

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ (МГТУ ГА)»**

**Кафедра технической эксплуатации радиоэлектронного
оборудования воздушного транспорта**

Д.А. Яковлева, Е.Б. Биктеева

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Учебное пособие

Утверждено Редакционно-
издательским советом МГТУ ГА
в качестве учебного пособия

Москва
2019

УДК
ББК 6Ф6.5
Я47

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Московского государственного технического университета ГА

Рецензенты:

Петров В.И. (МГТУ ГА) – канд. техн. наук, доцент;
Васильев О.В. (ОАО «Бортовые и аэронавиг. системы») – д-р техн. наук, профессор

Яковлева Д.А.

Я47 Теория автоматического управления: учебное пособие. / Д.А. Яковлева, Е.Б. Биктеева — М.: ИД Академии Жуковского, 2018. — 80 с.

ISBN 978-5-6042751-4-6

Данное учебное пособие издается в соответствии с рабочей программой дисциплины «Теория автоматического управления» для студентов специальности 25.05.03 всех форм обучения.

В учебном пособии рассмотрены особенности построения систем радиоавтоматики, их математическое описание и основные характеристики, предназначенные для изучения. Освещены все основные вопросы теории автоматического управления.

Рассмотрено и одобрено на заседании кафедры 30.08.2018 г. и методического совета 12.09.2018 г.

ББК 6Ф6.5
Св. тем. план 2018 г.
поз. 377

ЯКОВЛЕВА Дарья Александровна, БИКТЕЕВА Екатерина Бясыровна

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ
Учебное пособие

В авторской редакции

Подписано в печать 10.10.2018 г. Формат
60x80/16 Печ. л. 5 Усл. печ. 4,65 л.
Заказ 377/090442 Тираж 35 экз.

Московский государственный технический университет ГА
125993 Москва, Кронштадтский бульвар, д.20

Отпечатано ООО «МИР»
394033, г. Воронеж, Ленинский пр-т 119А, лит. Я, оф. 215

© Московский государственный
технический университет ГА, 2019

Содержание

| | | стр. |
|--------|--|------|
| | Введение | 5 |
| 1. | Принципы построения систем автоматического управления (САУ) | 6 |
| 1.1. | Основные понятия и определения | 6 |
| 1.2. | Фундаментальные принципы управления | 8 |
| 1.2.1. | Принцип разомкнутого управления | 8 |
| 1.2.2. | Принцип компенсации (управление по возмущению) | 9 |
| 1.2.3. | Принцип обратной связи (регулирование по отклонению) | 9 |
| 1.3. | Классификация систем радиоавтоматики | 12 |
| 2. | Методы математического описания динамических элементов САУ | 13 |
| 2.1. | Общие сведения о математическом описании динамических элементов и систем | 13 |
| 2.2. | Уравнения динамики и статики. Линеаризация | 16 |
| 2.3. | Формы записи линейных дифференциальных уравнений. Передаточная функция. Основные свойства преобразования Лапласа | 18 |
| 2.4. | Коэффициент передачи. Переходная характеристика. Импульсная характеристика | 22 |
| 2.5. | Частотные характеристики РАС | 23 |
| 2.6. | Передаточные функции и характеристики основных динамических звеньев | 25 |
| 2.6.1. | Пропорциональное звено | 26 |
| 2.6.2. | Инерционное звено | 27 |
| 2.6.3. | Звено второго порядка | 29 |
| 2.6.4. | Интегрирующее звено | 30 |
| 2.6.5. | Идеальное дифференцирующее звено | 32 |
| 2.6.6. | Форсирующее звено. | 33 |
| 2.6.7. | Звено с запаздыванием | 34 |
| 3. | Структурные схемы и передаточные функции САУ | 35 |
| 3.1 | Виды соединений звеньев в системах радиоавтоматики | 35 |
| 3.1.1. | Последовательное соединение звеньев | 35 |
| 3.1.2. | Параллельное соединение звеньев | 37 |
| 3.1.3. | Соединение звеньев через обратную связь | 38 |
| 3.2. | Передаточные функции | 39 |
| 3.2.1. | Передаточные функции разомкнутой и замкнутой систем | 39 |
| 3.2.2. | Передаточная функция рассогласования | 41 |
| 3.2.3. | Передаточные функции статических и астатических систем | 42 |
| 3.2.4. | Передаточные функции много контурных систем | 44 |

| | | |
|----------|---|----|
| 4. | Анализ устойчивости линейных непрерывных стационарных САУ | 44 |
| 4.1. | Постановка задачи устойчивости | 44 |
| 4.2. | Критерии устойчивости | 47 |
| 4.2.1. | Алгебраические критерии устойчивости | 48 |
| 4.2.2. | Частотные критерии устойчивости | 49 |
| 4.2.2.1. | Критерий устойчивости Михайлова А.В. | 49 |
| 4.2.2.2. | Критерий Найквиста | 52 |
| 4.2.3. | Анализ устойчивости по логарифмическим частотным характеристиками | 53 |
| 4.3. | Устойчивость систем с запаздыванием | 53 |
| 5. | Качество переходных процессов в САУ | 53 |
| 5.1. | Точность работы систем в установившихся режимах | 54 |
| 5.2. | Постановка задачи анализа качества работы систем радиоавтоматики | 58 |
| 5.3. | Анализ точности работы систем | 58 |
| 5.4. | Методы анализа детерминированных процессов в линейных стационарных системах | 61 |
| 5.5. | Суммарная ошибка системы | 62 |
| 5.6. | Эффективная полоса пропускания системы | 64 |
| 5.7. | Типовые входные воздействия | 65 |
| 5.8. | Показатели качества переходного процесса в системе радиоавтоматики | 65 |
| 5.9. | Частотные показатели качества | 66 |
| 5.10. | Оптимизация параметров радиотехнической следящей системы | 67 |
| 6. | Нелинейные системы автоматического управления | 68 |
| 6.1. | Метод Ляпунова | 71 |
| 6.2. | Метод В.М. Попова | 72 |
| 6.3. | Фазовый метод | 73 |
| 6.4. | Метод кусочно-линейной аппроксимации | 76 |
| 6.5. | Метод гармонического баланса | 77 |
| | Литература | 80 |

Введение

Непременное условие технического прогресса – автоматизация процессов управления – заключается в применении специальных технических средств, освобождающих человека от непосредственного участия в этих процессах. Необходимость автоматизации обусловлена ограниченностью физических возможностей человека по восприятию и переработке больших объемов информации с большой скоростью, чего требуют задачи для управления современной авиационной техникой.

Научной основой автоматизации является *кибернетика* – наука об управлении и связи в живых организмах, машинах и обществе. Общие законы управления и связи в машинах изучаются технической кибернетикой. Составной частью технической кибернетики является *автоматика* – отрасль науки, охватывающая теорию автоматического управления, а также принципы построения автоматических систем образующих их технических средств. Основная задача автоматики состоит в построении наилучших, в определенных условиях, систем управления (*задача синтеза*), а также в исследовании свойств этих систем (*задача анализа*).

Основы теории автоматического регулирования заложены профессором Петербургского технологического института И.А. Вышеградским (1831-1895), который впервые математически описал в удобном для практики виде движение паровой машины с центробежным регулятором Уатта. Вышеградский известен не только как ученый-математик, но и как выдающийся машиностроитель и один из основных организаторов высшего технического образования в России.

Фундаментальным вкладом в теорию автоматического регулирования явилась работа А.М. Ляпунова (1857-1918) «Общая задача об устойчивом движении» (1892), в которой были исследованы условия устойчивости решений обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих поведение автоматических систем.

В современных радиотехнических устройствах различного назначения и системах радиоуправления широко применяются автоматические системы, которые называются радиоэлектронными автоматическими системами (РАС).

Отличительной особенностью РАС является то, что в качестве переносчика управляющей информации используется радиосигнал в непрерывной или импульсной форме. В радиосигналах, излучаемых или переизлучаемых объектом ГА, содержится необходимая информация, обеспечивающая работу автоматической системы. РАС извлекают нужную информацию путем автоматического измерения параметров радиосигналов – амплитуды, частоты и фазы радиосигналов, направления и времени их прихода. Наиболее важными РАС являются системы автоматического регулирования усиления (АРУ), системы автоматического слежения за частотой (АЧС), и фазой, системы автоматического слежения за направлением прихода

радиосигнала (АСН), системы автоматического слежения за временем прихода импульсов (АСВ). В настоящее время используются РАС в аналоговом и цифровом исполнении.

Перечисленные выше типовые системы радиоавтоматики входят в состав многих средств РЭО, решающих весьма разнообразные задачи. Поэтому изучение общих свойств РАС, методов их анализа, расчета, особенностей эксплуатации необходимо для успешного освоения современного авиационного РЭО.

Особенности построения систем радиоавтоматики, их математическое описание и основные характеристики рассматриваются в данном учебном пособии, предназначенном для изучения дисциплины “Теория автоматического управления” в рамках учебного плана специальности 25.05.03 “Техническая эксплуатация транспортного радиооборудования”.

1. Принципы построения систем автоматического управления (САУ)

1.1. Основные понятия и определения

Всякий процесс управления предполагает наличие цели управления, объекта управления и управляющего им устройства.

Цель управления – результат, который должен быть получен в процессе управления или по его окончанию.

Объект управления (ОУ) – устройство, реализующее технический процесс, при специально организованной управлении которым может быть достигнута цель управления.

Управляющее устройство (УУ) – устройство, осуществляющее воздействие на объект управления для достижения определенной цели управления. Как правило, это совокупность устройств включающих в себя измерительные устройства, усилительные и преобразовательные устройства и исполнительные устройства.

Объект управления и управляющее устройство, находящиеся во взаимодействии друг с другом, образуют *систему управления*. Такая система будет *автоматической*, если управление в ней осуществляется без непосредственного участия человека. Обобщенная структурная схема автоматической системы приведена на рисунке 1.1.

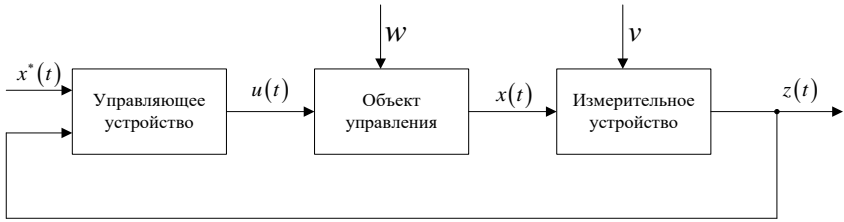


Рис.1.1. Структурная схема автоматической системы управления.

В автоматической системе, изображенной на рисунке 1.1, информация о состоянии объекта управления через измерительное устройство поступает на вход управляющего устройства. Такие системы носят название систем с обратной связью или *замкнутых систем*. Если такая информация не поступает на вход управляющего устройства, то автоматическая система будет *разомкнутой*. Состояние объекта в каждый момент времени характеризуется n переменными x_1, \dots, x_n , называемыми координатами состояния. Их удобно считать координатами n -мерного *вектора состояния* $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$. Измерительное устройство выдает информацию о состоянии объекта. Если на основании *вектора измерения* $z(t)$ могут быть найдены значения всех координат состояния $x_i(t)$, то система будет *полностью наблюдаемой*; если некоторые из координат $x_i(t)$ не могут быть найдены при известном значении векторы измерения $z(t)$, то система будет *неполностью наблюдаемой*. Управляющее устройство вырабатывает управляющее воздействие $u(t)$. Таких управляющих воздействий может быть несколько, поэтому полагаем, что $u(t)$ является r -мерной векторной величиной $u(t) = \{u_1(t), \dots, u_r(t)\}$. На вход управляющего устройства поступает *задающее воздействие* x^* , которое содержит информацию о том, каково должно быть состояние объекта – так называемое «желаемое» состояние объекта.

На объект управления может поступать возмущающее воздействие w , представляющее нагрузку или помеху. Измерение координат объекта измерительным устройством может проводиться с некоторыми случайными погрешностями v , называемыми *шумами измерения*. Задачей управляющего устройства является выработка такого управляющего воздействия $u(t)$, чтобы качество функционирования автоматической системы в целом было бы наилучшим в некотором смысле.

1.2. Фундаментальные принципы управления

1.2.1. Принцип разомкнутого управления

Сущность принципа в том, что алгоритм управления вырабатывается только на основе заданного алгоритма функционирования и не контролируется другими факторами – возмущениями или выходными координатами процесса. Общая схема функционирования системы показана на рисунке 1.2.

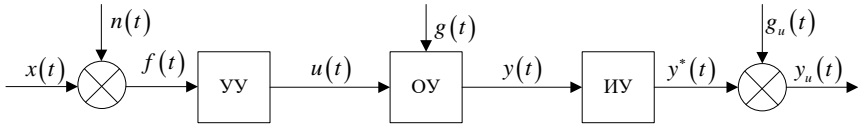


Рис. 1.2. Функциональная схема разомкнутой системы.

На рис. 1.2, изображающем разомкнутую систему, приведены следующие обозначения: $n(t)$ – помехи, действующие на систему; $x(t)$ – входное воздействие; $f(t) = n(t) + x(t)$ – управляющее воздействие, представленное аддитивной смесью входного воздействия и помех; УУ – устройство управления, $u(t)$ – сигнал управления; ОУ – объект управления; $g(t)$ – возмущающее воздействие, учитывающее влияние внешних факторов; $y(t)$ – выходной сигнал объекта управления; ИУ – устройство измерения, измеряющее выходной сигнал и связанное с объектом управления; $g_u(t)$ – ошибки, возникающие из-за измерения; $y_u(t)$ – выходной сигнал системы.

В данной системе сигнал управления зависит только от управляющего воздействия:

$$u(t) = f(x(t), n(t)). \quad (1)$$

В таких системах радиоавтоматики обеспечивается заранее заданная функциональная связь между управляющим воздействием и выходным сигналом. Несмотря на очевидные недостатки, этот принцип используют очень широко. Элементы, представляемые разомкнутой цепью, входят в состав любой системы, поэтому принцип представляется настолько простым, что его не всегда выделяют как один из фундаментальных принципов. К элементам разомкнутого типа можно отнести и многие счетно-решающие элементы, выполняющие операции дифференцирования, интегрирования и формирования разных дифференциально-интегральных операторов.

1.2.2. Принцип компенсации (управление по возмущению)

Если возмущающие воздействия настолько велики, что разомкнутая цепь не обеспечивает требуемой точности выполнения алгоритма функционирования, то для повышения точности иногда можно, измерив возмущение, ввести по результатам измерения коррективы в алгоритм управления, которые компенсировали бы вызываемые возмущениями отклонения алгоритма функционирования.

Так как отклонение регулируемой величины зависит не только от управляющего воздействия $u(t)$, но и от возмущающего воздействия $g(t)$, то есть

$$y(t) = F_1(u_1(t), g(t)), \quad (2)$$

то в принципе можно подобрать управление

$$u_2(t) = F_2(g(t)) \quad (3)$$

таким образом, чтобы в установившемся режиме отклонение отсутствовало, т. е.

$$\Delta y = u(t) - F_1(u_1(t), g(t)) = 0 \quad (4)$$

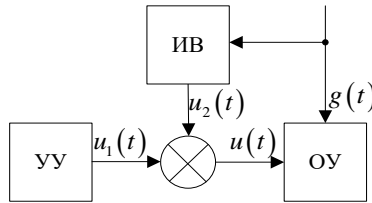


Рис.1.3. Функциональная схема управления по возмущению.

1.2.3. Принцип обратной связи (регулирование по отклонению)

Систему можно построить и так, чтобы точность выполнения алгоритма функционирования обеспечивалась и без измерения возмущений. Для этой цели в систему вводят дополнительную связь, в которую могут сходиться элементы для измерения $x(t)$ и для выработки корректирующих воздействий на управляющее устройство. Схема имеет вид замкнутой цепи, что дало основание называть осуществляемый в ней принцип управления по замкнутому контуру. Введенную дополнительную цепь называют цепью обратной связи, так как

направление передачи воздействий в дополнительной связи обратно направлению передачи основного воздействия на объект.

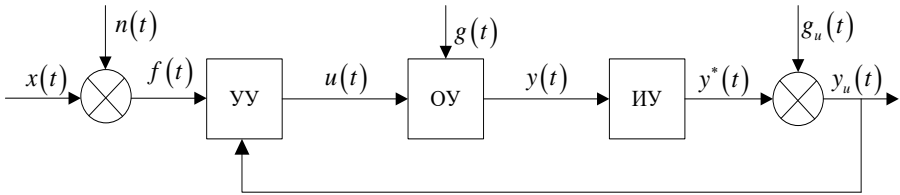


Рис. 1.4. Функциональная схема замкнутой системы радиоавтоматики с обратной связью.

За счёт обратной связи, влияние помех и нестабильности устройств на качество работы замкнутых систем радиоавтоматики в значительной степени компенсируется.

В радиотехнических устройствах большое распространение получил частный вид разомкнутых систем, в которых коррекцию алгоритма управления осуществляют не непосредственно по значениям координат $x(t)$, а по их отклонениям от значений, определяемых алгоритмом функционирования, т.е. формируется по измеренному отклонению выходного сигнала от управляющего воздействия $f(t)$. Функциональная схема такой системы приведена на рис. 1.5.

Сигнал, поступающий с выхода системы на её вход, называют сигналом обратной связи,

$$e(t) = f(t) - y_u(t) \quad (5)$$

– сигналом рассогласования или сигналом ошибки; устройство, измеряющее $e(t)$ – измерителем рассогласования, который совместно с устройством управления образует регулятор системы радиоавтоматики.

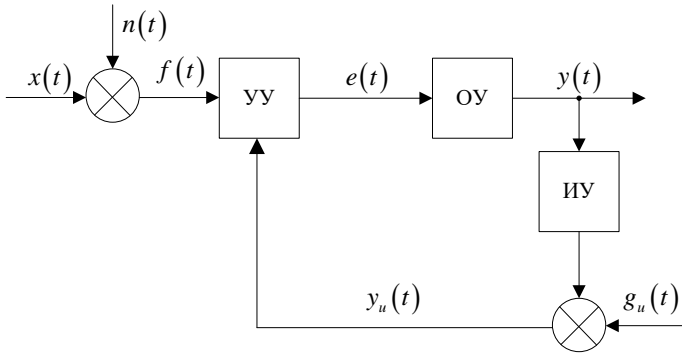


Рис. 1.5. Функциональная схема системы, работающей по принципу рассогласования.

Функция $f(t)$ должна быть неубывающей функцией и быть одного знака с $e(t)$. Управление в функции отклонения при упомянутых требованиях к функции $f(t)$ – называют регулированием.

Системы радиоавтоматики, построенные подобным образом, называются системами, работающими по принципу отклонения или рассогласования. Одной из разновидностей замкнутых систем является система, работающая по принципу компенсации возмущающих воздействий. Функциональная схема такой системы приведена на рис.1.6.

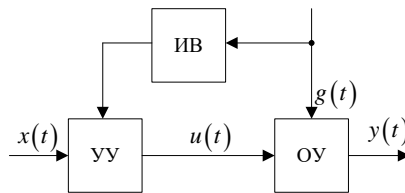


Рис.1.6. Функциональная схема системы, работающей по принципу компенсации возмущающих воздействий.

