

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ (МГТУ ГА)»**

Кафедра физики

С.К. Камзолов, С.М. Новиков, А.Н. Разумовский

ФИЗИКА

Учебно-методическое пособие
по выполнению лабораторной работы М-11
«Изучение процессии гироскопа»

*для студентов I курса
всех направлений
и специальностей всех форм
обучения*

Москва
2019

ББК 53
К-18

Рецензент:

Куколева А.А. – канд. физ.-мат. наук, доцент

Камзолов С.К.

К-18 Физика: учебно-методическое пособие по выполнению лабораторной работы М-11 «Изучение прецессии гироскопа»./ С.К. Камзолов, С.М. Новиков, А.Н. Разумовский. – Воронеж: ООО «МИР», 2019. – 12 с.

Данное учебно-методическое пособие издается в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Физика» по учебному плану для студентов I курса всех направлений и специальностей всех форм обучения.

Рассмотрено и одобрено на заседании кафедры 22.01.2019 г. и методического совета 05.02.2019 г.

В авторской редакции

Подписано в печать 12.03.2019 г.

Формат 60x84/16 Печ.л. 3 Усл. печ. л. 3,49

Заказ 421/030419 Тираж 80 экз.

Московский государственный технический университет ГА
125993 Москва, Кронштадтский бульвар, д.20

Отпечатано ООО «МИР»

394033, г. Воронеж, Ленинский пр-т 119А, лит. Я, оф. 215

© Московский государственный
технический университет ГА, 2019

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА М-11 «ИЗУЧЕНИЕ ПРЕЦЕССИИ ГИРОСКОПА»

Введение

Гироскопом называют массивное осесимметричное тело, вращающееся с большой угловой скоростью вокруг оси симметрии. Свойство гироскопа сохранять ориентацию оси вращения в отсутствие внешнего воздействия широко используется в системах стабилизации положения всякого рода технических устройств: монорельсовые дороги, современные моноциклы, гироскутеры и сегвеи... Гироскопические устройства и приборы являются основными компонентами навигационных комплексов летательных аппаратов и водных судов, систем ориентации космических станций и систем прицеливания движущейся военной техники и т.п.

1. Цель работы

Изучение динамики вращательного движения твердого тела на примере гироскопа, изучение явления прецессии гироскопа, опытное определение момента инерции гироскопа.

2. Подготовка к работе

Изучите теоретический материал по лекциям или учебнику [1,2], а именно: модель абсолютно твердого тела, уравнение динамики для вращательного движений твердого тела, гироскопический эффект, прецессия гироскопа; усвойте понятия момента силы, момента импульса, момента инерции. Изучите также раздел 3 методического описания. Ознакомьтесь с конструкцией лабораторного стенда, методикой эксперимента, порядком проведения измерений и обработки их результатов (разделы 4, 5, 6 методического описания). Подготовьте проект отчета по лабораторной работе, а также ответы на вопросы из раздела 7 данного описания.

3. Краткая теория

При вращении осесимметричного тела вокруг оси симметрии (что характерно для гироскопа) направление момента импульса L совпадает с направлением угловой скорости ω :

$$\vec{L} = I\vec{\omega}, \quad (1)$$

где I – момент инерции этого тела относительно оси симметрии. Можно видеть, что выражение (1) для момента импульса при вращательном движении идентично выражению, связывающему импульс тела с его массой m и скоростью v при поступательном движении:

$$\vec{p} = m\vec{v}. \quad (2)$$

И точно так же, как при поступательном движении *импульс* тела сохраняется в отсутствие внешнего воздействия, *момент импульса* тела сохраняется при его свободном вращении.

Но при наличии внешнего воздействия, которое характеризуется силой F , импульс, как известно, изменяется согласно уравнению:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F},$$

откуда легко получается привычное выражение 2-го закона Ньютона, если подставить в него формулу (2) при условии неизменной массы:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}, \quad \text{т.е.} \quad m\vec{a} = \vec{F},$$

где a – ускорение тела.

