3) представляет собой запись теоремы об изменении кинетической энергии системы в интегральной форме: *приращение кинетической энергии системы на ее конечном перемещении равно сумме работ внешних и внутренних сил на этом перемещении.* Для неизменяемой системы $\sum A_k^i = 0$ и поэтому для нее $T_1 - T_0 = \sum_{k=1}^{n}\frac{dA_k^e}{dt}$.

Как показывают формулы (9.1)- (9.3), в отличие от предыдущих общих теорем динамики в теорему об изменении кинетической энергии системы в общем случае входят внутренние силы. Таким образом, непосредственно за счет внутренних сил нельзя изменить ни количество движения системы, ни ее кинетический момент, но можно изменить ее кинетическую энергию.

Задача 9.1. К барабану ворота радиусом r_1 и массой m_1 приложен постоянный вращающий момент *M*. К концу троса, намотанного на барабан, прикреплена ось *C* колеса, масса которого равна m_2. Колесо катится без скольжения вверх по наклонной плоскости, образующей угол α с горизонталью (рис. 9.1). Какую угловую скорость приобретет барабан, сделав n оборотов? Барабан и колесо считать однородными круглыми цилиндрами. В начальный момент система находилась в покое. Массой троса и трением в шарнирах пренебречь.

Решение. Условием задачи заданы силы, действующие на систему ($\overline{P}_1 = m_1\overline{g}$, $\overline{P}_2 = m_2\overline{g}$) входящих в нее тел, и конечное перемещение системы (угол поворота барабана

$\varphi = 2\pi n$), требуется же найти скорость в конце перемещения. Поэтому для решения задачи применим теорему об изменении кинетической энергии в интегральной форме:

$$T_1 - T_0 = \sum_{k=1}^{n} \frac{dA_k^e}{dt} + \sum_{k=1}^{n} \frac{dA_k^i}{dt}.$$

Изобразим систему в начальном и конечном положениях вместе с приложенными на нее внешними силами $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{R}, \overline{N}, \overline{F}$ и моментом M. Внутренние силы не показываем, так как система состоит из твердых тел, соединенных идеальными связями и $\sum A_k^i = 0$.

В начальном положении система неподвижна, следовательно, $T_0 = 0$. После n поворотов барабан приобрел угловую скорость ω_1, скорость центра колеса будет равна $v_1 = \omega_1 r_1$, а угловая скорость центра колеса $\omega_2 = v_2/r_1 = \omega_1 r_1/r_2$, ибо точка контакта колеса с наклонной плоскостью является мгновенным центром скоростей колеса. Барабан вращается вокруг неподвижной оси О, а колесо совершает плоскопараллельное движение, и поэтому кинетическая энергия системы T_1после n оборотов барабана равна

$$T_1 = T_{\text{бар}} - T_{\text{кол}} = \frac{I_0\omega_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{I_C\omega_2^2}{2}.$$

По условию задачи моменты инерции барабана и колеса равны соответственно $I_0 = \frac{1}{2}Mr_1^2$, $I_C = \frac{1}{2}mr_2^2$ и поэтому

$$T_1 = \frac{m_1 r_1^2}{4}\omega_1^2 + \frac{m_2 r_1^2}{2}\omega_1^2 + \frac{m_2 r_2^2 r_1^2}{4r_2^2}\omega_1^2 = \frac{r_1^2}{4}\omega_1^2(m_1 + 3m_2).$$

При повороте барабана на угол $\varphi = 2\pi n$ центр колеса переместится вдольнаклонной плоскости на расстояние $l = \varphi r_1 = 2\pi n r_1$, т.е. поднимется на высоту $h = l sin\alpha = 2\pi n r_1 sin\alpha$. Определим работу внешних сил на этом конечном перемещении:

$$\sum_{k=1}^{n} A_k^e = A_M + A_{P_2} = M\varphi - P_2 h = 2\pi n(M - m_2 g r_1 sin\alpha).$$

Работы сил $\overline{P}_1$ и $\overline{R}$ равны нулю, так как они приложены в неподвижной точке О. работы сил $\overline{N}$ и $\overline{F}$ равны нулю, так как они приложены в мгновенном центре скоростей колеса. Подставим полученные значения T и $\sum_{k=1}^{n} A_k^e$ в формулу теоремы:

$\frac{r_1^2}{4}\omega_1^2(m_1 + 3m_2) = 2\pi n(M - m_2 g r_2 sin\alpha)$, и определим ω_1: $\omega_1 = \frac{2}{r_1}\sqrt{2\pi n \frac{M - m_2 g r_2 sin\alpha}{m_1 + 3m_2}}$.

Потенциальное силовое поле. Потенциальные силы

В самом общем случае сила, приложенная к материальной точке, является функцией ее координат, скорости и времени. Если сила зависит только от координат точки ее приложения (и, может быть, еще от времени), то такая сила называется *позиционной*. Область пространства, в которой на помещенную туда материальную точку действует позиционная сила, являющаяся однозначной, конечной и дифференцируемой функцией координат этой точки и времени, называется *силовым полем*. Поле называется *стационарным*, сели сила явно не зависит от времени; в противном случае поле называется *нестационарным*.

Работа силы на конечном перемещении точки ее приложения в общем случае зависит от траектории этой точки. Однако практически во всех рассмотренных нами ранее примерах работа зависит лишь от начального и конечного положений точки приложения силы, а это означает, что существует обширный класс сил, обладающих данным свойством. Поскольку процесс вычисления работы таких сил на конечных перемещениях точек их приложения значительно упрощается, желательно иметь метод их определения, для получения которого введем ряд новых понятий.

Определим условия существования силовой функции. Полный дифференциал функции $U(x, y, z)$, согласно его математическому определению, равен

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}yx + \frac{\partial U}{\partial z}dz.$$

С другой стороны, по определению функции

$$dU = F_x dx + F_y dy + F_z dz.$$

Вычитая из последнего равенства предыдущее, получаем

$$\left(F_x - \frac{\partial U}{\partial x}\right) dx + \left(F_y - \frac{\partial U}{\partial y}\right) dy + \left(F_z - \frac{\partial U}{\partial z}\right) dz = 0.$$

Ввиду произвольности дифференциалов координат последнее равенство выполняется тождественно только в том случае, когда все коэффициенты перед dx, dy, dz равны нулю, т.е. когда

$$F_x - \frac{\partial U}{\partial x} = 0,\ F_y - \frac{\partial U}{\partial y} = 0,\ F_z - \frac{\partial U}{\partial z} = 0$$

или

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x},\ F_y = \frac{\partial U}{\partial y},\ F_z = \frac{\partial U}{\partial z}. \qquad (9.4)$$

Последние соотношения служат вторым определением силовой функции: это функция координат точки, частные производные по которой по координатам равны проекциям силы на соответствующие координатные оси. Взяв частные производные от правых и левых частей равенств (9.4), получим $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x}$ и т.д. По свойству смешанных частных производных $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$ и т.д.

Отсюда окончательно получим условия существования потенциальной функции силы

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x},\ \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x},\ \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}. \qquad (9.5)$$

Таким образом, если выполняется условие (9.5), то силовое поле является потенциальным и полная работа силы F на перемещении точки ее приложения из положения M_0 в положение M_1 равна

$$A = \int_{M_0}^{M_1} dA = \int_{M_0}^{M_1} dU = U(x,y,z) - U(x_0,y_0,z_0) = U - U_0. \qquad (9.6)$$

Следовательно, при *перемещении точки в потенциальном поле полная работа приложенной к ней силы равна разности значений силовой функции в конечной и начальной точках и не зависит от формы траектории, по которой перемещение совершается*. Это справедливо, если силовая функция однозначна, но в подавляющем большинстве задач условие однозначности выполняется.

Стационарное поле называется *потенциальным*, если существует функция $U(x,y,z)$, дифференциал которой равен элементарной работе силы поля F, т.е.

$$dU = dA = \overline{F} d\overline{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \qquad (9.7)$$

Функция U называется *потенциальной* или *силовой функцией,* или просто *потенциалом силы*.

Силы, действующие на материальную точку в потенциальном поле, называются *потенциальными*. К ним относятся силы тяжести, линейная сила упругости, силы тяготения и т.д. Силы сопротивления и, в частности, силы сухого трения, потенциальными не являются.

Потенциальная энергия

Если силовое поле является потенциальным, то наряду с рассмотренной выше функцией U можно ввести другую скалярную функцию, называемую потенциальной энергией, и определяющую запас энергии материальной точки, помещенной в данном пункте силового поля.

Потенциальной энергией П точки называется скалярная величина, равная работе, которую производит сила, действующая на материальную точку, находящуюся в потенциальном силовом поле, при перемещении этой точки из положения M в положение M_0:

$$\Pi = A_{MM_0} = U_0 - U = C_0 - U. \qquad (9.8)$$

Постоянная $C_0 = U_0$ зависит от того, какая точка поля выбрана за «нулевую» для потенциальной энергии, и, следовательно, является одной и той же для всех точек поля. Не уменьшая общности, эту постоянную можно принять равной нулю. Тогда

$$\Pi = A_{MM_0} = -U. \qquad (9.9)$$

Из определений силовой функции и потенциальной энергии следует, что проекции силы поля и работа силы на конечном перемещении точки ее приложения могут быть выражены через потенциальную энергию. Действительно, используя уравнения (9.5) и (9.6), получаем

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}, F_y = \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}, F_z = \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}. \qquad (9.10)$$

Из уравнений (9.8) и (9.9) следует, что $dA = dU = -d\Pi$, а поэтому при перемещении точки из начального положения M_1 в конечное M_2 работа приложенной к ней силы равна

$$A = U_2 - U_1 = \Pi_2 - \Pi_1. \qquad (9.11)$$

Если в потенциальном силовом поле движется система материальных точек, то силовая функция и потенциальная энергия этой системы равны соответственно сумме силовых функций и сумме потенциальных энергий всех точек системы, т.е.

$$U = \sum U_k(x_k, y_k, z_k), \Pi = \sum \Pi_k(x_k, y_k, z_k). \qquad (9.12)$$

При этом $dU = \sum dU_k$, $d\Pi = \sum d\Pi_k$ и, следовательно,

$$dU = -d\Pi = \sum dA_k. \qquad (9.13)$$

Таким образом, *дифференциал силовой функции системы будет равен сумме элементарных работ всех действующих на систему сил*.

В качестве примера вычисления силовой функции и, следовательно, потенциальной энергии определим силовую функцию однородного поля силы тяжести. Если ось Oz направить вертикально вверх, то проекции силы тяжести на оси координат будут $P_x = P_y = 0$, $P_z = -mg$. Условия существования силовой функции выполняются, так как:

$$\frac{\partial P_x}{\partial y} = \frac{\partial P_y}{\partial x}, \frac{\partial P_x}{\partial z} = \frac{\partial P_z}{\partial x}, \frac{\partial P_y}{\partial z} = \frac{\partial P_z}{\partial y} = 0.$$

Определим эту функцию: $dU = dA = P_x dx + P_y dy - P_z dz = -mgdz$, откуда $U = -\int mgdx = -mgz + C$. Потенциальная же энергия силы тяжести запишется в виде $\Pi = -U + C_1 = mgz + C_1$.

Закон сохранения механической энергии

Теорему об изменении кинетической энергии системы материальных точек можно записать в виде

$$dT = \sum dA_k^e + \sum dA_k^i = \sum dA_k.$$

Если все внешние и внутренние силы, действующие на систему, являются потенциальными, то $\sum dA_k = dU = -d\Pi$, где $d\Pi$ – дифференциал потенциальной энергии внутренних и внешних сил системы. Поэтому $dT = -d\Pi$. Проинтегрировав обе части этого равенства в пределах, соответствующих перемещению системы из некоторого начального положения, в котором кинетическая и потенциальная энергии системы имеют значения T_0 и Π_0, в некоторое конечное положение, в котором кинетическая и потенциальная энергии равны значения T_1 и Π_1, получим $T_1 - T_0 = -\Pi_1 + \Pi_0$ или $T_1 + \Pi_1 = T_0 + \Pi_0 = const$. Сумма кинетической и потенциальной энергий материальной системы называется ее *механической энергией* и обозначается E., Следовательно, *при движении системы материальных точек в потенциальном силовом поле ее механическая энергия остается неизменной*, т.е.

$$E = T + \Pi = const, \qquad (9.14)$$

это положение выражает *закон сохранения механической энергии*.

Механические системы, для которых выполняется закон сохранения механической энергии, называются *консервативными*. Консервативным называют в этом случае и потенциальное силовое поле, в котором происходит движение системы, и силы. При наличии сил сопротивления движению часть механической энергии переходит в другие формы энергии (тепловую, химическую и т.д.). Происходит, как говорят, диссипация, т.е. рассеивание механической энергии, и поэтому данные силы называют диссипативными.

ЛЕКЦИЯ 10. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА (МЕТОД КИНЕТОСТАТИКИ)

Сила инерции материальной точки. Принцип Даламбера для материальной точки. Приведение сил инерции точек твердого тела к центру: главный вектор и главный момент сил инерции. Принцип Даламбера для механической системы.

Принцип Даламбера для материальной точки

Принцип Даламбера устанавливает единый подход к исследованию движения любой механической системы вне зависимости от характера налагаемых на это движение условий. При этом динамическим дифференциальным уравнениям движения придается вид уравнений равновесия.

Рассмотрим несвободную материальную точку *M*, движущуюся по кривой *AB* под действием активных сил, равнодействующая которых равна $\overline{F}$ (рис. 10.1). Обозначив через $\overline{N}$ силу реакции, с которой кривая *AB* действует на точку *M*, запишем основное уравнение динамики точки: $m\overline{a} = \overline{F} + \overline{N}$. Перенесем член $m\overline{a}$ в правую часть равенства $\overline{F} + \overline{N} + (-m\overline{a}) = 0$, и введем в рассмотрение вектор

$$\overline{\Phi} = -m\overline{a}, \qquad (10.1)$$

равный произведению массы точки на ее ускорение и направленный противоположно ускорению точки. Этот вектор называется *даламберовой силой инерции*, или просто *силой инерции* материальной точки. Тогда основное уравнение динамики примет вид:

$$\overline{F} + \overline{N} + \overline{\Phi} = 0. \qquad (10.2)$$

Полученное уравнение выражает условие равновесия указанной системы сил, что и составляет принцип Даламбера для материальной точки.

В каждый момент движения материальной точки действующие на нее активные силы, силы реакций связей и условно приложенная к точке сила инерции образуют уравновешенную систему сил.

Прикладывая силу инерции к движущейся точке, мы можем говорить лишь о об условном равновесии приложенных к ней сил. Однако такая трактовка динамического уравнения движения в некоторых случаях обеспечивает наиболее простое и удобное решение задач динамики (особенно первой), и поэтому принцип Даламбера широко применяется во многих прикладных дисциплинах.

Задача 10.1. Горизонтальная платформа, на которой лежит груз массой 8 кг, опускается вертикально вниз с ускорением 4,8 м/с^2. Найти силу давления груза на платформу во время их совместного спуска.

Решение. Рассмотрим движение груза. На него действует сила тяжести $Q = mg$ и реакция платформы N, равная по величине и противоположная по направлению силе давления груза на платформу. Поэтому, найдя реакцию $\overline{N}$, мы определим искомую силу. Приложим к грузу (рис. 10.2) силу инерции Φ, по модулю равную $\Phi = ma$ и направленную противоположно $\overline{a}$. Тогда система сил $\overline{Q}, \overline{N}, \overline{\Phi}$ является уравновешенной, и для нее можно записать условие равновесия: $\sum F_{kx} = Q - N - \Phi = 0$, откуда

$$N = Q - \Phi = m(g - a) = 8(9{,}8 - 4{,}8) = 40 \text{ Н}.$$

Мы видим, что при ускорении, направленном вниз, сила дваления груза на платформу меньше силы тяжести (78,4 Н) груза (если бы ускорение было направлено вверх, то сила давления была бы больше силы тяжести груза).

Задача 10.2. Груз M массой 0,5 кг, подвешенный на нити длиной 40 см к неподвижной точке О (рис. 10.3), представляет собой конический маятник, т.е. описывает окружность в горизонтальной плоскости, причем нить составляет с вертикалью угол 60^0. Найти скорость v груза и натяжение T нити.

Решение. Изобразим на схеме действующие на груз M силу тяжести $\overline{P} = m\overline{g}$ и реакцию нити $\overline{T}$ и рассмотрим движение груза M по окружности радиусом $AM = OMsin60^0$. Ускорение точки состоит из нормальной и касательной составляющих, поэтому представим и силу инерции в виде суммы двух составляющих: $\overline{\Phi} = -m\overline{a} = -m\overline{a_\tau} - m\overline{a_n} = \overline{\Phi_\tau} + \overline{\Phi_n}$, равных $\overline{\Phi_\tau} = m\frac{dv}{dt}$, $\overline{\Phi_n} = m\frac{v^2}{AM}$. Приложим к точке M эти силы, направив их в стороны противоположные соответствующим ускорениям (рис. 10.3). полученная сходящаяся система сил $(\overline{P}, \overline{T}, \overline{\Phi_\tau}, \overline{\Phi_n})$ уравновешена, и для нее выполняются уравнения равновесия. Составим эти уравнения, предварительно проведя оси координат $M\tau nb$: $\sum F_{kx} = -\overline{\Phi_\tau} = 0$, $\sum F_{kn} = Tcos30^0 - \Phi_n = 0$, $\sum F_{kb} = Tcos60^0 - P = 0$. Из первого уравнения получим $\Phi = m \cdot dv/dt = 0$, или $v = const$, т.е. при движении конического маятника по постоянной окружности его скорость постоянна. Из третьего уравнения находим $T = mg/cos60^0 = 9{,}8$ Н, тогда второе уравнение дает $\Phi_n = mv^2/AM = mgtg60^0$ или

$$v = \sqrt{g \cdot AM \cdot tg60^0} = \sqrt{9{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot 3} = 2{,}42 \text{ м/с}.$$

Принцип Даламбера для системы материальных точек

Рассмотрим теперь механическую систему, состоящую из n материальных точек. Запишем дифференциальные уравнения движения этой системы в векторной форме: $m_k\overline{a_k} = \overline{F_k} + \overline{N_k}$, ($k$=1, 2, …, n), где $\overline{F_k}$ – равнодействующая активных сил, приложенных к k-й точке, а $\overline{N_k}$ – равнодействующая реакции связей, наложенных на эту точку. Если ввести в рассмотрение силы инерции каждой точки $\overline{\Phi_k} = -m_k\overline{a_k}$, то эти уравнения примут вид

$$\overline{F_k} + \overline{N_k} + \overline{\Phi_k} = 0, \ (k=1, 2, \dots, n) \qquad (10.3)$$

Система уравнений (10.3) выражает принцип Даламбера для системы материальных точек: *если к каждой точке движущейся механической системы условно приложить соответствующую силу инерции, то в любой момент движения действующие на эту точку активные силы (внешние и внутренние), силы реакций связей (внешних и внутренних) и сила инерции образуют уравновешенную систему сил*.

Значение принципа Даламбера состоит в том, что при его применении уравнения движения точки и системы составляются в форме уравнений равновесия. Метод решения динамических задач с помощью принципа Даламбера называют методом *кинетостатики*.

Однако для решения задач применяют не сам принцип Даламбера, а следствия из него. Для их вывода представим равнодействующую сил, приложенных к k-й точке системы, в виде двух составляющих: равнодействующей внешних сил, приложенных к точке, и равнодействующей внутренних сил, приложенных к точке, т.е.

$$R_k = \overline{F_k} + \overline{N_k} = \overline{F_k^e} + \overline{N_k^i}.$$

Тогда система уравнений (10.3), выражающих принцип Даламбера, запишется в виде

$$\overline{F_k^e} + \overline{F_k^i} + \overline{\Phi_k} = 0, \ (k=1, 2, n) \qquad (10.4)$$

Для каждой материальной точки сумма моментов этих уравновешенных сил относительно любого центра О также равна нулю, т.е.

$$\overline{M_0}\left(\overline{F_k^e}\right) + \overline{M_0}\left(\overline{F_k^i}\right) + \overline{M_0}\left(\overline{\Phi_k}\right) = 0, \ (k=1, 2, n) \qquad (10.5)$$

Суммируя все уравнения системы (10.4) и системы (10.5), получаем

$$\sum \overline{F_k^e} + \sum \overline{F_k^i} + \sum \overline{\Phi_k} = 0,$$

$$\sum \overline{M_0}\left(\overline{F_k^e}\right) + \sum \overline{M_0}\left(\overline{F_k^i}\right) + \sum \overline{M_0}\left(\overline{\Phi_k}\right) = 0.$$

Но по свойству внутренних сил их главный вектор и главный момент равны нулю, $\sum \overline{F_k^e} = 0, \sum \overline{M_0}\left(\overline{F_k^e}\right) = 0$ и поэтому

$$\sum \overline{F_k^e} + \sum \overline{\Phi_k} = 0,$$

$$\sum \overline{M_0}\left(\overline{F_k^e}\right) + \sum \overline{M_0}\left(\overline{\Phi_k}\right) = 0, \qquad (10.6)$$

т.е. главный вектор и главный момент относительно любого центра приложенных к системе внешних сил и сил инерции всех ее точек равны нулю. Это и есть следствия из принципа Даламбера, которыми пользуются при решении задач.

Спроецировав уравнения (10.6) на оси координат, получим аналитические зависимости:

$$\begin{aligned} &\sum F_{kx}^e + \sum \Phi_{kx} = 0, && \sum M_{0x}\left(\overline{F_k^e}\right) + \sum M_{0x}\left(\overline{\Phi_k}\right) = 0, \\ &\sum F_{ky}^e + \sum \Phi_{ky} = 0, && \sum M_{0y}\left(\overline{F_k^e}\right) + \sum M_{0y}\left(\overline{\Phi_k}\right) = 0, \qquad (10.7) \\ &\sum F_{kz}^e + \sum \Phi_{kz} = 0, && \sum M_{0z}\left(\overline{F_k^e}\right) + \sum M_{0z}\left(\overline{\Phi_k}\right) = 0. \end{aligned}$$

При практическом использовании уравнений (10.6) или (10.7) чаще всего не прикладывают силы инерции к каждой точке системы с тем, чтобы затем найти их главный вектор и главный момент, а используют готовые выражения для главного вектора и главного момента сил инерции механической системы. Выведем эти выражения.