Возмущающее воздействие измеряется измерителем возмущений (ИВ) и используется для формирования сигнала управления $u(t)$. При выполнении определённых соотношений можно добиться того, чтобы выходной сигнал не зависел от возмущающего воздействия $g(t)$.

Системы радиоавтоматики можно классифицировать также по характеру задающего воздействия, выделяя при этом системы стабилизации, программного управления и следящие системы. В системах стабилизации задающее воздействие описывается постоянной величиной. В системах программного управления задающее воздействие описывается детерминированной функцией времени. Методы анализа следящих систем полностью применимы к системам стабилизации и программного управления.

1.3. Классификация систем радиоавтоматики

По назначению САУ делятся на три типа:

- системы стабилизации;
- следящие системы;
- системы программного управления.

В системах автоматической стабилизации задающие воздействия являются постоянными в течение всего процесса управления ($x = const$). В следящих системах задающие воздействия изменяются в некоторых пределах произвольным, заранее не определенным образом. В системах программного управления задающие воздействия изменяются по определенному, заранее заданному закону. Знания априори закона изменения задающего воздействия в системах стабилизации и в системах программного управления даёт возможность при разработке управляющего устройства предусмотреть меры, позволяющие повысить качество работы системы.

Обычно структура и параметры САУ выбирают таким образом, чтобы при заданных характеристиках помеховых и задающих воздействий достижение поставленной цели управления было обеспечено с определенным качеством. Под *качеством управления* понимается соответствие между желаемыми реальными результатами управления. При изменении характеристик ОУ или задающих воздействий и помех качество управления изменится. Это характерно для *обыкновенных* САУ, параметры и структура УУ которых не изменяются при изменении свойств объекта, характеристик задающих воздействий и помех. В так называемых самоприспосабливающихся (адаптивных) САУ в процессе управления на основе текущей информации о характеристиках ОУ, воздействий и о качестве управления производятся контролируемые измерения свойств УУ так, чтобы ухудшение качества управления было минимальным.

Авиационные радиоэлектронные автоматические системы (РАС) выполняют функции, связанные с решением задач управления ВС и обеспечением безопасности полетов (диспетчерское сопровождение, радиосвязь с ВС, определение координат ВС, скорости и т.п.). Информация о параметрах движения ВС извлекается из радиосигналов, излучаемых и переизлучаемых объектом наблюдения. Необходимая информация может содержаться в амплитуде, частоте, фазе радиосигнала, в направлении его прихода (азимут, угол места), в его длительности и т.д. в РАС задающие воздействия и выходные

величины являются функциями перечисленных выше параметров радиосигналов. Это является отличительной особенностью радиоэлектронных автоматических систем.

Наиболее распространены следующие системы:

- системы автоматической регулировки усиления (АРУ);
- системы автоматического слежения за частотой (АРЧ);
- системы автоматического слежения по направлению (АСН);
- системы автоматического слежения за временем прихода импульсов (АСВ).

2. Методы математического описания динамических элементов САУ

2.1. Общие сведения о математическом описании динамических элементов и систем

Автоматическую систему можно представить в виде совокупности элементов, взаимодействующих между собой и с окружающей средой. Автоматическая система, входящая в состав более сложной автоматической системы, в свою очередь может рассматриваться как её элемент. В теории управления широко используются понятия: динамический элемент, динамическая система, динамические характеристики, свойства элемента, системы. Своим происхождением они обязаны тому, что движение материальных тел под действием приложенных к ним сил изучается динамикой (от греч. *dynamos* – сила), а первые автоматические регуляторы применялись в механических системах. Свойства автоматической системы зависят от свойств входящих в неё элементов и связей между элементами. Для того, чтобы описать процессы с САУ, необходимо математически описать как процессы в каждом элементе системы, так и связи между элементами. При этом важно описать те стороны поведения элементов, которые характеризуют его в процессе управления. Возможны определенные упрощения, но модели, которыми заменяют отдельные элементы, должны верно отражать передачу элементами информации, их динамики. В каждом элементе системы начальное состояние и внешние возмущения преобразуются в выходную реакцию. С математической точки зрения причинно-следственная связь между входом и выходом элемента может быть описана соотношением:

$$y(t) = Ax(t), \quad (6)$$

где A – оператор элемента; $x(t)$ – входное воздействие; $y(t)$ – выходная реакция.

Чаще всего соотношения (6) представляют собой дифференциальные уравнения или уравнения в конечных разностях. Они устанавливают связь между входом и выходом динамического элемента и называются *уравнениями*

динамического элемента. Соответственно уравнения, связывающие управляемую величину или рассогласование с задающим и мешающими воздействиями, называют *уравнениями системы*. Часто употребляют термины «уравнения движения системы» или «уравнение динамики системы». В механике термин «движение» означает изменение с течением времени положения тела в пространстве. В автоматике термин «движение» имеет более широкий смысл и означает любое изменение управляемого объекта с течением времени, в том числе изменения его положения в пространстве, что согласуется с традиционным пониманием движения.

Оператор A представляет собой правило, по которому каждой реализации входной величины ставится в соответствие реализация выходной величины. При однозначном соответствии между реализациями входной и выходной величин динамический элемент называется *детерминированным* – каждому элементу $x(t)$ из множества X входных сигналов ($x(t) \in X$) ставится в соответствие единственный, вполне определенный элемент $y(t)$ из множества Y выходных сигналов [$y(t) \in Y$]. Если определенной входной реализации соответствует некоторое множество выходных реализаций, то динамический элемент называется *стохастическим*. В дальнейшем будем рассматривать динамические системы только с детерминированными элементами.

Среди детерминированных элементов различают *линейные* и *нелинейные*. Динамически элемент называют линейным, если для него справедлив принцип суперпозиции. В противном случае элемент является нелинейным. Система, содержащая хотя бы один нелинейный элемент, является нелинейной. Различают стационарные и нестационарные динамические элементы. Стационарный элемент не меняет своих свойств по преобразованию сигналов во времени. Сдвиг входного воздействия стационарного элемента во времени приведет к такому же сдвигу выходной реакции. Наличие в системе нестационарных элементов делает её нестационарной в целом.

В зависимости от характера изменения входных и выходных величин динамических элементов во времени системы подразделяются на *непрерывные* и *дискретные* (прерывистые). В непрерывных динамических системах входные и выходные величины всех элементов описываются непрерывными функциями времени. При квантовании величин во времени система рассматривается как дискретная.

Различают *инерционные* и *безынерционные* динамические элементы. В безынерционных элементах значение выходной величины в любой момент времени зависит только от значения входной величины в этот же момент времени. В инерционных элементах значение выходной величины в данный момент времени зависит не только от входной величины в этот момент времени, но и от значений входной величины в предшествующие моменты времени. Инерционные и безынерционные элементы иногда называют элементами с памятью и без памяти соответственно.

По характеру передачи воздействия различают элементы направленного и ненаправленного действия. В динамических элементах направленного действия воздействие передается в одном направлении – от входа к выходу и нет обратного воздействия на предыдущие элементы. Свойства динамических элементов направленного действия не зависят от того, рассматривается данный элемент отдельно или включенным в автоматическую систему, состоящую из элементов направленного действия. Представление РАС как совокупности динамических элементов направленного действия создает значительные удобства при её описании.

Динамические элементы направленного действия принято называть *динамическими звеньями*. Динамическое звено – идеализация реальных элементов, в действительности элементы оказывают друг на друга хотя бы незначительное влияние. Практически свойство однонаправленности в электрических цепях обеспечивается при малых выходных и больших входных сопротивлениях.

Динамические элементы могут иметь несколько входов и выходов. В соответствии с этим они подразделяются на *одно-* и *многомерные*. Объекты управления также может иметь несколько входов и несколько управляемых величины. По числу управляемых величин подразделяются на *одно-* и *многомерные*.

Рассмотренные подразделения динамических элементов и систем условны и зависят от степени идеализации при математическом описании сигналов, элементов и систем. В природе нет идеальных линейных, стационарных, безынерционных элементов. Однако решение задач анализа и синтеза систем, содержащих линейные, стационарные, безынерционные элементы, требует более простого математического аппарата. Поэтому естественно стремление идеализировать характеристики элементов, чтобы снизить математические трудности при решении указанных задач. В результате такой идеализации при математическом описании происходит замена реального устройства некоторой моделью. Примером может служить линеаризация безынерционного нелинейного элемента – замена его линейным элементом. В случае линеаризации предполагается, что замена нелинейной зависимости между входом и выходом на линейную при достаточно узком диапазоне изменений входной величины не приведёт к качественным и существенным количественным погрешностям в отображении связи между входом и выходом элемента.

Линеаризация допустима не всегда. В ряде случаев замена исходного нелинейного уравнения линейным настолько искажает количественные соотношения процессов в динамическом элементе, что приводит к утрате его важных качественных черт.

Идеализация при математическом описании динамических элементов и систем приводит к уменьшению степени соответствия между реальной системой и её *математической моделью* – совокупностью математических соотношений, описывающих элементы системы и связи между ними.

2.2. Уравнения динамики и статики. Линеаризация

Рассмотрим математическое описание непрерывных систем управления с помощью дифференциальных уравнений. В большинстве случаев звенья и системы описываются нелинейными дифференциальными уравнениями произвольного порядка.

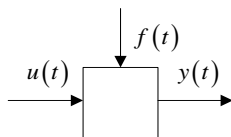


Рис. 2.1. Простейшее звено.

Здесь под звеном понимается математическая модель элемента. Для примера рассмотрим звено (рисунок 2.1), которое можно описать дифференциальным уравнением второго порядка

$$F(y, \dot{y}, \ddot{y}, u, \dot{u}) + f = 0 \quad (7)$$

где y – выходная величина, u и f – входные величины, \dot{y} и \dot{u} – первые производные по времени, \ddot{y} – вторая производная по времени.

Уравнение (7), описывающее процессы в звене при правильных входных воздействиях, называют *уравнением динамики*. Пусть при постоянных входных величинах $u = u^0$ и $f = f^0$ процесс в звене с течением времени установится: выходная величина примет постоянное значение $y = y^0$. Тогда уравнение (7) примет вид

$$F(y^0, 0, 0, u^0, 0) + f^0 = 0. \quad (8)$$

Это уравнение описывает статистический или установившийся режим и его называют *уравнением статики*.

Статический режим можно описать графически с помощью статистических характеристик. *Статической характеристикой* звена или элемента (а также системы) называют зависимость выходной величины от входной в статистическом режиме. Статическую характеристику можно построить элементарно, подавая на вход элемента постоянное входное воздействие и измеряя выходную величину после окончания переходного процесса, или расчетным путем, используя уравнение статики.

Если звено имеет несколько входов, то оно описывается с помощью семейства статических характеристик.

Обычно автоматические системы описываются нелинейными дифференциальными уравнениями. Но во многих случаях их можно *линеаризовать*, то есть заменить исходные нелинейные уравнения линейными, приближенно описывающими процессы в системе. Процесс преобразование нелинейных уравнений в линейные называется *линеаризацией*.

В автоматических системах должен поддерживаться некоторый заданный режим. При этом режиме входные и выходные величины звеньев системы изменяются по определенному закону. В частности, в системах стабилизации они принимают определенные постоянные значения. Но из-за разницы возмущающих факторов фактический режим отличается от требуемого (заданного), поэтому текущие значения входных и выходных величин не равны значениям, соответствующим заданному режиму. В нормально функционирующей автоматической системе фактический режим немного отличается от требуемого режима и отклонения входных и выходных величин, входящих в нее звеньев, от требуемых значений малы. Это и позволяет провести линеаризацию, разлагая нелинейные функции, входящие в уравнения, в ряд Тейлора. Линеаризацию можно проводить по звеньям. Звенья и системы, которые описываются линейными уравнениями, называют соответственно *линейными звеньями* и *линейными системами*.

Рассмотрим пример такого преобразования (7). Пусть заданному режиму соответствуют:

$$u = u^*, \dot{u} = \dot{u}^*, f = f^*, y = y^*, \dot{y} = \dot{y}^*, \ddot{y} = \ddot{y}^*. \quad (9)$$

Обозначим отклонения реальных значений u, f и y от требуемых значений через приращения, т.е.

$$\Delta u = u - u^*, \Delta f = f - f^*, \Delta y = y - y^*.$$

Тогда

$$u = u^* + \Delta u, \dot{u} = \dot{u}^* + \Delta \dot{u}, f = f^* + \Delta f, y = y^* + \Delta y, \dot{y} = \dot{y}^* + \Delta \dot{y}, \ddot{y} = \ddot{y}^* + \Delta \ddot{y}.$$

Подставляя эти значения в уравнение (7) и, рассматривая F как функцию независимых переменных, разложим ее в ряд Тейлора в точке (9) при этом отбросим малые члены более высокого порядка, чем отклонения:

$$F^* + (\partial F / \partial y)^* \cdot \Delta y + (\partial F / \partial \dot{y})^* \cdot \Delta \dot{y} + (\partial F / \partial \ddot{y})^* \cdot \Delta \ddot{y} + (\partial F / \partial u)^* \cdot \Delta u + (\partial F / \partial \dot{u})^* \cdot \Delta \dot{u} + f^* + \Delta f = 0 \quad (10)$$

Здесь звездочка сверху означает, что соответствующие функции и

производные вычисляются при значениях аргумента, определяемым соотношением (9). Когда в системе устанавливается заданный режим, уравнение (7) принимает вид $F^* + f^* = 0$. Вычисляя это уравнение из (10), получим искомое уравнение звена в отклонениях:

$$a_0 \Delta \ddot{y} + a_1 \Delta \dot{y} + a_2 \Delta y - b_0 \Delta \dot{u} - b_1 \Delta u - c_0 \Delta f = 0, \quad (11)$$

где

$$a_0 = (\partial F / \partial \ddot{y})^*, \quad a_1 = (\partial F / \partial \dot{y})^*, \quad a_2 = (\partial F / \partial y)^*, \quad b_0 = -(\partial F / \partial \dot{u})^*, \quad b_1 = -(\partial F / \partial u)^*, \\ c_0 = -1.$$

Уравнение (11) было получено при следующих предположениях:

- 1) отклонение выходной Δy и входной Δu величин достаточно малы;
- 2) функция F обладает непрерывными частными производными по всем аргументам в окрестности точек, соответствующих заданному режиму.

Если хотя бы одно из этих условий не выполняется, то линеаризацию проводить нельзя. По поводу первого условия необходимо уточнить: нельзя раз и навсегда установить, какие отклонения считать малыми. Это зависит от вида нелинейности.

Часто нелинейную зависимость между отдельными переменными, входящими в уравнение звена, задают в виде кривой. В этих случаях линеаризацию можно проводить графически.

2.3. Формы записи линейных дифференциальных уравнений. Передаточная функция. Основные свойства преобразования Лапласа

Рассмотрим способы математического описания связи между входом и выходом линейной непрерывной динамической системы (элемента). Указанная связь может быть задана линейным дифференциальным уравнением n -го порядка или системой n дифференциальных уравнений первого порядка, с помощью передаточной функции, частотных характеристик, переходной и импульсной характеристик.

Распространенной формой описания линейных динамических элементов являются линейные дифференциальные уравнения:

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j x}{dt^j}, \quad (12)$$

где a_i, b_j – постоянные коэффициенты; x, y – входная и выходная величины; обычно $m \leq n$.

Уравнение (12) записывается также в следующем виде:

$$A(p)y(t) = B(p)x(t), \quad (13)$$

где $p = d/dt$; $A(p) = \sum_{i=0}^n a_i p^i$; $B(p) = \sum_{j=0}^m b_j p^j$ – линейные дифференциальные операторы.

Формально разделим обе части равенства (13) на $A(p)$:

$$y(t) = W(p)x(t), \quad (14)$$

где $W(p) = B(p)/A(p)$ – линейный оператор, преобразующий входное воздействие $x(t)$ в выходную реакцию $y(t)$ в соответствии с уравнением (13).

Запись дифференциального уравнения (13) в виде (14) часто оказывается удобнее. В дальнейшем она будет называться *операторной*.

На основе уравнения (12) может быть определена передаточная функция динамического элемента. Полагая начальные условия нулевыми, применим преобразование Лапласа к уравнению (12). Тогда:

$$Y(s) \sum_{i=0}^n a_i s^i = X(s) \sum_{j=0}^m b_j s^j, \quad (15)$$

где $Y(s)$ и $X(s)$ – изображения.

Уравнение (15) является линейным алгебраическим уравнением в области изображений. Решим его относительно $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} X(s) = W(s)X(s). \quad (17)$$

Оператор:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}, \quad (18)$$

называется *передаточной функцией* динамического элемента. Передаточная

функция $W(s)$ равна отношению изображения реакции $Y(s)$ элемента к изображению входного воздействия $X(s)$ при нулевых начальных условиях.

В дальнейшем будут использоваться два оператора: $W(p)$ и $W(s)$. Если передаточной функции $W(s)$ формально заменить оператор s на оператором p , то получим выражение для оператора $W(p)$: $W(p) = W(s)|_{s \rightarrow p}$. Зная передаточную функцию элемент, можно найти выходную величину при заданной входной:

$$y(t) = L^{-1}\{W(s)X(s)\}, \quad (19)$$

где L^{-1} – символ обратного преобразования Лапласа.

Преобразованием Лапласа называется функциональное преобразование вида

$$L[f(t)] = F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt. \quad (20)$$

Основные свойства преобразования Лапласа:

1) *Свойство линейности.* Для любых постоянных α и β

$$L\{\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)\} = \alpha L\{f_1(t)\} + \beta L\{f_2(t)\}. \quad (21)$$

2) *Дифференцирование оригинала.* Если производная $f(t)$ является функцией-оригиналом, то

3)

$$L\{f(t)\} = pF(p) - f(0), \quad (22)$$

где $F(p) = L\{f(t)\}$, $f(0) = \lim_{t \rightarrow +0} f(t)$.

Если n -я производная $f(t)$ является функцией оригиналом, то

$$L\left\{f^{(n)}(t)\right\} = p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0), \quad (23)$$

где $f^{(k)}(0) = \lim_{t \rightarrow +0} f^{(k)}(t)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Если начальные условия нулевые, т.е. $f(0) = \dot{f}(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$, то формула (23) принимает вид

$$L\left\{f^{(n)}(t)\right\} = p^n F(p). \quad (24)$$

Таким образом, при нулевых начальных условиях дифференцированию оригинала соответствует умножение оригинала на p .

4) *Интегрирование оригинала.* Интегрирование оригинала сводится к делению изображения на p :

5)

$$L\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(p)}{p}. \quad (25)$$

6) *Теорема запаздывания.* Для любого положительного числа τ

$$L\{f(t-\tau)\} = e^{-p\tau} L\{f(t)\} = e^{-p\tau} F(p). \quad (26)$$

7) *Теорема о свертке* (теорема умножения изображений). Если $f_1(t)$ и $f_2(t)$ – оригиналы, а $F_1(p)$ и $F_2(p)$ – их изображения, то

$$F_1(p) \cdot F_2(p) \doteq \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \int_0^t f_2(\tau) f_1(t-\tau) d\tau. \quad (27)$$

Интеграл правой части равенства называют сверткой функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ и обозначают $f_1(t) * f_2(t)$:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \int_0^t f_2(\tau) f_1(t-\tau) d\tau. \quad (28)$$

8) *Теоремы о предельных значениях.* Если $f(t)$ – оригинал, а $F(p)$ – его изображение, то $f(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p)$ и при существовании предела $f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ получаем: $f(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p)$.