Аналогично в механике доказывается, что скорость изменения момента импульса L связано с моментом M внешних сил, действующих на тело:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \quad (3)$$

откуда, используя ещё и выражение (1), легко получить уравнение, подобное 2-му закону Ньютона, но для вращательного движения:

$$I\vec{\varepsilon} = \vec{M},$$

где $\vec{\varepsilon} = d\vec{\omega}/dt$ – угловое ускорение. Полученное уравнение называют *основным уравнением динамики вращательного движения*.

Всё достаточно просто, когда направление вектора момента силы совпадает или противоположно направлению вектора угловой скорости. При этом скорость вращения увеличивается или, соответственно, уменьшается. Но ситуация необычным образом усложняется, если вектор момента силы направлен под углом к вектору угловой скорости. Если этот угол прямой, то в чистом виде реализуется такое специфическое явление, как *гироскопический эффект*. (Заметим, что при этом угловая скорость по величине не изменяется, поскольку момент силы не совершает работы.)

Давайте разберёмся в этом необычном явлении. Дома можно провести следующий эксперимент, используя недавнее детское увлечение-игрушку – спиннер. Раскрутите его до максимально возможных оборотов при горизонтальной ориентации оси вращения. А теперь попробуйте повернуть ось вращения в вертикальной плоскости. Чувствуете, как спиннер сопротивляется такому движению, пытаетесь повернуться в горизонтальной плоскости? Более чувствительно можно убедиться в этом явлении, взяв велосипедное колесо двумя руками за его ось с обеих сторон и сильно раскрутив колесо (скорее всего, для этого понадобится помощник). Такой удивительный эффект требует теоретического объяснения. Попробуем это сделать, используя рис.1, на котором изображена модель гироскопа в виде цилиндра, симметрично насаженного на стержень, являющийся осью вращения.

Действуя на ось вращающегося с угловой скоростью ω гироскопа вертикальной парой сил F , мы создаём момент сил M , вектор которого направлен горизонтально влево (по правилу правого винта, рис.1). Согласно уравнению (3) вектор приращения момента импульса направлен так же, как и вектор момента сил:

$$d\vec{L} = \vec{M} \cdot dt. \quad (4)$$

При этом заметим, что величина (модуль) момента импульса L не изменяется, поскольку, как указывалось выше, неизменна угловая скорость ω , а также постоянен момент инерции I (формула 1). Т.е. вектор \vec{L} , а вместе с ним и ось гироскопа за время dt просто поворачиваются в горизонтальной плоскости на некоторый угол $d\varphi$ (рис.1). (Заметим, что если бы гироскоп не вращался, то вертикальная пара сил F повернула бы его ось в вертикальной плоскости.)

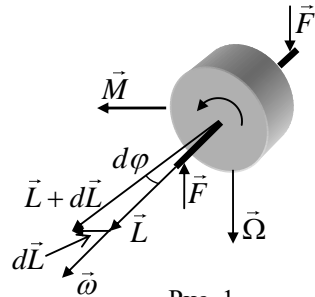


Рис. 1

Разобравшись в природе гироскопического эффекта, перейдём к описанию связанного с ним явления *прецессии* гироскопа. Поворот оси гироскопа (а в этом, собственно, и заключается явление прецессии) происходит с некоторой угловой скоростью

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt}, \quad (5)$$

вектор которой, в данном случае, направлен вертикально вниз. С углом поворота $d\varphi$ связано приращение вектора момента импульса (рис.1):

$$dL = Ld\varphi. \quad (6)$$

Из уравнений (1,4-6) несложно получить выражение для определения угловой скорости прецессии:

$$\Omega = \frac{M}{I\omega}. \quad (7)$$

Как видно из полученного уравнения, при неизменном моменте сил угловая скорость прецессии постоянна, в этом случае говорят о *регулярной прецессии*.