Главный вектор и главный момент сил инерции механической системы

Из первого уравнения (10.6) следует, что главный вектор сил инерции механической системы равен

$$\overline{R^\Phi} = \sum \overline{\Phi_k} = -\sum \overline{F_k^e},$$

а согласно теореме о движении центра масс системы главный вектор внешних сил системы равен

$$\sum \overline{F_k^e} = -M\overline{a_C}, \qquad (10.8)$$

т.е. главный вектор сил инерции механической системы равен массе системы, умноженной на ускорение ее центра масс, и направлен в сторону, противоположную этому ускорению.

Из второго уравнения (10.6) находим, что главный момент сил инерции относительно произвольного центра O равен

$$\overline{M_0^\Phi} = \sum \overline{M_0}\left(\overline{\Phi_k}\right) = -\sum \overline{M_0}\left(\overline{F_k^e}\right) = 0.$$

Но по теореме об изменении кинетического момента

$$\sum \overline{M_0}\left(\overline{F_k^e}\right) = \frac{d\overline{K_0}}{dt},$$

и поэтому

$$\overline{M_0^\Phi} = \sum \overline{M_0}\left(\overline{\Phi_k}\right) = -\frac{d\overline{K_0}}{dt}, \qquad (10.9)$$

т.е. главный момент сил инерции относительно точки O равен взятой с обратным знаком производной по времени от кинетического момента системы относительно того же центра.

Для твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси z, главный момент сил инерции относительно этой оси равен

$$M_z^\Phi = -\frac{dK_z}{dt} = \frac{d}{dt}(I_z\omega) = -I_z\frac{d\omega}{dt} = -I_z\varepsilon. \qquad (10.10)$$

С помощью принципа Даламбера просто и наглядно решаются задачи, в которых по заданному движению системы надо определить реакции наложенных на нее связей. При этом исключаются все неизвестные внутренние силы. При определении реакций внутренних связей систему следует расчленить так, чтобы искомые реакции стали внешними силами. Принцип дает возможность составить дифференциальные уравнения движения системы и определить ускорение движущихся тел.

Задача 10.3. Через блок массой m_3 перекинута гибкая нить, к концам которой прикреплены грузы M_1 массой m_1 и M_2 массой m_2 (рис. 10.4); $m_1 = 3m$, $m_2 = 6m$, $m_3 = 2m$. Найти ускорение грузов и реакцию оси блока, считая его однородным круглым диском.

Решение. Изобразим на схеме действующие на систему активные силы $\overline{P_1} = m_1\overline{g}$, $\overline{P_2} = m_2\overline{g}$, $\overline{P_3} = m_3\overline{g}$ и реакцию оси блока $\overline{X_0}$, $\overline{Y_0}$. Так как $P_2 > P_1$, ускорение груза M_2 направлено вниз, груза M_1 – вверх, а угловое ускорение блока – по ходу часовой стрелки. Приложим к системе силы инерции и главный момент сил инерции блока $\left(\overline{\Phi_1}, \overline{\Phi_2}, M_z^{\Phi}\right)$, модули которых соответственно равны $\Phi_1 = m_1 a_1 = m_1 a$, $\Phi_2 = m_2 a_2 = m_2 a$, $M_z^{\Phi} = I_z\varepsilon = m_3\frac{ra}{2}$. Чтобы найти ускорение, составим уравнение моментов полученной системы сил относительно точки О:

$$\sum \overline{M_0}\left(\overline{F_k}\right) = P_1 r + \Phi_1 r + M_z^{\Phi} + \Phi_2 r - P_2 r = 0$$

или $P_1 r + m_1 ar + \frac{m_3 r}{2}a + m_2 ar - P_2 r = 0$, откуда

$$a = g\frac{m_2 - m_1}{0{,}5m_3 + m_1 + m_2} = 0{,}3g.$$

Чтобы найти реакции оси балки, составим уравнения равновесия сил в проекции на оси x и y:

$$\sum F_{kx} = X_0 = 0, \sum F_{ky} = Y_0 + \Phi_2 - P_1 - \Phi_1 - P_2 - P_3 = 0.$$

Таким образом, реакция блока вертикальна и равна

$$Y_0 = N = P_1 + P_2 + P_3 + \Phi_1 - \Phi_2 = P_1 + P_2 + P_3 + (m_1 + -m_2)a = 10{,}1mg.$$

Определение динамических реакций подшипников твердого тела вокруг неподвижной оси

Пусть на тело, вращающееся вокруг оси AB (рис. 10.5) со скоростью ω, действует система сил $\left(\overline{F_1}, \overline{F_2}, \dots, \overline{F_n}\right)$, главный вектор которой равен $\overline{R} = \sum_{k=1}^{n}\overline{F_k}$, а главный момент относительно точки A равен $\overline{M_A} = \sum_{k=1}^{n}\overline{M_A}\left(\overline{F_k}\right)$. Так как вращение равномерно, проекция главного момента на ось вращения равна нулю, т.е. $M_z = \sum_{k=1}^{n} M_z\left(\overline{F_k}\right) = 0$ и, следовательно, $\overline{M_A}$ лежит в плоскости Axy. Определим реакции подшипника B и подпятника A.

Для этого мысленно отбросим связи, заменив их реакциями $(X_A, Y_A, Z_A, X_B, Y_B)$, приложим к каждой точке тела силу инерции $\overline{\Phi_k}$, ввиду равномерности вращения ($\varepsilon = 0$) равную $\Phi_k = m_k\omega^2 h_k$, и составим уравнения равновесия полученной системы сил:

$$\sum F_{kx} = X_A + X_B + R_x + \sum \Phi_{kx} = 0,$$
$$\sum F_{ky} = Y_A + Y_B + R_y + \sum \Phi_{ky} = 0,$$
$$\sum F_{kz} = Z_A + R_z = 0,$$
$$\sum M_x\left(\overline{F_k}\right) = -Y_B b + M_x - \sum \Phi_{ky} z_k = 0,$$
$$\sum M_y\left(\overline{F_k}\right) = X_B b + M_y - \sum \Phi_{kx} z_k = 0.$$

Так как $\Phi_{kx} = m_k\omega^2 h_k \cdot cos\alpha = m_k\omega^2 x_k$, $\Phi_{ky} = m_k\omega^2 h_k \cdot sin\alpha = m_k\omega^2 y_k$, то

$$\sum \Phi_{kx} = \sum m_k\omega^2 x_k = \omega^2\sum m_k x_k = \omega^2 M x_C,$$
$$\sum \Phi_{ky} = \sum m_k\omega^2 y_k = \omega^2\sum m_k y_k = \omega^2 M y_C,$$
$$\sum \Phi_{ky} z_k = \sum m_k\omega^2 y_k z_k = \omega^2\sum m_k y_k z_k = \omega^2 I_{yz},$$
$$\sum \Phi_{kx} z_k = \sum m_k\omega^2 x_k z_k = \omega^2\sum m_k x_k z_k = \omega^2 I_{xz},$$

где x_C, y_C – координаты центра масс тела, I_{yz}, I_{xz} – центробежные моменты инерции тела. Динамические реакции находятся из уравнений

$$X_A + X_B = -R_x - M\omega^2 x_C, Y_A + Y_B = -R_y - M\omega^2 y_C,$$

$$Z_A = -R_z, Y_B b = M_x - \omega^2 I_{yz}, X_B b = -M_y - \omega^2 I_{xz}. \qquad (10.11)$$

и будут отличаться от статических реакций, которые получаются из этих же уравнений при $\omega = 0$.

Для того, чтобы вращение не вызывало дополнительных нагрузок на подшипники, должны выполняться условия

$$x_C = 0, y_C = 0, I_{yz} = 0, I_{xz} = 0, \qquad (10.12)$$

означающие, что:

1) центр масс тела должен лежать на оси вращения;
2) ось вращения должна быть главной осью инерции в точке A, т.е. с учетом первого условия ось вращения должна быть главной центральной осью инерции тела.

Этот же вывод справедлив и для неравномерного вращения.

Рассмотренная задача позволяет одновременно уяснить механический смысл величин I_{yz}, I_{xz}, а именно: *центробежные моменты инерции* I_{yz}, I_{xz} *характеризуют степень динамической неуравновешенности тела при его вращении вокруг оси* z.

Проблема ликвидации дополнительных динамических реакций в подшипниках вращающихся частей и деталей машин до сегодняшнего дня остается одной из важнейших в машиностроении.

Докажем другое, практически не менее важное положение: *любую ось, проведенную в теле, можно сделать главной центральной осью инерции прибавлением к телу двух точечных масс*. Пусть для тела массой m величины x_C, y_C, I_{yz}, I_{xz} известны и не равны нулю. Прибавим к телу две массы m_1 и m_2 в точках с координатами (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2). Тогда, если удовлетворить равенствам

$$mx_C + m_1x_1 + m_2x_2 = 0, my_C + m_1y_1 + m_2y_2 = 0,$$
$$I_{xz} + m_1x_1z_1 + m_2x_2z_2 = 0, I_{yz} + m_1y_1z_1 + m_2y_2z_2 = 0, \qquad (10.13)$$

то для полученного тела будет $x'_C = y'_C = I'_{xz} = I'_{yz} = 0$, т.е. ось z станет главной центральной осью инерции. Подбирая массы m_1, m_2 и их положения так, чтобы удовлетворялись уравнения (10.13), мы и решим поставленную задачу.

Такой метод уравновешивания вращающихся тел широко используется в технике для уравновешивания коленчатых валов, кривошипов, спарников, и т.п. при этом окончательная балансировка производится на специальных стендах.

ЛЕКЦИЯ 11. ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Введение. Масса твердого тела. Геометрия масс. Осевые, полярный, центробежные моменты инерции.

Дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела. Дифференциальные уравнения вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси. Дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела.

Динамика твердого тела является важным разделом теоретической механики, что объясняется, прежде всего, теми приложениями, которые она имеет в самых различных вопросах техники. Так, например, конструирование и расчет станков, железнодорожного и автомобильного транспорта, управление полетом самолетов и космических аппаратов, борьба с качкой судна, конструирование расчет гироскопических приборов, сохраняющих заданную ориентацию или автономно определяющих нужное направление (гироскопические компасы, гиро вертикали), и т.п. основаны на динамике твердого тела.

Движение тел существенным образом зависит от характера распределения масс. В этом мы уже убедились на ряде примеров. Так, спортсмен при прыжке в воду, группируясь (т.е. меняя распределение масс), увеличивает свою угловую скорость; время установления угловой скорости ротора электромотора зависит от момента инерции ротора и т.д. Поэтому изучение динамики твердого тела начинается, как правило, с изучения геометрии масс. При этом изучается не движение твердого тела, а только характер распределения его массы.

Масса тела. Осевые, полярный, центробежные моменты инерции

Как уже отмечалось, в теоретической механике считается, что масса твердого тела распределена непрерывно.

Возьмем в теле некоторую точку и выделим небольшой объем Δv с массой Δm так, чтобы выбранная точка находилась внутри этого объема. Отношение $\gamma_{\text{ср}} = \Delta m/\Delta v$ называется *средней плотностью объема* Δv тела, а предел этого отношения

$$\gamma = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta v} \qquad (11.1)$$

плотностью тела в данной точке (предполагается, что при $\Delta v \to 0$ выбранная точка остается все время внутри объема Δv).

Если тело неоднородно, то его плотность меняется от точки к точке. Отнесем тело к системе координат *Oxyz*. Тогда для неоднородного тела плотность γ будет функцией координат: $\gamma = \gamma(x, y, z)$.

Масса неоднородного тела вычисляется по формуле

$$M = \int \gamma\, dv = \iiint \gamma(x, y, z) dxdydz.$$

Плотность однородного тела одинакова во всех его точках, причем

$$\gamma = M/V = const, \qquad (11.2)$$

где M – масса тела, а V – его объем.

Ранее было дано определение момента инерции относительно оси: *моментом инерции материальной системы относительно оси называется сумма произведений масс точек системы на квадраты расстояний от точек до оси*. При непрерывном распределении массы сумма переходит в интеграл. Возьмем в теле элемент с массой $dm = \gamma \cdot dv$ и координатами x, y, z. Расстояния от этого элемента до координатных осей x, y, z соответственно равны h_x, h_y, h_z. Из рис. 11.1 видно, что квадраты расстояний соответственно равны $h_x^2 = y^2 + z^2$, $h_y^2 = z^2 + x^2$, $h_z^2 = x^2 + y^2$. Тогда моменты инерции тела относительно координатных осей определяются равенствами

$$I_x = \int (y^2 + z^2)\, dm,\ \ I_y = \int (z^2 + x^2)\, dm,\ \ I_z = \int (x^2 + y^2)\, dm. \qquad (11.3)$$

В этих формулах подразумевается интеграл, распространенный по массе всего тела. Такое условное обозначение вводится для простоты записи.

Введем *полярный момент* I_0, определив его как сумму произведений масс точек материальной системы на квадраты их расстояний до данного полюса 0. Если за полюс взять начало координат 0, то полярный момент инерции твердого тела можно вычислить по формуле

$$I_0 = \int (x^2 + y^2 + z^2)\, dm. \qquad (11.4)$$

Из формулы видно, что полярный момент инерции зависит только от выбора полюса, но не зависит от выбора направления координатных осей. Сравнивая равенства (11.3) и (11.4), легко установить формулу

$$2I_0 = I_x + I_y + I_z. \qquad (11.5)$$

Отметим два свойства моментов инерции относительно трех взаимно перпендикулярных осей.

1) момент инерции относительно любой из осей всегда меньше суммы моментов инерции относительно двух других осей, но больше их разности. Действительно, например, $I_x + I_y - I_z = 2\int z^2\, dm$, $I_x - I_y - I_z = -2\int x^2\, dm$, отсюда

$$I_z < I_x + I_y,\ I_z > I_x - I_y. \qquad (11.6)$$

Из этого следует, что моменты инерции тела относительно трех взаимно перпендикулярных осей нельзя задать произвольно – они должны удовлетворять соотношениям (11.6);

2) сумма моментов инерции относительно трех взаимно перпендикулярных осей не зависит от направления этих осей.

Осевые и полярные моменты инерции всегда положительны, так как они представляют сумму положительных чисел. В нуль осевой момент инерции может обратиться только в одном частном случае, когда все материальные точки системы расположены на оси, относительно которой вычисляется момент инерции.

Для полной характеристики распределения массы тела относительно данной системы координат вводят центробежные моменты инерции. *Центробежными моментами инерции твердого тела называются величины, определенные равенствами*

$$I_{xy} = \int xydm, I_{yz} = \int yzdm, I_{zx} = \int zxdm. \qquad (11.7)$$

Как видно из (11.7), центробежные моменты инерции симметричны относительно своих индексов:

$$I_{xy} = I_{yx}, I_{yz} = I_{zy}, I_{xz} = I_{zx}.$$

Центробежные моменты нельзя задавать произвольно. Действительно, из неравенства $\int (x-y)^2 dm \geq 2\int xydm$ следует $\int (x^2-y^2)dm \geq 2\int xydm$ или, пользуясь формулами (11.3) и (11.7), $I_{xy} \leq \frac{1}{2}I_z, I_{yz} \leq \frac{1}{2}I_x, I_{xz} \leq \frac{1}{2}I_y$.

Центробежные моменты инерции зависят не только от направления координатных осей, но и от выбора начала координат. В отличие от осевых, центробежные моменты инерции могут иметь любой знак и обращаться в нуль.

Главной осью инерции тела называется ось, для которой оба центробежных момента инерции, содержащие индекс этой оси, равны нулю. Например, если $I_{xz} = I_{yz} = 0$, то ось z – главная ось инерции тела.

Главной центральной осью инерции называется главная ось инерции, проходящая через центр масс тела.

Отметим два частных случая, когда можно сразу определить характер оси:

1) если тело имеет плоскость материальной симметрии, то для всех ее точек ось, перпендикулярная к плоскости симметрии, является главной осью инерции;

2) если тело имеет ось материальной симметрии, то эта ось является главной центральной осью инерции и называется *осью динамической симметрии*.

Матрица, составленная из осевых и взятых с обратным знаком центробежных моментов инерции, называется *тензором инерции* в данной точке:

$$I = \begin{pmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{pmatrix}.$$

В силу симметрии центробежных моментов инерции этот тензор имеет шесть составляющих. Тензор инерции характеризует распределение масс тела относительно данной точки.

Дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела

При поступательном движении твердого тела ускорения всех его точек в каждый момент времени одинаковы и, следовательно, равны ускорению центра масс тела. А так как ускорение центра масс a_C определяется теоремой о движении центра масс системы, то эту теорему можно использовать для исследования поступательного движения твердого тела. В векторной форме дифференциальное уравнение поступательного движения имеет вид

$$M\overline{a} = M\overline{a_C} = \sum \overline{F_k},$$

где M – масса тела, $\overline{a}$ – ускорение его произвольной точки.

Спроектировав это равенство на оси координат, получим дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела в проекциях на прямоугольные оси координат:

$$M\ddot{x} = \sum F_{kx},\ M\ddot{y} = \sum F_{ky},\ M\ddot{z} = \sum F_{kz}, \qquad (11.8)$$

где x, y, z – координаты произвольной точки тела.

Полученные уравнения аналогичны дифференциальным уравнениям движения материальной точки, поэтому при поступательном движении твердого тела его можно рассматривать как материальную точку, к которой приложены все силы, действующие на тело.

Дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела

Пусть твердое тело вращается вокруг неподвижной оси Oz (рис. 11.2) под действием системы внешних сил $\left(\overline{F_1^e}, \overline{F_2^e}, \dots, \overline{F_n^e}, \overline{R_0}, \overline{R_A}\right)$. Чтобы исключить из рассмотрения неизвестные реакции $\overline{R_0}$ и $\overline{R_A}$, запишем уравнение теоремы об изменении кинетического момента системы в проекциях на ось вращения: $\frac{dK_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n}\left(\overline{F_k^e}\right)$. Как известно, кинетический момент твердого тела относительно оси вращения равен $K_z = I_z\omega$, где $I_z = const$ – момент инерции тела относительно оси вращения. Поэтому $\frac{dK_z}{dt} = \frac{d}{dt}(I_z\omega) = I_z\frac{d\omega}{dt} = I_z\ddot{\varphi}$ и окончательно *дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела* запишется так:

$$I_z\ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} M_z\left(\overline{F_k^e}\right). \qquad (11.9)$$

Это уравнение по своей структуре аналогично основному уравнению динамики точки. А нем роль массы играет момент инерции, ускорения – угловое ускорение тела, а суммы сил – сумма моментов сил относительно оси вращения.

Плоское движение твердого тела

В кинематике было установлено, что положение твердого тела, совершающего плоское движение, определяется тремя параметрами. За эти параметры выберем координаты центра масс тела и угол поворота тела относительно оси, перпендикулярной к рассматриваемому плоскому сечению тела.

Пусть система координат Cx_2y_2, имеющая начало в центре масс, движется поступательно относительно неподвижной системы координат $O_1x_1y_1$. Положение тела будет полностью определено, если известны координаты центра масс тела (x_{1C}, y_{1C}) и угол φ с осью x_2 и осью x системы координат Cxy, жестко связанной с телом и имеющей начало в центре масс тела (рис. 11.3). по теореме о движении центра масс получаем зависимости, определяющие поступательное движение твердого тела:

$$M\ddot{x}_{1C} = F_x^e,\ M\ddot{y}_{1C} = F_y^e, \qquad (11.10)$$

где M – масса тела.

Вращательное движение вокруг центра масс определится уравнением

$$I_z\ddot{\varphi} = M_z^e, \qquad (11.11)$$

где I_c – момент инерции тела относительно оси, перпендикулярно к плоскости движения тела и проходящей через центр масс, а M_z^e – главный момент всех внешних сил относительно той же самой оси. Уравнения (11.10) и (11.11) позволяют решать задачи динамики плоского движения твердого тела.

Если движение твердого тела задано, т.е. координаты центра масс (x_{1C}, y_{1C}) и угол φ являются известными функциями времени, то в результате подстановки вторых производных от этих функций $(\ddot{x}_{1C}, \ddot{y}_{1C}, \ddot{\varphi})$ в уравнения (11.10) и (11.11) находятся силы, под действием которых происходит движение тела. Если же заданы силы, т.е. известны F_x^e, F_y^e, M_c^e, то уравнения (11.10) и (11.11) будут представлять уже систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений, определяющих плоское движение твердого тела,

$$M\ddot{x}_{1C} = F_x^e, M\ddot{y}_{1C} = F_y^e, I_c\ddot{\varphi} = M_c^e, \qquad (11.12)$$

После решения этих уравнений и определения постоянной интегрирования получим закон плоского движения свободного твердого тела: $x_{1C} = x_{1C}(t)$, $y_{1C} = y_{1C}(t)$, $\varphi = \varphi(t)$.

Если тело совершает несвободное движение, то в число действующих сил следует включить реакции связей.

Задача 11.1. сплошной однородный круговой цилиндр скатывается по наклонной плоскости с углом наклона α (рис. 11.4). Определить ускорение центра цилиндра и наименьший коэффициент трения f цилиндра о плоскость, при котором возможно качение без скольжения, в двух случаях: 1) пренебрегая сопротивлением качению; 2) учитывая сопротивление качению (коэффициент трения качения *k* и радиус цилиндра *R* известны).

Решение. 1. Изображаем действующие на цилиндр: силу тяжести $\overline{P} = m\overline{g}$; наименьшую силу трения $\overline{F}$, при котором возможно качение без скольжения; реакцию $\overline{N}$ плоскости, приложенную, когда сопротивление качению не учитывается, в точке касания. Направим ось *Ox* вдоль наклонной плоскости, а ось *Oy* – перпендикулярно ей.

Так как вдоль оси *Oy* центр масс цилиндра не перемещается, то $a_{Cy} = 0$, и первое из уравнений (11.12) дает $N - Pcos\alpha = 0$, откуда $N = Pcos\alpha$.