9) *Теорема разложения.* Если функция $F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$ дробно-рациональная, причем степень полинома числителя меньше степень полинома знаменателя, то ее оригиналом является функция умножения на $1(t)$ функция:

$$f(t) = \sum_{k=1}^l \frac{1}{(n_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^{n_k-1}}{ds^{n_k-1}} \left[F(p)(p - p_k)^{n_k} e^{pt} \right]. \quad (29)$$

2.4. Коэффициент передачи. Переходная характеристика. Импульсная характеристика

Коэффициентом передачи динамического элемента называют величину:

$$K = \lim_{s \rightarrow 0} W(s) s^v, \quad (30)$$

где v – минимальная степень оператора s в полиноме знаменателя в передаточной функции $W(s)$.

В качестве временных характеристик динамических элементов широко используются переходная и импульсная характеристики.

Переходная характеристика есть реакция динамического элемента на воздействие в виде единичной ступенчатой функции $1(t)$:

$$1(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < 0, \\ 1, & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

Учитывая, что изображение функции $1(t)$ по Лапласу равно $1/s$, найдем изображение переходной функции:

$$H(s) = W(s)/s. \quad (31)$$

Импульсная характеристика – это реакция динамического элемента на воздействие в виде δ -функции:

$$1(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < 0, \\ 1, & \text{при } t \geq 0. \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \delta t = 1. \quad (32)$$

Учитывая, что изображение δ -функции по Лапласу равно $L\{\delta(t)\} = 1$, найдем изображение импульсной характеристики:

$$G(s) = W(s). \quad (33)$$

Из (33) следует, что импульсная характеристика может быть определена как обратное преобразование Лапласа от передаточной функции динамического элемента:

$$g(t) = L^{-1}\{W(s)\}. \quad (34)$$

Зная импульсную характеристику $g(t)$, можно определить реакцию элемента на любое воздействие $x(t)$ с помощью интеграла свертки:

$$y(t) = \int_0^t x(t-\tau)g(\tau)d\tau. \quad (35)$$

2.5. Частотные характеристики РАС

Наряду с передаточной функцией $W(s)$ для описания свойств динамических элементов используются частотные характеристики. Частотные характеристики описывают свойства динамических элементов при передаче гармонических воздействий. Из теории электрических цепей известно, что комплексная амплитуда $A_{\text{вых}}(j\omega) = A_{\text{вых}}(\omega)\exp[j\varphi_{\text{вых}}(\omega)]$ выходного сигнала системы, описываемой уравнением (13), при воздействии на вход гармонического сигнала с комплексной амплитудой $A_{\text{вх}}(j\omega) = A_{\text{вх}}(\omega)\exp[j\varphi_{\text{вх}}(\omega)]$ находится из соотношения:

$$A_{\text{вых}}(j\omega) = W(j\omega)A_{\text{вх}}(j\omega), \quad (36)$$

где $W(j\omega) = \left. \frac{B(p)}{A(p)} \right|_{p=j\omega}$ – комплексная частотная характеристика системы.

Функция $W(j\omega)$ находится из передаточной функции динамического элемента заменой оператора s на $j\omega$:

$$W(j\omega) = W(s)|_{s=j\omega}. \quad (37)$$

Можно записать функцию $W(j\omega)$ в комплексной форме:

$W(j\omega) = A(j\omega)\exp[j\varphi(\omega)]$, где $A(j\omega) = |W(j\omega)| = \frac{A_{\text{вых}}}{A_{\text{вх}}}$ – амплитудная частотная характеристика (АЧХ) элемента; $\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = \varphi_{\text{вых}} - \varphi_{\text{вх}}$ – фазовая частотная характеристика (ФЧХ).

Функция $W(j\omega)$ как функция комплексного переменного может быть представлена в виде:

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega), \quad (38)$$

где $U(\omega) = \operatorname{Re} W(j\omega) = \frac{A_{\text{вых}}}{A_{\text{вх}}} \cos(\varphi_{\text{вых}} - \varphi_{\text{вх}})$ – вещественная частотная характеристика (ВЧХ); $V(\omega) = \operatorname{Im} W(j\omega) = \frac{A_{\text{вых}}}{A_{\text{вх}}} \sin(\varphi_{\text{вых}} - \varphi_{\text{вх}})$ – мнимая частотная характеристика (МЧХ).

Функции $A(\omega)$, $\varphi(\omega)$, $U(\omega)$, $V(\omega)$ выражаются друг через друга посредством следующих соотношений:

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}; \quad (39)$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)}; \quad (40)$$

$$U(\omega) = A(\omega) \cos \varphi(\omega); \quad (41)$$

$$V(\omega) = A(\omega) \sin \varphi(\omega). \quad (42)$$

Кривую $W(j\omega)$ (рис. 2.2) на комплексной плоскости U , V называют амплитудно-фазовой характеристикой (АФХ). Обычно часть годографа $W(j\omega)$, соответствующую изменению ω от $-\infty$ до 0, опускается, для $\omega < 0$ опускаются также соответствующие части АЧХ, ФЧХ, ВЧХ и МЧХ. По годографу $W(j\omega)$ для любой частоты ω_0 могут быть найдены значения функции $A(\omega_0)$, $\varphi(\omega_0)$, $U(\omega_0)$, $V(\omega_0)$.

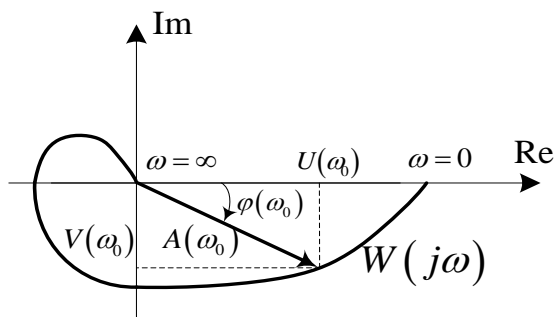


Рис. 2.2. Амплитудно-фазовая частотная характеристика (годограф $W(j\omega)$).

Большое распространение в теории и практике автоматического управления получили логарифмические частотные характеристики (ЛЧХ). *Логарифмической частотной характеристикой* называют зависимость

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega), \quad (43)$$

построенную в логарифмическом масштабе частот. Величина $L(\omega)$ измеряется в децибелах.

Логарифмической фазовой характеристикой называют зависимость $\varphi(\omega)$, построенную в логарифмическом масштабе частот. Величина $\varphi(\omega)$ измеряется в градусах.

2.6. Передаточные функции и характеристики основных динамических звеньев

Элементы автоматических систем разнообразны по своей природе, принципу действия и конструкции. Однако они нередко описываются одними и теми же дифференциальными уравнениями. Элементы, описывающиеся одинаковыми дифференциальными уравнениями могут обладать и одинаковыми динамическими свойствами. В теории автоматического управления важны именно динамические свойства элементов, а не их конструктивные особенности. Поэтому элементы РАС принято классифицировать по виду дифференциальных уравнений или передаточных функций, устанавливающих связь между входной и выходной величинами. Такой подход к классификации элементов позволяет свести всё их многообразие к ограниченному числу динамических звеньев, из

которых может быть составлена любая динамическая система.

К числу основных динамических звеньев относятся: пропорциональное, инерционное, звено второго порядка, интегрирующее, дифференцирующее, форсирующее, звено запаздывания.

2.6.1. Пропорциональное звено

Пропорциональное звено описывается уравнением:

$$y(t) = K \cdot x(t), \quad (44)$$

где K – коэффициент передачи (усиления, пропорциональности).

Для изображений

$$Y(s) = K \cdot X(s). \quad (45)$$

Из соотношения (45) находим выражение для передаточной функции усилительного звена

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = K. \quad (46)$$

В общем случае K является размерной величиной, так как входная и выходная величины звена могут иметь различную физическую природу.

Частотные характеристики пропорционального звена:

$$\begin{cases} A(\omega) = |W(j\omega)| = K; \\ \varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = 0; \\ U(\omega) = \operatorname{Re} W(j\omega) = K; \\ V(\omega) = \operatorname{Im} W(j\omega) = 0; \\ L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg K. \end{cases} \quad (47)$$

Годограф $W(j\omega) = K$ представляет собой точку на вещественной оси, лежащую на расстоянии K от начала координат.

Переходная характеристика пропорционального звена $h(t) = K \cdot 1(t)$, импульсная характеристика $g(t) = K \cdot \delta(t)$. В системах РАС электронные усилители, дискриминаторы при малом уровне рассогласования могут рассматриваться как пропорциональные звенья.

2.6.2. Инерционное звено

Инерционным называют динамическое звено (рис. 2.3), дифференциальное уравнение которого имеет вид:

$$T \cdot p \cdot y + y = K \cdot x, \quad (48)$$

где K – коэффициент передачи (может быть размерным), T – постоянная времени звена.

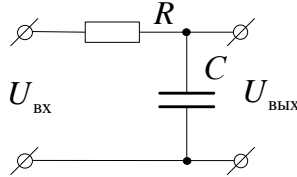


Рис. 2.3. Схема RC-цепи инерционного звена.

Параметры K и T определяют характеристики звена. Найдем передаточную функцию инерционного звена. Запишем равенство (48) для изображений:

$$(T \cdot s + 1)Y(s) = K \cdot X(s). \quad (49)$$

Тогда

$$W(s) = \frac{K}{T \cdot s + 1}. \quad (50)$$

Переходная характеристика звена, согласно выражению (31) равна

$$h(t) = L^{-1} \{W(s)/s\} = L^{-1} \left\{ \frac{K}{s(Ts + 1)} \right\} = K(1 - e^{-t/T}). \quad (51)$$

При $t \rightarrow \infty$ функция $h(t)$ асимптотически стремится к установившемуся значению $h_{уст} = K$.

Импульсную характеристику находим на основании соотношения (34):

$$g(t) = L^{-1} \{W(s)\} = L^{-1} \left\{ \frac{K}{Ts + 1} \right\} = \frac{K}{T} \exp(-t/T). \quad (52)$$

Амплитудно-фазовая характеристика инерционного звена

$$W(j\omega) = W(s)|_{s=j\omega} = \frac{K}{Tj\omega + 1}. \quad (53)$$

Выделим в АФЧХ (53) вещественную и мнимую частотные характеристики:

$$W(j\omega) = \frac{K}{(Tj\omega + 1)(-j\omega T + 1)} = \frac{K}{\omega^2 T^2 + 1} + j \frac{-\omega TK}{\omega^2 T^2 + 1}. \quad (54)$$

На основании выражения (54) получаем:

$$U(\omega) = \frac{K}{\omega^2 T^2 + 1}; \quad V(\omega) = \frac{-\omega TK}{\omega^2 T^2 + 1} \quad (55)$$

Найдем амплитудную частотную характеристику:

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \quad (56)$$

и фазовую частотную характеристику

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{V}{U} = -\arctg \omega T. \quad (57)$$

С учётом выражения (56) находим ЛАХ:

$$L(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2}; \quad (58)$$

при $K=1$
$$L(\omega) = -20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2}. \quad (59)$$

При $\omega \ll \frac{1}{T}$ $L(\omega) \approx 20 \lg K$; при $\omega \gg \frac{1}{T}$ $L(\omega) \approx 20 \lg K - 20 \lg \omega T$. Таким образом, ЛАХ инерционного звена приближенно (асимптотически) может быть представлена в виде двух отрезков прямой (асимптот): $20 \lg K$ и $20 \lg K - 20 \lg \omega T$, сопрягающихся при частоте $\omega_T = \frac{1}{T}$. Максимальная ошибка имеет место при $\omega = \omega_T$. Найдем величину ошибки:

$$\delta L = L_{\text{точн}}(\omega_T) - \Delta_{\text{прибл}}(\omega_T) = 20 \lg K - 20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2} - 20 \lg K + 20 \lg \omega_T T = 20 \lg 2 =$$

= 3дБ. Определим наклон прямой $-20\lg \omega T$ по отношению к оси абсцисс при изменении частоты на одну декаду: $L(10\omega) - L(\omega) = -20\lg 10\omega T + 20\lg \omega T = -20\text{дБ/дек}$. Прямая $-20\lg \omega T$ пересекает ось абсцисс при частоте $\omega_c = K/T$.

2.6.3. Звено второго порядка

Звено *второго порядка* (колебательное звено – рис. 2.4.) описывается уравнением вида

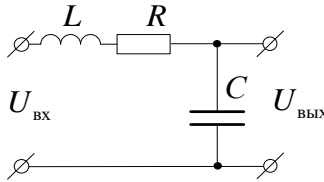


Рис. 2.4. Схема электрической цепи колебательного звена.

$$T^2 p^2 y + 2\zeta \cdot T \cdot p \cdot y + y = K \cdot x, \quad (60)$$

где K – коэффициент передачи (может быть размерным); T – постоянная времени ($1/T$ – собственная частота); ζ – относительный коэффициент затухания. Параметры K, T, ζ определяют свойства звена. Запишем уравнение (60) для изображений:

$$(T^2 s^2 + 2T \cdot \zeta \cdot s + 1)Y(s) = K \cdot X(s). \quad (61)$$

С учетом (61) запишем выражения для передаточной функции:

$$W(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2T \cdot \zeta \cdot s + 1}. \quad (62)$$

Амплитудно-фазовая характеристика звена описывается выражением:

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) = \frac{K(1 - \omega^2 T^2)}{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\zeta^2 T^2 \omega^2} + j \frac{-2K \cdot T \cdot \zeta \cdot \omega}{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\zeta^2 T^2 \omega^2}. \quad (64)$$

Из АФЧХ (64) находим АЧХ и ФЧХ звена:

$$A(\omega) = \frac{K}{\left[(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\zeta^2 T^2 \omega^2 \right]^{1/2}}; \quad (65)$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg \left[\frac{2\zeta \cdot T \cdot \omega}{(1 - \omega^2 T^2)} \right]. \quad (66)$$

Запишем выражение для ЛАХ:

$$L(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg \sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\zeta^2 T^2 \omega^2}. \quad (67)$$

При выполнении условий $\omega \ll \frac{1}{T}$ и $\omega \gg \frac{1}{T}$ ЛАХ может быть аппроксимирована отрезками прямых. При $\omega \ll \frac{1}{T}$ под радикалом в (67) можно пренебречь всеми числами, по сравнению с 1. Получаем

$$L(\omega) \approx 20 \lg K \quad \text{при} \quad \omega \ll \frac{1}{T}. \quad (68)$$

При $\omega \gg \frac{1}{T}$ под радикалом в (67) можно пренебречь всеми слагаемыми, по сравнению с $T^4 \omega^4$. Получаем

$$L(\omega) \approx 20 \lg K - 20 \lg T^2 \omega^2 \quad \text{при} \quad \omega \gg \frac{1}{T}. \quad (69)$$

Наклон прямой равен

$$-20 \lg (10\omega T)^2 + 20 \lg (\omega T)^2 = -20 \lg 100 = -40 \text{ дБ/дек.}$$

Асимптоты сопрягаются на частоте $\omega_T = 1/T$. По мере приближения слева и справа к $\omega = \omega_T$ погрешность в асимптотическом представлении ЛАХ звена возрастает.

2.6.4. Интегрирующее звено

Интегрирующим называют звено, дифференциальное уравнение которого имеет вид:

$$p \cdot y = K \cdot x, \quad (70)$$

где K – коэффициент передачи, $1/c$.

Для изображений

$$s \cdot Y(s) = K \cdot X(s). \quad (71)$$

Из уравнения (71) получаем передаточную функцию интегрирующего звена:

$$W(s) = K/s. \quad (72)$$

В интегрирующем звене скорость изменения выходной величины ($p \cdot y$) пропорциональна входной величине x . Найдем переходную характеристику звена:

$$h(t) = L^{-1}\{W(s)/s\} = L^{-1}\{K/s^2\} = K \cdot t. \quad (73)$$

Соответственно, импульсная характеристика

$$g(t) = L^{-1}\{W(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{K}{s}\right\} = K. \quad (74)$$

Амплитудно-фазовая характеристика интегрирующего звена

$$W(j\omega) = \frac{K}{j\omega} = -j \frac{K}{\omega} = \frac{K}{\omega} \exp\left(-j \frac{\pi}{2}\right). \quad (75)$$

На основании АФЧХ (75) можно записать:

$$U(\omega) = 0; \quad (76)$$

$$V(\omega) = -K/\omega;$$

$$A(\omega) = K/\omega; \quad (77)$$

$$\varphi(\omega) = -\pi/2.$$

С учетом выражений (77) найдем логарифмическую амплитудную частотную характеристику

$$L(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg \omega, \quad (78)$$

наклон которой равен $20 \lg K - 20 \lg 10\omega - 20 \lg K + 20 \lg \omega = -20$ дБ/дек.

Итак, ЛАХ интегрирующего звена является прямой линией с наклоном -20 дБ/дек, пересекающей ось частот в точке $\omega_c = K$, а ЛФХ – прямая, отстоящая от оси абсцисс на $-\pi/2$ и параллельная ей.

2.6.5. Идеальное дифференцирующее звено

Идеальным дифференцирующим динамическим звеном называют звено, описываемое соотношением вида:

$$y = K \cdot p \cdot x. \quad (79)$$

Дифференцирующее звено характеризуется тем, что выходная величина пропорциональна скорости изменения входной величины. Запишем соотношение (79) для изображений

$$Y(s) = K \cdot s \cdot X(s) \quad (80)$$

и найдем передаточную функцию дифференцирующего динамического звена

$$W(s) = K \cdot s. \quad (81)$$

Определим переходную характеристику звена

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{K \cdot s}{s} \right\} = K \frac{d1(t)}{dt} = K \cdot \delta(t). \quad (82)$$

Импульсная характеристика

$$g(t) = L^{-1} \{ K \cdot s \} = K \frac{d\delta(t)}{dt}. \quad (83)$$

Выражение для амплитудно-фазовой частотной характеристики дифференцирующего звена имеет вид

$$W(j\omega) = j \cdot K \cdot \omega, \quad (84)$$

на основании чего можно записать:

$$\begin{aligned} U(\omega) &= 0; \\ V(\omega) &= K \cdot \omega. \end{aligned} \quad (85)$$

Находи амплитудную и фазовую частотные характеристики звена:

$$\begin{aligned} A(\omega) &= K \cdot \omega; \\ \varphi(\omega) &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (86)$$

С учетом выражений (86) получаем логарифмическую амплитудную характеристику звена:

$$L(\omega) = 20 \lg K + 20 \lg \omega. \quad (87)$$

Выражение (87) есть уравнение прямой с наклоном относительно оси частот $20 \lg K + 20 \lg 10\omega - 20 \lg K - 20 \lg \omega = 20 \text{ дБ/дек}$, пересекающей ось частот в точке $\omega_c = 1/K$. Логарифмическая фазовая характеристика является прямой, параллельной оси частот удаленной от неё на $\pi/2$.