С явлением прецессии наверняка каждый познакомился ещё в детстве, наблюдая конусообразное движение оси волчка (юлы), особенно при затухании вращения, под действием момента силы тяжести (рис.2), который в данном случае равен:

$$M = mgl.$$

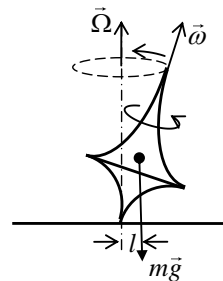


Рис. 2

4. Описание установки и методика проведения эксперимента

В экспериментальной установке (рис.3) гироскопом служит массивный металлический диск 1, закрепленный на оси электродвигателя 4, приводящего гироскоп во вращение. К корпусу электродвигателя вдоль его оси присоединена металлическая планка 2 (со шкалой), по которой может перемещаться противовес 3. Корпус двигателя подвешен на шарнире 5, горизонтальная ось которого перпендикулярна оси гироскопа. Передвигая противовес 3 можно добиться равновесного горизонтального положения гироскопа вместе с двигателем (при этом их центр тяжести будет находиться на оси шарнира 5). Такому положению соответствует координата z_0 противовеса (рис.4). Смещая противовес относительно найденного равновесного положения (т.е. смещая центр тяжести всего устройства 1-4 относительно оси шарнира 5), можно создать момент силы тяжести, который и вызовет прецессию вращающегося гироскопа при условии его подвижности в горизонтальной плоскости.

Для обеспечения такой подвижности рамка шарнира 5 закреплена на платформе 6, которая может вращаться в горизонтальной плоскости, т.е. относительно вертикальной оси. Ось гироскопа (совпадающая с осью двигателя), ось шарнира 5 и ось платформы 6 взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке, которую называют центром подвеса (или центром вращения) гироскопа.

Сдвигая противовес 3 массой m вправо на расстояние l от равновесного положения (рис.4), мы создаём вызывающий прецессию момент силы тяжести $M = mgl$.

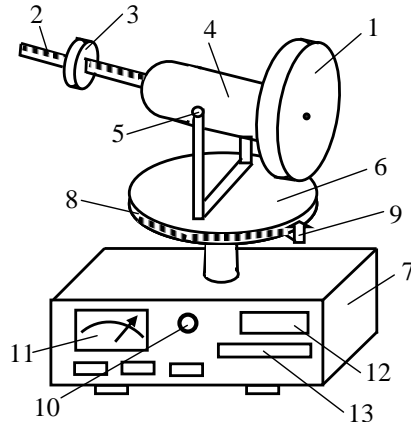


Рис. 3

Сдвигая противовес 3 массой m вправо на расстояние l от равновесного положения (рис.4), мы создаём вызывающий прецессию момент силы тяжести

$$M = mgl. \quad (8)$$

Угловая скорость прецессии при этом, согласно формуле (7), будет равна:

$$\Omega = \frac{mgl}{I\omega}. \quad (9)$$

Величину скорости прецессии Ω можно определять (вычислять) как отношение угла прецессионного поворота φ к времени этого поворота t (поскольку здесь мы имеем дело с регулярной прецессией, т.е. $\Omega = \text{const}$):

$$\Omega = \frac{\varphi}{t}. \quad (10)$$

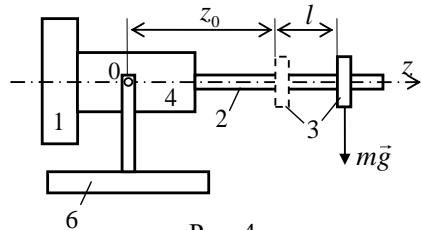


Рис. 4

Таким образом, измеряя угол прецессионного поворота и время, в течение которого он происходит, а также используя формулы (9) и (10), можно экспериментально определить момент инерции гироскопа (что является целью данной лабораторной работы):

$$I = \frac{mgl t}{\omega \varphi} . \quad (11)$$

Для проведения необходимых измерений установка (рис.3) снабжена электронным блоком 7, который позволяет измерять частоту вращения гироскопа n (об/мин) и время t поворота оси гироскопа в горизонтальной плоскости на заданный угол φ , отсчитываемый по шкале 8 относительно указателя 9. Частота вращения гироскопа регулируется ручкой 10 и измеряется по шкале 11. Измерение времени поворота оси гироскопа на заданный угол может производиться автоматически с помощью датчика угла поворота (показание на табло 12) и секундомера (показание на табло 13), которые встроены в блок 7. Эту же операцию можно осуществлять и без использования блока 7, измеряя время поворота (с помощью какого-либо секундомера) на заданный угол.