Составляя другие два уравнения системы, учтем, что $a_{Cx} = a_C$ и будем считать момент положительным, когда он направлен в сторону вращения цилиндра. Получим:

$$ma_{1C} = Psin\alpha - F, I_{c\varepsilon} = FR. \qquad (11.13)$$

Уравнения (11.13) содержат три неизвестные величины a_C, ε и F (здесь нельзя считать $F = fN$, так как это равенство имеет место, когда точка касания скользит вдоль плоскости, а при отсутствии скольжения может быть $F \leq fN$. Дополнительную зависимость между неизвестными величинами найдем, учитывая, что при чистом качении $v_C = \omega R$, откуда, дифференцируя, получим $a_C = \varepsilon R$. Тогда второе из равенств (11.13), если учесть, что для сплошного цилиндра $I_c = \frac{mR^2}{2}$, примет вид

$$\frac{ma_C}{2} = F. \qquad (11.14)$$

Подставляя это значение *F* в первое из равенств (11.13), получим

$$a_C = (2/3)gsin\alpha. \qquad (11.15)$$

Теперь находим из выражения (11.14):

$$F = (P/3)sin\alpha. \qquad (11.16)$$

Такая сила трения должна действовать на катящийся цилиндр, чтобы он катился без скольжения. Выше было указано, что $F \leq fN$. Следовательно, чистое качение будет происходить, когда $(P/3)sin\alpha \leq fPcosa$ или $f \geq (tg\alpha)/3$. Если коэффициент трения будет меньше этой величины, то сила *F* не может принять значения, определяемого равенством (11.16), и цилиндр будет катиться с проскальзыванием. В этом случае y_C и ω не связаны зависимостью $v_C = \omega R$ (точка касания не является мгновенным центром скоростей), но зато величина F имеет предельное значение, т.е. $F = fN = fPcos\alpha$, и уравнения (11.13) принимают вид:

$(P/g)a_C = P(sin\alpha - fcos\alpha)$, $PR^2\varepsilon/2g = fPRcos\alpha$, откуда

$$a_C = g(sin\alpha - fcos\alpha); \varepsilon = (2gf/R)cos\alpha. \qquad (11.17)$$

Центр цилиндра в этом случае движется с ускорением a_C, а сам цилиндр вращается с угловым ускорением ε, значения которых определяются равенствами (11.17).

2. При учете сопротивления качению реакция *N* будет смещена в сторону движения на величину и ее момент относительно центра *C* будет равен *kN*. Тогда второе из уравнений (11.13) примет вид

$$I_{c\varepsilon} = FR - kN \text{ или } mR^2\varepsilon/2 = FR - kN. \qquad (11.18)$$

Остальные уравнения сохраняют свой вид, т.е. будет по-прежнему

$$N = Pcos\alpha, ma_C = Psin\alpha - F. \qquad (11.19)$$

Из уравнений (11.18) и (11.19), учитывая, что и в данном случае $a_C = \varepsilon R$, найдем окончательно

$$a_C = \frac{2}{3}g(sin\alpha - \frac{k}{R}cos\alpha), F = \frac{P}{3}(sin\alpha + 2\frac{k}{R}cos\alpha).$$

После этого из неравенства $F \leq fN$ получим, что f должно иметь для обеспечения качения без скольжения значение $f \geq [(tg\alpha)/3 + 2k/3R]$.

ЛЕКЦИЯ 12. АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. ПРИНЦИП ВИРТУАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Классификация связей. Возможные перемещения системы. Возможная работа силы. Идеальные связи. Принцип возможных перемещений. Применение принципа возможных перемещений к определению реакций связей.

Основные законы динамики можно было назвать законами физической динамики, ибо количество движения, кинетический момент и кинетическая энергия материальной точки или системы имеют определенный физический смысл. Но, тем не менее, они не дают возможности решить общую задачу динамки несвободной материальной системы. Трудности, с которыми мы встречаемся при решении этой задачи не математические, а принципиальные: если не наложить какие-то ограничения на связи системы, то число неизвестных функций может быть больше числа уравнений и задача будет неразрешимой. Но даже в том случае, когда мы имеем необходимое число уравнений, мы все же не имеем общего метода, позволяющего исключить все реакции связей, а без этого нельзя интегрировать дифференциальные уравнения связи. Методы аналитической механики, с элементами которой мы познакомимся в этом пособии, позволят при некоторых ограничениях, наложенных на связи системы, полностью решить задачу о ее движении или ее равновесии.

Классификация связей

Изложение аналитической механики начнем с более подробного рассмотрения связей. Напомним, что система материальных точек называется свободной, если ее точки могут занимать любые положения, а их скорости могут принимать любые значения. В противном случае система называется несвободной. Ограничения, накладываемые на координаты или скорости отдельных точек, называют *связями*. Конструктивно связи реализуются в виде шарниров, поверхностей, направляющих, стержней, нитей и т.п. Отметим, что, говоря о связях несвободного твердого тела, целесообразно говорить не о связях между отдельными его точками, а о связях, ограничивающих движение тела как одного целого объекта. Аналитически связи могут быть записаны в виде уравнений или неравенств.

В общем случае уравнение связи, налагаемой на систему точек, записывается в виде:

$$F(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n) = 0.$$

В зависимости от вида функции связи делятся следующим образом:

1. геометрические и дифференциальные;
2. стационарные и нестационарные;
3. голономные и неголономные;
4. удерживающие и неудерживающие.

К *геометрическим* относятся связи, в уравнения которых входят только координаты точек системы (тела) и, может быть, время.

Пример 12.1. две материальные точки соединены жестким, невесомым и нерастяжимым стрежнем длины l (рис. 12.1). Уравнение связи записывается в виде:

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = l^2.$$

Дифференциальными называются связи, уравнения которых кроме координат точек системы содержат и первые производные от этих координат по времени и, может быть, время.

Пример 12.2. Колесо катится без скольжения по неподвижной поверхности (рис. 12.2). в этом случае скорость центра колеса и угловая скорость связаны между собой зависимостью, являющейся уравнением этой связи $v = \omega r$ или $v - \omega r = 0$.

Связи, в уравнение которых время явно не входит, называются стационарными.

Пример 12.3. Конек *AB* движется по поверхности льда. Будем считать, что конек имеет выпуклое лезвие, касающееся льда в одной точке. При движении конька скорость v точки касания *C* конька со льдом должна быть направлена вдоль конька, то есть конек может соскальзывать в направлении, перпендикулярном к его лезвию. Зададим положение конька координатами: x_C, y_C.

Условие отсутствия соскальзывания примет вид

$$\frac{y_C}{x_C} = 0, \text{ или } x_C \cdot sin\varphi - y_C cos\varphi = 0. \qquad (12.1)$$

Умножая на *dt* получим

$$dx_C \cdot sin\varphi - dy_C cos\varphi = 0. \qquad (12.2)$$

Так как это уравнение нельзя проинтегрировать, то связь математически выражается либо в виде (12.1), либо в виде (12.2).

Если же время входит в уравнение связи явно, то такая связь будет *нестационарной*.

Пример 12.4. Нить, на которой подвешен математический маятник, втягивается в отверстие, совпадающее с точкой подвеса, с постоянной скоростью v (рис. 12.4). Длина маятника будет переменной величиной: $l = l_0 - vt$, где l_0 – первоначальная длина маятника.

Уравнение связи примет вид

$$x_M^2 + y_M^2 = l^2 = (l_0 - vt)^2 \text{ или } x_M^2 + y_M^2 - (l_0 - vt)^2 = 0.$$

К *голономным* относятся все геометрические связи, а также те из дифференциальных, которые интегрированием могут быть сведены к геометрическим. Так рассмотренная в примере 12.2 дифференциальная связь является голономной, т.к. ее можно проинтегрировать и свести к геометрической: $v_0 = \omega r$ то есть, $dx_0 = rd\varphi$ и $\int dx_0 = \int rd\varphi$, откуда $x_0 = r\varphi + C$, где C – постоянная интегрирования.

Дифференциальная связь в примере 12.3 не может быть проинтегрирована и называется *неголономной*.

Связи, которые описываются уравнениями, называются *удерживающими*, связи, описываемые неравенствами, называются *неудерживающими*.

Пример 12.5. Две материальные точки соединены абсолютно гибкой, нерастяжимой и невесомой нитью длины l. В этом случае связь запишется в виде неравенства: $(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \le l^2$. Если нить натянута, то имеет место знак равенства, в противном случае – знак «меньше».

Пример 12.6. Однородный стержень *AB* длины $2l$ движется так, что его конец *A*, шарнирно укрепленный в ползуне, перемещается по горизонтальной направляющей, а конец *B* опирается на вертикальную направляющую (рис.12.6).

Определим связи, ограничивающие движение стержня. Плоское движение определяется тремя параметрами: двумя координатами центра масс x_C, y_C и углом φ. Направляющие ограничивают это движение. Тогда справедливы соотношения $y_C = lsin\varphi$, $x_C^2 + y_C^2 \ge l^2$.

Если стержень опирается концом *B* на направляющую, то во втором соотношении будет знак равенства, если же конец *B* отошел от направляющей, то знак будет «больше».

В примере 12.1 связь удерживающая, в 12.5 – неудерживающая, в примере 12.6 одна удерживающая и одна неудерживающая.

Мы будем изучать только системы с голономными связями.

Возможные виртуальные перемещения

Рассмотрим систему с голономными связями. Благодаря этим связям некоторые перемещения для точек системы оказываются невозможными. Так, в примере 12.5 невозможно такое перемещение для точек A и B, при котором расстояние между ними становились больше l; для того чтобы осуществить такое перемещение, пришлось бы нарушить связь, т.е. обрезать нить.

Бесконечно малые перемещения n точек системы, фактически совершаемые ими под действием приложенных к ним сил и происходящие за время dt, называются действительными перемещениями и обозначаются dr_k (k=1, 2,…, n).

Предположим, что в некоторый момент времени t мы мгновенно остановили систему и все ее точки стали неподвижными. Однако мы можем принудительно сообщить системе какие-то бесконечно малые перемещения, допускаемые в этот момент наложенными на систему связями. Эти перемещения могут совпадать с действительными, а могут и отличаться от них.

Пример 12.7. Пусть тело скользит вниз по наклонной плоскости (рис. 12.7). действительное его перемещение dr по плоскости вниз. Мысленно остановим тело в показанном на рисунке положении. Из этого фиксированного положения принудительно, но не нарушая связей, мы можем сообщить телу перемещение δr как вверх по наклонной плоскости, так и вниз по ней. Эти элементарные перемещения k-й точки системы, которые в данный момент допускаются наложенными на систему связями, называются возможными и обозначаются δr_k (k=1, 2,…, n).

Следовательно, *возможным перемещением точки системы называется любое допускаемое связями ее перемещение из положения, занимаемого точкой в данный момент времени в бесконечно близкое положение, которое она может занимать в тот же момент времени*.

Пример 12.8. Рассмотрим плоский механизм $OABO_1$, изображенный на рис. 12.8. любая точка кривошипа OA будет двигаться по окружности. Следовательно, возможное перемещение точки A δr будет направлено по касательной к окружности с центром O и радиусом OA, т.е. за время dt. Это перемещение всегда направлено по касательной к траектории точки (т.к. $d\overline{r} = \overline{v}dt$).

Возможная работа (виртуальная работа) силы; идеальные связи

Работа силы на одном из возможных перемещений точки ее приложения называется *возможной (виртуальной)* работой силы:

$$\delta A = F\delta r = F_x\delta x + F_y\delta y + F_z\delta z = F\delta r cos(\overline{F} \cdot \delta\overline{r}). \qquad (12.4)$$

С понятием возможной работы вводится еще одно деление связей: на идеальные и неидеальные.

Связи называются *идеальными*, если сумма работ всех реакций связей на любом возможном перемещении системы равна нулю, т.е. $\sum \overline{R}_k\delta\overline{r}_k = 0$, где R_k – реакция связи, действующая на k-ю точку системы.

К числу идеальных относятся все связи без трения и качение без скольжения (если отсутствует трение качения). Так, в случае качения без скольжения абсолютно твердого тела по абсолютно твердой поверхности (рис. 12.10) точка B соприкасания тел является мгновенным центром скоростей. Скорости точек соприкасания тел равны нулю, а потому возможные перемещения этих точек равны нулю.

Принцип возможных (виртуальных) перемещений

Принцип возможных перемещений определяет необходимое и достаточное условие равновесия системы с идеальными голономными удерживающими стационарными связями.

Этот принцип широко используется не только в теоретической механике, но и в сопротивлении материалов, строительной механике и т.д.

Для равновесия механической системы с идеальными голономными удерживающими стационарными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма работ всех активных сил на любом возможном перемещении системы и скорости всех точек в начальный момент времени равнялись нулю, т.е.:

$$\sum \delta A_k^a = \sum \overline{F}_k\, \delta r_k = 0, \qquad v_k(0) = 0 \qquad (k = 1, 2, \dots, n). \qquad (12.5)$$

Уравнение, выражающее принцип возможных перемещений, можно записать в виде

$$\delta A_k^a = F\delta r = F_x\delta x + F_y\delta y + F_z\delta z = F\delta r\, cos(\overline{F} \cdot \delta\overline{r}) = 0. \qquad (12.6)$$

Если система, состоящая из большого числа тел, имеет одну степень свободы, то нужно составить только одно уравнение, которое сразу устанавливает условие равновесия задаваемых сил, приложенных к системе. Если система имеет несколько степеней свободы, то уравнения работ составляются для каждого независимого перемещения системы в отдельности. Таким образом, получается столько условий равновесия, сколько степеней свободы она имеет. Надо отметить, что принцип возможных перемещений позволяет установить условия равновесия системы без предварительного определения реакций связи.

Прежде чем проиллюстрировать это на примерах, сделаем несколько замечаний общего характера:

1) если есть неидеальные связи, то их реакции (например, силы трения) следует отнести к активным силам;

2) в случаях, когда требуется определить реакцию идеальной связи, нужно мысленно отбросить эту связь, а соответствующую реакцию рассматривать как активную силу.

В некоторых случаях вместо возможных перемещений δr_k рассматриваем возможные скорости v_k, пропорциональные δr_k, т.е. составляем уравнение возможных (виртуальных) мощностей:

$$\sum F_k v_k = 0, (k = 1, 2, \dots, n). \qquad (12.5)$$

Задача 12.1. Пользуясь принципом возможных перемещений, найти зависимость реакции $\overline{N}$ сжимаемого тела от момента пары сил, приложенной к рукоятке винтового пресса $(\overline{P}, \overline{P'})$, изображенного на рис. 12.11.

Решение. Воспользуемся принципом возможных перемещений. Сообщим прессу возможные перемещения. Повернем рукоятку *AB* на малый угол $\delta\varphi$ в сторону действия пары сил. тогда точка приложения силы $\overline{N}$ получит возможное перемещение δs, направленное противоположно направлению силы $\overline{N}$. На введенных перемещениях составим сумму возможных работ. Работа пары сил определится как произведение ее момента на возможный угол поворота: $\sum \delta A_k^a = M\delta\varphi - N\delta s = 0$, где M – момент пары сил, $M = 2Pl$.

Определим зависимость между возможными перемещениями. При одном обороте рукоятки винт перемещается вдоль оси на величину h, называемую шагом винта. Тогда продольное перемещение винта δs составляет такую же часть винта h, какую угловое перемещение $\delta\varphi$ составляет от угла 2π, т.е. $\frac{\delta s}{h} = \frac{\delta\varphi}{2\pi}$, откуда $\delta s = \frac{h}{2\pi}\delta\varphi$.

Подставим это выражение в полученное уравнение возможных работ: $2Pl\delta\varphi - N\frac{h}{2\pi}\delta\varphi = 0$ или $(2Pl - N\frac{h}{2\pi})\delta\varphi = 0$, т.к. $\delta\varphi \neq 0$, $n = 4\pi P \cdot l/h$. Сила, сжимающая тело, равна найденной реакции N.

Задача 12.2. Два груза весом 300 *Н* и 500 *Н* подвешены к двухступенчатому блоку, радиусы ступеней которого 40 см и 60 см. Какой вращающий момент необходимо приложить к блоку, чтобы уравновесить грузы (рис. 12.12, а)?

Решение. Укажем все силы, приложенные к данной системе G, P, M (рис. 12.12, б). Связи, наложенные на систему, являются идеальными. Воспользуемся принципом возможных (виртуальных) перемещений в виде (12.6): $\delta A_k^a = F\delta r cos(\overline{F}\cdot\delta\overline{r})$.

Так как система имеет одну степень свободы, то нужно составить только одно уравнение возможных (виртуальных) работ. Сообщим грузу A возможное (виртуальное) перемещение δs_A, направленное вниз. При этом груз P приобретет возможное перемещение δs_B, а блок повернется против часовой стрелки на угол $\delta\varphi$ (рис. 12.12, в).

Вычислим сумму возможных работ на полученных возможных перемещениях: $\sum \delta A_k^a = G\delta s_A + M\delta\varphi - P\delta s_B = 0$.

Система имеет одну степень свободы, поэтому все возможные перемещения связаны между собой. Выразим их через $\delta\varphi$: $\delta s_A = r\delta\varphi$, $\delta s_B = R\delta\varphi$ и подставим в составленное уравнение: $Gr\delta\varphi + M\delta\varphi - PR\delta\varphi = 0$ или $(Gr + M - PR)\delta\varphi = 0$.

Так как $\delta\varphi \neq 0$, то нулю равно выражение, стоящее в скобках, откуда

$$M = PR - Gr = 500\cdot 0{,}6 - 300\cdot 0{,}4 = 300 - 120 = 180 \text{ Нм}.$$

Задача 12.3. Пользуясь принципом возможных перемещений, определить реакции составной рамы, изображенной вместе с заданной нагрузкой на рис. 12.13, если $P_1 = 10$ кН, $q = 5$ кН/м, $P_2 = 80$ кН/м и $M = 200$ кНм.

Решение. Заменим равномерно распределенную нагрузку сосредоточенной силой $Q = q\cdot 4 = 5\cdot 4 = 20$ кН, приложенной к середине загруженного участка, а силу P_2 разложим на горизонтальную и вертикальную составляющие:

$$P_2' = P_2 cos 60° = 80\cdot 0{,}5 = 40 \text{кН}, P'' = P_2 cos 30° = 80\cdot\sqrt{3}/2 = 69{,}3 \text{ кН}.$$

Сначала определим реакцию заделки: реактивный момент M_A, горизонтальную составляющую X_A и вертикальную составляющую Y_A. Для определения реактивного момента M_A отбросим связь, препятствующую повороту рамы, заменив заделку шарнирно-неподвижной опорой, и приложим к раме реактивный момент M_A (рис. 12.14, а).

Сообщим системе возможное перемещение, повернув раму AC вокруг шарнира A на угол $\delta\varphi$, например, против направления вращения часовой стрелки. Тогда рама CB будет совершать плоское движение (рис. 12.14, б). найдем мгновенный центр вращения O_1 и, выражая элементарное перемещение δs шарнира C через виртуальные углы поворота $\delta\varphi$ рамы AC и $\delta\varphi_1$ рамы CB, найдем соотношение $\delta s = AC\cdot\delta\varphi = O_1C\cdot\delta\varphi_1$; $\delta\varphi_1 = (AC/O_1C)\cdot\delta\varphi = \left(4\sqrt{2}/8\sqrt{2}\right)\cdot\delta\varphi = 0{,}5\cdot\delta\varphi$. Заметим, что поворот рамы CB вокруг мгновенного центра вращения O_1на угол $\delta\varphi_1$ будет происходить по направлению вращения часовой стрелки.

Составим уравнение возможных работ для определения реактивного момента M_A, учитывая, что работа силы при повороте тела равна моменту силы относительно центра вращения, умноженному на угол поворота тела, и положительна в случае, если направления момента и угла поворота совпадают:

$$M_A\cdot\delta\varphi - P_1\cdot 3\delta\varphi - Q\cdot 6\delta\varphi_1 - P_2'\cdot 8\delta\varphi\cdot 1 - P_2''\cdot 2\delta\varphi\cdot 1 + M\cdot\delta\varphi_1 = 0.$$

Подставим сюда значение $\delta\varphi_1$:

$$M_A\cdot\delta\varphi - P_1\cdot 3\delta\varphi - Q\cdot 6\cdot 0{,}5\delta\varphi - P_2'\cdot 8\cdot 0{,}5\delta\varphi - P_2''\cdot 2\cdot 0{,}5\delta\varphi + M\cdot 0{,}5\delta\varphi = 0.$$

Отсюда $M_A = 3\cdot P_1 + 3\cdot Q + 4\cdot P_2' + P_2'' - 0{,}5\cdot M = 219$ кНм.

Для определения горизонтальной составляющей заделки X_A представим опору в виде ползуна A в горизонтальных направляющих, жестко скрепленного с рамой AC, и приложим к нему реакцию X_A (рис. 12.14, б). Сообщим всей системе возможное перемещение δs, например вправо, так как поворот ползуна в направляющих невозможен.

Составим уравнение работ на заданном возможном перемещении:

$X_A\cdot\delta s + P_1\cdot\delta s + P_2'\cdot\delta s = 0$; откуда

$$X_A = -P_1 - P_2' = -50 \text{ кНм}.$$

Знак минус показывает, что горизонтальная составляющая заделки направлена в сторону, противоположную направлению, указанному на рис. 12.14, б.

Для определения вертикальной составляющей заделки Y_A отбросим связь, препятствующую вертикальному перемещению точки A, заменив заделку ползуном A в вертикальных направляющих, жестко скрепленных с рамой AC, и приложим к нему реакцию Y_A. Сообщим раме AC возможное перемещение – поступательное перемещение δs_1, направленное, например, вверх. Тогда рама CB будет совершать плоское движение, а точка O_2 будет ее мгновенным центром вращения. Составим уравнение работ для определения величины вертикальной составляющей заделки Y_A, выразив перемещение всех точек приложения сил через элементарный угол $\delta\varphi$ поворота рамы CB вокруг мгновенного центра вращения O_2, учитывая, что возможное перемещение шарнира C равно поступательному перемещению рамы AC и $\delta s = 8\delta\varphi$ (рис. 12.14, в):

$$Y_A \cdot 8\delta\varphi - Q \cdot 6\delta\varphi \cdot P_2'' \cdot 2\delta\varphi + M \cdot \delta\varphi = 0,$$

отсюда $Y_A = 3/4 \cdot Q + 1/4 \cdot P_2'' - 1/8 \cdot M = 7{,}3$ кН.

Для определения реакции подвижной опоры B отбросим эту связь, заменив ее действие реакцией R_B (рис. 12.14, г). сообщим раме CB возможное перемещение – поворот на угол $\delta\varphi$ вокруг шарнира C, например, против направления вращения часовой стрелки. Тогда $\delta s = 8\delta\varphi$. Рама AC при этом остается неподвижной.