Идеальные дифференцирующие звено на практике получить нельзя, так как в природе не существует безынерционных систем. *Реальные дифференцирующие звенья* описываются передаточной функцией:

$$W(s) = \frac{K \cdot s}{(s \cdot T + 1)}. \quad (88)$$

2.6.6. Форсирующее звено

Форсирующим звеном называется динамическое звено, уравнение которого имеет вид:

$$y = K(T \cdot p \cdot x + x). \quad (89)$$

Для изображений

$$Y(s) = K(s \cdot T + 1)X(s). \quad (90)$$

На основании уравнения (90) запишем выражение для передаточной функции форсирующего звена

$$W(s) = K(s \cdot T + 1). \quad (91)$$

Найдем переходную характеристику звена:

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{K(s \cdot T + 1)}{s} \right\} = K[T \cdot \delta(t) + 1(t)]. \quad (92)$$

Импульсная характеристика форсирующего звена равна

$$g(t) = L^{-1}\{K(s \cdot T + 1)\} = K \left[T \frac{d\delta(t)}{dt} + \delta(t) \right]. \quad (93)$$

Запишем выражения для амплитудно-фазовой характеристики форсирующего звена:

$$W(j\omega) = K + j\omega \cdot K \cdot T. \quad (94)$$

На основании АФЧХ (94) получаем выражения для вещественной и мнимой частотной характеристик:

$$\begin{cases} U(\omega) = K; \\ V(\omega) = \omega \cdot K \cdot T. \end{cases} \quad (95)$$

Найдем логарифмические характеристики форсирующего звена:

$$\begin{cases} L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg \sqrt{K^2 + (\omega \cdot K \cdot T)^2} = 20 \lg K + 20 \lg (1 + \omega T)^{1/2}; \\ \varphi(\omega) = \arctg \omega T. \end{cases} \quad (96)$$

При $\omega \ll \frac{1}{T}$ и $\omega \gg \frac{1}{T}$ ЛАХ может быть аппроксимирована отрезками прямых $20 \lg K$ и $20 \lg K + 20 \lg \omega T$. Наклон второго отрезка на декаду равен $+20$ дБ/дек. Фазовый сдвиг звена положительный, меньше, чем $+\pi/2$. При $K=1$ ЛЧХ форсирующего звена являются зеркальным отображением ЛЧХ инерционного звена относительно оси частот.

Практическая реализация форсирующего звена в идеальном затруднена из-за инерционности реальных элементов. Реальное форсирующее звено описывается передаточной функцией:

$$W(s) = \frac{K(s \cdot T_2 + 1)}{(s \cdot T_1 + 1)}, \text{ при } T_2 \gg T_1. \quad (97)$$

2.6.7. Звено с запаздыванием

Уравнение звена с запаздыванием имеет следующий вид:

$$y(t) = K \cdot x(t - \tau), \quad \tau > 0. \quad (98)$$

Для изображений

$$Y(s) = K \cdot X(s) \cdot e^{-\tau s}. \quad (99)$$

Передаточная функция звена равна

$$W(s) = K \cdot e^{-s\tau}. \quad (100)$$

Запишем выражение для АФХ звена с запаздыванием:

$$W(j\omega) = K \cdot e^{-j\omega\tau}, \quad (101)$$

на основании чего находим амплитудную и фазовую частотные характеристики:

$$\begin{cases} A(\omega) = K; \\ \varphi(\omega) = -\omega \cdot \tau. \end{cases} \quad (102)$$

Переходная и импульсная характеристики звена с запаздыванием имеют вид:

$$h(t) = K \cdot 1(t - \tau), \quad (103)$$

$$g(t) = K \cdot \delta(t - \tau). \quad (104)$$

Звено с запаздыванием вводится в структурную схему, например, для учёта временного запаздывания высокочастотного сигнала в усилителях промежуточной частоты радиоприёмных устройств.

3. Структурные схемы и передаточные функции САУ

Структурные схемы автоматических систем являются, как правило, достаточно сложными. Для удобства работы могут быть применены структурные преобразования – замена участка схемы, содержащего несколько динамических звеньев, соединённых различным образом, одним эквивалентным динамическим звеном с передаточной функцией, равной передаточной функции заменяемого участка.

3.1. Виды соединений звеньев в системах радиоавтоматики

Найдём эквивалентные передаточные функции типовых соединений динамических звеньев: последовательного, параллельного и с обратной связью.

3.1.1. Последовательное соединение звеньев

При последовательном соединении динамических звеньев выходная величина предыдущего элемента является входной величиной последующей (рис. 3.1).

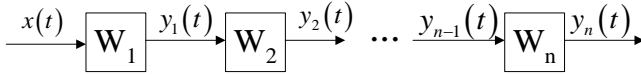


Рис. 3.1. Последовательное соединение типовых звеньев.

По определению передаточной функции:

$$W_1(s) = \frac{Y_1(s)}{X(s)}; W_2(s) = \frac{Y_2(s)}{Y_1(s)}; \dots; W_n(s) = \frac{Y_n(s)}{Y_{n-1}(s)}. \quad (105)$$

В соответствии с рисунком 3.1 можно записать:

$$Y_n(s) = W_n(s)Y_{n-1}(s) = W_n(s) \cdot \dots \cdot W_1(s)X(s) = W(s)X(s), \quad (106)$$

где $Y_1(s), Y_2(s), \dots, Y_n(s)$ – выходные величины, $W_1(s), W_2(s), \dots, W_n(s)$ – передаточные функции звеньев, $X(s)$ – входная величина.

Эквивалентная передаточная функция:

$$W(s) = \prod_{i=1}^n W_i(s). \quad (107)$$

Таким образом, эквивалентная передаточная функция последовательного соединения динамических звеньев (направленного действия) равна произведению передаточных функций всех звеньев, входящий в это соединение.

Найдем ЛЧХ последовательного соединения динамических звеньев. На основании соотношения (106) запишем для АФХ последовательного соединения звеньев:

$$W(j\omega) = \prod_{i=1}^n W_i(j\omega) = \prod_{i=1}^n A_i(\omega) e^{j\varphi_i(\omega)}. \quad (108)$$

Из выражения (108) следует:

$$L(\omega) = 20 \lg \prod_{i=1}^n A_i(\omega) = \sum_{i=1}^n 20 \lg A_i(\omega) = \sum_{i=1}^n L_i(\omega); \quad (109)$$

$$\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\omega), \quad (110)$$

где $L(\omega)$ – ЛАХ последовательного соединения динамических звеньев; $L_i(\omega)$ – ЛАХ i -го динамического звена; $\varphi(\omega)$ – ЛФХ последовательного соединения динамических звеньев; $\varphi_i(\omega)$ – ЛФХ i -го динамического звена.

Таким образом, для построения ЛАХ и ЛФХ последовательного соединения звеньев необходимо сложить ЛАХ и ЛФХ звеньев, входящих в соединение. Это удобно делать графически.

3.1.2. Параллельное соединение звеньев

При параллельном соединении динамических звеньев (рис. 3.2) входная величина соединения подается на входы всех звеньев, а выходная величина равна сумме выходных величин звеньев.

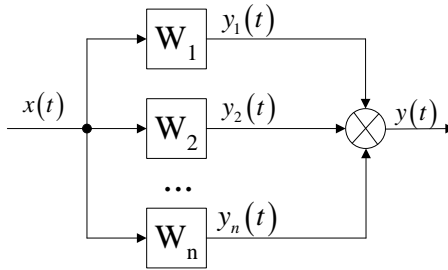


Рис. 3.2. Параллельное соединение типовых звеньев.

Согласно рис. 3.2 можно записать выражение для параллельного соединения звеньев:

$$\left. \begin{array}{l} Y_1(s) = W_1(s) X(s), \\ Y_2(s) = W_2(s) X(s), \\ \dots \\ Y_n(s) = W_n(s) X(s), \end{array} \right\} \Rightarrow Y(s) = \sum_{i=1}^n Y_i(s) = \sum_{i=1}^n W_i(s) X(s) = W(s) X(s), \quad (111)$$

где $W(s) = \sum_{i=1}^n W_i(s)$ – эквивалентная передаточная функция.

Таким образом, эквивалентная передаточная функция параллельного соединения динамических звеньев равна сумме передаточных функций всех звеньев, входящих в это соединение.

Запишем выражение для АФХ для параллельного соединения звеньев:

$$W(j\omega) = \sum_{i=1}^n W_i(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega),$$

где $U(\omega) = \sum_{i=1}^n U_i(\omega)$ – вещественная частотная характеристика звеньев,

соединённых параллельно; $V(\omega) = \sum_{i=1}^n V_i(\omega)$ – мнимая частотная характеристика;

$|W(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$ – амплитудно-частотная характеристика;

$\varphi(\omega) = \arctg(V(\omega)/U(\omega))$ – фазочастотная характеристика.

3.1.3. Соединение звеньев через обратную связь

При соединении динамических звеньев с обратной связью выходная величина звена в прямой цепи является входной величиной звена цепи обратной связи, а выходная величина звена в цепи обратной связи со знаком «плюс» (положительная обратная связь) или «минус» отрицательная обратная связь подается на вход звена в прямой цепи (рис. 3.3).

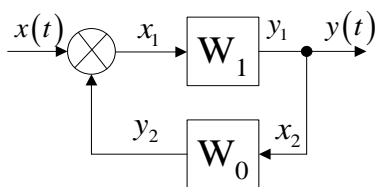


Рис. 3.3. Соединение звеньев по схеме с обратной связью.

Пусть уравнения процессов в звеньях имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} Y_1(s) &= W_1(s) X_1(s); \\ Y_2(s) &= W_0(s) X_2(s); \end{aligned} \right\} \quad (112)$$

где $X_1(s), X_2(s)$ – входные величины звеньев; $Y_1(s), Y_2(s)$ – выходные величины звеньев; $W_1(s), W_0(s)$ – передаточные функции звеньев.

Уравнение связей следующее:

$$\left. \begin{aligned} X_1(s) &= X(s) \pm Y_2(s); \\ X_2(s) &= Y_1(s) = Y(s). \end{aligned} \right\} \quad (113)$$

Решая системы уравнений (112) и (113) относительно $Y(s)$, получаем уравнение, устанавливающее связь между входной и выходной величинами соединения звеньев с обратной связью $Y(s) = W(s)X(s)$, где

$$W(s) = \frac{W_1(s)}{1 \pm W_1(s)W_0(s)}, \quad (114)$$

есть эквивалентная передаточная функция соединения динамических звеньев с обратной связью; знак «+» в знаменателе соответствует отрицательной обратной связи, знак «-» – положительной обратной связи.

Запишем выражение для АФХ при соединении звеньев с обратной связью:

$$|W(j\omega)| = |W_1(j\omega)| \left[1 + U_{10}^2(\omega) + V_{10}^2(\omega) \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (115)$$

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) - \operatorname{arctg} \frac{V_{10}(\omega)}{1 + U_{10}(\omega)}. \quad (116)$$

где $U_{10}(\omega)$, $V_{10}(\omega)$ – вещественная и мнимая частотные характеристики звеньев, образующих замкнутый контур.

3.2. Передаточные функции

Порядок составления структурных схем состоит в следующем:

1. Автоматическую систему представляют как совокупность динамических элементов направленного действия – динамических звеньев (с учетом известного набора основных звеньев).

2. Составляют структурную схему системы.

3. Заменяя типовые соединения динамических звеньев эквивалентными (в смысле передаточной функции) звеньями, приводят структурную схему РАС к виду, удобному для анализа. Обычно при таком «укрупнении» обратную связь между входом и выходом системы сохраняют в явном виде.

3.2.1. Передаточные функции разомкнутой и замкнутой систем

При анализе и синтезе линейных систем широко используется аппарат передаточных функций системы, характеризующих свойства системы в целом.

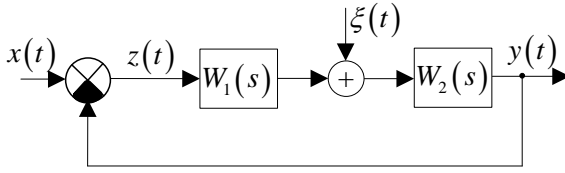


Рис. 3.4. Структурная схема преобразованной РАС.

Предположим, что после преобразования структурная схема имеет вид, показанный на рисунке 3.4. Используя принцип суперпозиции и свойство передачи динамическими звеньями воздействий только в одном направлении системы, можно записать:

$$Y(s) = \Phi_{xy}(s)X(s) + \Phi_{\xi y}(s)\Xi(s); \quad (117)$$

$$Z(s) = \Phi_{xz}(s)X(s) + \Phi_{\xi z}(s)\Xi(s), \quad (118)$$

где $\Phi_{xy}(s) = \frac{W(s)}{1+W(s)}$ – передаточная функция замкнутой системы относительно задающего воздействия (в дальнейшем индексы x и y могут опускаться);

$\Phi_{\xi y} = \frac{M(s)}{1+W(s)}$ – передаточная функция относительно возмущающего

воздействия; $\Phi_{xz}(s) = \frac{1}{1+W(s)}$ – передаточная функция ошибки замкнутой системы относительно задающего воздействия (в дальнейшем индекс x может

опускаться); $\Phi_{\xi z}(s) = \frac{-M(s)}{1+W(s)}$ – передаточная функция ошибки замкнутой

системы относительно возмущающего воздействия; $W(s) = W_1(s) \cdot W_2(s)$ – передаточная функция разомкнутой системы относительно задающего воздействия; $M(s) = W_2(s)$ – передаточная функция разомкнутой системы относительно возмущающего воздействия.

Уравнения (117) и (118) можно записать в области оригиналов. В этом случае вместо передаточных функций следует писать соответствующие им операторы $\Phi_{xy}(p)$, $W(p)$ и т.д.:

$$y(t) = \Phi_{xy}(t)x(t) + \Phi_{\xi y}(p)\xi(t); \quad (119)$$

$$z(t) = \Phi_{xz}(t)x(t) + \Phi_{\xi z}(p)\xi(t). \quad (120)$$

Уравнения (119) и (120) используют значительно чаще, чем уравнения (117) и (118), так как они остаются справедливыми и при случайных воздействиях.

3.2.2. Передаточная функция рассогласования

Типовая структурная схема линейризованной системы РАС для непрерывного режима работы, небольших рассогласований и малого уровня помех изображена на рисунке 3.5. Входное воздействие в общем случае представляет сумму задающего воздействия x_3 и помехи x_n . Составляющую ошибки, обусловленную изменениями задающего воздействия x_3 , принято называть *динамической ошибкой*. Составляющие ошибки, обусловленные возмущающими воздействиями (приложенными в любой точке системы), называют *помеховыми*. В прямой цепи управления два последовательно соединенных динамических звена. Первым пропорциональным звеном с

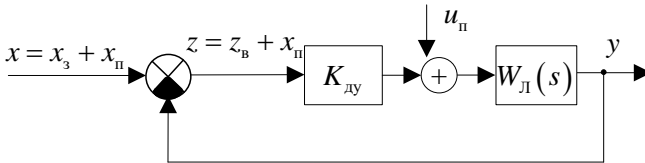


Рис. 3.5. Структурная схема линейризованной РАС.

коэффициентом передачи $K_{дy}$, с учетом помехового напряжения u_n , описывается дискриминационное устройство. Второе звено, с передаточной функцией $W_{л}(s)$, описывает исполнительное устройство и объект управления. Здесь, как правило, сосредоточены наиболее инерционные элементы.

При наличии помехи x_n на входе рассогласования z можно представить в виде суммы $z = x - y = x_3 - y + x_n = z_b + x_n$. Составляющую рассогласования $z_b = x_3 - y$ называют *ошибкой воспроизведения*. Для рис. 3.5. можно записать:

$$z_b = \frac{1}{1+W(p)}x_3 - \frac{W(p)}{1+W(p)}x_n - \frac{W_{л}(p)}{1+W(p)}u_n, \quad (121)$$

где $W(p) = K_{дy}W_{л}(p)$.

Первое слагаемое в уравнении (121) называется динамической составляющей ошибки воспроизведения, второе и третье слагаемое – помеховыми оставляющими.

Передаточная функция рассогласования:

$$W_z(s) = \frac{Z(s)}{X(s)}. \quad (122)$$

Из уравнения замыкания системы $Z(s) = X(s) - Y(s)$ и выражения для замкнутой передаточной функции $\Phi_{xy}(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ следует, что $Z(s) = [1 - \Phi_{xy}(s)]X(s)$. Тогда $W_z(s) = 1 - \Phi_{xy}(s)$ – связь передаточной функции ошибки и передаточной функции замкнутой системы.

Так как $\Phi_{xy}(s) = \frac{W(s)}{1+W(s)}$, то $W_z(s) = \frac{1}{1+W(s)}$ – связь передаточной функции ошибки и передаточной функции разомкнутой системы.

3.2.3. Передаточные функции статических и астатических систем

Автоматические системы принято разделять на статические и астатические. Внешним признаком статической системы является наличие при постоянной величине внешнего воздействия *постоянной установившейся* ошибки, величина которой пропорциональна величине воздействия. В астатической системе при постоянной величине воздействия ошибка в установившемся состоянии равна нулю все зависимости от величины воздействия.

На основании структурной схемы 3.4 передаточные функции составляющих ошибки замкнутой системы могут быть выражены следующим образом: $1/(1+W(s))$ – для ошибки, обусловленной задающим воздействием $x(t)$; $W_2(s)/(1+W(s))$ – для ошибки, обусловленной помеховым воздействием $\xi(t)$; $W(s)/(1+W(s))$ – для ошибки, обусловленной помеховым воздействием, поступающим на вход системы в адаптивной смеси с $x(t)$.

Обобщенную передаточную функцию для составляющих ошибок запишем в виде выражения: $M(s)/(1+W(s))$, где $M(s)$ может быть равно $W(s)$, $W_2(s)$ или 1. Запишем $W(s)$ и $M(s)$ в следующем виде:

$$W(s) = \frac{K_v}{s^\nu} \frac{b(s)}{a(s)}; \quad M(s) = \frac{K_\mu}{s^\mu} \frac{l(s)}{r(s)}, \quad (123)$$

где $K_\nu = \lim_{s \rightarrow 0} W(s) s^\nu$ – коэффициент передачи разомкнутой системы (часто используются обозначения $K_0 = K$; $K_1 = K_\nu$; $K_2 = K_a$; ν – число интегрирующих звеньев в системе; $a(s), b(s), l(s), r(s)$ – полиномы от s ; $b(s)/a(s) = l(s)/r(s)|_{s=0} = 1$; μ – число интегрирующих звеньев в $M(s)$; $\mu \ll \nu$; $K_\mu = \lim_{s \rightarrow 0} M(s) s^\mu$ – коэффициент передачи части системы с передаточной функцией $M(s)$.

Запишем выражение для установившейся ошибки при ступенчатом входном воздействии $x(t) = c \cdot 1(t)$:

$$z_{\text{уст}} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{M(s)}{1+W(s)} \cdot \frac{c}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{c}{\frac{r(s)}{l(s)} \cdot \frac{s^\mu}{K_\mu} + \frac{b(s) \cdot r(s) \cdot K_\nu}{a(s) \cdot l(s) \cdot s^{\nu-\mu} K_\mu}}. \quad (124)$$

Следовательно, $z_{\text{уст}} = 0$ только при $\nu - \mu \geq 1$ (напомним, что ν и μ целые положительные числа). Практически это означает, что система будет астатической по отношению к данному воздействию, если в прямой цепи между точкой наблюдения ошибки $z(t)$ и точкой приложения воздействия имеется хотя бы одно интегрирующее звено. Так, например, система, изображенная на рисунке 3.4, будет астатической по отношению к воздействию $\xi(t)$ только в том случае, если в $W_1(s)$ содержатся интегрирующие звенья. Следует отметить, что система может быть астатической по отношению к одной точке приложения воздействия и статической по отношению к другой. О системе с ν интеграторами прямо говорить, что она обладает астатизмом ν -го порядка.