Момент инерции гироскопа можно определить единичным экспериментом, используя формулу (11), для чего необходимо знать массу m противовеса, задать величину его смещения l относительно равновесного положения (рис.4), угловую скорость вращения гироскопа ($\omega = 2\pi n/60$) и измерить время t прецессионного поворота оси гироскопа на заданный угол φ . (Такая операция предусмотрена в работе в качестве пробного эксперимента, п.5.2.)

Однако для повышения точности такого косвенного экспериментального определения искомой величины прибегают к серии измерений. Используем один из вариантов такой серии.

Фиксируем величины φ и n (следовательно, ω), а варьировать будем величину l ($l = l_i$), измеряя соответствующие значения времени $t = t_i$. Глядя на формулу (11) можно увидеть линейную зависимость $t(1/l)$:

$$t = \frac{I\omega\varphi}{mg} \cdot \frac{1}{l} = a \cdot \frac{1}{l} , \quad (12)$$

где a – угловой коэффициент наклона соответствующей прямой, проходящей через начало координат:

$$a = \frac{I\omega\varphi}{mg} . \quad (13)$$

Построив график линейной зависимости $t = f(1/l)$ легко найти угловой коэффициент наклона прямой a , а затем и погрешность его определения.

Существует и аналитический способ определения угловых коэффициентов и их погрешностей, базирующийся на так называемом методе наименьших квадратов (МНК). В случае прямой, проходящей через начало координат, используют следующие соотношения:

$$a = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}, \quad \sigma_a = \sqrt{\frac{1}{n-1} \left(\frac{\sum y_i^2}{\sum x_i^2} - a^2 \right)}, \quad \Delta a = t_{p,n-1} \sigma_a, \quad (14)$$

где σ_a – стандартная погрешность (отклонение), $t_{p,n-1}$ – коэффициент Стьюдента. В нашем случае роль y_i играет t_i , а роль x_i – соответственно, $1/l_i$.

5. Порядок выполнения работы

5.1. Подготовка установки к работе.

5.1.1. Освободив винт, закрепляющий груз 3 на планке 2 (рис.3), и перемещая груз вдоль планки, уравновесить ось гироскопа в горизонтальном положении. Закрепить груз 3 винтом в этом положении и записать в таблицу 1 его координату z_0 в этом положении, используя шкалу планки 2 (рис.4). Отсчет координаты брать, например, по положению торца противовеса, ближнего к двигателю.

5.1.2. Установив ручку 10 регулировки частоты вращения гироскопа в крайнее положение против часовой стрелки, включить установку в сеть 220 В.

5.1.3. Нажатием красной кнопки на электронном блоке 7 включить установку.

Предупреждение. Скорость вращения гироскопа может достигать 10000 об/мин, поэтому проведение измерений требует соблюдения техники безопасности, аккуратности и хорошего понимания последовательности действий.

Таблица вариантов

	Пробный эксперимент (эксперимент №1 – табл.1)			Зависимость $t = f(l)$ (эксперимент №1 – табл.2)	
	l , м	n , об/мин	φ , град	n , об/мин	φ , град
Бригада 1	0,040	4000	30	5000	30
Бригада 2	0,035	3500	40	5000	40
Бригада 3	0,045	4500	30	4500	30
Бригада 4	0,040	3500	40	4500	40

5.2. Проведение пробного эксперимента (табл.1).

5.2.1. Медленно вращая ручку 10 (рис.3), установить по шкале 11 значение частоты вращения n гироскопа, близкое к величине, указанной в таблице вариантов. Для стабилизации частоты вращения необходимо выждать некоторое время (~1 мин) и записать установившееся значение в таблицу 1.

5.2.2. Поддерживая рукой планку 2 в горизонтальном положении, сдвинуть груз 3 (лучше делать вдвоём) в положение с координатой ($z_0 + l$). Значение l берётся из таблицы вариантов и записывается в таблицу 1.