Составим уравнение работ на введенном возможном перемещении:

$R_B \cdot 8 \cdot \delta\varphi - Q \cdot 2 \cdot \delta\varphi - P_2'' \cdot 6 \cdot \delta\varphi - M \cdot \delta\varphi = 0$, отсюда

$R_B = (2 \cdot Q + 6 \cdot P_2'' \cdot M)/8 = 82$ кН.

Для проверки правильности решения задачи убедимся в том, что для всей рассматриваемой системы удовлетворяются уравнения равновесия. Действительно,

$$\sum F_{KX} = X_A + P_1 + P_2' = -50 + 10 + 40 = 0;$$

$$\sum F_{Kyi} = Y_A - Q - P_2'' + R_B = 7{,}3 - 20 - 69{,}3 + 82 = 0;$$

$$\sum M_{KA} = M_A - P_1 \cdot 3 - Q \cdot 6 - P_2' \cdot 4 - P_2'' \cdot 10 - M + R_B \cdot 12 =$$

$$= 219 - 30 - 120 - 160 - 693 + 984 = 0.$$

Сопоставляя решение этой задачи, полученное применения принципа возможных перемещений, с решением, которое могло бы быть получено при оставлении уравнений равновесия рассматриваемой системы сил, еще раз отметим следующие основные особенности решения задач при помощи принципа возможных перемещений:

1) каждая составляющая любой реакции связи определяется независимо от других реактивных сил;

2) определение составляющих реакций внешних связей (в рассматриваемом случае опор A и B) не требует определения реакций внутренних связей (шарнира C).

Для системы, состоящей из нескольких тел, определять реакции опор при помощи принципа возможных перемещений особенной удобно в том случае, когда требуется определить реакции не всех опор, а лишь одну или несколько реакций.

ЛЕКЦИЯ 13. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ

Общее уравнение динамики. Вычисление суммы работ сил инерции. Примеры решения задач.

Общее уравнение динамики

Принцип Даламбера позволяет записывать динамические уравнения движения в виде уравнений равновесия, так как при добавлении сил инерции к активным силам и силам реакций связей, действующим на систему, получается уравновешенная система сил. Но если система сил уравновешена, то к ней применим принцип возможных перемещений. Последовательное применение этих принципов к движущейся механической системе, на которую наложены идеальные стационарные голономные удерживающие связи, позволяет сформулировать принцип Даламбера-Лагранжа: если к движущейся механической системе, на которую наложены идеальные стационарные голономные удерживающие связи, условно приложить силы инерции всех ее точек, то в каждый момент времени сумма элементарных работ активных сил и сил инерции равна нулю на любом возможном перемещении системы, т.е.

$$\sum(\overline{F}_k + \overline{\Phi}_k)\delta\,\overline{r}_k = 0, \text{ или } \sum(\overline{F}_k + m_k\overline{a}_k)\delta\,\overline{r}_k = 0, \qquad (13.1)$$

или

$$\sum\Big((F_{kx} - m_k\ddot{x}_k)\delta x_k + (F_{ky} - m_k\ddot{y}_k)\delta y_k + +(F_{kz} - m_k\ddot{z}_k)\delta z_k\Big) = 0.$$

Действительно, умножив каждое из равенств, выражающих принцип Даламбера для системы материальных точек, на $\delta\overline{r}_k$, получим $(\overline{F}_k + \overline{N}_k + \overline{\Phi}_k)\delta\overline{r}_k = 0$, $(k = 1, 2, \dots, n)$. Просуммируем эти равенства по всем точкам системы: $\sum(\overline{F}_k + \overline{N}_k + \overline{\Phi}_k)\,\delta\overline{r}_k = 0$. Но при идеальных связях $\sum\overline{N}_k\delta\overline{r}_k = 0$, и поэтому окончательно получаем

$$\sum(\overline{F}_k + \overline{\Phi}_k)\delta\overline{r}_k = 0, \qquad (13.2)$$

что и требовалось доказать.

Равенство (13.2), выражающее принцип Даламбера-Лагранжа, называется *общим уравнением динамики*.

Общее уравнение динамики применяется для составления дифференциальных уравнений движения системы материальных точек с одной или несколькими степенями свободы. Большое преимущество общего уравнения динамики по сравнению с другими теоремами динамики заключается в том, что в его формулировке отсутствуют реакции идеальных связей. Если не все связи являются идеальными, например, имеются связи с трением, то, применяя общее уравнение динамики, следует к активным силам добавлять реакции, соответствующие неидеальным связям.

Вычисление суммы работ сил инерции

Вычисление суммы работ сил инерции на возможных перемещениях точек твердого тела производится по формулам:

а) при поступательном движении $\delta A = \overline{R}^{\Phi} \cdot \delta\overline{r}$, где R^{Φ} – равнодействующая сил инерции ($\overline{R}^{\Phi} = -M\overline{a}$, a – ускорение любой точки твердого тела), δr – возможное перемещение любой точки твердого тела;

б) при вращении вокруг неподвижной оси $\delta A = M_z^{\Phi} \cdot \delta\varphi$, где $M_z^{\Phi} = I_z\varepsilon$ – главный момент сил инерции относительно оси вращения *z*, $\delta\varphi$ – возможное угловое перемещение твердого тела;

в) при плоском движении $\delta A = \overline{R}_C^{\Phi} \cdot \delta\overline{r}_C + M_C^{\Phi} \cdot \delta\varphi$, где $\overline{R}_C^{\Phi} = -M\overline{a}_C$ – главный вектор сил инерции, a_C – ускорение центра тяжести твердого тела, $M_C^{\Phi} = I_C\varepsilon$ – главный момент сил инерции относительно оси, проходящей через центр тяжести C твердого тела перпендикулярно к плоскости движения, δr_C – возможное перемещение центра тяжести C твердого тела, $\delta\varphi$ – возможное угловое перемещение твердого тела.

С помощью общего уравнения динамики можно решать задачи динамики системы материальных точек в случаях, когда в число задаваемых и искомых величин входят: инерционные характеристики (массы и моменты инерции), ускорения точек системы (линейные и угловые), активные силы и моменты, коэффициенты трения (скольжения и качения), коэффициенты упругости пружин.

Заметим, что использование общего уравнения динамики *является формальным* методом составления дифференциальных уравнений системы.

Задача 13.1. Груз A массой m_1, который подвешен на невесомой нерастяжимой нити, переброшенной через невесомый блок D и намотанной на шкив B радиусом R, заставляет связанный со шкивом вал радиусом r катиться без скольжения по горизонтальному рельсу (рис. 13.1). общая масса шкива и вала равна m_2, их радиус инерции относительно центральной оси равен ρ. Найти ускорение груза A.

Решение. Связи, наложенные на систему, являются идеальными, поэтому приложим к системе только активные силы ($\overline{P} = m_1\overline{g}$, $\overline{Q} = m_2\overline{g}$) и силы инерции ($\overline{\Phi}, \overline{R}^{\Phi}$, M^{Φ}). При этом $\Phi = m_1 a$, $R^{\Phi} = m_2 a_0$, $M_0^{\Phi} = I_0\varepsilon = m_2\,\rho^2\varepsilon$. Так как из кинематики механизма следует, что $\omega = \frac{v_A}{R-r}$, $v_0 = \omega r = \frac{v_A r}{R-r}$, то $a_0 = \frac{ar}{R-r}$. Выражения для сил инерции и их момента примут вид $R^{\Phi} = m_2\frac{r}{R-r}a$, $M_0^{\Phi} = m_2\,\rho^2\frac{a}{R-r}$.

Дадим системе возможное перемещение $(\delta s, \delta s_0, \delta\varphi)$ и подсчитаем на нем сумму возможных работ:

$$\sum \delta A_k = P\delta s - \Phi\delta s - R^{\Phi}\delta s_0 - M_0^{\Phi}\delta\varphi = 0.$$

Из кинематики следует, что $\delta\varphi = \frac{\delta s}{R-r}$, $\delta s_0 = \frac{\delta sr}{R-r}$ и поэтому $\sum \delta A_k = P\delta s - m_1 a\delta s - m_2\frac{r}{R-r}a\frac{r}{R-r}\delta s - m_2\,\rho^2\frac{a}{R-r}\frac{\delta s}{R-r} = 0$. Сократив на δs, окончательно получим

$$a = g\frac{m_1(R-r)^2}{m_1(R-r)^2 + m_2(R-r)^2}.$$

Задача 13.2. Физический маятник весом P_2 колеблется около горизонтальный оси z, проходящей перпендикулярно к плоскости рисунка через центр тяжести О ползуна. При этом ползун весом P_1 движется по гладкой горизонтальной неподвижной плоскости (рис. 13.2). момент инерции маятника относительно оси привеса z равен I_z, центр тяжести K маятника отстоит от оси z на расстоянии $OK = a$. Оси x, y и направление положительного отсчета угла поворота φ указаны рис. 13.2.

Составить дифференциальные уравнения движения системы. Затем, считая колебания маятника малыми, определить круговую частоту его колебаний.

Решение. Данная система имеет две степени свободы и для определения ее движения надо задать два независимых параметра. Выберем в качестве этих параметров x и φ, определяющие соответственно положение ползуна на плоскости и маятника по отношению к ползуну. Методом кинетостатики мы введем силы инерции.

Ползун движется поступательно, поэтому его сила инерции равна $\overline{F}_1^{\Phi} = -M_1\overline{a}_1$ и приложена в центре тяжести О ползуна. Численное значение силы инерции имеет вид: $F_1^{\Phi} = \frac{P_1}{g}a_1 = \frac{P_1}{g}\ddot{x}$. Маятник совершает плоское движение, поэтому введем силу инерции $\overline{F}_2^{\Phi}$, приложенную к центру тяжести K, и момент сил инерции m_K^{Φ} относительно оси, проходящей через центр K, $\overline{F}_2^{\Phi} = -M_2\overline{a}_K$, $m_K^{\Phi} = I_K\ddot{\varphi}$, где I_K – момент инерции маятника относительно оси, проходящей через центр тяжести K, перпендикулярно к плоскости рисунка.

Так как маятник совершает сложное движение (переносное поступательное вместе с ползуном и относительное вращательное вокруг оси z), то $\overline{a}_K = \overline{a}_{Ke} + \overline{a}_{K\tau r} + \overline{a}_{Knr}$. Следовательно $\overline{F}_2^{\Phi} = \overline{F}_{Ke}^{\Phi} + \overline{F}_{K\tau r}^{\Phi} + \overline{F}_{Knr}^{\Phi}$, где $F_{Ke}^{\Phi} = \frac{P_1}{g}\ddot{x}$, $F_{K\tau r}^{\Phi} = \frac{P_2}{g}a\ddot{\varphi}$, $F_{Knr}^{\Phi} = \frac{P_2}{g}a\dot{\varphi}^2$.

На рис. 13.2 изображены активные силы: P_1 – вес ползуна, P_2 – вес маятника и силы инерции: $\overline{F}_1^{\Phi}$, $\overline{F}_1^{\Phi}$, $\overline{F}_{K\tau r}^{\Phi}$, $\overline{F}_{Knr}^{\Phi}$ и момент сил инерции m_K^{Φ}. реакции не изображены, т.к. все связи идеальны.

Дадим данной системе два независимых возможных перемещения: δx – ползуну и $\delta\varphi$ – маятнику (см. рис. 13.2). Для составления общего уравнения динамики, соответствующего возможному перемещению δx, будем считать $\delta x \neq 0$, $\delta\varphi = 0$ (это значит, что вся система поступательно переместилась на δx). Вычислим сумму работ активных сил, сил инерции и момента сил инерции на возможном перемещении δx и приравняем ее нулю:

$$-F_1^{\Phi}\delta x - F_{Ke}^{\Phi}\delta x - F_{K\tau r}^{\Phi}\delta x + F_{Knr}^{\Phi}\delta x = 0. \qquad (13.3)$$

Заметим, что работа момента сил инерции m_K^{Φ} отлична от нуля только на угловом перемещении, а работа сил тяжести P_1 и P_2 равна нулю, оттого, что точки приложения этих сил перемещаются по горизонтали. Подставив значения сил и сократив их на $-\frac{\delta x}{g}$, запишем уравнение (13.3) в виде

$$(P_1 + P_2)\ddot{x} + P_2 a\ddot{\varphi}cos\varphi + P_2 a\dot{\varphi}^2 sin\varphi = 0. \qquad (13.4)$$

Для составления общего уравнения динамики, соответствующего возможному перемещению $\delta\varphi$, будем считать $\delta x = 0$, $\delta\varphi \neq 0$ (это значит, что при неподвижном ползуне маятник поворачивается против часовой стрелки на $\delta\varphi$). Вычислим сумму работ активных сил, сил инерции и момента сил инерции на возможном перемещении $\delta\varphi$ и приравняем ее нулю:

$$m_K^{\Phi}\delta\varphi - F_{Ke}^{\Phi}acos\varphi\delta\varphi - F_{K\tau r}^{\Phi}a\delta\varphi - P_2 asin\varphi\delta\varphi = 0. \qquad (13.5)$$

Силы $\overline{P}_1$, $\overline{F}_1^{\Phi}$, $\overline{F}_{Knr}^{\Phi}$ в уравнение (13.5) не вошли, так как точка приложения сил $\overline{P}_1$, $\overline{F}_1^{\Phi}$ неподвижна, а момент силы $\overline{F}_{Knr}^{\Phi}$ относительно оси z равен нулю. Подставив значения сил и сократив на $-\delta\varphi$, получим:

$$I_k\ddot{\varphi} + \frac{P_2}{g}\ddot{x}acos\varphi + \frac{P_2}{g}a^2\ddot{\varphi} + P_2 asin\varphi = 0. \qquad (13.6)$$

Так как по теореме Штейнера $I_k + \frac{P_2}{g}a^2 = I_z$, то уравнение (13.6) примет вид

$$I_k\ddot{\varphi} + \frac{P_2}{g}\ddot{x}acos\varphi + P_2 asin\varphi = 0. \qquad (13.7)$$

Переходим к определению круговой частоты малых колебаний маятника. Система дифференциальных уравнений (13.4) и (13.7) является нелинейной, и ее интегрирование связано со значительными трудностями. В связи с этим будем решать задачу приближенно, считая колебания маятника малыми. Это значит, что, полагая φ и φ' величинами первого порядка малости. Мы запишем дифференциальные уравнения (13.4) и (13.7) с точностью до членов первого порядка малости включительно. С указанной степенью точности примем $sin\varphi \approx \varphi$, $cos\varphi \approx 1$, тогда уравнения (13.4) и (13.7) приближенно примут вид

$$\begin{cases}(P_1 + P_2)\ddot{x} + P_2 a\ddot{\varphi} = 0,\\ I_k\ddot{\varphi} + \frac{P_2}{g}a\ddot{x} + P_2 a\varphi = 0.\end{cases} \qquad (13.8)$$

Сопоставив системы уравнений (13.4) и (13.7), а также (13.8), видим, что вместо нелинейных нами получены приближенные линейные уравнения, интегрирование которых не составляет большого труда. Этот переход от точных нелинейных к приближенным линейным уравнениям называется *процессом линеаризации уравнений*.

Исключив $\ddot{x}$ из системы (13.8) после несложных преобразований получим:

$$\ddot{\varphi} + \frac{P_2(P_1+P_2)ag}{gI_z(P_1+P_2)-P_2^2a^2}\varphi = 0. \qquad (13.9)$$

Уравнение (13.9) является дифференциальным уравнением свободных колебаний маятника. Коэффициент, стоящий при φ, обычно обозначается k^2. Значит искомая круговая частота k малых колебаний маятника равна

$$k = \sqrt{\frac{P_2(P_1+P_2)ag}{gI_z(P_1+P_2)-P_2^2a^2}}.$$

ЛЕКЦИЯ 14. УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ В ОБОБЩЕННЫХ КООРДИНАТАХ. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА II РОДА

Обобщенные координаты и число степеней свободы. Обобщенные силы и примеры их вычисления, случай сил, имеющих полный потенциал. Условия равновесия в обобщенных координатах. Общее уравнение динамики в обобщенных координатах (уравнения Лагранжа II рода).

Обобщенные координаты

Положение механической системы, состоящей из n материальных точек, определяется $3n$ декартовыми координатами. Но если на систему наложено s голономных стационарных удерживающих связей, то число независимых координат, определяющих положение системы, будет равно $3n$-s. При решении некоторых задач для определения положения системы вместо декартовых координат точек могут использоваться другие геометрические параметры: криволинейные координаты, углы, площади, объемы и т.д. любые независимые параметры, однозначно определяющие положение механической системы, называются *обобщенными координатами* этой системы и обозначаются через q_1, q_2, …, q_m. Их число совпадает с числом независимых декартовых координат, т.е.

$$m = 3n - s. \qquad (14.1)$$

Так как обобщенные координаты однозначно определяют положение системы, то через них можно выразить все $3n$ декартовых координаты n точек системы.

Число независимых обобщенных координат, однозначно определяющих положение механической системы с голономными стационарными удерживающими связями, называются *числом степеней свободы* системы. Следовательно, число степеней свободы определяется уравнением (14.1). Производные обобщенных координат по времени называются обобщенными скоростями и обозначаются через q_1, q_2, …, q_m.

Пример 14.1. Рассмотрим кривошипно-ползунный механизм (рис. 14.1), положение которого определяется положением его точек О, A и B, т.е. шестью координатами: x_0, y_0, x_1, y_1, x_2, y_2. Но на систему наложено пять связей, уравнения которых имеют вид:

$$x_0 = 0,\ y_0 = 0,\ x_1^2 + y_1^2 = l_1^2,\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l_2^2,\ y_2 = 0.$$

Поэтому независимой является одна координата из шести. За обобщенную координату можно принять любую из трех: x_1, y_1, x_2, но удобнее взять угол поворота кривошипа φ, так как через него легко выразить все остальные координаты.

Пример 14.2. Двойной плоский маятник (рис. 14.2) имеет две степени свободы и в качестве обобщенных координат можно выбрать углы φ и Ψ ($q_1 = \varphi, q_2 = \Psi$). Эти углы между собой независимы, так как можно изменять угол φ, сохраняя неизменным Ψ, и наоборот. Величины $\delta\varphi$ и $\delta\Psi$ определяют независимые между собой возможные перемещения системы. Выражения декартовых координат точек A и B через обобщенные даются равенствами $x_A = l_1 cos\varphi$, $x_B = l_1 cos\varphi + l_2\cos(\varphi + \Psi)$ и т.д., где $l_1 = OA$, $l_1 = AB$. Следовательно, $\overline{r}_A = \overline{r}_A(\varphi)$, $\overline{r}_B = \overline{r}_B(\varphi, \Psi)$.

Обобщенные силы

Рассмотрим механическую систему с идеальными голономными, стационарными удерживающими связями, которая состоит из n материальных точек и имеет m степеней свободы, т.е. ее положение полностью определяется обобщенными m координатами q_1, q_2, …, q_m. Тогда радиус-вектор каждой точки системы будет функцией этих обобщенных координат: $\overline{r}_k = \overline{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_m)$.

Пусть за время δt точки системы совершили перемещения $\delta\overline{r}_1$, $\delta\overline{r}_2$, …, $\delta\overline{r}_m$. Определим сумму элементарных работ сил, приложенных к системе, на этих перемещениях (так как связи, наложенные на систему, идеальны, работу совершают только активные силы):

$\sum_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k \cdot \delta\overline{r}_k$. Выразим дифференциал радиус-вектора k-й точки, рассматривая радиус-вектор как функцию обобщенных координат:

$\delta\overline{r}_k = \frac{\partial\overline{r}_k}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial\overline{r}_k}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots + \frac{\partial\overline{r}_k}{\partial q_m}\delta q_m = \sum_{i=1}^{m} \delta q_i$. Тогда выражение для суммы элементарных работ примет вид $\sum_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k \cdot \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial\overline{r}_k}{\partial q_i}\delta q_i$ или, после изменения порядка суммирования, $\sum_{k=1}^{n} A_k = \sum_{i=1}^{m} \left(\overline{F}_k \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial\overline{r}_k}{\partial q_i}\right)\delta q_i$. Обозначим внутреннюю сумму через Q_t и назовем ее *обобщенной силой*, соответствующей i-й обобщенной координате, т.е.

$$Q_i = \overline{F}_k \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial\overline{r}_k}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^{n} \left(F_{kx} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{ky} \cdot \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + F_{kz} \cdot \frac{\partial z_k}{\partial q_i}\right). \qquad (14.2)$$

Теперь выражение для суммы возможных работ сил системы запишется в виде

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k = \sum_{i=1}^{m} Q_i \cdot \delta q_i. \qquad (14.3)$$

Следовательно, для механических систем со связями рассматриваемого типа с обобщенной силой, соответствующей некоторой обобщенной координате, является коэффициент при приращении этой координаты в выражении суммы элементарных работ всех активных сил системы при ее произвольном возможном перемещении.

Из данного определения вытекает метод нахождения обобщенных сил. Поскольку обобщенные координаты – независимые величины, то их дифференциалы произвольны. Поэтому для определения обобщенной силы Q_i соответствующей обобщенной координате q_i, дадим системе такое перемещение, чтобы изменилась только координата q_i, а все остальные обобщенные координаты остались бы без изменения. Тогда $\delta q_i \neq 0$, а $\delta q_1 = \delta q_2 = \cdots = \delta q_{i-1} = \cdots = \delta q_{i+1} = \cdots = \delta q_m = 0$. Определим на этом перемещении сумму элементарных работ всех активных сил системы $(\sum_{k=1}^{n} \delta A_k)_{q_i}$ (индекс q_i показывает, что работа совершается только на перемещениях системы, вызванных изменением координаты q_i). Выражение суммы элементарных работ

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k = Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + \cdots + Q_m\delta q_m$$

для нашего случая ($\delta q_i \neq 0$) примет вид $(\sum_{k=1}^{n} \delta A_k)_{q_i} = Q_i\delta q_i$, откуда

$$Q_i = \frac{(\sum_{k=1}^{n} \delta A_k)_{q_i}}{q_i}. \qquad (14.4)$$

По этой формуле и определяют обобщенные силы, давая последовательно возможные приращения всем обобщенным координатам. Из этой же формулы получается размерность обобщенной силы $[Q]$=$[A]$/$[q]$. Так, если обобщенная координата имеет размерность длины, то обобщенная сила имеет размерность силы (*Н*), если же обобщенной координатой является угол, то обобщенная сила имеет размерность момента (Н·м).

Случай потенциальных сил. В случае, когда действующие на систему силы являются потенциальными, существует такая силовая функция $U = f(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n)$, что выполнимы условия $F_{kx} = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_k}$, $F_{ky} = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y_k}$, $F_{kz} = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z_k}$.