Передаточная функция ошибки замкнутой астатической системы при $s = 0$ (124) должна обращаться в нуль, а передаточная функция ошибки замкнутой статической системы при $s = 0$ будет принимать конечное значение $K_\mu / (1 + K_\nu)$.

В системе с астатизмом ν -го порядка при воздействии вида $x(t) = \sum_{l=0}^k \frac{b_l}{l!} t^l$ ошибка в установившемся состоянии будет равна

$$z_{\text{уст}} = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{1}{1 + \frac{K_\nu \cdot b(s)}{s^\nu \cdot a(s)}} \right] \sum_{l=0}^k \frac{b_l}{l!} \frac{l!}{s^{l+1}} = \begin{cases} 0 & \text{при } k < \nu; \\ b_\nu / K_\nu & \text{при } k = \nu \neq 0; \\ \frac{b_0}{1 + K} & \text{при } k = \nu = 0. \end{cases} \quad (125)$$

3.2.4. Передаточные функции много контурных систем

К многоконтурным относятся системы радиоавтоматики, в которых помимо замкнутого контура с главной обратной связью имеются контуры, образованные стабилизирующими обратными связями, введёнными для придания системе нужных динамических характеристик. Передаточные функции таких систем находятся путём последовательного сведения структурной схемы многоконтурной системы к эквивалентной одноконтурной.

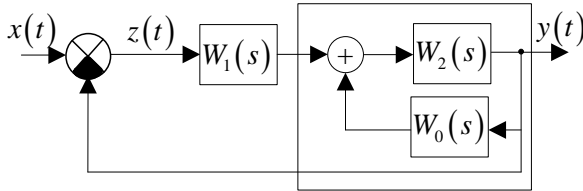


Рис. 3.6. Структурная схема двухконтурной системы.

Исходя из вышеизложенного, передаточная функция системы, структурная схема которой изображена на рис.3.6, находится следующим образом:

1. Сначала находится передаточная функция внутреннего контура, изображённого на рисунке штриховкой, который является системой с обратной связью:

$$W_{\text{вн}}(s) = \frac{W_2(s)}{1 + W_2(s)W_0(s)}. \quad (126)$$

2. Если представить внутренний контур как отдельное звено, то вся система представляется как последовательная система, состоящая из двух звеньев. Тогда её передаточная функция находится следующим образом:

$$W(s) = W_1(s)W_{\text{вн}}(s) = \frac{W_1(s)W_2(s)}{1 + W_2(s)W_0(s)}. \quad (127)$$

4. Анализ устойчивости линейных непрерывных стационарных САУ

4.1. Постановка задачи устойчивости

Любая САУ характеризуется переходным процессом, который возникает в ней при нарушении состояния равновесия. Переходной процесс $x(t)$ зависит как от свойств системы, так и от вида возмущающего воздействия. В переходном процессе различают две составляющие:

$$y(t) = y_B(t) + y_{CB}(t), \quad (128)$$

где $y_B(t)$ – выражает вынужденные движения, определяемые возмущающим воздействием, и свойствами системы; $y_{CB}(t)$ – свободные движения системы, определяемые начальными условиями и свойствами самой системы.

Основной динамической характеристикой системы является её *устойчивость*. Под устойчивостью понимается свойство системы возвращаться к состоянию установившегося равновесия после устранения возмущения, которое вывело ее из этого состояния. Физическую трактовку понятия устойчивости можно пояснить следующим примером.

Рассмотрим пояснение устойчивости на примере шара (рис. 4.1). Если шар помещен в верхнюю точку возвышенности, то система неустойчива, поскольку при малейшем отклонении шара от начального положения, он скатится по склону поверхности и не возвратится в исходное положение. Если же шар помещен во впадине, то система устойчива: после отклонения шар обязательно вернется к первоначальному положению. В обоих случаях устойчивость и неустойчивость системы не зависят от величины начальных отклонений шара.

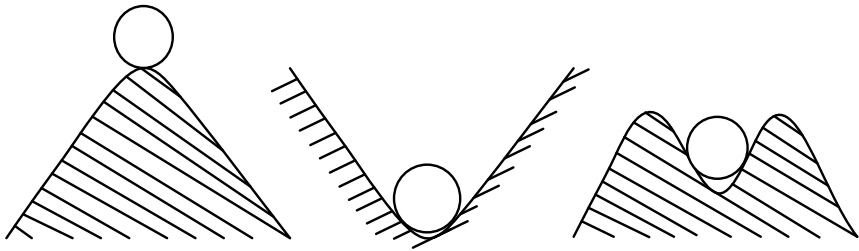


Рис. 4.1. Геометрическая устойчивость шара.

Однако возможны случаи, когда система при малых отклонениях будет устойчива, а при больших – неустойчива, например, если шар находится во впадине, а впадина расположена на вершине выпуклой поверхности. Принято считать, что такая система устойчива в малом и неустойчива в большом, поскольку устойчивость связана с величиной начального отклонения.

Система автоматического управления будет устойчива, если в переходном процессе свободная составляющая с течением времени будет стремиться к нулю.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_{CB}(t) \rightarrow 0. \quad (129)$$

При невыполнении этого условия САУ считается неустойчивой.

Свободное движение системы определяется однородным дифференциальным уравнением:

$$a_n \frac{d^n y_{\text{CB}}}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y_{\text{CB}}}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy_{\text{CB}}}{dt} + a_0 y_{\text{CB}} = 0, \quad (130)$$

где y_{CB} – свободное движение системы, которое определяет динамическую ошибку; $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ – постоянные коэффициенты, которые определяются параметрами системы. Уравнение (130) имеет решение в виде:

$$y_{\text{CB}}(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} + \dots + C_n e^{s_n t}, \quad (131)$$

где C_1, C_2, \dots, C_n – постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий; s_1, s_2, \dots, s_n – корни характеристического уравнения системы:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0 = 0, \quad (132)$$

полученного на основании дифференциального уравнения (130).

В зависимости от вида корней уравнения (132) переходной процесс в системе будет затухающим или расходящимся. Рассмотрим случаи, когда корни – вещественные, комплексные и чисто мнимые.

1) Вещественные корни.

Если все корни являются вещественными и отрицательными, т.е. $s_i = -\alpha_i$, то каждое слагаемое уравнения (131) $C_i \exp(-\alpha_i t)$ с течением времени будет стремиться к нулю, а следовательно и весь переходной процесс будет затухающим, устойчивым. Но если среди вещественных отрицательных корней есть хоть один вещественный положительный корень $s_k = +\alpha_k$, то соответствующее слагаемое $A_k \exp(+\alpha_k t)$ при $t \rightarrow \infty$ будет беспрестанно увеличиваться. Поэтому, хотя все слагаемые, кроме одного, будут затухать, процесс будет расходящимся, неустойчивым.

2) Комплексные корни.

Предположим, что при решении уравнения (131) получили два комплексных сопряженных корня, а все остальные корни – вещественные, отрицательные. Если комплексные корни будут иметь отрицательную вещественную часть $s_{k,k+1} = -\alpha \pm j\beta$, то слагаемые уравнения (131), определяемые этими корнями предстанут в виде:

$$C_k e^{-(\alpha+j\beta)t} + C_{k+1} e^{-(\alpha-j\beta)t} = A e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \psi), \quad (133)$$

где A и ψ – новые постоянные интегрирования, полученные в результате преобразования слагаемых с помощью формул Эйлера:

$$e^{j\beta t} = \cos \beta t + j \sin \beta t, \quad e^{-j\beta t} = \cos \beta t - j \sin \beta t. \quad (134)$$

Нетрудно заметить, что сумма слагаемых, соответствующая комплексным корням, представляет собой составляющую с угловой частотой β и амплитудой $Ae^{-\alpha t}$. Параметр α является показателем затухания огибающей k -кривой переходного процесса.

При положительной вещественной части комплексных корней $s_{k,k+1} = +\alpha \pm j\beta$ колебания переходного процесса будут не затухающими, а расходящимися.

3) Мнимые корни.

В этом случае $\alpha = 0$, а корни $s_{k,k+1} = \pm j\beta$. Слагаемые, определяемые этими корнями в уравнении (67), будут представлять собой

$$C_k e^{+j\beta t} + C_{k+1} e^{-j\beta t} = A \sin(\beta t + \psi), \quad (135)$$

Из равенства видно, что составляющая переходного процесса представляет собой незатухающие колебания с угловой частотой и постоянной амплитудой.

Следовательно, для устойчивости линейной САУ необходимо и достаточно, чтобы вещественные корни или вещественные части комплексных сопряженных корней характеристического уравнения были отрицательными. Если бы хотя бы один вещественный корень или вещественные части каких-нибудь комплексных сопряженных корней положительны, переходный процесс в целом будет расходящимся, и САУ окажется неустойчивой.

Следует обратить внимание, что все реальные САУ являются нелинейными. Линейные характеристики звеньев и линейные дифференциальные уравнения можно получить путем линеаризации реальных характеристик и уравнений. Обоснование законности линеаризации нелинейных САУ нелинейных систем содержится в теоремах Ляпунова А.М. (1892г. Работа «Общая задача об устойчивости движения»). Суть этих теорем заключается в следующем:

1. Если линеаризованная система устойчива, то устойчива исходная нелинейная система.
2. Если линеаризованная система неустойчива, то неустойчива и исходная нелинейная система.
3. Если линеаризованная система находится на границе устойчивости, то для определения устойчивости исходной нелинейной системы необходимо произвести дополнительные исследования по исходным нелинейным уравнениям.

4.2. Критерии устойчивости

Определение устойчивости САУ путем вычисления корней характеристического уравнения не всегда приемлемо из-за высокого порядка решаемых алгебраических уравнений. Поэтому на практике используют разные критерии устойчивости, позволяющие без вычисления корней судить об

устойчивости исследуемой системы. Различают алгебраические и частотные критерии оценки устойчивости.

4.2.1. Алгебраические критерии устойчивости

Алгебраические критерии устойчивости основаны на исследовании зависимости между коэффициентами характеристического уравнения и характером распределения корней этого уравнения в комплексной плоскости.

Критерий Гурвица (был сформулирован в 1895г. немецким математиком А. Гурвицем).

Математическое обоснование критерия довольно сложно, поэтому приведем его без доказательства. Критерий Гурвица может быть сформулирован следующим образом: система с характеристическим уравнением (132) будет устойчивой, если определитель Гурвица и все его диагональные миноры положительны, т.е. $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0$.

Матрица Гурвица имеет вид:

$$\begin{pmatrix} a_{n-1}, a_{n-3}, a_{n-5}, \dots, 0 \\ a_n, a_{n-2}, a_{n-4}, \dots, 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & \dots & \dots & \dots, a_0 \end{pmatrix} \quad (136)$$

Порядок составления матрицы Гурвица следующий. В левом верхнем углу матрицы записывается коэффициент a_{n-1} , по главной диагонали располагаются коэффициенты характеристического уравнения с младшими индексами, над элементами главной диагонали записываются коэффициенты с убывающими индексами, под элементами – с возрастающими. В случае отсутствия коэффициентом, проставляются нули.

Для оценки устойчивости системы радиоавтоматики необходимо вычислить определители Гурвица, которые получают из матрицы (136) путём вычёркивания равного числа строк и столбцов в левом верхнем углу матрицы. Например, первый определитель имеет вид:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= a_{n-1}, \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (137)$$

Раскрыв Δ_n по последнему столбцу, получим:

$$\Delta_n = a_0 \Delta_{n-1}. \quad (138)$$

Условия нахождения САУ на границе устойчивости можно получить, приравняв к нулю последний определитель. При этом все остальные определители должны быть положительными.

Так как $a_0 > 0$, то для проверки устойчивости системы достаточно уточнить знаки только до Δ_{n-1} определителя. Если $\Delta_n = 0$, то система радиоавтоматики находится на границе устойчивости. Возможны два случая:

1) свободный член характеристического уравнения равен нулю, что соответствует нейтрально устойчивой системе;

2) $\Delta_{n-1} = 0$, что соответствует колебательной границе устойчивости.

Из условия $\Delta_{n-1} = 0$ вычисляется критический коэффициент усиления $K_{кр.}$, соответствующий границе устойчивости. Отношение

$$\alpha = \frac{K_{кр.}}{K} \quad (139)$$

называют запасом устойчивости по усилению, где K - коэффициент передачи. Для нормального функционирования системы необходимо, чтобы $\alpha \geq 2$.

Критерий Гурвица целесообразно использовать при исследовании систем не выше пятого порядка, ибо системы более высокого порядка требуют анализа очень громоздких выражений.

4.2.2. Частотные критерии устойчивости

Частотные критерии устойчивости основаны на изучении связи между формой частотной характеристики САУ и характером распределения корней характеристического уравнения.

4.2.2.1. Критерий устойчивости Михайлова А.В. (в 1938г. предложил графический критерий устойчивости)

Если характеристическое уравнение замкнутой САУ имеет вид (132), то представив левую часть уравнения в виде функции:

$$D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 \quad (140)$$

и заменив $p \leftrightarrow jw$, получим уравнение комплексного вектора:

$$D(j\omega) = a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 (j\omega) + a_0, \quad (141)$$

конец, которого при изменении угловой частоты колебаний от нуля до бесконечности опишет на комплексной плоскости некоторую кривую – годограф, эта кривая называется *кривой Михайлова*. Для построения кривой

Михайлова необходимо в функции $D(p)$ заменить $p \leftrightarrow j\omega$ и разделить на действительную и мнимую части:

$$D(j\omega) = U\omega + jV(\omega), \quad (142)$$

где вещественная частотная часть содержит четные части, а мнимая – нечетные:

$$U(\omega) = a_0 + a_2\omega^2 + \dots + a_n\omega^n, \quad V(\omega) = a_1\omega + a_3\omega^3 + \dots + a_{n-1}\omega^{n-1}. \quad (143)$$

Критерий Михайлова формируется следующим образом.

Система n -го порядка будет устойчива если годограф $D(j\omega)$, начинаясь на действительной положительной оси, огибает против часовой стрелки начало координат, проходя последовательно n квадрантов. Для устойчивых САУ кривая Михайлова всегда имеет спиралевидную форму, уходящую в бесконечность в квадранте комплексной плоскости, номер которого соответствует степени характеристического уравнения. Больше, чем n квадрантов, кривая Михайлова вообще не может пройти.

Неустойчивость системы всегда связана с нарушением последовательного обхода квадрантов кривой Михайлова.

Условием нахождения САУ на границе устойчивости является прохождение кривой Михайлова через начало координат. Если характеристическое уравнение имеет нулевой корень, т.е. свободный член этого уравнения равен нулю.

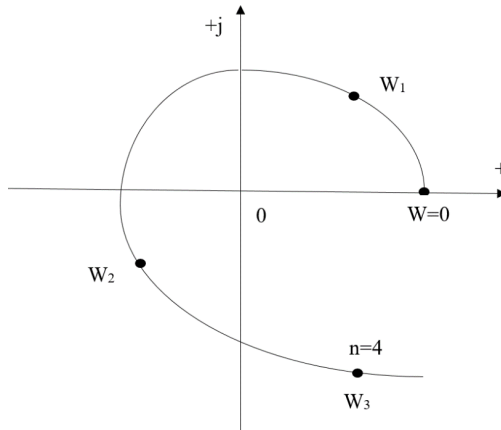


Рис. 4.2. Общий вид характеристического вектора устойчивой системы.

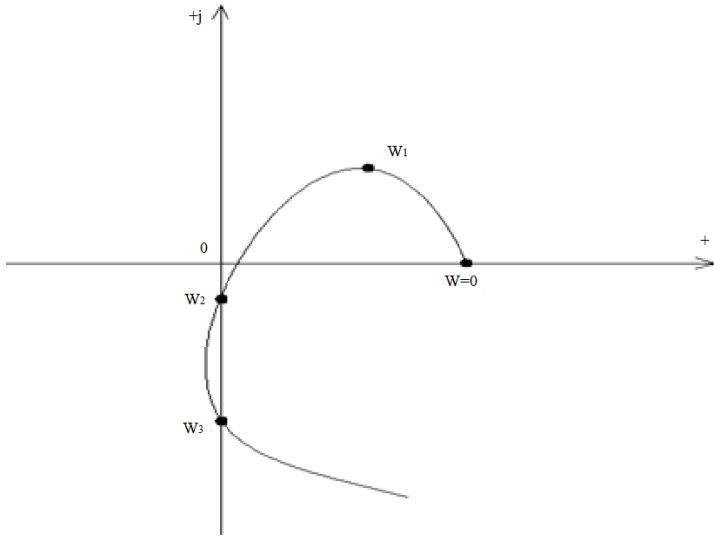


Рис. 4.3. Общий вид характеристического вектора неустойчивой системы.

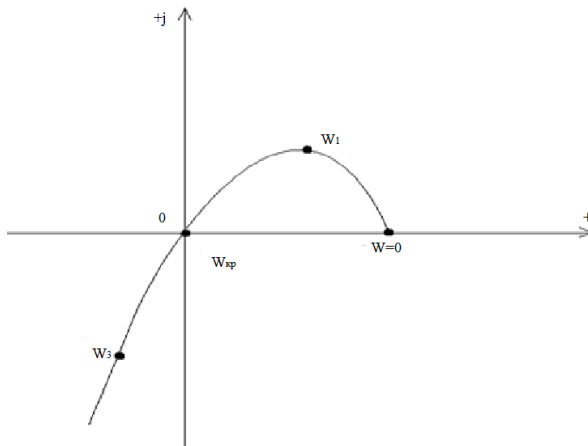


Рис. 4.4. Общий вид характеристического вектора системы на границе устойчивости.

4.2.2.2. Критерий Найквиста (в 1932г. предложен американским ученым Г. Найквистом)

Критерий Найквиста применяется для оценки устойчивости замкнутой САУ при известной амплитудно-фазовой частотной характеристике разомкнутой системы. Необходимая АФЧХ может быть получена как аналитически, так и экспериментально. Разомкнутая САУ может быть устойчивой, неустойчивой и находиться на границе устойчивости. Если САУ состоит из устойчивых звеньев, то она будет устойчивой в разомкнутом состоянии. При наличии хотя бы одного неустойчивого элемента разомкнутая система сойдет быть неустойчивой. При наличии одного интегрирующего звена разомкнутая система находится на границе устойчивости.

Сформулируем критерий Найквиста. Чтобы замкнутая система САУ была устойчивой, необходимо и достаточно соблюдение следующих условий:

1) При устойчивости разомкнутой системы САУ (или находящейся на границе устойчивости) АФЧХ при изменении $w = 0, \infty$ не должна охватывать точку с координатами $-1, j0$;

2) При неустойчивости разомкнутой системы АФЧХ при изменении $w = -\infty, +\infty$ должна охватывать точку $-1, j0$ столько раз, сколько корней характеристического уравнения разомкнутой системы лежит справа от мнимой оси плоскости корней.

$$\text{Введём вектор } F(j\omega) = 1 + W_p(j\omega) = \frac{D(j\omega) + N(j\omega)}{D(j\omega)},$$

где $W_p(j\omega) = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)}$ – частотная характеристика разомкнутой системы;

$D(j\omega) + N(j\omega)$ – характеристический вектор замкнутой системы;

$D(j\omega)$ – характеристический вектор разомкнутой системы.