5.2.3. Измерить время t поворота платформы 6 на угол φ , взятый из таблицы вариантов. Записать результат измерения в таблицу 1.

5.2.4. Пользуясь формулой (11) и данными таблицы 1, определить экспериментальную величину момента инерции гироскопа $I_{\text{экс}}$; масса m противовеса 3 выгравирована на его торцевой поверхности. Полученный результат можно рассматривать как единичное косвенное измерение (определение) величины момента инерции гироскопа. Сравнить значение $I_{\text{экс}}$ с теоретической оценкой $I_{\text{теор}} = 0,5m_{\text{г}}R^2$ (массу $m_{\text{г}}$ и радиус R диска оценить самостоятельно «на глаз», т.е. очень приближённо. Материал диска – сталь.). Записать величины $I_{\text{экс}}$ и $I_{\text{теор}}$ в табл.1 и показать преподавателю.

5.3. Определение момента инерции гироскопа по зависимости $t = f(1/l)$.

5.3.1. Аналогично п.5.2.1. установить по шкале 11 (рис.3) значение частоты вращения n гироскопа, близкое к величине из таблицы вариантов для этого упражнения. Величину n записать в таблицу 2.

5.3.2. Поддерживая рукой планку 2 в горизонтальном положении аналогично п.5.2.2, сдвинуть противовес 3 в положение, обеспечивающее значение l (рис.4), равное $l_1 = 3$ см; произвести соответствующую запись в таблицу 2.

5.3.3. Аналогично п.5.2.3, измерить время t_1 поворота платформы 6 на угол φ , взятый из таблицы вариантов. Записать результат измерения в таблицу 2.

5.3.4. Увеличивая каждый раз расстояние l на 1 см, повторить измерения времени t_i поворота платформы 6 на тот же угол φ ещё четыре раза ($i = 2, 3, 4, 5$). Результаты записать в таблицу 2.

6. Обработка результатов измерений и оформление отчёта

6.1. и 6.2. По п.п. 5.1. и 5.2. дополнительная обработка не производится.

6.3. Определение момента инерции гироскопа I по зависимости $t = f(1/l)$

6.3.1. По данным таблицы 2 рассчитать угловую скорость ω вращения гироскопа, а также обратную величину смещения противовеса, равную $1/l_i$. Результаты записать в таблицу 2.

6.3.2. Выбрав удобный масштаб, построить график экспериментальной зависимости $t = f(1/l)$, при этом следует постараться провести прямую линию максимально близко к экспериментальным точкам.

Замечание. График зависимости t ($1/l$) может не проходить через начало координат в результате возможной систематической погрешности измерения расстояния l груза 3. Эта систематическая погрешность может возникнуть из-за ошибки при определении z_0 .

6.3.3. Выбрав удобные точки на экспериментальной прямой, графически определить угловой коэффициент её наклона $a_{\text{сп}} = \frac{\Delta t}{\Delta(1/l)}$, результат записать в таблицу 2.

6.3.4. Применяя аналитический метод (формулы (14)), найти расчётные значения коэффициента наклона $a_{\text{р}}$ и стандартной погрешности σ_a . При этом

целесообразно использовать специальную программу лабораторного компьютера: следует войти в директорию «Обработка результатов ЛР», расположенную на рабочем столе лабораторного компьютера, открыть файл «МНК $y = ax$ » и ввести полученные в эксперименте данные. Результаты расчёта записать в таблицу 2.

6.3.5. Вычислить абсолютную Δa и относительную δa погрешности определения коэффициента наклона прямой для доверительной вероятности (надёжности) $P = 0,68$ и числа измерений $n = 5$:

$$\Delta a = t_{P,n-1}\sigma_a, \quad \text{и} \quad \delta a = \frac{\Delta a}{a}. \quad (15)$$

Результаты расчёта записать в таблицу 2.