Подставим значения проекций сил в формулу обобщенной силы (14.2):

$$Q_i = \sum_{k=1}^{n} \left(F_{kx} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{ky} \cdot \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + F_{kz} \cdot \frac{\partial z_k}{\partial q_i}\right) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} \cdot \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z} \cdot \frac{\partial z_k}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial q_i}. \qquad (14.5)$$

Так как $U = \Pi$, где П – потенциальная энергия системы, то

$$Q_i = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}. \qquad (14.6)$$

Задача 14.1. Определим обобщенные силы системы, состоящей из груза A массой m_1, надетого на однородный стержень OB длиной l и массой m_2. Груз связан с неподвижной точкой O пружиной жесткостью c (длина пружины в напряженном состоянии равна a) и может скользить вдоль стержня, а стержень может качаться в вертикальной плоскости вокруг оси *O* (рис. 14.3). массой пружины и трением пренебречь.

Решение. 1. Система имеет две степени свободы: груз может перемещаться вдоль стержня и вместе с ним поворачиваться вокруг оси *O*. За обобщенные координаты примем угол φ, образуемый стержнем с вертикалью, и расстояние *x* груза *A* от оси *O*, $Q_1 = \varphi$, $q_2 = x$.

Изобразим систему в произвольном положении (в положении, когда обобщенные координаты положительны). Изобразим активные силы (реакцию пружины как неидеальной связи рассматриваем в качестве активной силы): $P_1 = m_1 g$, $P_2 = m_2 g$, $F = c(x-a)$. Дадим координате φ приращение $d\varphi$ (в сторону увеличения координаты), оставляя координату *x* без изменения, и подсчитаем сумму элементарных работ активных сил на этом перемещении: $(\sum \delta A_k)_\varphi = [-P_1 x sin\varphi - P_2(l/2)sin\varphi]\delta\varphi = Q_\varphi \delta\varphi$, откуда $Q_\varphi = \frac{(\sum \delta A_k)_\varphi}{\delta\varphi} = -g\left(m_1 x + m_2 \frac{l}{2} sin\varphi\right)$. Изменим теперь координату *x* на $\delta x > 0$, оставляя без изменения φ. Тогда $(\sum \delta A_k)_x = [-P_1 cos\varphi - c(x-a)]\delta x = Q_x \delta x$ и

$$Q_x = \frac{(\sum \delta A_k)_x}{\delta x} = m_1 g cos\varphi - c(x-a).$$

2. Обобщенные силы можно определить, используя понятие силовой функции (14.5). в рассматриваемом примере силы, действующие на систему, потенциальны. При этом силовая функция упругой силы равна $-(c/2)(x-a)^2$, а силы тяжести $-mgz$. Если направить ось *z* из точки *O* вверх, то силовая функция системы записывается в виде

$$U = -\frac{c}{2}(x-a)^2 + m_1 g x cos\varphi + m_2 g \frac{l}{2} cos\varphi$$

и выражения обобщенных сил находятся по формулам:

$$Q_x = \frac{\partial U}{\partial x} = -c(x-a) + m_1 g cos\varphi,\ Q_\varphi = \frac{\partial U}{\partial \varphi} = -g(m_1 x + m_2 \frac{l}{2}) sin\varphi,$$

что совпадает с выражениями, полученными первым способом.

Условия равновесия системы в обобщенных координатах

Согласно принципу возможных перемещений необходимым и достаточным условием равновесия механической системы является равенство нулю суммы элементарных работ всех активных сил на любом возможном перемещении системы, т.е. условие $\sum \delta A_k = 0$. В обобщенных координатах это условие, согласно равенству (14.3), принимает вид

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_m \delta q_m = 0. \qquad (14.7)$$

Так как все величины $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_m$ между собой независимы, то равенство (14.7) может выполняться тогда и только тогда, когда каждый из коэффициентов при $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_m$ в отдельности равен нулю, т.е.

$$Q_1 = 0, Q_2 = 0, \dots, Q_m = 0. \qquad (14.8)$$

В самом деле, если допустить, что одна из этих величин, например, Q_i не равна нулю, то всегда можно сообщить системе такое возможное перемещение, при котором $\delta q_i \neq 0$, а $\delta q_1 = \delta q_2 = \dots = \delta q_{i-1} = \dots = \delta q_{i+1} = \dots = \delta q_m = 0$, и мы придем к противоречию с условием (14.7).

Таким образом, *для равновесия механической системы необходимо и достаточно, чтобы все обобщенные силы, соответствующие выбранным для системы обобщенным координатам, были равны нулю. Число условий равновесия (14.8) равно*, как видим, числу обобщенных координат, т.е. *числу степеней свободы системы*.

Из сравнения метода вычисления обобщенных сил и способа решения задач с помощью принципа возможных перемещений, которым пользовались ранее, видно, что по существу при решении задач с помощью принципа возможных перемещений мы вычисляли соответствующие обобщенные силы, а затем приравнивали их нулю.

Задача 14.4. Два груза *A* и *B*, находящиеся на гладких плоскостях, удерживают в равновесии груз *C* силы тяжести *P* при помощи троса, перекинутого через два соосных блока

I и II и свободный блок III (рис. 14.4). Найти силы тяжести грузов P_1 и P_3, если наклонные плоскости составляют с горизонтом углы α и β. Трением и массой блоков и троса пренебречь.

Нерастяжимый трос представляет собой голономную и стационарную связь, уравнение которой можно записать в виде

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = a. \qquad (14.9)$$

Следовательно, система имеет две степени свободы. Примем x_1 и x_2 за обобщенные координаты. Варьируя уравнение связи (14.9), получим $\delta x_1 + \delta x_2 + 2\delta x_3 = 0$. Отсюда $\delta x_3 = -1/2\,(\delta x_1 + \delta x_2)$. Сообщим грузам A и B виртуальные перемещения, указанные на чертеже, вычислим работу сил тяжести $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ и $\overline{P}$ на этом перемещении и в соответствии с принципом виртуальных перемещений приравняем ее нулю: $\overline{P}_1\delta\overline{r}_A + \overline{P}_2\delta\overline{r}_B + \overline{P}\delta\overline{r}_C = 0$, или

$$P_1|\delta r_A|sin\alpha + P_2|\delta r_B|sin\beta - P|\delta r_C| = 0.$$

Имеем $|\delta r_A| = \delta x_1$, $|\delta r_B| = \delta x_2$, $|\delta r_C| = |\delta x_3| = \ 1/2\,(\delta x_1 + \delta x_2)$.

Подставляя в предыдущее равенство и группируя члены, получим $\left(P_1 sin\alpha - \frac{P}{2}\right)\delta x_1 + \left(P_2 sin\beta - \frac{P}{2}\right)\delta x_2 = 0$. Так как δx_1, δx_2 независимы, то остается приравнять нулю коэффициенты (обобщенные силы) при них:

$$Q_1 = P_1 sin\alpha - \frac{P}{2},\ P_1 = \frac{P}{2sin\alpha},$$

$$Q_2 = P_2 sin\beta - \frac{P}{2},\ P_2 = \frac{P}{2sin\beta}. \qquad (14.10)$$

Эту задачу можно решить, воспользовавшись консервативностью действующих на систему сил.

Составим выражение для потенциальной энергии системы. Для этого вычислим работу, производимую силами тяжести при перемещении системы из данного положения в положение, когда $x_1 = 0$, $x_2 = 0$:

$$\Pi = -P_1x_1 sin\alpha - P_2x_2 sin\beta + \left(\frac{a}{2} - x_3\right)P.$$

Заменяя x_3 из формулы (14.9), получим

$$\Pi = -P_1x_1 sin\alpha - P_2x_2 sin\beta + P\frac{x_1+x_2}{2}.$$

Условия равновесия имеют вид:

$$\frac{\partial\Pi}{\partial x_1} = -P_1 sin\alpha + \frac{P}{2} = 0, \frac{\partial\Pi}{\partial x_2} = -P_2 sin\beta + \frac{P}{2}.$$

Эти уравнения совпадают с полученными ранее.

ЛЕКЦИЯ 15. УРАВНЕНИЕ ЛАГРАНЖА II РОДА

Обобщенные силы инерции. Дифференциальные уравнения движения механической системы в обобщенных координатах (уравнения Лагранжа второго рода).

Как уже было указано выше, наиболее простым универсальным методом исследования движения механической системы с одной степенью свободы (особенно при стационарных связях) является применение теоремы об изменении кинетической энергии. Если же система обладает или несколькими степенями свободы, или нестационарными связями, или тем и другим вместе, то применение только лишь теоремы об изменении кинетической энергии становится недостаточным для полного решения задачи. Процесс составления дифференциальных уравнений движения таких систем и их решение значительно упрощаются при использовании дифференциальных уравнений движения системы в обобщенных координатах (уравнения Лагранжа второго рода).

Уравнения Лагранжа второго рода дают общий метод составления дифференциальных уравнений движения механической системы с голономными идеальными удерживающими связями в обобщенных координатах.

Чтобы найти уравнения движения механической системы в обобщенных координатах, обратимся к общему уравнению динамики:

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^{Ф} = 0. \qquad (15.1)$$

Для общности не будем предполагать, что все наложенные на систему связи являются идеальными. Поэтому в первую сумму могут входить как работы активных сил, так и, например, работы сил трения.

Пусть система имеет m степеней свободы и ее положение определяется обобщенными координатами $q_1, q_2, \dots, q_m$. Тогда

$$\sum \delta A_k^a = Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + \cdots + Q_m\delta q_m. \qquad (15.2)$$

Очевидно, что совершенно так же, как это было сделано для сил F_k, можно выразить через обобщенные координаты элементарную работу сил инерции $F_k^{Ф}$. При этом получим

$$\sum \delta A_k^{Ф} = Q_1^{Ф}\delta q_1 + Q_2^{Ф}\delta q_2 + \cdots + Q_m^{Ф}\delta q_m, \qquad (15.3)$$

где $Q_1^{Ф}$, $Q_2^{Ф}$, …, $Q_m^{Ф}$ – обобщенные силы инерции, которые будут иметь вид:

$$Q_i^{Ф} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^{Ф} \frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_i}. \qquad (15.4)$$

Подставляя величины (15.3) и (15.4) в уравнение (15.1), найдем

$$\left(Q_1^{а} + Q_1^{Ф}\right)\delta q_1 + \left(Q_2^{а} + Q_2^{Ф}\right)\delta q_2 + \cdots + \left(Q_m^{а} + Q_m^{Ф}\right)\delta q_m = 0.$$

Так как все $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_m$ между собой независимы, то полученное равенство может выполняться тогда и только тогда, когда каждый из коэффициентов при $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_m$в отдельности равен нулю. Следовательно, должно быть

$$Q_1^{а} + Q_1^{Ф} = 0,\ Q_2^{а} + Q_2^{Ф} = 0,\ \dots,\ Q_m^{а} + Q_m^{Ф} = 0. \qquad (15.5)$$

Полученными уравнениями можно непосредственно пользоваться для решения задач динамики. Однако процесс составления этих уравнений значительно упроститься, сели выразить все входящие сюда обобщенные силы инерции через кинетическую энергию системы. Преобразуем сначала величину $Q_1^{Ф}$. Поскольку сила инерции любой из точек системы равна $\overline{F}_k^{Ф} = -m_k\overline{a}_k = -m_k\frac{d\overline{v}_k}{dt}$, то

$$-\overline{Q}_1^{Ф} = \sum m_k \frac{d\overline{v}_k}{dt}\frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_i}. \qquad (15.6)$$

Чтобы выразить $\overline{Q}_1^{Ф}$ через кинетическую энергию системы, надо преобразовать правую часть равенства (15.6) так, чтобы она содержала только скорости v_k точек системы. С этой целью заметим, прежде всего, что

$$\frac{d\overline{v}_k}{dt}\frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left(\overline{v}_k\frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_1}\right) - \overline{v}_k\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_1}\right). \qquad (15.7)$$

В справедливости равенства (15.7) легко убедиться, продифференцировав произведение, стоящее справа в скобках. Дальнейшее преобразование осуществляется с помощью следующих двух равенств:

$$\frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_1} = \frac{d\overline{v}_k}{dq_1} \text{ и } \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_1}\right) = \frac{d\overline{v}_k}{dq_1}. \qquad (15.8)$$

Докажем справедливость первого из них. Так как $\overline{r}_k = \overline{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_m)$, то

$$\overline{v}_k = \frac{d\overline{r}_k}{dt} = \frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_1}q_1 + \frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_2}q_2 + \cdots + \frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_m}q_m \text{ и } \frac{\partial \overline{v}_k}{\partial q_1} = \frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_1}.$$

Справедливость второго из равенств (15.8) следует из того, что операции полного дифференцирования по t и частного по q переместительны, т.е. $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_1}\right) = \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{d\overline{r}_k}{dt}\right) = \frac{\partial \overline{v}_k}{\partial q_1}$.
Подставив теперь величины (15.8) в равенство (15.7), получим

$$\frac{d\overline{v}_k}{dt}\frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left(\overline{v}_k\frac{\partial \overline{v}_k}{\partial q_1}\right) - \overline{v}_k\frac{\partial \overline{v}_k}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \overline{v}_k^2}{\partial q_1}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial \overline{v}_k^2}{\partial q_1}.$$

Формула (15.6), если учесть, что сумма производных равна производной от суммы, а $\overline{v}_k^2 = v_k^2$, примет вид

$$-\overline{Q}_1^{\Phi} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\sum\frac{m_k v_k^2}{2}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\sum\frac{m_k v_k^2}{2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1},$$

где $T = \sum\frac{m_k v_k^2}{2}$ – кинетическая энергия системы.

Аналогичные выражения получатся для всех остальных обобщенных сил инерции. В результате равенства (15.5) дадут окончательно:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1,\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_m}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_m} = Q_m.
\end{aligned} \qquad (15.9)$$

Уравнения (15.9) представляют собой *дифференциальные уравнения движения системы в обобщенных координатах или уравнения Лагранжа 2-го рода*. Число этих уравнений, как видим, равно числу степеней свободы системы.

Уравнения Лагранжа дают единый и достаточно простой метод решения задач динамики. Важное преимущество этих уравнений состоит в том, что их вид и число не зависят ни от количества тел (или точек), входящих в рассматриваемую систему, ни от того, как эти тела движутся. Кроме того, при идеальных связях в правые части уравнения (15.9) входят обобщенные активные силы, и, следовательно, эти уравнения позволяют заранее исключить из рассмотрения все наперед неизвестные реакции связей.

Основная задача динамики в обобщенных координатах состоит в том, чтобы, зная обобщенные силы Q_1, Q_2, …, Q_m и начальные условия, найти закон движения системы, т.е. определить обобщенные координаты $q_1, q_2, \dots, q_m$ как функции времени. Так как кинетическая энергия T зависит от обобщенных скоростей q_i, то при дифференцировании первых членов уравнений (15.9) по t в левых частях этих уравнений появятся вторые производные по времени $\ddot{q}_i$ от искомых координат. Следовательно, уравнения Лагранжа представляют собой обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка относительно обобщенных координат $q_1, q_2, \dots, q_m$.

Случай потенциальных сил. Если действующие на систему силы потенциальные, то уравнения можно представить в виде $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0$ или

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T-\Pi)}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial (T-\Pi)}{\partial q_i} = 0, \ (i=1,\ 2,\ m).$$

Последнее равенство справедливо потому, что потенциальная энергия П зависит только от координат $q_{ir}, q_t, \dots, q_t$, а от обобщенных скоростей не зависит, $\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_i} = 0$, ($i$=1, 2,…, m).

Введем функцию

$$L=T\text{-}\Pi. \qquad (15.10)$$

Функция L от обобщенных координат и обобщенных скоростей, равная разности между кинетической и потенциальной энергиями системы, называется *функцией Лагранжа* или *кинетическим потенциалом*. Тогда в случае потенциальных сил уравнения Лагранжа примут вид

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0,\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_m} = 0.
\end{aligned} \qquad (15.11)$$

Следовательно, состояние механической системы, на которую действуют потенциальные силы, определяется заданием одной только функции Лагранжа, так как, зная эту функцию, можно составить дифференциальные уравнения движения системы.

Задача 15.1. Лебедка, установленная на упругой балке *AB*, предназначена для подъема груза *D* массой *m* (рис. 15.1). Барабан лебедки можно рассматривать как однородный круглый диск радиусом r и массой m_2. Масса невращающихся частей лебедки равна m_3. Найти закон движения груза *D*, если к барабану лебедки приложен постоянный момент *M*, движение начинается из состояния покоя, статический прогиб балки под действием сил тяжести лебедки и груза *D* равен δ_{cm}, массой балки можно пренебречь.

Решение. Система имеет две степени свободы, и ее положение определяется двумя обобщенными координатами (рис. 15.1), а именно x и y, где x – смещение оси барабана лебедки относительно ее положения статического равновесия, а y – расстояние груза *D* от оси лебедки. Уравнения Лагранжа запишутся так:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial x_i}=Q_x,\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial y_i}=Q_y.$$

Для определения обобщенной силы Q_x дадим координате *x* приращение δx, оставляя координату y без изменения, и подсчитаем сумму элементарных работ сил тяжести $\overline{P}_1=m_1\overline{g},\ \overline{P}_2=m_2\overline{g},\ \overline{P}_3=m_3\overline{g}$ и силы упругости балки $\overline{F}$ на этом перемещении: $(\sum\delta A)_x=-F\delta x+(P_1+P_2+P_3)\delta x=\left[-\frac{P_1+P_2+P_3}{\delta_{cm}}(\delta_{cm}+x)+P_1+P_2+P_3\right]\delta x=$ $-(P_1+P_2+P_3)\frac{x}{\delta_{cm}}\delta x=Q_x\delta x$, где $(P_1+P_2+P_3)\delta_{cm}\delta x=c$ – жесткость балки. Таким образом, $Q_x=-g\,(m_1+m_2+m_3)x/\delta_{cm}$. Для определения Q_y дадим координате *y* приращение δy, оставляя координату *x* без изменения. При этом барабан лебедки повернется на угол $\delta\varphi=\delta y/r$. Тогда $(\sum\delta A)_y=P_1\delta y-M\delta\varphi=(P_1-M/r)\delta y=Q_y\delta y$, откуда $Q_y=m_1g-M/r$.

Кинетическая энергия системы

$$T=T_{\text{леб}}+T_{\text{гр}}=T_{\text{кор}}+T_{\text{бар}}+T_{\text{гр}},$$

где $T_{\text{кор}}=m_3\dot{x}^2/2$ – кинетическая энергия не вращающихся частей лебедки, $T_{\text{бар}}=m_2\dot{x}^2/2+m_2\dot{y}^2/2$– кинетическая энергия барабана лебедки, $T_{\text{гр}}=m_1(\dot{x}+\dot{y})^2/2$– кинетическая энергия груза *D*. Итак, $T=\frac{m_2+m_3}{2}\dot{x}^2+\frac{m_2}{4}\dot{y}^2+\frac{m_1}{2}(\dot{x}+\dot{y})^2$. Далее находим: $\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{\partial T}{\partial y}=0$, $\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=(m_1+m_2+m_3)\dot{x}+m_1\dot{y}$, $\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}=m_1\dot{x}+(m_1+0{,}5m_2)\dot{y}$, $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=(m_1+m_2+m_3)\ddot{x}+m_1\ddot{y}$, $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}=m_1\ddot{x}+(m_1+0{,}5m_2)\ddot{y}$. Подставляя эти значения в уравнения Лагранжа, получаем $(m_1+m_2+m_3)\ddot{x}+m_1\ddot{y}=-g(m_1+m_2+m_3)\frac{x}{\delta_{cm}}$, $m_1\ddot{x}+(m_1+0{,}5m_2)\ddot{y}=m_1g-\frac{M}{r}$. Исключив из этой системы *y*, найдем для определения *x(t)* уравнение $\ddot{x}+k^2x=-b$, где $k^2=\frac{g/\delta_{cm}}{f-m_1^2/[(m_1+0{,}5m_2)(m_1+m_2+m_3)]}$, $b=\frac{f-M/m_1gr}{(m_1+m_2+m_3)(m_1+0{,}5m_2)/m_1^2-1}g$.

При нулевых начальных условиях $(t=0, x_0=0, \dot{x}_0=0)$ это уравнение имеет решение $x=-(b/k^2)(1-coskt)$, т.е. ось барабана совершает гармонические колебания с частотой k и амплитудой b/k^2, причем центр колебаний смещен от положения статического равновесия оси барабана на величину амплитуды вверх при $M<m_1gr$ или вниз при $M>m_1gr$. Если же $M=m_1gr$, то при нулевых начальных условиях движение системы невозможно.

Дважды интегрируя второе уравнение системы, получим

$m_1x+(m_1+0{,}5m_2)y=(m_1g-M/r)\frac{t^2}{2}$ или

$$y = \frac{m_1}{m_1+0{,}5m_2}\frac{b}{k^2}(1-coskt) + \frac{m_1gr-M}{m_1+0{,}5m_2}\frac{t^2}{2r}.$$

Эта формула определяет закон движения груза D относительно подвижной оси барабана лебедки. Для абсолютного движения груза D будем иметь выражение

$y_D = y + x = -\frac{0{,}5m_2}{m_1+0{,}5m_2}\frac{b}{k^2}(1-coskt) + \frac{m_1gr-M}{m_1+0{,}5m_2}\frac{t^2}{2r}$, из которого следует, что на равноускоренное движение груза D с ускорением $\frac{m_1gr-M}{m_1+0{,}5m_2}\frac{t}{r}$ накладываются гармонические колебания с частотой k и амплитудой $\frac{0{,}5m_2}{m_1+0{,}5m_2}\frac{b}{k^2}$.

ЛЕКЦИЯ 16. ЯВЛЕНИЕ УДАРА

Основные понятия явления удара. Действие ударной силы на точку. Основные допущения. Коэффициент восстановления при ударе. Теорема об изменении количества движения механической системы при ударе. Удар двух тел. Прямой центральный удар шара о неподвижную поверхность, упругий и неупругий удар. Коэффициент восстановления при ударе.

При движении тела под действием обычных сил, рассматривавшихся до сих пор, скорости точек тела изменяются непрерывно, т.е. каждому бесконечно малому промежутку времени соответствует бесконечно малое приращение скорости.