Определим изменение аргумента вектора $F(j\omega)$ для случая, когда замкнутая система устойчива:

$$\Delta \arg F(j\omega) = \Delta \arg \left[\frac{D(j\omega) + N(j\omega)}{D(j\omega)} \right] - \Delta \arg D(j\omega) = 0.$$

Изменение аргумента вектора $F(j\omega)$ будет равно нулю, если годограф частотной характеристики разомкнутой системы не охватывает точку с координатами $(-1, j0)$.

4.2.3. Анализ устойчивости по логарифмическим частотным характеристиками

В основу этого способа положен критерий Найквиста, но строиться при этом не амплитудно-фазовая характеристика, а логарифмическая амплитудная частотная характеристика (ЛАХ) и логарифмическая фазовая характеристика (ЛФХ) разомкнутой системы. Если разомкнутая система САУ устойчива, то для устойчивости замкнутой САУ необходимо и достаточно, чтобы во всех областях положительных ЛАХ $[L(\omega) > 0]$ разность между числом положительных и отрицательных переходов фазовой характеристики $\varphi(\omega)$ через линию -180^0 равнялась нулю.

Если $\omega_{cp.} = \omega_{кр.}$, то система радиоавтоматики находится на границе устойчивости.

Критический коэффициент усиления вычисляют по формуле:

$$20 \lg K_{кр.} = 20 \lg k + \Delta L.$$

4.3. Устойчивость систем с запаздыванием

$W_p(p) = W_{pu}(p)e^{-p\tau}$ – передаточная функция разомкнутой системы с запаздыванием,

где $W_{pu}(p)$ – передаточная функция разомкнутой системы без запаздывания; τ – время запаздывания; $|W_p(j\omega)| = |W_{pu}(j\omega)|$ – амплитудно-частотная характеристика разомкнутой системы с запаздыванием; $\phi_p(\omega) = \phi_{pu}(\omega) - \omega\tau$ – фазочастотная характеристика разомкнутой системы с запаздыванием, где $\phi_{pu}(\omega)$ – фазочастотная характеристика разомкнутой системы без запаздывания.

Представляется возможным сделать вывод: запаздывание влияет только на фазочастотную характеристику, создавая на каждой частоте дополнительный фазовый сдвиг. Поэтому системы радиоавтоматики, устойчивые без запаздывания, могут быть неустойчивыми при включении в их состав устройств запаздывания.

5. Качество переходных процессов в САУ

Устойчивость САУ является необходимым, но не достаточным условием ее технической пригодности. В конечном результате качество САУ определяется точностью её работы в реальных условиях, т.е. при непрерывном изменении управляющих и возмущающих воздействий. Точность работы однозначно оценивается величиной ошибки, равной разности между требуемыми и действительными значениями управляемого сигнала:

$$u(t) = x(t) - y(t).$$

Однако, мгновенные значения ошибки не могут быть определены при проектировании, так как во время работы САК входной сигнал и возмущающие воздействия могут изменяться во времени случайным, неизвестным образом. Поэтому качество работы САУ приходится оценивать с помощью косвенных показателей (критериев качества), которые характеризуют процесс управления раздельно в установившемся и переходных процессах. В настоящее время для исследования качества линейных САУ применяют следующие основные критерии:

- 1) *Алгебраические критерии*, основанные на знании распределения корней характеристического уравнения;
- 2) *Интегральные критерии*, основанные на интегральных характеристиках;
- 3) *Частотные критерии*, основанные на частотных характеристиках.

Широкое распространение получили частотные методы, поскольку с их помощью сравнительно просто и без лишних громоздких вычислений можно исследовать работу большинства реальных САУ.

5.1. Точность работы систем в установившихся режимах

Типовые законы изменения во времени входного сигнала (или возмущающего воздействия) должны быть достаточно простыми и по возможности близкими к реальным входным сигналам (или возмущениям) системы. На практике для оценки установившихся режимов чаще всего используют 4-ре типовых закона.

- 1) *Неизменности управляющего и возмущающих воздействий.*

В качестве первого типового режима рассмотрим установившееся состояние САУ при $g_i(t) = g_{i0} = \text{const}$, $x(t) = x_0 = \text{const}$, где g_{i0} – каждое из возмущений, действующих на САУ. Ошибка системы в этом режиме называется статической. Она не меняется во времени, но может зависеть от величины входного и возмущающих воздействий:

$$y_{\text{ст}} = \left[\frac{x_0}{1 + W(p)} \right]_{p \rightarrow 0} + \left[\sum_{i=1}^m \frac{W_i(p) g_{i0}}{1 + W(p)} \right]_{p \rightarrow 0} = y'_{\text{ст}} + y''_{\text{ст}}. \quad (144)$$

Здесь $W(p)$ – передаточная функция разомкнутой системы по управляющему воздействию; $W_i(p)$ – передаточная функция разомкнутой системы по i -му возмущающему воздействию; m – число действующих на систему возмущений. Первое слагаемое в астатическом режиме равно нулю. Оно может отличаться от нуля только в статических (по возмущению) системах. Но и при статическом управлении эта составляющая может быть сведена к нулю

при помощи масштабирования входного сигнала или при использовании неединичной обратной связи. Следовательно, статическая ошибка САУ в основном определяется вторым слагаемым уравнения (144), т.е. возмущениями, действующими на систему (а также внутренними нелинейностями). К числу основных возмущающих воздействий можно отнести следующие факторы:

- статическую нагрузку исполнительного механизма САУ; составляющая статической ошибки, вызванная нагрузкой, обычно наиболее велика;

- конструктивные и технологические погрешности чувствительного элемента САУ, приводящие к ошибке нулевого положения, т.е. к появлению сигнала на выходе чувствительного элемента при равенстве требуемого и действительного значений управляемого сигнала или к равенству нулю выходного сигнала чувствительного элемента при различии требуемого и действительного значений управляемого сигнала;

- люфт механической передачи между выходным валом исполнительного механизма и осью чувствительного элемента;

- медленные колебания напряжения и частоты питающей сети, следствием которых является снижение передаточных коэффициентов элементов системы (отклонения частоты чети от номинального значения, кроме того приводят к фазовым сдвигам, что может дополнительно уменьшить передаточный коэффициент системы);

- изменения температуры внешней среды, приводящие к колебаниям передаточного коэффициента, дрейфу нуля и фазовым сдвигам в усилительном элементе САУ;

- помехи (в частности, квадратурные) и временной дрейф нуля усилительного элемента системы.

2) Движение САУ с постоянной скоростью.

Второй типовой установившейся режим осуществляется путём изменения входного сигнала САУ во времени по линейному закону; возмещающие воздействия при этом остаются неизменными: $g_i(t) = g_{i0} = \text{const}$, $x(t) = \Omega t$, $\Omega = \text{const}$ – скорость изменения входной величины САУ). Ошибка системы в таком режиме может быть представлена суммой двух составляющих:

$$y_{\Omega=\text{const}} = \left[\frac{(\Omega/p)}{1+W(p)} \right]_{p \rightarrow 0} + \left[\sum_{i=1}^m \frac{W_i(p) g_{i0}}{1+W(p)} \right]_{p \rightarrow 0} = y_{\Omega} + y_{\text{СТ}}'' \quad (145)$$

Второе слагаемое (145) – это статистическая ошибка, вызванная возмущающими воздействиями (в том числе и собственной погрешностью чувствительного элемента). Следует отметить, что член $y_{\text{СТ}}''$ в режиме движения САУ с постоянной скоростью может отличаться от того же режима, но при неизменном входном сигнале, например, в результате скоростной ошибки чувствительного элемента САУ. Первое слагаемое стремится к бесконечности в

статистических (по управляющему воздействию) САУ и обращается в нуль в системах с астатизмом выше первого порядка. При астатизме первого порядка (145) может быть записано в виде:

$$y_{\Omega=\text{const}} = y_{\Omega} + y_{\text{СТ}}'' = \frac{\Omega}{K_{\Omega}} + y_{\text{СТ}}'' \quad (146)$$

где K_{Ω} – передаточный коэффициент разомкнутой САУ с астатизмом первого порядка по управляющему воздействию (добротность скорости); $y_{\Omega} = \frac{\Omega}{K_{\Omega}} = \text{const}$ – установившееся значение скоростной ошибки. Скоростная ошибка или определяемая ею добротность системы по скорости $K_{\Omega} = \frac{\Omega}{y_{\Omega}}$ (в $1/c$) могут служить удобным критерием качества для САУ с астатизмом первого порядка.

3) Движение САУ с постоянным ускорением.

Для оценки качества САУ с астатизмом второго порядка удобен режим установившегося движения САУ с постоянным ускорением $\varepsilon = \text{const}$. Возмущения, как и в предыдущем случае, полагают неизменными:

$g_i(t) = g_{i0} = \text{const}$, $x(t) = \frac{\varepsilon t^2}{2}$. Установившаяся ошибка такой системы

$$y_{\varepsilon=\text{const}} = y_{\varepsilon} + y_{\text{СТ}}'' = \frac{\varepsilon}{K_{\varepsilon}} + y_{\text{СТ}}'' \quad (147)$$

где K_{ε} – передаточный коэффициент разомкнутой системы с астатизмом второго порядка (добротность системы по ускорению). Ошибка y_{ε} или определяемый ею коэффициент добротности по ускорению $K_{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{y_{\varepsilon}}$ (в $1/c^2$)

является критерием качества САУ в типовом режиме.

4) Движение САУ по синусоидальному закону.

Синусоидальный закон наиболее близок к реальному изменению входного параметра многих САУ. Исследование поведения системы в синусоидальном установившемся режиме работы позволяет оценить и многие характеристики переходного режима. Большинство возмущающих воздействий в этом режиме остаются неизменными (*Однако, в большинстве САУ одно из основных возмущений – статистический момент нагрузки реактивного типа (момент сил сухого трения) – меняет знак при изменении направления движения выходной оси. Учет изменения знака статистического момента даже в простейших САУ приводит к громоздким расчетным выражениям*). В первом приближении все возмущения можно считать неизменными, т.е. при $g_i(t) = g_{i0} = \text{const}$, $x(t) = x_{\text{max}} \sin w_k t$. x_{max} – амплитуда входного синусоидального воздействия, w_k – его частота. В линеаризованной САУ составляющая ошибки, обусловленная входным синусоидальным воздействием в установившемся режиме также будет меняться по гармоническому закону:

$$y_{\sin} = y_{\sin \max} \sin(\omega_k t + \psi). \quad (148)$$

Её максимальное значение может быть найдено подстановкой $p = j\omega_k$ в выражение передаточной функции замкнутой системы по ошибке:

$$W_3(j\omega_k) = \frac{y(j\omega_k)}{x(j\omega_k)} = \frac{1}{1+W(j\omega_k)}. \quad (149)$$

Отсюда

$$|y(j\omega_k)| = y_{\sin \max} = \frac{x_{\max}}{1+W(j\omega_k)}. \quad (150)$$

Модуль знаменателя (150) значительно больше единицы, поэтому можно записать с очень малой погрешностью

$$y_{\sin \max} \approx \frac{x_{\max}}{W(j\omega_k)} = \frac{x_{\max}}{A(\omega_k)}, \quad (151)$$

где $A(\omega_k)$ – модуль частотной передаточной функции разомкнутой системы при $\omega = \omega_k$. Полная максимальная ошибка установившегося синусоидального режима определяется приближенной суммой:

$$y_{\sin=\text{const}} = y_{\sin \max} y''_{\text{CT}} = A(\omega_k) + y''_{\text{CT}}. \quad (152)$$

и является удобным критерием качества системы с астатизмом любого порядка. С помощью этого критерия можно оценить и максимальное значение ошибки устойчивой САУ в реальных условиях, подобрав синусоидальный режим $x(t) = x_{\max} \sin \omega_k t$, приближенно эквивалентный действительному изменению входного сигнала системы. Условием эквивалентности является равенство максимальных значения скорости и ускорения действительного изменения управляемого сигнала и синусоидального режима:

$$x_{\max} \omega_k = \Omega_{\text{BXmax}}, \quad x_{\max} \omega_k^2 = \varepsilon_{\text{BXmax}}. \quad (153)$$

Из уравнений (153) находим амплитуду x_{\max} и частоту ω_k эквивалентной синусоиды:

$$x_{\max} = \frac{\Omega_{\text{BXmax}}^2}{\varepsilon_{\text{BXmax}}}, \quad \omega_k = \frac{\varepsilon_{\text{BXmax}}}{\Omega_{\text{BXmax}}}. \quad (154)$$

По величине ошибки эквивалентного режима, определяемой (151), можно ориентировочно судить о максимальном значении реальной установившейся (динамической) ошибки системы.

5.2. Постановка задачи анализа качества работы систем радиоавтоматики

При анализе качества работы систем радиоавтоматики исходят из того, что структурная схема и параметры устройств системы известны. Требуется оценить качество её работы.

Показатели качества работы зависят не только от характеристик системы радиоавтоматики, но и от свойств, действующих на неё сигналов – управляющих воздействий и возмущающих воздействий (помех).

Законы изменения управляющих воздействий и помех обычно заранее неизвестны, поэтому качество работы систем радиоавтоматики определяется косвенными признаками, которые называют показателями качества работы системы.

Динамическая ошибка работы системы радиоавтоматики оценивается при управляющем воздействии вида $x(t) = \sum_{i=0}^k \alpha_i t^i$.

Существуют методы оценки качества работы систем радиоавтоматики, основанные на вычислении интегральных оценок. Часто используется квадратичная интегральная оценка:

$$J = \int_0^{\infty} \left[e^2(t) + \alpha_1 e^2(t) + \alpha_2 e^2(t) + \dots + \alpha_k [e^{(k)}(t)]^2 \right] dt,$$

где $e(t)$ – ошибка системы, равная разности входного $x(t)$ и выходного $y(t)$ сигналов; α_i – постоянные коэффициенты.

Чем меньше значение интегральной оценки, тем выше качество работы системы и наоборот.

5.3. Анализ точности работы систем

Помимо статистических ошибок точность работы систем радиоавтоматики характеризуется динамическими и переходными ошибками.

Динамическая ошибка – ошибка в установившемся режиме работы системы при действии на неё нестационарного сигнала.

Переходная ошибка – ошибка при работе системы в переходном процессе, который возникает при обработке начального рассогласования.

Динамическая точность работы систем радиоавтоматики определяется при медленно изменяющихся входных сигналах (воздействия, число производных от которых ограничено).

Сигнал $x(t) = \sum_{i=0}^k a_i t^i$ относится к медленно изменяющемуся воздействию, так как число производных от этого сигнала неравных нулю, равно k , а

$(k+1)$ -я производная равна нулю. Гармонический сигнал не является медленно изменяющимся, так как число производных от него равно ∞ .

Переходные процессы в системах радиоавтоматики затухают значительно быстрее по сравнению с изменением медленно изменяющегося сигнала, поэтому и достигается установившейся динамический режим работы системы.

По определению передаточной функции рассогласования преобразование Лапласа для ошибки системы:

$$E(p) = W_e(p)X(p) = \left[C_0 + C_1 p + \frac{1}{2} C_2 p^2 + \dots + \frac{1}{k!} C_k p^k \right] X(p) \quad (155)$$

или в области действительного переменного

$$e(t) = C_0 x(t) + C_1 \dot{x}(t) + \frac{1}{2} C_2 \ddot{x}(t) + \dots + \frac{1}{k!} C_k x^{(k)}(t). \quad (156)$$

Число слагаемых в последнем выражении ограничено, так как сигнал $x(t)$ является медленно изменяющимся воздействием. Для нахождения неизвестных коэффициентов C_i , которые называются коэффициентами ошибки, известны три способа.

$$1) C_k = k! \frac{\partial^k}{\partial p^k} W_e(p) \Big|_{p=0};$$

2) вторым способом коэффициенты ошибок находятся путём деления числителя передаточной функции ошибки на её знаменатель.

3) для реализации третьего способа представим передаточную функцию ошибки в виде:

$$W_e(p) = \frac{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}.$$

Перемножив полином знаменателя на (155), получим:

$$\begin{aligned} & \left[a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 \right] \left[C_0 + C_1 p + \frac{1}{2} C_2 p^2 + \dots + \frac{1}{k!} C_k p^k \right] = \\ & = b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0 \end{aligned} \quad (157)$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях p слева и справа в выражении (157), определим формулы для последовательного вычисления коэффициентов ошибок:

$$C_0 = \frac{b_0}{a_0}, \quad C_1 = \frac{b_1 - a_1 C_0}{a_0}, \quad C_2 = \frac{(b_2 - a_2 C_0 - a_1 C_1) \cdot 2}{a_0}.$$

В инженерных расчётах коэффициенты ошибок удобнее рассчитывать через коэффициенты передаточной функции разомкнутой системы:

$$W_p(p) = \frac{d_m p^m + \dots + d_2 p^2 + d_1 p + d_0}{b_n p^n + \dots + b_2 p^2 + b_1 p + b_0} \cdot \frac{k}{p^v}, \quad (158)$$

где V - порядок астатизма системы.

Таблица 5.1

Формулы расчёта первых трёх коэффициентов ошибок статических и астатических систем радиоавтоматики через параметры передаточной функции

| Формулы для расчёта |
|---|
| $\frac{1}{1+k}$ |
| $k \frac{b_1 - d_1}{(1+k)^2}$ |
| $2 \left[k \frac{b_2 - d_2}{(1+k)^2} + k \frac{b_1(d_1 - b_1)}{(1+k)^3} + k^2 \frac{2d_1(d_1 - b_1)}{(1+k)^3} \right]$ |
| 0 |
| $\frac{1}{k}$ |
| $2 \left[\frac{b_1 - d_1}{k} - \frac{1}{k^2} \right]$ |
| 0 |
| 0 |
| $\frac{2}{k}$ |

Первое слагаемое в выражении (156) называют ошибкой по положению, а коэффициент C_0 - коэффициентом ошибки по положению, второе слагаемое – ошибкой по скорости, а коэффициент C_1 - коэффициентом ошибки по скорости. Аналогично, третье слагаемое в (156) называют ошибкой по ускорению, а коэффициент C_2 - коэффициентом ошибки по ускорению.

В астатических системах v первых коэффициентов ошибок равны нулю, где V - порядок астатизма системы радиоавтоматики.

При анализе качества работы систем радиоавтоматики помимо вычисления ошибок при медленно изменяющихся сигналах приходится оценивать точность

и при гармонических воздействиях. В этом случае нельзя применять метод коэффициентов ошибок, так как число производных от гармонического сигнала не ограничено. При этом для расчёта ошибок необходимо использовать частотные характеристики. По амплитудно-частотной характеристике ошибки вычисляется амплитуда колебаний ошибки, по фазочастотной характеристике – сдвиг колебаний ошибки относительно входного сигнала

5.4. Методы анализа детерминированных процессов в линейных стационарных системах

В линейной стационарной системе воздействие $u(t)$ и изучаемый процесс $v(t)$ связаны дифференциальным уравнением:

$$v(t) = W(s)u(t),$$

где $W(s)$ – операторный коэффициент передачи, $s = \frac{\partial}{\partial t}$.