Замечание. Напомним, при $n \geq 10$ и $P = 0,68$ коэффициент Стьюдента $t_P = 1$. С уменьшением n этот коэффициент возрастает, и при $n = 5$ (т.е. в нашем случае) становится $t_P \approx 1,25$. Однако на практике в такой ситуации иногда для упрощения и здесь принимают $t = 1$, т.е. за ошибку измерения принимают стандартную погрешность (как при $n \geq 10$).

6.3.6. Используя соотношение (13), найти величину момента инерции гироскопа I , результат записать в таблицу 2.

6.3.7. Вычислить (в соответствии с формулой (13)) относительную δI и абсолютную ΔI погрешности измерения момента инерции гироскопа:

$$\delta I = \sqrt{(\delta a)^2 + (\delta m)^2 + (\delta \omega)^2 + (\delta \varphi)^2}, \quad \Delta I = I \cdot \delta I.$$

Для относительных погрешностей измерения (или задания) массы противовеса, его координаты, времени, угловой скорости вращения гироскопа и угла поворота можно принять следующие значения:

$$\delta m = 1\%, \quad \delta \omega = \delta n = 4\%, \quad \delta \varphi = 2\%.$$

Результаты расчёта записать в таблицу 2.

6.3.8. Записать результат определения момента инерции гироскопа I в стандартной форме в таблицу 2.

6.4. Сделать выводы по лабораторной работе.

7. Вопросы для допуска к лабораторной работе

1. Что такое момент силы относительно неподвижной точки?
2. Что такое момент импульса материальной точки?
3. Чему равен момент импульса осесимметричного тела относительно его оси симметрии?
4. Что такое момент инерции тела относительно данной оси? Поясните понятие аддитивности?
5. Сформулируйте теорему Штейнера.
6. Что называют гироскопом? В чем заключается гироскопический эффект?
7. Что такое прецессия, регулярная прецессия?

8. От чего и как зависит угловая скорость прецессии гироскопа? Что необходимо для регулярности прецессии?

9. Каким образом на лабораторной установке можно менять момент импульса L гироскопа и момент силы M ? Как ещё можно было бы изменять эти параметры?

10. Какой график предлагается строить в отчёте по этой работе? Какой он имеет вид и почему?

11. Как изменится относительная погрешность измерения момента инерции гироскопа, если доверительная вероятность (надёжность) станет $P = 0,95$ (вместо 0,68)?

8. Литература

1. Трофимова Т.И. Курс физики. М.: Издат. центр «Академия», 2014.
2. Савельев И.В. Курс общей физики. Учебное пособие для вузов. В 5 кн. Кн. 1. Механика. – М.: Астрель АСТ, 2016.
3. Ильясова Т.М. Физика: Пособие по выполнению лабораторной работы М-1м «Обработка результатов измерений на примере математического маятника». – М.: МГТУ ГА, 2015.

9. Таблицы измерений и результатов

Таблица 1

m , кг	z_0 , м	l , м	n , об/мин	ω , 1/с	φ , град	φ , рад	t , с		
$I_{\text{эксп}} =$			(кг·м ²);		$I_{\text{теор}} =$			(кг·м ²);	

Таблица 2

$n =$		(об/мин);		$\omega =$		(1/с);		$\varphi =$		(град);		$\varphi =$		(рад)	
l_i , м															
t_i , с															
$1 / l_i$, м ⁻¹															
$a_{\text{гр}} =$	(м·с);		$a_{\text{р}} =$	(м·с);		$\sigma_a =$	(м·с);		$I =$	(кг·м ²);					
$\Delta a =$	(м·с)		$P = 0,68;$	$\delta a =$;		$\delta I =$;		$\Delta I =$	(кг·м ²);				
			$I =$	\pm		(кг·м ²)		$P = 0,68$							

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Введение.....	3
1. Цель работы.....	3
2. Подготовка к работе.....	3
3. Краткая теория.....	3
4. Описание установки и методика проведения эксперимента.....	6
5. Порядок выполнения работы.....	8
6. Обработка результатов измерений и оформление отчёта.....	9
7. Вопросы для допуска к лабораторной работе.....	10
8. Литература.....	11
9. Таблицы измерений и результатов.....	11