Во многих случаях можно наблюдать явление, называемое *ударом*, когда *за очень малый (близкий к нулю) промежуток времени* τ *сокрости точек тел меняются на конечную величину*. Так, например, если мяч падает на горизонтальный пол, имея в начале соприкосновения с полом скорость $\overline{v}$, и отскакивает от пола со скоростью $\overline{u}$, то изменение скорости $u - v$ представляет конечную величину, а процесс удара происходит за ничтожно малое время τ.

Чтобы за очень малый промежуток времени τскорости точек тела изменились на конечную величину, силы, действующие на тело, должны быть очень велики. Действительно, пусть под действием сил F материальная точка массы m за очень короткий промежуток времени τ изменила скорость на конечную величину $(u - v)$, где скорости v и u – скорости точки до и после удара соответственно. Применим к материальной точке второй закон Ньютона:

$$m\frac{d\overline{v}}{dt} = \overline{F} \qquad (16.1)$$

или

$$md\overline{v} = \overline{F}dt.$$

Интегрируя это равенство от нуля до τ, получим

$$m(\overline{u} - \overline{v}) = \int_0^{\tau}\overline{F}dt. \qquad (16.2)$$

Пользуясь теоремой о среднем, найдем

$$m(\overline{u} - \overline{v}) = \overline{F}_{\text{ср}}\tau,$$

где $F_{\text{ср}}$ – среднее значение силы Fза время ее действия. Отсюда $F_{\text{ср}} = \frac{m|u-v|}{\tau}$.

Так как числитель правой части этого равенства представляет конечную величину, а знаменатель очень мал, то даже среднее значение силы F очень велико. В дальнейшем силу, действующую в течение очень короткого промежутка времени, модуль которой достигает большого значения, будем называть *ударной силой*.

Как правило, мы не знаем закона изменения ударной силы F, но примерный график ее модуля можно построить. До удара и после него сила F равна нулю, а в промежутке $(0,\ \tau)$ ее модуль достигает очень большой величины. Очевидно, что график модуля силы F должен иметь вид, изображенный на рис. 16.1, на этом же рисунке показано среднее значение $F_{\text{ср}}$.

Для того чтобы примерно оценить модуль силы F, рассмотрим следующую задачу.

Задача 16.1. Предположим, что камень массы m = 1 кг падает вертикально вниз с высоты h = 10 м на панель, причем после падения он не отскакивает. Считая, что продолжительность удара $\tau = 0{,}001$ с , найдем среднее значение силы $F_{\text{ср}}$.

Решение. В условиях задачи скорость камня в начале удара $v = \sqrt{2gh} \approx 14{,}1$ м/c (сопротивлением воздуха пренебрегаем), а скорость после удара u равна нулю. Пользуясь последней формулой, получим $F_{\text{ср}} = m\frac{v}{\tau} \approx 1 \cdot \frac{14{,}1}{0{,}001} \approx 14{,}1$ кН. Это только среднее значение силы F, если считать, что максимальное значение силы F вдвое больше среднего значения (см. рис. 16.1), получим $F_{max} = 28{,}2$ кН. Эти числа наглядно показывают, почему иногда при ударе происходит разрушение тел.

Вернемся к равенству (16.2), правая часть которого равна импульсу $\overline{S}$ силы $\overline{F}$,

$$\overline{S} = \int_0^\tau \overline{F}dt. \qquad (16.3)$$

Теперь равенство (16.2) принимает вид

$$m(\overline{u} - \overline{v}) = \overline{S}. \qquad (16.4)$$

Вектор $\overline{S}$ называется *ударным импульсом*. Численно ударный импульс равен площади заштрихованной фигуры (рис.16.1).

Таким образом, *изменение количества движения материальной точки за время удара равно сумме действующих на точку ударных импульсов*. Уравнение (16.4) является *основным уравнением теории удара*.

В теоретической механике принята следующая идеализация удара: при конечном ударном импульсе удар происходит мгновенно, из чего вытекает следующее:

1) перемещениями точек тела за время удара можно пренебречь и считать тело во время удара неподвижным;
2) действием неударных сил (таких, например, как сила тяжести) за время удара можно пренебречь;
3) изменения скоростей точек тела за время удара определяются основным уравнением теории удара (16.4).

Общие теоремы теории удара

Рассмотрим, какой вид принимают общие теоремы динамики для системы материальных точек при ударе.

1. Теорема об изменении количества движения системы при ударе

Так как импульсами обычных сил при ударе пренебрегают; то в правой части теоремы импульсов останутся только ударные импульсы. Следовательно, при ударе

$$\overline{Q}_1 - \overline{Q}_0 = \sum_{k=1}^{n} \overline{S}_k^e, \qquad (16.5)$$

т.е. *изменение количества движения системы за время удара равно сумме всех внешних ударных импульсов, действующих на систему*. В проекциях на координатные оси уравнение примет вид:

$$Q_{1x} - Q_{0x} = \sum_{k=1}^{n} S_{kx}^e,\ Q_{1y} - Q_{0y} = \sum_{k=1}^{n} S_{ky}^e,\ Q_{1z} - Q_{0z} = \sum_{k=1}^{n} S_{kz}^e. \qquad (16.6)$$

Если геометрическая сумма всех внешних ударных импульсов равна нулю, то, как видно из уравнения (16.6), количество движения системы за время удара не изменяется. Следовательно, внутренние ударные импульсы не могут изменить количества движения всей системы.

2. *Теорема об изменении главного момента количеств движения системы (теорема моментов) при ударе*

Теорема моментов принимает для случая удара вид, несколько отличный от полученного ранее для системы; объясняется это тем, что точки системы за время удара не перемещаются. Рассмотрим систему, состоящую из n материальных точек. Обозначим равнодействующую внешних ударных импульсов, действующих на точку с массой m_k, через

$\overline{S}_k^e$, а равнодействующую действующих на ту же точку внутренних ударных импульсов через $\overline{S}_k^i$. Тогда по уравнению (16.4) будет: $m_k(\overline{u}_k - \overline{v}_k) = \overline{S}_k^e - \overline{S}_k^i$ или $m_k\overline{u}_k = m_k\overline{v}_k + \overline{S}_k^e + \overline{S}_k^i$. Тогда, беря моменты этой суммы относительно какого-нибудь центра О, по теореме Вариньона, найдем, что $\overline{m}_0(m_k\overline{u}_k) = \overline{m}_0(m_k\overline{u}_k) + \overline{m}_0(\overline{S}_k^e) + \overline{m}_0(\overline{S}_k^i)$. Составляя такие равенства для всех точек системы и, складывая их почленно, получим

$$\overline{K}_1 - \overline{K}_0 = \sum \overline{m}_0(\overline{S}_k^e), \qquad (16.7)$$

где $\overline{K}_1$, $\overline{K}_0$ – главные моменты количеств движения системы относительно центра О в конце и в начале удара, а сумма моментов внутренних ударных импульсов по свойству внутренних сил равна нулю.

Таким образом, *изменение за время удара главного момента количеств движения системы относительно какого-нибудь центра равно сумме моментов относительно того же центра всех действующих на систему внешних ударных импульсов*.

В проекциях на координатные оси получаем равенства

$$\overline{K}_{1x} - \overline{K}_{0x} = \sum \overline{m}_{0x}(\overline{S}_k^e),$$
$$\overline{K}_{1y} - \overline{K}_{0y} = \sum \overline{m}_{0y}(\overline{S}_k^e),$$
$$\overline{K}_{1z} - \overline{K}_{0z} = \sum \overline{m}_{0z}(\overline{S}_k^e).$$

Из полученных уравнений следует, что если сумма моментов внешних ударных импульсов относительно какого-нибудь центра (или оси) равна нулю, то главный момент количеств движения системы относительно этого центра (или оси) за время удара не изменяется. Следовательно, внутренние ударные импульсы не могут изменить главный момент количеств движения системы.

Коэффициент восстановления при ударе

Значение ударного импульса, появляющегося при соударении двух тел, зависит не только от их масс и скоростей до удара, но и от упругих свойств соударяющихся тел; эти свойства при ударе характеризуют величиной, *называемой коэффициентом восстановления*.

Рассмотрим шар, падающий вертикально на неподвижную горизонтальную жесткую плиту (рис.16.2). Для прямого удара, который при этом произойдет, можно различать две стадии. В течение первой стадии скорости частиц шара, равные в момент начала удара $\overline{v}$ (движение шара считаем поступательным), убывают до нуля. Шар при этом деформируется и вся его начальная кинетическая энергия $mv^2/2$ переходит во внутреннюю потенциальную энергию деформированного тела. Во второй стадии удара шар под действием внутренних сил (сил упругости) начинает восстанавливать свою форму; при этом его внутренняя потенциальная энергия переходит в кинетическую энергию движения частиц шара. В конце удара скорости частиц будут равны u, а кинетическая энергия шара $mv^2/2$. Однако полностью механическая энергия шара при этом не восстанавливается, так как часть ее уходит на сообщение шару остаточных деформаций и его нагревание. Поэтому скорость u будет меньше v. *Величина k, равная при прямом ударе тела о неподвижную преграду отношению модуля скорости тела в конце удара к модулю скорости в начале удара, называется коэффициентом восстановления при ударе*:

$$k = \frac{u}{v}. \qquad (16.8)$$

Значение коэффициента восстановления для разных тел определяется опытным путем. По данным опыта при изменении скорости $\overline{v}$ не в очень больших пределах величину k можно считать зависящей только от материала соударяющихся тел.

В качестве предельных случаев рассматривают случай *абсолютно упругого удара* (k = 1), при котором кинетическая энергия тела после удара полностью восстанавливается, и случай *абсолютно неупругого удара* (k = 0), когда удар заканчивается в первой стадии и вся кинетическая энергия тела теряется на его деформацию и нагревание.

Экспериментально величину k можно найти, если рассмотреть шар, свободно падающий на плиту с предварительно измеренной высоты H, и определить с помощью стоящей рядом вертикальной рейки (рис. 16.3) высоту его подъема h после удара. Тогда по формуле Галилея

$$v = \sqrt{2gH}, u = \sqrt{2gH} \text{ и } k = \frac{u}{v} = \sqrt{\frac{h}{H}}.$$

Значение коэффициента восстановления для тел из различных материалов дается в соответствующих справочниках. В частности, можно считать при скоростях соударения порядка 3 м/с при ударе дерева о дерево $k \approx 0{,}5$, стали о сталь $k \approx 0{,}56$, стекла о стекло $k \approx 0{,}94$.

Удар о неподвижную преграду

Рассмотрим тело (шар) массой m, ударяющееся о неподвижную плиту. Действующей на тело ударной силой будет при этом реакция плиты, импульс этой силы за время удара назовем $\overline{S}$. Пусть нормаль к поверхности тела в точке его касания с плитой проходит через центр масс тела (для шара это будет всегда). Такой удар тела называется *центральным*. Если скорость $\overline{v}$ центра масс тела в начале удара направлена по нормали $\overline{n}$ к плите, то удар будет *прямым*, в противном случае – *косым*.

1. ***Случай прямого удара***. Составляя в этом случае уравнение (16.4) в проекции на нормаль $\overline{n}$ (рис. 16.3) и учитывая, что $\overline{Q}_0 = M\overline{v}$, а $\overline{Q}_1 = M\overline{u}$, получим $M(u_n - v_n) = S_n$. Но при прямом ударе $u_n = u$, $v_n = -v$, $S_n = S$. Следовательно, $M(u - v) = S$. Второе уравнение, необходимое для решения задачи, дает равенство (16.8): $u = kv$.

Из полученных уравнений, зная M, v, k, найдем неизвестные величины u и S. При этом $S = M(1 + k)v$. Как видим, ударный импульс будет тем больше, чем больше коэффициент восстановления k.

Чтобы определить среднюю величину ударной силы (реакции), надо дополнительно знать время удара τ, которое можно найти экспериментально.

2. ***Случай косого удара***. Пусть в этом случае скорость $\overline{v}$ центра масс тела в начале удара образует с нормалью к плиту угол α, а скорость $\overline{u}$ в конце удара – угол β (рис. 16.4). Тогда уравнение (16.4) в проекциях на касательную τ и нормаль $\overline{n}$ даст $M(u_\tau - v_\tau) = 0$, $M(u_n - v_n) = S$. Коэффициент восстановления в данном случае равен отношению модулей $|u_n|$ и $|v_n|$, так как удар происходит только по направлению нормали к поверхности (влиянием трения пренебрегаем). Тогда с учетом знаков проекций получим $u_n = -kv_n$. В результате окончательно находим: $u_\tau = v_\tau$, $u_n = -kv_n$, $S = M|v_n|(1 + k)$. Из полученных уравнений можно найти модуль и направление скорости в конце удара и ударный импульс, если величины M, v, α и k известны. В частности, из первого равенства, замечая, что $v_\tau = |v_n| tg\alpha$ и $u_\tau = |u_n| tg\beta$, получаем $|u_n| tg\beta = |v_n| tg\alpha$, откуда $k = \frac{|u_n|}{|v_n|} = \frac{tg\alpha}{tg\beta}$. Следовательно, при косом ударе отношение тангенса угла падения к тангенсу угла отражения равно коэффициенту восстановления. Так как $k < 1$, то $\alpha < \beta$, т.е. угол падения всегда меньше угла отражения.

Прямой центральный удар двух тел (удар шаров)

При соударении двух тел удар называется *прямым и центральным*, когда общая нормаль к поверхностям тел в точке касания проходит через их центры масс и когда скорости центров масс в начале удара направлены по этой общей нормали. Таким, в частности, будет удар двух однородных шаров, центры которых до удара движутся вдоль одной и той же прямой.

Пусть массы соударяющихся тел равны M_1 и M_2, скорости их центров масс в начале удара v_1 и v_2, а в конце удара u_1 и u_2. Проведем через центры масс C_1 и C_2 координатную ось C_1x, направленную всегда от C_1 к C_2 (рис.16.5). Тогда, чтобы произошел удар, должно быть $v_{1x} > v_{2x}$ (иначе первое тело не догонит второе); кроме того, $u_{1x} \leq u_{2x}$, так как ударившее тело не может опередить ударяемое.

Считая M_1, M_2, v_{1x}, v_{2x} и k известными, найдем u_{1x} и u_{2x}. Для этого применим теорему об изменении количества движения к соударяющимся телам, рассматривая их как одну систему. Тогда ударные силы, действующие между телами, будут внутренними. В результате уравнение (16.5) преобразуется к виду $Q_{1x} = Q_{2x}$ или

$$M_1u_{1x} + M_2u_{2x} = M_1v_{1x} + M_2v_{2x}. \qquad (16.9)$$

Второе уравнение найдем из выражения для коэффициента восстановления. При соударении двух тел интенсивность удара (ударный импульс) зависит не от абсолютного значения скорости каждого из тел, а от того, насколько скорость ударяющегося тела превышает скорость ударяемого, т.е. от разности $v_{1x} - v_{2x}$. Поэтому при ударе двух тел, если учесть, что всегда $v_{1x} > v_{2x}$ и $u_{1x} \leq u_{2x}$, получим:

$$k = \frac{|u_{1x}-u_{2x}|}{|v_{1x}-v_{2x}|} = -\frac{u_{1x}-u_{2x}}{v_{1x}-v_{2x}} \qquad (16.10)$$

или

$$u_{1x} - u_{2x} = -k(v_{1x} - v_{2x}). \qquad (16.11)$$

Уравнения (16.10), (16.11) позволяют решить поставленную задачу. Ударный импульс, действующий на соударяющиеся тела, найдем, составив уравнение (16.11) для какого-нибудь одного из тел, например, для первого. Тогда $S_{1x} = M_1(u_{1x} - v_{1x})$, $S_{2x} = -S_{1x}$.

Рассмотрим два предельных случая:

1)абсолютно неупругий удар ($k = 0$). В этом случае из уравнений (16.10) и (16.9) находим

$$u_{1x} = u_{2x} = \frac{M_1v_{1x}+M_2v_{2x}}{M_1+M_2}. \qquad (16.12)$$

Оба тела после удара движутся с одной и той же скоростью. Действующий на тела ударный импульс при этом

$$S_{2x} = -S_{1x} = \frac{M_1M_2}{M_1+M_2}(v_{1x} - v_{2x});$$

2)абсолютно упругий удар ($k = 1$). В этом случае из уравнений (16.9) и (16.10) получаем

$$u_{1x} = v_{1x} - \frac{2M_2}{M_1+M_2}(v_{1x} - v_{2x}),$$
$$u_{2x} = v_{2x} + \frac{2M_2}{M_1+M_2}(v_{1x} - v_{2x}). \qquad (16.13)$$

Действующий на тела ударный импульс при этом

$$S_{2x} = -S_{1x} = \frac{2M_1M_2}{M_1+M_2}(v_{1x} - v_{2x}).$$

Как видим, при абсолютно упругом ударе ударный импульс двое больше, чем при абсолютно неупругом. В частном случае, когда $M_1 = M_2$, получаем из уравнения (16.13) $u_{1x} = v_{2x}$, $u_{2x} = v_{1x}$, таким образом, два тела одинаковой массы при абсолютно упругом ударе обмениваются скоростями.

Задача 16.3. два шара массой M_1 и M_2подвешены так, как показано на рис. 16.6. первый шар отклоняют на угол α и отпускают без начальной скорости. После удара второй шар отклоняется на угол β. Найти коэффициент восстановления для шаров при ударе.

Решение. По данным задачи можно определить скорость v_1 центра первого шара в начале удара и скорость u_2 центра второго шара в конце удара. Из теоремы об изменении кинетической энергии на перемещении B_1B_2 находим для первого шара $M_1v_1^2 = 2M_1gl(1 - cos\alpha)$, где l – расстояние центра шара от точки подвеса (рис. 16.6). Отсюда $v_1 = 2\sqrt{gl}\sin(\alpha/2)$.

Аналогично находим, что $u_2 = 2\sqrt{gl}\sin(\beta/2)$.

Так как в нашем случае $v_2 = 0$, уравнения (16.9) и (16.10) дают $M_1u_{1x} + M_2u_{2x} = M_1v_{1x}$, $u_{2x} - u_{1x} = kv_{1x}$, то, исключая из этих уравнений u_{1x} и замечая, что $v_{1x} = v_1$, а $u_{2x} = u_2$, получим $M_1v_1(1+k) = (M_1+M_2)u_2$. Отсюда окончательно находим: $k = \frac{(M_1+M_2)u_2}{M_1v_1} - 1 = \frac{(M_1+M_2)\sin(\beta/2)}{M_1\sin(\alpha/2)} - 1$.

ЛЕКЦИЯ 17. ЯВЛЕНИЕ УДАРА. ТЕОРЕМА КАРНО

Потеря кинетической энергии при неупругом ударе двух тел. Теорема Карно. Удар по вращающемуся телу. Центр удара.

Потеря кинетической энергии при неупругом ударе двух тел. Теорема Карно

Из рассуждений, приведенных ранее, следует, что при неупругом ударе происходит потеря кинетической энергии соударяющихся тел. Наибольшей эта потеря будет при абсолютно неупругом ударе. Подсчитаем, какую кинетическую энергию теряет система при абсолютно неупругом ударе двух тел.

Считая, что соударяющиеся тела движутся поступательно, и, обозначая их общую скорость после абсолютно неупругого удара через u, получим для кинетической энергии системы в начале и в конце удара значения:

$$2T_0 = M_1v_{1x}^2 + M_2v_{2x}^2, \qquad 2T_1 = (M_1+M_2)u_x^2. \tag{17.1}$$

Потерянная при ударе кинетическая энергия равна $T_0 - T_1$. Представим эту разность в виде

$$T_0 - T_1 = T_0 - 2T_1 + T_1. \tag{17.2}$$

Так как из формулы (17.2) следует, что

$$(M_1+M_2)u_x = M_1v_{1x} + M_2v_{2x},$$

то отсюда

$$2T_1 = (M_1+M_2)u_x^2 = (M_1v_{1x} + M_2v_{2x})u_x. \tag{17.3}$$

Подставляя в правую часть равенства (17.3) вместо T_0 и T_1 их значения из формул (17.1), а вместо $2T_1$ – правую часть выражения (17.3), получим:

$$T_0 - T_1 = \frac{1}{2}(M_1v_{1x}^2 + M_2v_{2x}^2 - 2M_1v_{1x}u_x - 2M_2v_{2x}u_x + M_1u_x^2 + M_2u_x^2)$$

или

$$T_0 - T_1 = \frac{1}{2}M_1(v_{1x} - u_x)^2 + \frac{1}{2}M_2(v_{2x} - u_x)^2. \tag{17.4}$$

Разности $(v_{1x} - u_x)$ и $(v_{2x} - u_x)$ показывают, насколько уменьшилась при ударе скорость каждого из соударяющихся тел. Их можно назвать *потерянными при ударе скоростями*. Тогда из формулы (17.4) вытекает теорема Карно: *кинетическая энергия, потерянная системой тел при абсолютно неупругом ударе, равна той кинетической энергии, которую имела бы система, если бы ее тела двигались с потерянными скоростями*.

Если удар не является абсолютно неупругим ($k \neq 0$), то аналогичными преобразованиями можно найти, что кинетическая энергия, потерянная при ударе двух тел, определяется равенством

$$T_0 - T_1 = \frac{1-k}{1+k}\left[\frac{1}{2}M_1(v_{1x} - u_x)^2 + \frac{1}{2}M_2(v_{2x} - u_x)^2\right]. \tag{17.5}$$

Рассмотрим частный случай абсолютно неупругого удара по первоначально неподвижному телу. В этом случае $v_1 = 0$ и $T_0 = \frac{1}{2}M_1v_1^2$, $u = \frac{M_1v_1}{M_1+M_2}$. Тогда

$$T_1 = \frac{1}{2}(M_1+M_2)u^2 = \frac{1}{2}\frac{M_1^2v_1^2}{M_1+M_2} = \frac{M_1}{M_1+M_2}\frac{M_1v_1^2}{2} \tag{17.6}$$

или

$$T_1 = \frac{M_1}{M_1+M_2} T_0.$$

Формула (17.6) показывает, какая энергия остается у системы после удара. Отметим два интересных предельных случая:

1) масса ударяющегося тела много больше массы ударяемого $M_1 > M_2$.

В этом случае можно считать $M_1 + M_2 \approx M_1$, и из формулы (17.6) получаем $T_1 \approx T_2$. Следовательно, хотя удар и является абсолютно неупругим, потеря кинетической энергии при ударе почти не происходит, и система после удара начнет двигаться почти с той же кинетической энергией, которая у нее была в начале удара.