Для получения аналитических выражений для процессов на выходе линейной системы применяется метод преобразований Лапласа:

$$v(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} V(p)e^{pt} dp,$$

где $V(p)$ – изображение выходного процесса.

При нулевых начальных условиях изображение $V(p)$ равно:

$$V(p) = W(p) \cdot U(p),$$

где $U(p)$ – изображение входного воздействия, вычисляемое по формуле:

$$U(p) = \int_0^{\infty} u(t)e^{-pt} dt.$$

Сокращённая запись: $U(p) = L[u(t)]$.

Для описания воздействия в системе радиоавтоматики часто используют функции времени, которые либо сами имеют разрыв непрерывности в точке $t = 0$, либо имеют разрывные в этой точке производные:

$$1(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < 0, \\ 1, & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

При воздействии, описываемом такими функциями, разрывы в точке $t = 0$ может иметь также выходной процесс $v(t)$ и его производные. В этом случае преобразование Лапласа определяется соотношением:

$$U(p) = \int_{0-}^{\infty} u(t)e^{-pt} dt,$$

т.е. точка $t = 0$ включается в интервал, на котором выполняется преобразование.

Во многих случаях достаточно знать значение выходного процесса только при $t \rightarrow \infty$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pV(p).$$

5.5. Суммарная ошибка системы

В большинстве случаев закон распределения ошибки системы можно считать гауссовским, поэтому для расчёта составляющих суммарной средней квадратической ошибки достаточно учесть математическое ожидание и корреляционную функцию ошибки или её спектральную плотность.

На вход системы подаётся воздействие вида:

$$f(t) = x(t) + n(t),$$

где $x(t)$ - случайный сигнал; $n(t)$ - случайная помеха.

$e_{\Sigma}(t) = x(t) - y(t)$ - суммарная ошибка системы,

где $y(t)$ - выходной сигнал системы.

На приведённом рисунке круг означает сумматор, а сектор круга со знаком минус означает операцию вычитания.

Преобразование Лапласа для суммарной ошибки:

$$\begin{aligned} E(p) &= X(p) - W_s(p)F(p) = X(p) - (1 - W_e(p))(X(p) + N(p)) = \\ &= X(p) - (X(p) + N(p) - W_e(p)X(p) - W_e(p)N(p)) = \\ &= W_e(p)X(p) + N(p)(W_e(p) - 1) = W_e(p)X(p) - W_s(p)N(p). \end{aligned} \quad (159)$$

Вывод. Суммарная ошибка состоит из двух составляющих, одна из которых, определяющая точность воспроизведения сигнала, зависит от передаточной функции ошибки, вторая, обусловленная действием помехи, - от передаточной функции замкнутой системы.

Предположим, что сигнал и помеха являются стационарными случайными функциями. Тогда математическое ожидание помехи $m_{ном.} = 0$, а случайный сигнал представим в виде:

$$x(t) = m_x + x^0(t),$$

где m_x - математическое ожидание сигнала; $x^0(t)$ - случайная составляющая сигнала.

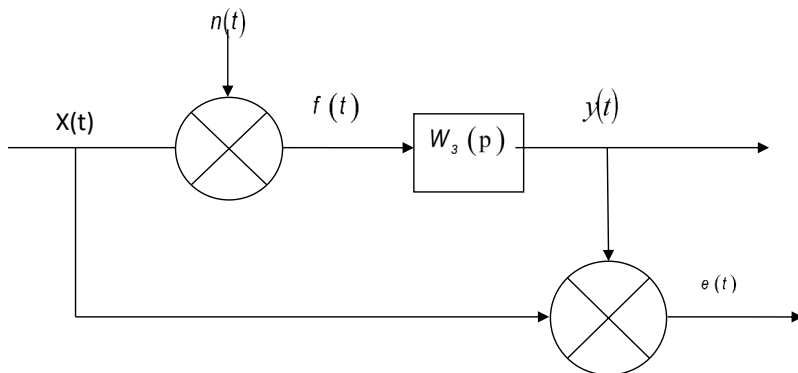


Рис. 5.1. К определению суммарной ошибки.

Математическое ожидание суммарной ошибки рассчитывают по теореме о конечном значении функции:

$$m_e = \lim_{p \rightarrow 0} p W_e(p) m_x(p).$$

Точность системы относительно случайных составляющих сигнала и помехи оценивается дисперсией ошибки:

$$\delta_e^2 = M[e^2(t)] = R_e(\tau) |_{\tau=0},$$

где δ_e^2 - дисперсия ошибки; δ_e - средняя квадратическая ошибка системы, M - математическое ожидание от квадрата ошибки; $R_e(\tau)$ - автокорреляционная функция ошибки;

$$\delta_e^2 = \delta_{ex}^2 + \delta_{en}^2 + \delta_{exn}^2 + \delta_{enn}^2; \quad (160)$$

Первое слагаемое в (160) определяет среднюю квадратическую ошибку воспроизведения сигнала $x(t)$. Второе слагаемое в (160) характеризует ошибку вследствие действия помехи $n(t)$. Последние два слагаемых в (160) – составляющие ошибки из-за корреляции сигнала с помехой и помехи с сигналом.

Величину

$$\delta_{\Sigma} = [m_e^2 + \delta_e^2]^{\frac{1}{2}}$$

называют суммарной средней квадратической ошибкой системы радиоавтоматики.

Дисперсия ошибки может быть вычислена через её спектральную плотность:

$$\delta_e^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) |W(j\omega_k)|^2 \quad (161)$$

где $S_x(\omega)$ - спектральная плотность сигнала.

Интеграл (161) удобно представить в виде:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) |W(j\omega)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_n(j\omega)}{H_n(j\omega)H_n(-j\omega)} \partial\omega = I_n,$$

где

$G_n(j\omega) = b_0(j\omega)^{2n-4} + b_1(j\omega)^{2n-4} + \dots + b_{n-1}$ - полином, содержащий чётные степени ω ,

$H_n(j\omega) = a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n$ - полином, корни которого лежат в верхней полуплоскости комплексной переменной ω ,

n - степень полинома $H_n(j\omega)$.

$$\text{Если } n=1, \text{ то } I_1 = \frac{b_0}{2a_0a_1}.$$

$$\text{Если } n=2, \text{ то } I_2 = \frac{-b_0 + a_0b_1/a_2}{2a_0a_1}.$$

$$\text{Если } n=3, \text{ то } I_3 = \frac{-a_2b_0 + a_0b_1 - a_0a_1b_2/a_3}{2a_0(a_0a_3 - a_1a_2)}.$$

5.6. Эффективная полоса пропускания системы

На практике часто встречаются случаи, когда помеху можно считать белым шумом, спектральная плотность которого в пределах полосы пропускания системы радиоавтоматики постоянна.

Дисперсия ошибки системы из-за действия помехи:

$$\delta_{en}^2 = \frac{S_n(0)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W_3(j\omega_k)|^2 \partial\omega.$$

Эффективной полосой пропускания системы называется величина:

$$f_{эф.} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W_3(j\omega_k)|^2 \partial\omega,$$

$$\omega_{эф.} = \int_{-\infty}^{\infty} |W_3(j\omega_k)|^2 \partial\omega.$$

$$w_{эф.} = \int_{-\infty}^{\infty} |W_3(j\omega)|^2 \partial\omega.$$

5.7. Типовые входные воздействия

Для оценки свойств систем радиоавтоматики полезно рассмотреть их поведение при некоторых типовых воздействиях:

$\lambda(t) = \alpha_0 1(t)$ – ступенчатое воздействие;

$\lambda(t) = \alpha_1 t 1(t)$ – линейное воздействие;

$\lambda(t) = \alpha_2 t^2 1(t)$ – квадратичное воздействие;

$\lambda(t) = (\alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_i t^i) 1(t)$ – полиномиальное воздействие.

Линейное и квадратичное воздействия характерны для систем радиоавтоматики. Линейное воздействие возникает, например, в радиолокационном дальномере при постоянной радиальной скорости перемещения сопровождаемого объекта по отношению к локатору. Квадратичное воздействие соответствует, например, случаю, когда в системе фазовой автоподстройки частоты частота входного сигнала меняется по линейному закону.

5.8. Показатели качества переходного процесса в системе радиоавтоматики

В зависимости от характера собственных колебаний системы переходный процесс в ней может быть колебательным или аperiodическим.

Если корни характеристического уравнения системы действительны, то собственные колебания системы и переходный процесс в ней аperiodические. В случае комплексно-сопряжённых корней характеристического уравнения собственные колебания системы являются затухающими гармоническими и переходный процесс в системе колебательный.

К основным показателям качества переходного процесса в системе радиоавтоматики относятся следующие параметры:

1) длительность переходного процесса t_n , равная интервалу времени с момента подачи сигнала до момента времени, когда выходной сигнал не будет отличаться от его установившегося значения более чем на 5%;

2) перерегулирование γ , равное отношению максимального значения выходного сигнала в переходном процессе к установившемуся значению:

$$\gamma = \frac{y_{\max}}{y_y};$$

3) время установления первого максимума выходного сигнала t_p , характеризующее скорость изменения выходного сигнала в переходном процессе;

4) частота колебаний в переходном процессе $\omega_t = \frac{2\pi}{T}$, где T – период колебаний.

Установившееся значение выходного сигнала системы вычисляется следующим образом:

при единичном входном сигнале $y_y = \lim_{p \rightarrow 0} pW_z(p) \cdot \frac{1}{p} = W_z(0)$, где $W_z(p)$ – передаточная функция замкнутой системы.

В астатических системах радиоавтоматики установившееся значение выходного сигнала в переходном процессе равно единице, в статических системах – $\frac{K}{1+k}$.

5.9. Частотные показатели качества

Частотные показатели качества работы систем радиоавтоматики определяются по амплитудно-частотной характеристике замкнутой системы.

К частотным показателям качества работы систем радиоавтоматики относятся следующие параметры:

1) полоса пропускания ω_n – диапазон частот, в котором амплитудно-частотная характеристика больше или равна единице. Если амплитудно-частотная характеристика замкнутой системы радиоавтоматики во всём диапазоне частот меньше единицы, то полоса пропускания отсчитывается по уровню 0,7.

2) резонансная частота ω_p – частота, соответствующая максимуму амплитудно-частотной характеристики замкнутой системы, эта частота характеризует частоту колебаний в переходном процессе;

3) показатель колебательности M – максимальное значение амплитудно-частотной характеристики замкнутой системы. Обычно стремятся, чтобы показатель колебательности не превышал двух.

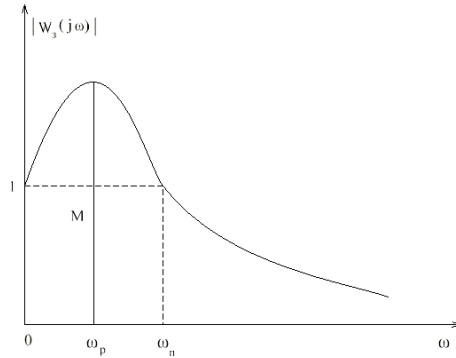


Рис. 5.2. АЧХ замкнутой системы.

5.10. Оптимизация параметров радиотехнической следящей системы

Цель оптимизации – выбор параметров системы, при котором минимизируется результирующая ошибка слежения, вызванная как искажением задающего воздействия $\lambda(t)$ при его прохождении через систему, так и действием шума на выходе дискриминатора. Решаемые при этом задачи оптимизации параметров системы отличаются не только структурой рассматриваемых систем, но и описанием действующих на систему возмущений, критериями, по которым ведётся оптимизация, наличием дополнительных требований и ограничений. Охватить все возможные варианты таких задач весьма затруднительно. Поэтому рассмотрим несколько характерных случаев:

- 1) воздействие $\lambda(t)$ – детерминированная функция, возмущение $\xi(t)$ – флуктуационный процесс;
- 2) воздействие $\lambda(t)$ и возмущение $\xi(t)$ являются случайными процессами.

Если в установившемся режиме математическое ожидание ошибки слежения $M[x(t)] = m_x$, вызванное детерминированным воздействием $\lambda(t)$, постоянно и отлично от нуля, то в качестве критерия оптимизации может применяться условие минимума установившегося значения среднего квадрата ошибки:

$$M[x^2] = \bar{x}^2 = m_x^2 + \delta_x^2 = \min \quad (162)$$

Также в качестве критерия оптимизации может использоваться требование минимизации дисперсии ошибки слежения при ограничении максимального значения $x_{\lambda_{\max}}$ составляющей ошибки, вызванной воздействием $\lambda(t)$:

$$\delta_x^2 = \min,$$

$$x_{\lambda_{\max}} \leq x_{\text{дон}},$$

где $x_{\text{дон}}$ - максимально допустимое значение ошибки, выбираемое так, чтобы ошибка не выходила за пределы дискриминационной характеристики и не возникал срыв сопровождения.

В тех случаях, когда изменение параметра $\lambda(t)$, за которым идёт слежение, описывается стационарным случайным процессом с нулевым математическим ожиданием, критерием оптимизации параметров системы может служить минимум дисперсии суммарной ошибки слежения, вызванной как искажением процесса $\lambda(t)$, так и действием флюктуационного напряжения $\xi(t)$:

$$\delta_x^2 = \delta_{x_1}^2 + \delta_{x_2}^2 = \min.$$

6. Нелинейные системы автоматического управления

К нелинейным САУ относятся системы, в которых связь между выходными и входными сигналами одного или нескольких основных элементов задается нелинейными уравнениями. Любая реальная САУ всегда содержит нелинейности вследствие наличия люфтов, трения, ограниченной мощности исполнительных элементов и других факторов. Если влияние нелинейностей не систему несущественно, то ее можно линеаризовать. Однако на практике часто приходится встречаться с САУ, которые имеют существенные нелинейные характеристики, влияющие на динамические свойства системы.

Нелинейности, встречающиеся в САУ, либо являются неотъемлемыми физическими свойствами элементов (например, сухое трение, люфт, прилипание, насыщение и т.п.), либо преднамеренно вводятся в системы для получения требуемых показателей качества САУ (например, релейные усилители, нелинейные корректирующие устройства и т.д.).

Нелинейные системы могут обладать качественными особенностями, которые несвойственны линейным системам. К таким особенностям относятся, например, возникновение периодических колебаний (называемых автоколебаниями), возможность нескольких равновесных состояний, часть которых устойчива, переход системы из одного установившегося движения в другое под воздействием внешних сил и др.

Обычно в любой нелинейной САУ можно выделить группу линейных элементов (ЛЭ) и один или несколько нелинейных (НЭ). При одном нелинейном элементе структурная схема САУ может быть представлена как одноконтурная, состоящая из последовательно включенных линейных и нелинейных элементов (Рис.6.1). При других видах включения линейных и нелинейных частей САУ ее также можно привести к схеме показанной на рис.1, с помощью структурных преобразований. При составлении структурной схемы нелинейной САУ вместо

нелинейного элемента обычно указывают его нелинейную статистическую характеристику или, если это возможно, записывают аналитическое выражение нелинейной функции элемента. Нелинейные статистические характеристики могут быть разбиты на две группы: *однозначные* и *неоднозначные*.

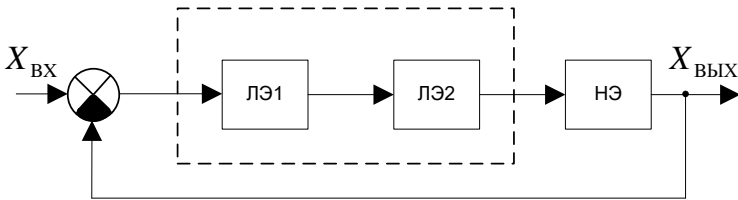


Рис. 6.1. Одноконтурная структурная схема САУ.

Нелинейные элементы с *однозначной нелинейной характеристикой* имеют однозначную зависимость между входным и выходным сигналами как при увеличении, так и при уменьшении входного сигнала. Элементы с *неоднозначной нелинейной характеристикой* имеют разные зависимости между входным и выходным сигналами, которые определяются знаком изменения входного сигнала. Нелинейности типа насыщения, зоны нечувствительности и релейного переключения имеют однозначные и симметричные характеристики, а нелинейности типа люфта и насыщения с петлёй гистерезиса – неоднозначные и, как правило, несимметричные.

Следует отметить, что к нелинейным САУ в отличие от линейных неприменим принцип суперпозиции, который даёт возможность определить движение линейной САУ под воздействием возмущения как сумму частных составляющих от отдельных компонентов возмущения.

При анализе нелинейных САУ прежде всего определяются возможные состояния равновесия системы и исследуется их устойчивость, определяются периодические движения и исследуется их устойчивость, изучаются процессы перехода от одного к другому установившемуся состоянию при различных начальных условиях. Началом анализа нелинейных САУ обычно является определение устойчивости системы и наличия автоколебаний.

Из-за наличия нелинейных характеристик выходной сигнал нелинейной САУ не будет пропорционален входному, поэтому форма реакции системы на скачкообразное воздействие будет зависеть от величины этого воздействия. Для некоторых нелинейных САУ применение входного воздействия может превратить устойчивый переходный процесс в неустойчивый, и наоборот. (В то время как устойчивость линейных САУ зависит только от ее параметров и не зависит от внешних воздействий).

В нелинейной САУ статические и динамические процессы значительно разнообразнее, чем в линейной. Характер переходного процесса в нелинейной

системе часто зависит от величины начального отклонения, вызванного возмущением. В связи с этим для нелинейных САУ употребляются понятия *устойчивости в малой, в большом и в целом*. Система устойчива в малом, если она устойчива при бесконечно малых отклонениях от исходного режима. Система устойчива в большом, если она устойчива при конечных отклонениях, возможных в данной системе по условиям ее работы. Система устойчива в целом, если она устойчива при неограниченных отклонениях.

Для нелинейных систем характерен режим незатухающих колебаний, которые возникают в них при отсутствии периодических внешних воздействий вследствие внутренних свойств системы. Эти колебания могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми. Устойчивые колебания нелинейных САУ называются автоколебаниями. Если колебания в нелинейных САУ устанавливаются в результате периодических внешних воздействий, то они называются вынужденными. Следует отметить, что при затухающих колебаниях переходного процесса происходит изменение периода колебаний.

Нелинейные дифференциальные уравнения, к которым приводит исследование САУ, часто имеют довольно высокий порядок. В настоящее время большинство групп нелинейных уравнений при решении в общем виде представляются в очень громоздком и сложнорешаемом виде. В конкретном случае иногда можно исследовать нелинейную систему точными аналитическими методами. Для этого необходимо, чтобы нелинейные характеристики были выражены посредством аналитических зависимостей. Но так как в большинстве случаев это невозможно, то при исследовании нелинейных САУ большую роль приобретают приближенные методы.

Использование приближенных методов, как правило, не дает достаточно полного представления о всех динамических свойствах САУ. Поэтому применение нескольких методов в каждом конкретном случае часто дает более полную картину анализа. Тем не менее использование каждого из приближенных методов позволяет исследователю ответить на ряд отдельных существенных вопросов, например, об устойчивости, наличии в системе автоколебаний, характере каких-либо режимов и т.д. В настоящее время разработано большое количество методов исследований нелинейных САУ. Многие из них пригодны только для ограниченного круга задач и лишь некоторые имеют достаточно общее применение в области исследования нелинейных САУ.