На практике такой результат, нужно, очевидно, получать при забивании гвоздей, свай и т.п., следовательно, в этом случае нужно, чтобы масса молотка была намного больше массы гвоздя (рис. 17.1, а);

2) масса ударяемого тела много больше массы ударяющегося $M_2 > M_1$. В этом случае можно считать $M_1/(M_1 + M_2) \approx 0$, и из формулы (17.6) $T_2 < 0$. Таким образом, здесь при ударе почти вся кинетическая энергия расходуется на деформацию соударяющихся тел; по окончании удара тело можно считать неподвижным.

Практически такой результат нужно, очевидно, получать при ковке, клепке и т.п. (рис. 17.1, б).

Удар по вращающемуся телу

Рассмотрим тело, имеющее ось вращения z (рис. 17.2). пусть в некоторый момент времени к телу будет приложен ударный импульс S. Тогда по теореме моментов $K_{1z} - K_{0z} = \sum m_{0z}(\overline{S}_k^e)$, так как моменты относительно оси z импульсивных реакций и $\overline{S}_B$, возникающих в подшипниках, будут равны нулю.

Условимся обозначать угловую скорость тела в начале удара через ω, а в конце удара – через Ω. Тогда

$$I_z(\Omega - \omega) = m_z(\overline{S}) \text{ или } \Omega = \omega + \frac{m_z(\overline{S})}{I_z}. \qquad (17.7)$$

Формула (17.7) определяет изменение угловой скорости тела при ударе. Из нее следует, что *угловая скорость тела за время удара изменяется на величину, равную отношению момента ударного импульса к моменту инерции тела относительно оси вращения*.

Задача 17.1. Колесо 1, вращающееся с угловой скоростью ω_1, ударяет выступом D_1 о выступ D_2 первоначально неподвижного колеса 2 (рис. 17.3). Радиусы колес и их моменты инерции относительно осей A_1 и A_2 соответственно равны r_1 и r_2, I_1, I_2. Определить угловую скорость Ω_2 колеса 2 в конце удара, если коэффициент восстановления при ударе равен k.

Решение. При ударе на колеса действуют численно равные ударные импульсы $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$ ($S_1 = S_2 = S$). Тогда, составив уравнение (17.7) для каждого из колес и учтя, что $\omega_2 = 0$, получим $I_1(\Omega_1 - \omega_1) = -Sr_1$, $I_2\Omega_2 = -Sr_2$.

Исключив из уравнений S, придем к равенству

$$I_1 r_2(\Omega_1 - \omega_1) + I_2 r_1 \Omega_2 = 0.$$

Так как скорости точек D_1 и D_2 в начале и конце удара равны соответственно $v_1 = \omega_1 r_1$, $u_1 = \Omega_1 r_1$, $v_2 = 0$, $u_2 = \Omega_2 r_2$, то из формулы, определяющей коэффициент восстановления при прямом ударе, получим $\Omega_1 r_1 - \Omega_2 r_2 = -k\omega_1 r_1$.

Исключив из этих уравнений Ω_1, найдем окончательно $\Omega_2 = \frac{I_1 r_1 r_2}{I_1 r_2^2 + I_2 r_1^2}(1 + k)\omega_1$.

ЛЕКЦИЯ 18. ПОНЯТИЕ ОБ УСТОЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ

Устойчивое и неустойчивое равновесия. Теорема Лагранжа-Дирихле.

Положения равновесия механической системы, обладающей подвижностью, могут быть устойчивыми или неустойчивыми. На примере маятника на жестком стержне рассмотрим качественную сторону этих понятий. Предположим, что маятник находится в одном из своих положений равновесия (это крайние нижняя ил верхняя точки). Дадим ему небольшое смещение из этого первоначального положения и сообщим его точкам в данном новом положении небольшие начальные скорости. Устойчивость или неустойчивость положения равновесия определяются дальнейшим поведением системы (маятника).

Если система в дальнейшем возвращается в положение равновесия или движется в его окрестности, оставаясь в заранее определенных пределах, то такое положение равновесия механической системы будет устойчивым. Так, крайнее нижнее положение маятника является устойчивым положением равновесия, потому что, если вывести маятник из этого положения, то он начинает колебаться с амплитудой, определяемой начальными условиями. При неустойчивом положении равновесия и дальнейшем движении система все дальше и дальше отклоняется от положения равновесия. Так, крайнее верхнее положение равновесия маятника является неустойчивым: самое малое отклонение от него приведет маятник в движение, удаляющее его на весьма большие углы от первоначального положения.

Дадим теперь точное определение устойчивости. Пусть мы имеем механическую систему с m степенями свободы. Ее положение определяется m обобщенными координатами q_1, q_2, …, q_m, которые будем отсчитывать от положения равновесия системы. Таким образом, в положении равновесия все обобщенные координаты равны нулю. Выведем систему из положения равновесия и сообщим ее точкам некоторые начальные скорости. Начальные величины обобщенных координат и скоростей обозначим через q_1^0, q_2^0, q_3^0, …, q_m^0, q_1^0, q_2^0, q_3^0, …, q_m^0.

Равновесие системы называется устойчивым, если для любых сколь угодно малых положительных чисел ε_1, ε_2 можно найти такие положительные величины η_1 и η_2, что при выполнении следующих условий для начальных значений обобщенных координат и скоростей $|q_i^0| < \eta_1$, $|q_i^0| < \eta_2$, во все время последующего движения выполняются условия $|q_{\mathrm{i}}| < \varepsilon_1$, $|q_{\mathrm{i}}| < \varepsilon_2$, $i = 1, 2, \ldots, m$, т.е. при любой совокупности достаточно малых начальных отклонений и начальных скоростей отклонения от положения равновесия и скорости в последующем движении системы не превысят некоторых малых величин.

Принцип возможных перемещений позволяет найти положения равновесия механической системы, но он не определяет, будет ли то или иное положение равновесия устойчивым или неустойчивым, хотя в большинстве случаев только устойчивое равновесие может иметь практический смысл. Достаточное условие устойчивости равновесия для механической системы с идеальными стационарными связями, на которую действуют потенциальные силы, устанавливает теорема Лагранжа-Дирихле: *положение равновесия механической системы является устойчивым, если в этом положении потенциальная энергия имеет минимум*.

Таким образом, в положении устойчивого равновесия для системы с одной степенью свободы $\Pi' = 0$, $\Pi' > 0$.

Задача 18.1. Однородный стержень AB весом P и длиной l (рис. 18.1) может вращаться вокруг шарнира A. К концу стержня привязана невесомая нерастяжимая нить, блок C. К концу нити прикреплена пружина DE с жесткостью $c = P/(2l)$, нижний конец которой закреплен неподвижно. Блок C расположен так, что $AB = AC = l$. При правом горизонтальном положении стержня пружина не напряжена. Пренебрегая трением найти положения равновесия системы и определить их характер.

Решение. Система имеет одну степень свободы. За обобщенную координату примем угол φ. Потенциальная энергия системы при выбранном направлении оси Ay равна $\Pi = -P\frac{l}{2}sin\varphi + \frac{r\lambda^2}{2}$, где деформация пружины $\lambda = BC = 2lsin(\varphi/2)$. Так как по условию $c = P/(2l)$, то

$$\Pi = -P\frac{l}{2}sin\varphi + \frac{P}{4l}4l^2sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{Pl}{2}(-sin\varphi + 1 - cos\varphi).$$

В положении равновесия $\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi} = 0$, и поэтому

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi} = \frac{Pl}{2}(-cos\varphi + sin\varphi) \text{ или } cos\varphi = sin\varphi,$$

откуда $\varphi_1 = \pi/4$, $\varphi_2 = 5\pi/4$.

Мы имеем два положения равновесия. Исследуем их устойчивость по знаку Π'' для каждого из положений равновесия: $\Pi'' = \frac{Pl}{2}(sin\varphi + cos\varphi)$.

При $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$ $\Pi'' = \frac{Pl}{2}\left(sin\frac{\pi}{4} + cos\frac{\pi}{4}\right) = Pl\frac{\sqrt{2}}{2} > 0$; следовательно, положение равновесия устойчиво.

При $\varphi_1 = \frac{5\pi}{4}$ $\Pi'' = \frac{Pl}{2}\left(sin\frac{5\pi}{4} + cos\frac{5\pi}{4}\right) = Pl\frac{\sqrt{2}}{2} < 0$, т.е. это положение равновесия неустойчиво.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

а) основная литература:

1. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. В двух томах. - СПб.: Издательство «Лань», 2009. -736с.
2. Диевский В.А. Теоретическая механика: Учебное пособие. 3-е изд., испр. - СПб.: Издательство «Лань», 2009. - 320 с.: ил.
3. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: Учеб. для втузов. - М.: Высш. шк., 2005. - 416с.

б) дополнительная литература:

1. Диевский В.А., Малышева И. А. Сборник заданий: Учебное пособие. 2-е изд., испр. – СПб.: Издательство «Лань», 2009. - 192 с.: ил.
2. Мещерский И.В. Задачи по теоретической механике: Учеб. пособие. - СПб.: Издательство «Лань», 2008. – 448с.

Приложение

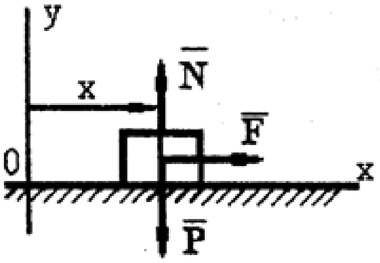

Рис. 1.1

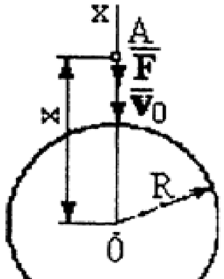

Рис. 1.2

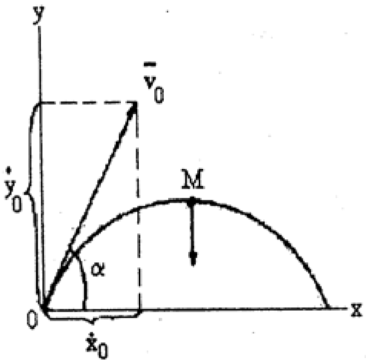

Рис. 1.3

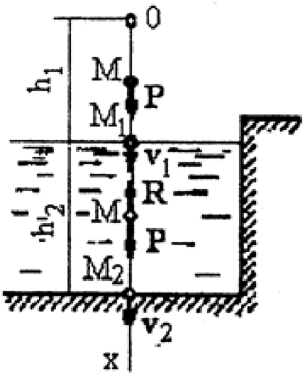

Рис. 1.4

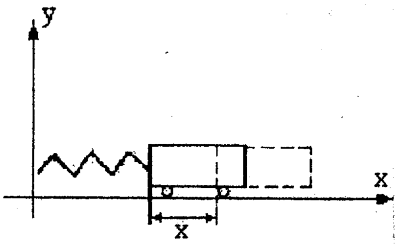

Рис. 2.1

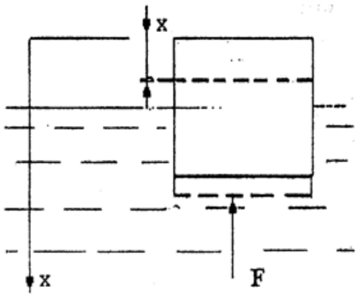

Рис. 2.2

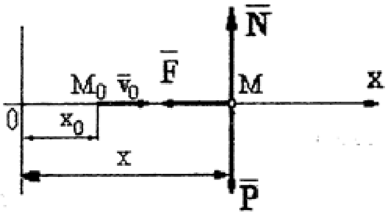

Рис. 2.3

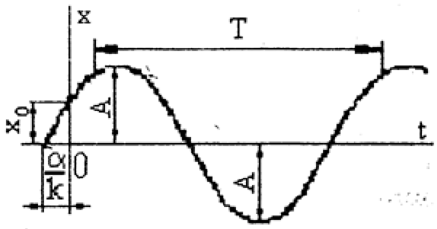

Рис. 2.4

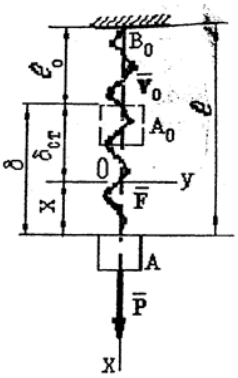

Рис. 2.5

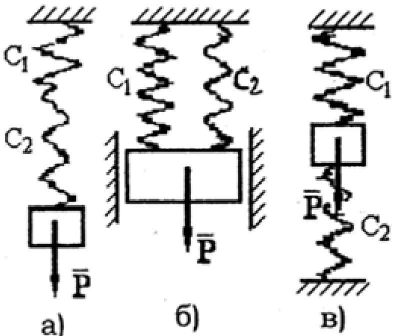

Рис. 2.6

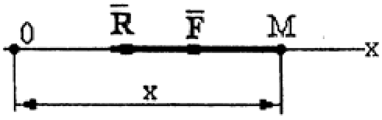

Рис. 3.1

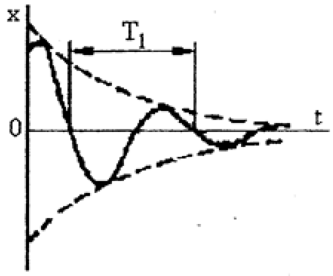

Рис. 3.2

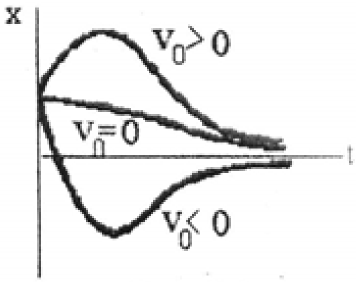

Рис. 3.3

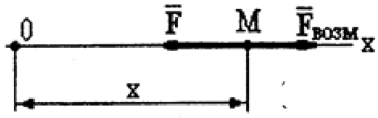

Рис. 3.4

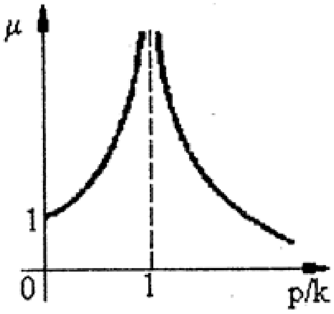

Рис. 3.5

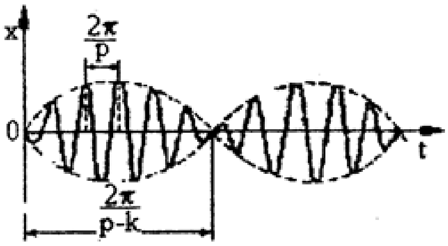

Рис. 3.6

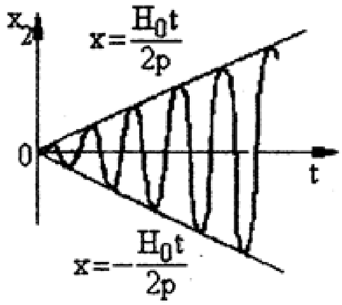

Рис. 3.7

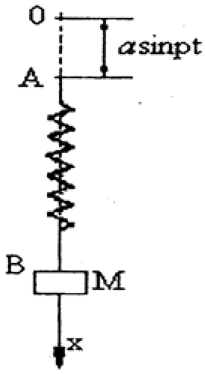

Рис. 3.8

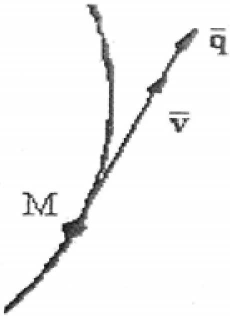

Рис. 4.1

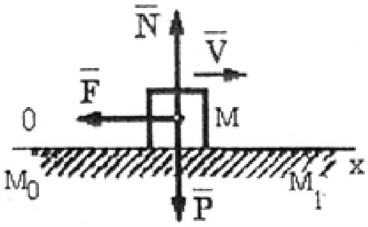

Рис. 4.2

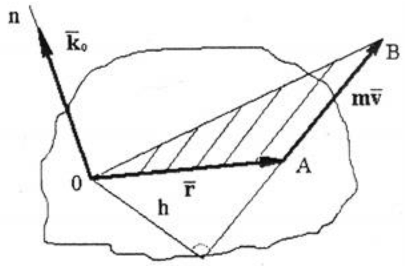

Рис. 4.3

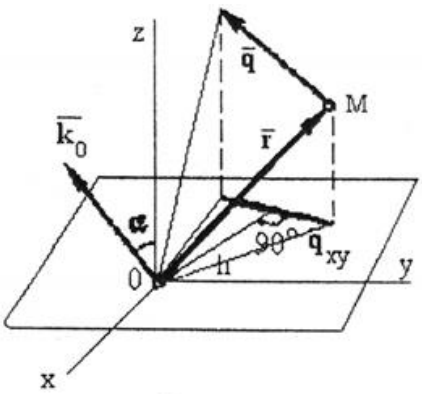

Рис. 4.4

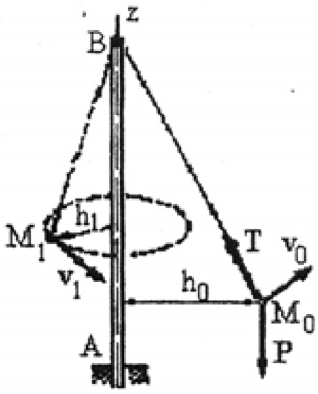

Рис. 4.5

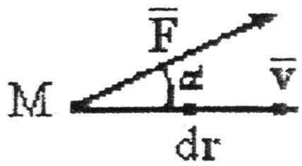

Рис. 5.1

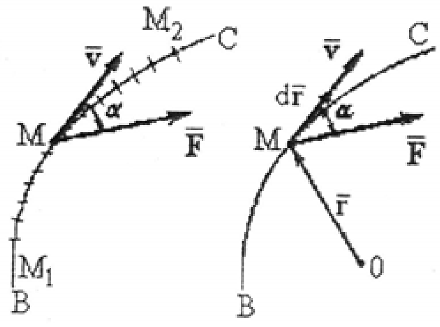

Рис. 5.2

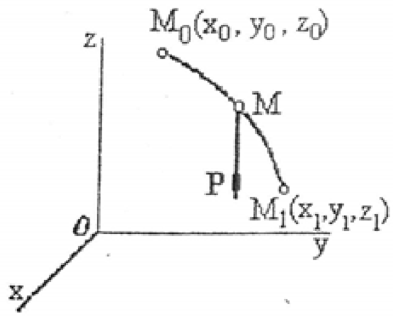

Рис. 5.3

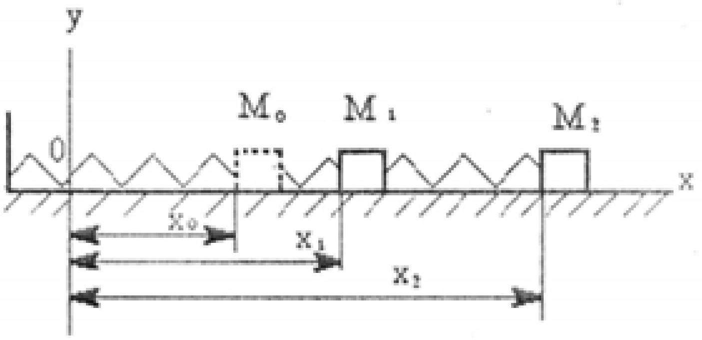

Рис. 5.4

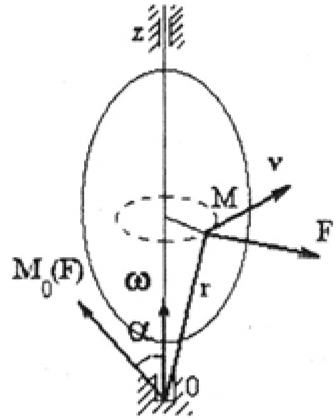

Рис. 5.5

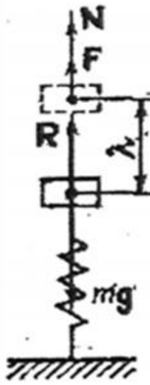

Рис. 5.6

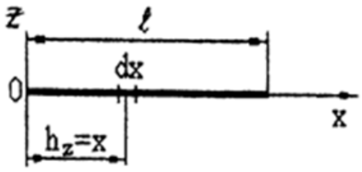

Рис. 6.1

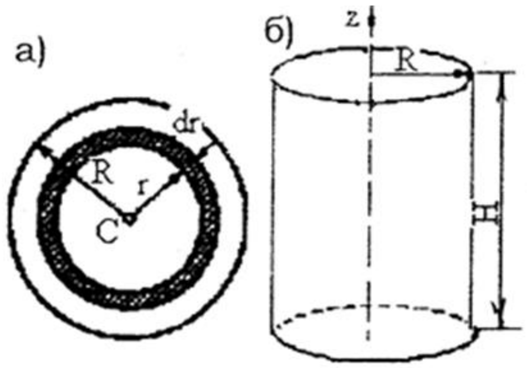

Рис. 6.2

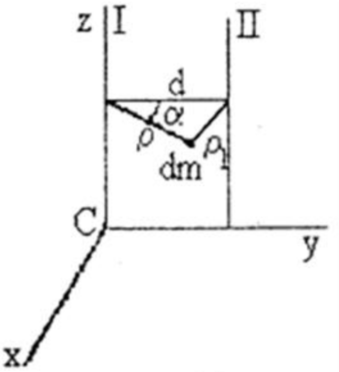

Рис. 6.3

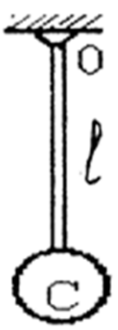

Рис. 6.4

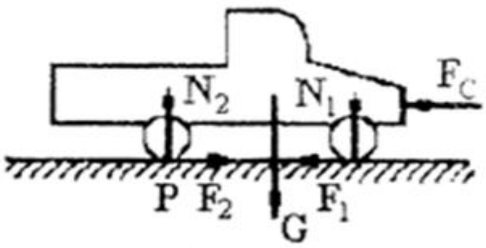

Рис. 6.5

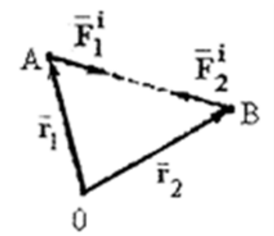

Рис. 6.6

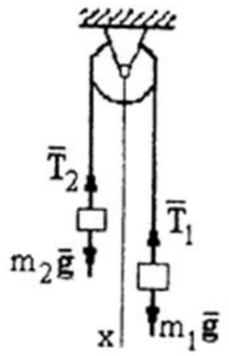

Рис. 7.1

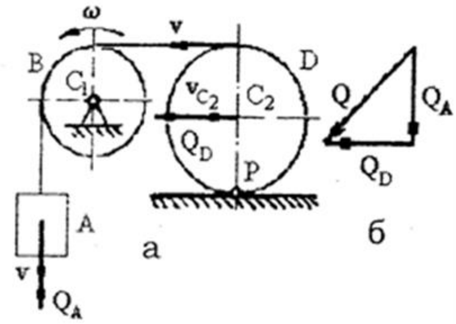

Рис. 7.2

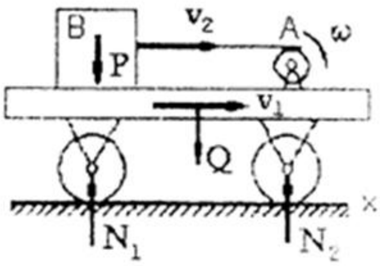

Рис. 7.3

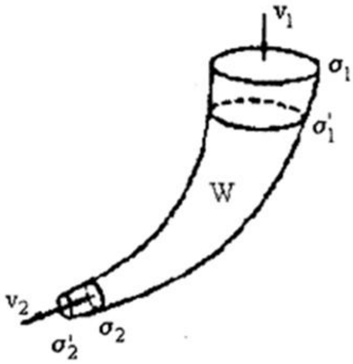

Рис. 7.4

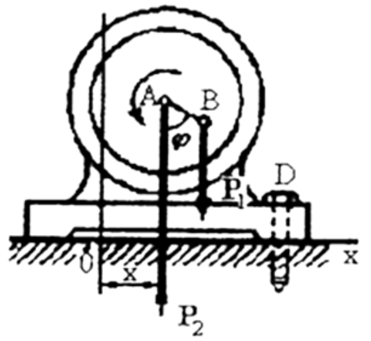

Рис. 7.5

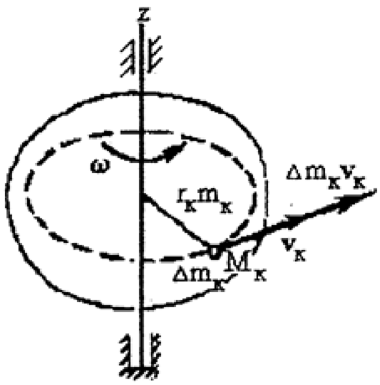

Рис. 8.1

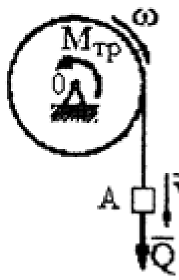

Рис. 8.2

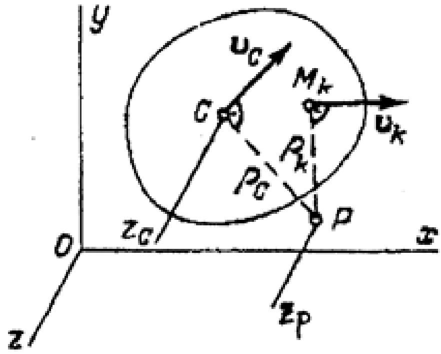

Рис. 8.3

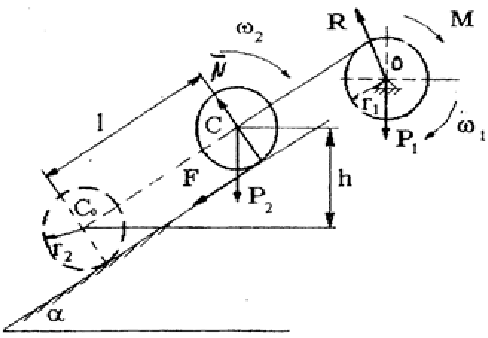

Рис. 9.1

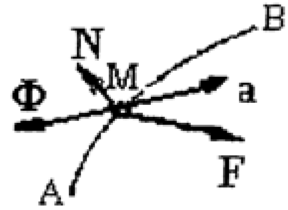

Рис. 10.1

Рис. 10.2

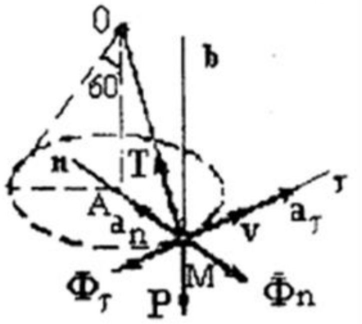

Рис. 10.3

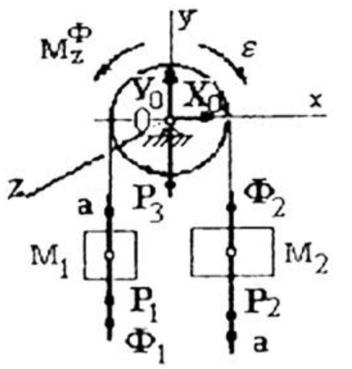

Рис. 10.4

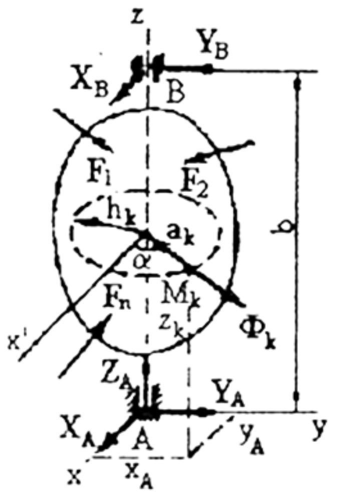

Рис. 10.5

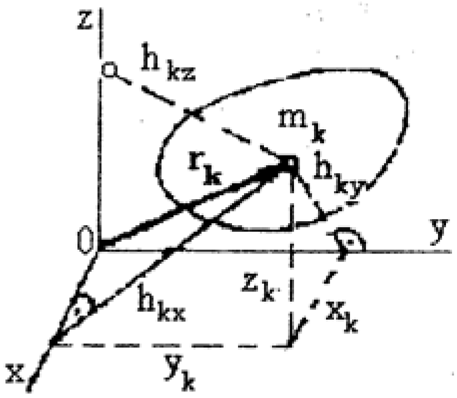

Рис. 11.1

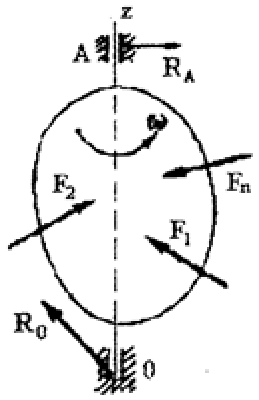

Рис. 11.2

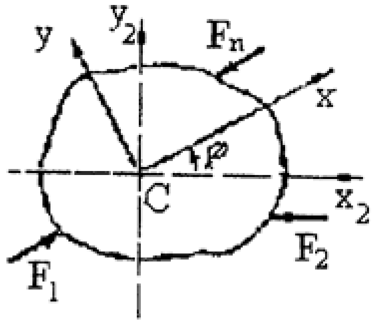

Рис. 11.3

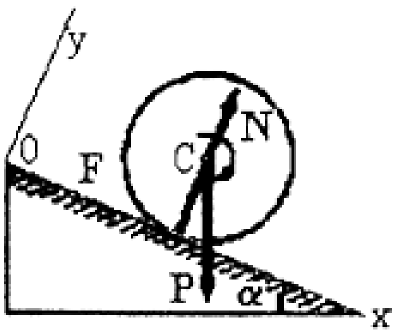

Рис. 11.4

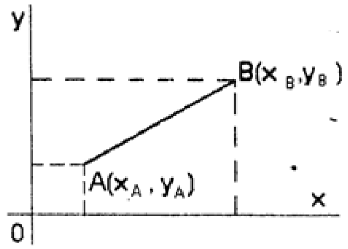

Рис. 12.1

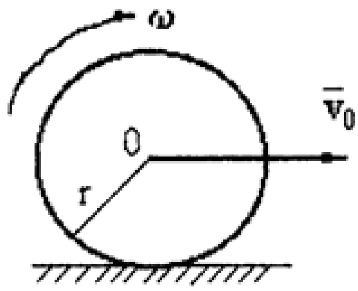

Рис. 12.2

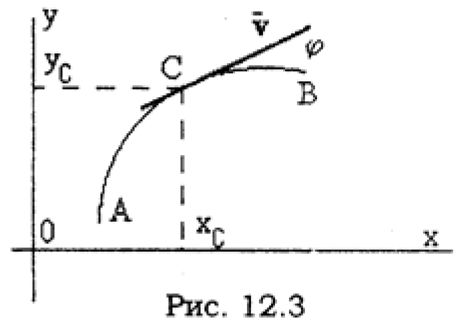

Рис. 12.3

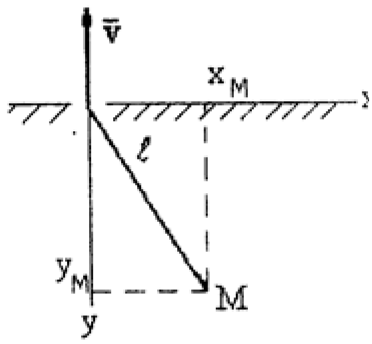

Рис. 12.4

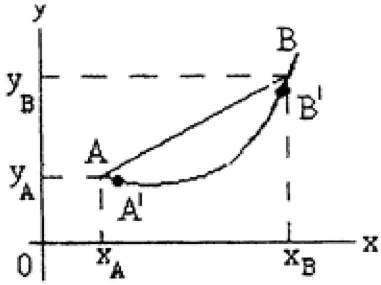

Рис. 12.5

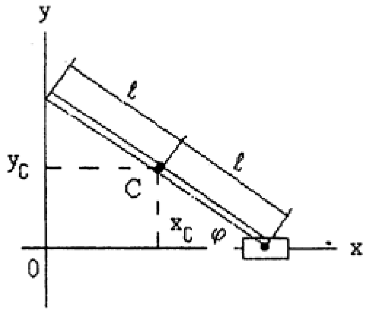

Рис. 12.6

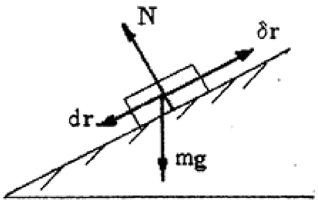

Рис. 12.7

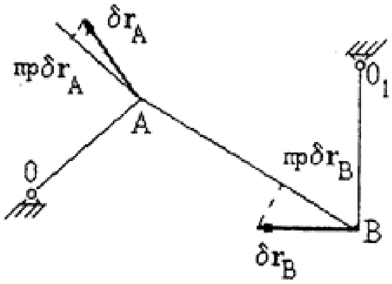

Рис. 12.8

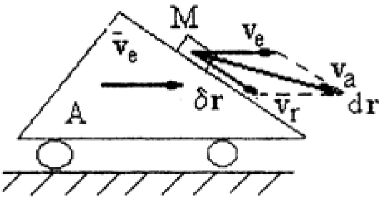

Рис. 12.9

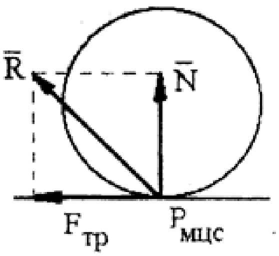

Рис. 12.10

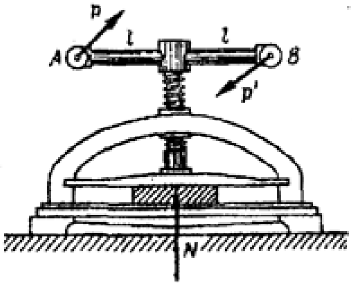

Рис. 12.11

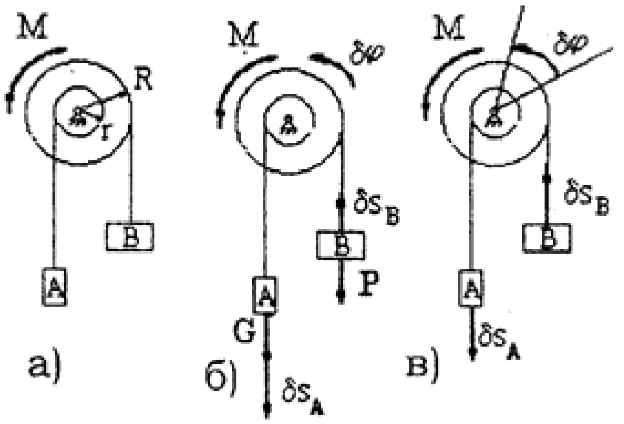

Рис. 12.12

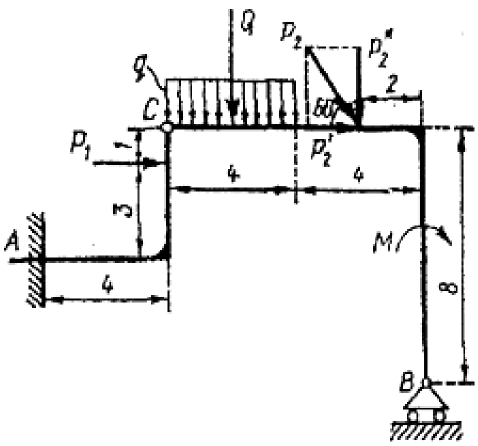

Рис. 12.13

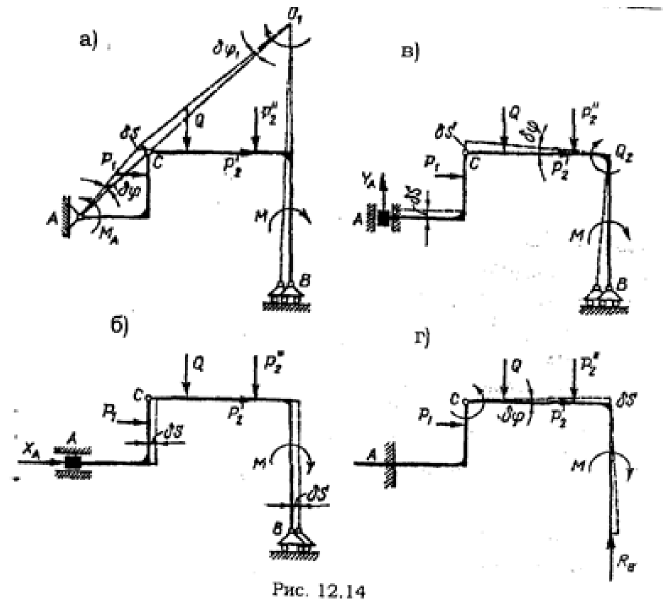

Рис. 12.14

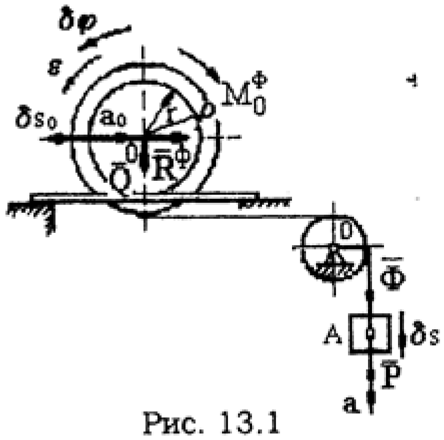

Рис. 13.1

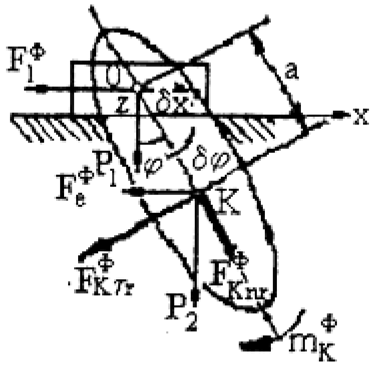

Рис. 13.2

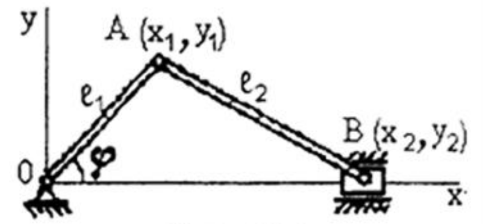

Рис. 14.1

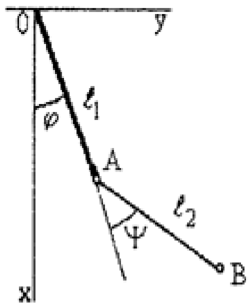

Рис. 14.2

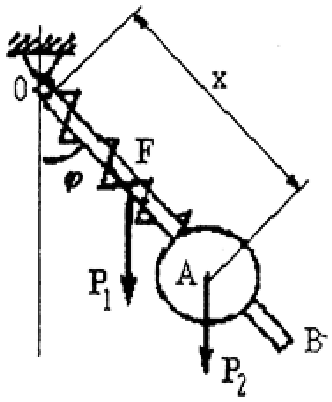

Рис. 14.3

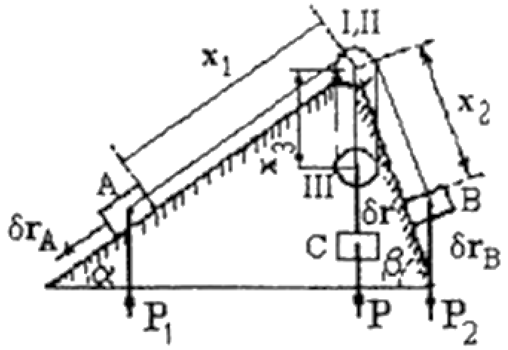

Рис. 14.4

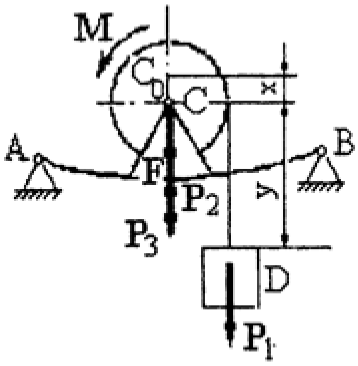

Рис. 15.1

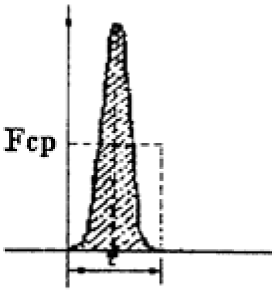

Рис. 16.1

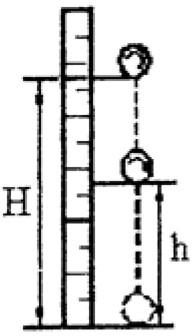

Рис. 16.3

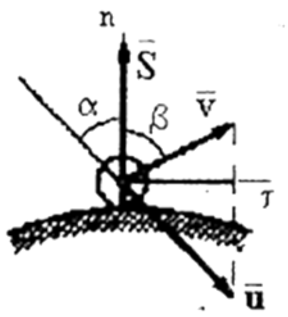

Рис. 16.4

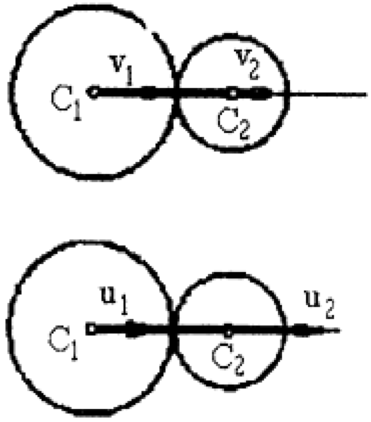

Рис. 16.5

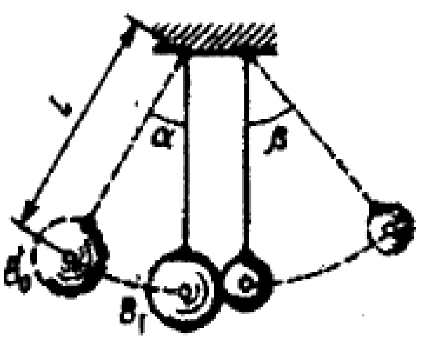

Рис. 16.6

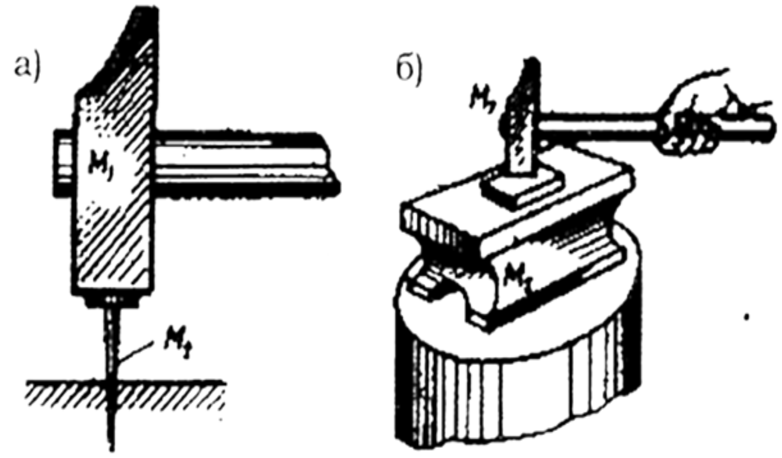

Рис. 17.1

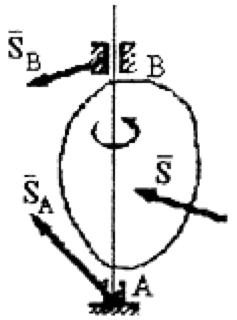

Рис. 17.2

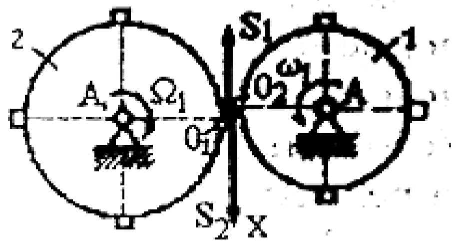

Рис. 17.3

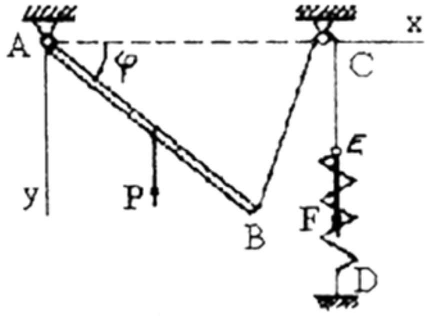

Рис. 18.1

Содержание