Исследование нелинейных САУ можно также производить методами математического моделирования, которые могут быть реализованы с помощью аналоговых или вычислительных элементов. Эффективность их в том, что динамику сложной и дорогостоящей реальной САУ можно исследовать с помощью сравнительно простой электронной аппаратуры. Применение электронных моделей предпочтительнее при исследовании систем, описываемых сложными нелинейными дифференциальными уравнениями, математическое решение которых оказывается невозможным. Однако использование электронных моделей для исследования САУ не исключает

необходимости аналитических методов расчета, как точных, так и приближенных, позволяющих получать обобщенные результаты.

Во многих системах радиоавтоматики нелинейные устройства можно представить как статические, зависимость выходного сигнала от входного в которых описывается линейной зависимостью вида $y = F(x)$.

Встречаются случаи, когда линейные устройства описываются дифференциальными уравнениями вида $y = F(x, \dot{x})$.

Рассмотрим основные методы анализа нелинейных систем автоматики:

- 1) метод Ляпунова;
- 2) метод Попова;
- 3) метод фазовой плоскости;
- 4) метод кусочно-линейной аппроксимации;
- 5) метод гармонической линеаризации;
- 6) метод статистической линеаризации;
- 7) метод моделирования.

6.1. Метод Ляпунова

Наиболее общие результаты по исследованию устойчивости любых нелинейных САУ могут быть получены с помощью метода А.М.Ляпунова. Для этого необходимо подобрать некоторую знакоопределенную функцию $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и вычислить производную во времени от этой функции:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = W(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (163)$$

с учетом уравнения движения системы $\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, где x_i – координаты системы, f_i – известные функции, заданные в пространстве этих координат.

Знакоопределенной называется такая функция, которая во всех точках некоторой области вокруг начала координат сохраняет один знак, и нигде кроме начала координат не обращается в нуль. Если же функция сохраняет знак во всех точках области, но обращается в нуль и в других точках области, то она называется *знакопостоянной* функцией.

Если при $V > 0$ имеет место $W < 0$, то САУ называется *асимптотически устойчивой*. Если при $V > 0$ имеет место $W = 0$, то САУ называется *устойчивой*. Сформулированные условия устойчивости составляют основу метода Ляпунова, который заключается в отыскании для исследуемой нелинейной САУ функции V , удовлетворяющей выдвинутым требованиям и называется **функцией Ляпунова**.

Трудности использования этого метода в том, что отсутствуют общие правила отыскания функции Ляпунова. Данный метод позволяет получить достаточные условия устойчивости, которые не всегда будут необходимыми.

Другими словами, при выполнении условий устойчивости, система будет устойчивой, но эти условия могут не охватывать всей области её устойчивости. От удачного подбора функции Ляпунова будет зависеть степень близости полученных условий устойчивости к необходимым и достаточным.

Если при исследовании устойчивости нелинейной САУ методом Ляпунова получены условия устойчивости, независящие от формы нелинейной характеристики, то они называются *условиями абсолютной устойчивости*. В связи с этим принято считать, что *абсолютно устойчивая нелинейная САУ устойчива при любых начальных отклонениях для любой формы нелинейной характеристики, принадлежащей к некоторому определенному классу*.

6.2. Метод В.М. Попова

Рассмотрим исследование абсолютной устойчивости нелинейных САУ частотным методом румынского математика М.В. Попова. Задача возникает в случаях неустойчивости нелинейных характеристик звеньев системы.

Обычно в САУ выделяется линейная и нелинейная части. При известной частотной функции линейной части системы $W_{\text{л}}(j\omega)$ и заданном значении параметра K , который является некоторым предельным параметром нелинейной характеристики $\varphi(\sigma)$, произвольно располагающейся в заданной области, необходимо определить, обеспечивается ли абсолютная устойчивость данной САУ для любой характеристики $\varphi(\sigma)$, удовлетворяющей следующим условиям:

$$0 \leq \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} \leq K \quad \text{при } \sigma \neq 0, \varphi(0) = 0$$

Тогда критерий абсолютной устойчивости для нелинейных САУ формулируется следующим образом: *для абсолютной устойчивости нелинейной системы достаточно, чтобы при заданных $W_{\text{л}}(j\omega)$ и K существовало такое конечное действительное число q , при котором для всех $\omega \geq 0$ выполняется неравенство:*

$$\operatorname{Re}\left[(1 + jq\omega)W_{\text{л}}(j\omega)\right] + \frac{1}{K} > 0. \quad (164)$$

Первое слагаемое неравенства (137) можно привести к виду:

$$\operatorname{Re}\left[(1 + jq\omega)W_{\text{л}}(j\omega)\right] = \operatorname{Re}\left[W_{\text{л}}(j\omega) - q\omega \operatorname{Im}W_{\text{л}}(j\omega)\right] = X - qY, \quad (165)$$

где $X = \operatorname{Re}\left[W_{\text{л}}(j\omega)\right]$; $Y = \omega \operatorname{Im}\left[W_{\text{л}}(j\omega)\right]$. Учитывая эти преобразования неравенство (164) примет вид:

$$X - qY + \frac{1}{K} > 0 \quad (166)$$

Приравнивая выражение (166) к нулю, получим *уравнение прямой* (так называемой *прямой Попова*), проходящей через точку $(-1/K, j0)$ и имеющей угловой коэффициент $1/q$.

Рассмотренный критерий имеет более удобную геометрическую формулировку: нелинейная САУ абсолютно устойчива, если в плоскость $W_{\text{л}}^*(j\omega) = X + jY$ можно провести прямую, проходящую через точку $(-1/K, j0)$ так, чтобы вся частотная характеристика $W_{\text{л}}^*(j\omega)$ находилась от неё справа. Если такую прямую провести нельзя, то это значит, что абсолютная устойчивость для данной системы невозможна. Величина q , связанная с угловым коэффициентом, определяется из условия (140) так, чтобы при известных параметрах САУ неравенство соблюдалось для всех частот. Видоизмененная характеристика $W_{\text{л}}^*(j\omega)$ связана с $W_{\text{л}}(j\omega)$ равенствами.

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[W_{\text{л}}^*(j\omega)] &= \operatorname{Re}[W_{\text{л}}(j\omega)], \\ \operatorname{Im}[W_{\text{л}}^*(j\omega)] &= \omega \operatorname{Im}[W_{\text{л}}(j\omega)]. \end{aligned} \quad (167)$$

Наиболее широкое практическое применение для исследования нелинейных САУ получили фазовый метод и метод гармонического баланса.

6.3. Фазовый метод

Основан на понятии о фазовом пространстве. В принципе фазовым методом можно исследовать системы, которые описываются Дифференциальными уравнениями любого порядка. Суть метода сводится к следующему: если САУ описывается дифференциальным уравнением n -го порядка, то её состояние может быть задано n числами, которые можно рассматривать как задание некоторой точки в n -мерном пространстве. При этом каждой точнее n -мерного пространства будет соответствовать одно определенное состояние (определенная фаза) системы. Поэтому такое многомерное пространство называется фазовым пространством. Ввиду затруднений, возникающих при рассмотрении n -мерного пространства при $n > 3$, применение фазового метода ограничено системами не выше третьего порядка.

Для САУ, которые описываются дифференциальными уравнениями второго порядка, фазовое пространство является двумерным, т.е. превращается в фазовую плоскость. На фазовой плоскости по оси абсцисс откладывается значение исследуемой переменной x (обычно отклонение управляемого сигнала от заданного значения), а по оси ординат – скорость измерения переменной $y = \dot{x}$. Состояние САУ второго порядка в каждый момент времени характеризуется значениями координат x и y , что соответствует определенной изображенной точке на фазовой плоскости. При изменении состояния системы изображающая точка на фазовой плоскости перемещается по кривой, которая называется

фазовой траекторией. Направление движения изображающей точки обозначают на траектории стрелками. Направление движения изображающей точки в верхней полуплоскости всегда может быть только слева направо, т.е. в сторону увеличения x , а в нижней полуплоскости – справа налево. Фазовая траектория пересекает ось абсцисс всегда под прямым углом. Это следует из того, что в точке пересечения производная $y = dx/dt = 0$, и поэтому координата x должна быть экстремальной.

Фазовые траектории устойчивой САУ должны стремиться к началу координат при неограниченном возрастании времени. А фазовые траектории неустойчивой САУ должны неограниченно удаляться от начала координат фазовой плоскости. Замкнутым фазовым траекториям соответствуют периодические процессы.

Для получения уравнения фазовых траекторий исходное уравнение системы преобразуют таким образом, чтобы можно было исключить время. Если САУ описывается дифференциальным уравнением второго порядка, то его следует свести к двум уравнениям первого порядка:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \phi\left(x, \frac{\partial x}{\partial t}\right) \rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_1(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = f_2(x, y). \end{cases} \quad (168)$$

где f_1, f_2 – в общем случае нелинейные функции координат x и y .

Дифференциальное уравнение фазовых траекторий в плоскости xu получается при исключении времени из уравнений (168), для этого первое уравнение делят на второе: $\frac{dx}{dy} = \frac{f_1(x, y)}{f_2(x, y)}$. Решением этого уравнения станет некоторая функция $y = F(x)$, графическое изображение которой дает фазовую траекторию на плоскости xu .

Рассмотрим типичные виды фазовых траекторий, одновременно связывая их построение с анализом переходного процесса.

1) *Затухающий колебательный процесс.*

Если начальные условия переходного процесса не нулевые, т.е. $x = x_0, \dot{x} = \dot{x}_0 = y$, то на фазовой плоскости начальная изображающая точка M_0 будет иметь координаты (x_0, y_0) . В начале переходного процесса значение координаты x увеличивается до точки 1, а координаты $y=x$ уменьшается. Изображающая точка на фазовой плоскости будет перемещаться по траектории от точки M_0 до точки 1, в которой имеет место максимум величины x и $\dot{x}=y=0$. На участке 1-2 процесс в системе идет с уменьшением координаты x , то есть с отрицательной производной $y=x<0$. Аналогичным образом можно построить остальные точки фазовой траектории. В результате на фазовой плоскости получим фазовый портрет затухающего колебательного процесса, который

изобразится в виде спирали, свертывающейся к началу координат. Начало координат фазовой плоскости соответствует устойчивому установившемуся режиму в системе, где $x=0$ и $y=0$. В данном случае начало координат называется *устойчивым фокусом*.

2) *Расходящийся колебательный процесс.*

Рассуждая аналогичным образом, можно построить фазовый портрет для расходящихся колебаний переходного процесса. Фазовая траектория будет иметь вид спирали, удаляющейся от начала координат. Если такой фазовый портрет возникает при сколь угодно малом начальном отклонении, то система будет неустойчива в равновесной состоянии ($x=0$ и $y=0$). Начало координат фазовой плоскости в этом случае называется *неустойчивым фокусом*.

3) *Периодический колебательный процесс.*

Если колебательный процесс в системе периодический, то он на фазовой плоскости изобразится в виде замкнутой кривой, которая называется циклом. Для синусоидальных колебаний фазовая траектория имеет вид эллипса, для несинусоидальных колебаний – вид произвольной замкнутой кривой. Начало координат фазовой плоскости называется *центром*.

4) *Апериодический затухающий процесс.*

На фазовой плоскости будет отображаться в виде кривой, вливающейся в начало координат. При этом изображающая точка, двигаясь по фазовой траектории, асимптотически приближается к началу координат при $t \rightarrow \infty$. Начало координат фазовой плоскости называется *устойчивым узлом*.

5) *Апериодических расходящийся процесс.*

На фазовой плоскости изобразится в виде кривой, удаляющейся от начала координат. В случае если процесс расходится при сколь угодно малом начальном отклонении, то начало координат фазовой плоскости называется *неустойчивым узлом*.

6) *Устойчивые автоколебания.*

Если в фазовой плоскости существует замкнутая фазовая траектория, к которой в пределе стремятся все фазовые траектории плоскости, то такая замкнутая кривая называется *устойчивым предельным циклом*. Все фазовые траектории, находящиеся внутри предельного цикла, соответствуют расходящемуся процессу и в пределе сливаются с замкнутой фазовой траекторией. Фазовые траектории, находящиеся снаружи предельного цикла, будут соответствовать сходящемуся процессу и в пределе также сольются с замкнутой фазовой траекторией.

7) *Неустойчивые автоколебания.*

Если в фазовой плоскости существует замкнутая траектория (отличается от 6), от которой внутрь и наружу расходятся фазовые траектории, то такая замкнутая кривая называется *неустойчивым предельным циклом*. Фазовые траектории, находящиеся внутри этого предельного цикла, соответствуют сходящемуся процессу, а находящиеся снаружи – расходящемуся процессу.

Следовательно, если начальная точка процесса $M_0(x_0, y_0)$ находится внутри предельного цикла, то систему устойчива, Если же эта находится вне ее, то систему будет неустойчива. Такая система называется *устойчивой в малом и неустойчивой в большом*.

Таким образом, устойчивость нелинейной САУ может зависеть также и от начальных условий. Периодический режим, который соответствует неустойчивому предельному циклу, в реальный САУ не может долго существовать, поскольку любое случайное воздействие вызовет изменение фазовой траектории.

Пример 1. Определим фазовый портрет для точки, которая совершает гармонические колебания по закону $x = A \sin \omega t$. Для построения фазового портрета найдем скорость изменения координаты x : $y = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos \omega t$.

Исключив время из уравнений x и y , получим уравнение фазовых траекторий:

$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{(\omega^2 A^2)} = 1$. Из последнего следует, что периодические колебания на

фазовой плоскости имеют замкнутые траектории – эллипсы. При этом амплитуда колебаний на фазовой плоскости соответствует семейства эллипсов.

Пример 2. Определим фазовый портрет для точки, которая совершает затухающие колебания по закону $x = Ae^{kt} \sin \omega t$. В данном случае скорость изменения координаты x определится уравнением:

$y = \frac{dx}{dt} = \omega Ae^{-kt} \left(\cos \omega t - \frac{k}{\omega} \sin \omega t \right)$. Исключив время из уравнений x и y , получим

уравнение фазовых траекторий, которые определяются свертывающимися спиралями: $(y + kx)^2 + \omega^2 x^2 = C \exp\left(2 \frac{k}{\omega} \arctg \frac{y + kx}{\omega x}\right)$.

6.4. Метод кусочно-линейной аппроксимации

Используется в том случае, когда нелинейная часть системы безынерционна и её характеристика может быть аппроксимирована прямолинейными участками.

Для каждого участка процессы в системе описываются линейными дифференциальными уравнениями, решение которых может быть найдено. Значения переменных в конце данного участка являются начальными условиями для последующего участка. Таким образом, удаётся построить фазовую траекторию движения системы.

6.5. Метод гармонического баланса

Одним из важнейшим приближенных методов является метод гармонического баланса или эквивалентной линеаризации, разработанный Н.М. Крыловым и Н.Н.Боголюбовым. Он получил на практике широкое применение вследствие исключительной простоты вычислений и, в большинстве случаев, удовлетворительной точности. Метод применим к нелинейным системам любого порядка, но годится лишь для исследования колебательных процессов. Основная идея заключается в линеаризации нелинейностей САУ в режиме автоколебаний, которые предполагаются близкими к синусоидальному. Это предположение будет справедливо для большинства САУ, поскольку линейная часть их обычно является низкочастотным фильтром, значительно ослабляющим высшие гармоники.

Положим на вход нелинейного элемента, уравнение которого имеет вид: $y = F(x)$, поступает гармонический сигнал: $x = A \sin \omega t$. Тогда на выходе нелинейного элемента сигнал будет представлять некоторую периодическую функцию, вид которой определяется характеристикой конкретного нелинейного элемента.

Подставляя выражение для x в y получим:

$$y = F(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_1 \sin k\omega t + A_2 \cos k\omega t) \quad (169)$$

Разложив выражение (169) в ряд Фурье и отбросив все высшие гармоники (считая, что они не пропускаются линейной частью системы), кроме первой, получим:

$$y = A_0 + A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t \quad (170)$$

Считая, что в искомым колебаниях отсутствует постоянная составляющая, то есть $A_0 = 0$, и приняв $\omega t = \psi$, имеем:

$$y = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t = \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi) \sin \psi d\psi \right] \sin \psi + \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi) \cos \psi d\psi \right] \cos \psi. \quad (170)$$

Тогда приближенная эквивалентная передаточная функция нелинейного элемента, которая определяется как отношение амплитуды первой гармоники выходного сигнала нелинейного элемента к амплитуде его входного

гармонического сигнала и в общем случае представляет комплексную величину, имеющую вид:

$$J(A) = \frac{A_1}{A} + j \frac{A_2}{A} = a(A) + jb(A), \quad (171)$$

где $a(A)$ и $b(A)$ – коэффициенты гармонической линеаризации, определяемые выражениями:

$$\begin{aligned} a(A) &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi) \sin \psi d\psi, \\ b(A) &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi) \cos \psi d\psi. \end{aligned} \quad (172)$$

Амплитуда эквивалентной передаточной функции, показывающая, во сколько раз первая гармоника на выходе нелинейного элемента больше амплитуды A синусоидального входного сигнала, рассчитывается по формуле

$$q(A) = |J(A)| = \sqrt{a^2(A) + b^2(A)}. \quad (173)$$

Фаза эквивалентной передаточной функции, определяющая разность фаз между первой гармоникой на выходе нелинейного элемента и синусоидальным входным сигналом, находится по формуле:

$$\psi(A) = \operatorname{arctg} \left[\frac{b(A)}{a(A)} \right]. \quad (174)$$

Представляется возможным сделать следующий вывод:

- при постоянных значениях амплитуды входного сигнала коэффициенты гармонической линеаризации являются постоянными. Различным амплитудам входного сигнала соответствуют различные коэффициенты гармонической линеаризации. В обычной линеаризации коэффициенты не зависят от амплитуды входного сигнала, а определяются только видом характеристики нелинейного звена;

- уравнение гармонической линеаризации – это линейное уравнение, поэтому и вся система радиоавтоматики становится линейной. Для её исследования могут быть использованы методы, разработанные для линейных систем. Зависимость коэффициентов гармонической линеаризации от амплитуды сигнала на входе нелинейного звена позволяет выявить

специфические свойства нелинейных систем, которые не могут быть определены при использовании обычной линеаризации.

Литература

1. Попов Е.П. Теория линейных систем автоматического регулирования и управления.. — М.: Наука, 1989.
2. Коновалов Г.Ф. Радиоавтоматика.- М.: Высшая школа. 1990.
3. В.Г. Вагапов, Б.Х. Кривицкий Основы автоматике радиоэлектронного оборудования. – Киев.: КВВАИУ, 1983.
4. Бесекерский В.А. Теория систем автоматического управления: учеб. пособие. — СПб.: Профессия, 2007.
5. Бесекерский В.А., Попов Е.П. 4-е изд // Теория систем автоматического управления. — СПб.: Профессия, 2003.
6. Гудвин Г.К., Гребе С.Ф., Сальгадо М.Э. Проектирование систем управления. — М.: Бинум, Лаборатория базовых знаний, 2004.
7. Первачёв С.В. Радиоавтоматика.- М.: Радио и связь. 1982.
8. Мирошник И.В. Теория автоматического управления. Линейные системы. — СПб.: Питер, 2005.
9. Воронов А.А. Основы теории автоматического управления. Автоматическое регулирование непрерывных линейных систем/ Воронов А.А. –2-е изд., перераб. –М.: Энергия, 1980. –309 с.