ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ (МГТУ ГА)»

Кафедра высшей математики

Ю.И. Дементьев, О.Г. Илларионова

МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие

по выполнению практических заданий

для студентов I курса
направления 25.03.03
очной формы обучения

Москва
2019

ББК 51
Д30

Рецензент:
Козлова В.С. – канд. физ.-мат. наук, доцент

Дементьев Ю.И.
Д30 Математика: учебно-методическое пособие по выполнению практических заданий./ Ю.И. Дементьев, О.Г. Илларионова. – Воронеж ООО «МИР», 2019. – 48 с.

Данное учебно-методическое пособие издаётся в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Математика» по учебному плану для студентов I курса направления 25.03.03 очной формы обучения.

Пособие содержит варианты двух контрольных домашних заданий по темам: «Линейная и векторная алгебра», «Аналитическая геометрия», «Пределы», «Производная и её приложения», «Неопределенный и определенный интегралы», «Комплексные числа», «Дифференциальные уравнения», «Операционное исчисление».

Рассмотрено и одобрено на заседании кафедры 22.01.2019 г. и методического совета 24.01.2019 г.

В авторкой редакции

Подписано в печать 12.03.2019 г.
Формат 60х84/16 Печ.л. 3 Усл. печ. л. 3,49
Заказ 430/090431 Тираж 50 экз.

Московский государственный технический университет ГА
125993 Москва, Кронштадтский бульвар, д.20

Отпечатано ООО «МИР»
394033, г. Воронеж, Ленинский пр-т 119А, лит. Я, оф. 215

ПЕРВЫЙ СЕМЕСТР

В первом семестре студент должен выполнить одно контрольное домашнее задание по темам «Линейная и векторная алгебра», «Аналитическая геометрия», «Пределы», «Производная и её приложения».

КОНТРОЛЬНОЕ ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ №1

Задача 1. Решить систему линейных уравнений тремя методами: а) методом Крамера, б) методом Гаусса, в) матричным методом.

Задачи 2 – **4.** Решить задачи на вычисление и свойства скалярного, векторного и смешанного произведений векторов.

Задача 5. Решить задачу на составление уравнений прямых и плоскостей.

Задачи 6 – **9.** Найти пределы функций.

Задачи 10 – **15.** Найти производные функций.

Задача 16. Найти y'', если известна функция $y = f(x)$.

Задача 17. Провести полное исследование функции $y = f(x)$ и построить её график.

Задача 18. Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ *и* $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = f(x, y)$.

Вариант 1

1) $\begin{aligned} x + y - z &= 2, \\ -2x + 4y - 8z &= -2, \\ 5x - 3y + 7z &= 6. \end{aligned}$

2) Дано: $|\overline{a}| = 4$, $|\overline{b}| = 1$. При каком значении α векторы $\overline{a} + \alpha\overline{b}$ и $\overline{a} - \alpha\overline{b}$ будут взаимно перпендикулярны?

3) Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(-1, 2, 3)$, $B(5, 1, 4)$ и $C(3, 2, 2)$.

4) При каком значении λ векторы $\overline{a} = (0, 1, \lambda)$, $\overline{b} = (1, 0, \lambda)$ и $\overline{c} = (1, 1, 2)$ будут компланарны?

5) Составить уравнение плоскости, которая проходит через начало координат и имеет нормальный вектор $\overline{n} = (-1, 0, 2)$.

6) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(2x^2 - 1)x^4}{x + 1 - 6x^6}$; 7) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{5}} \dfrac{15x^2 - 2x - 1}{5x^2 - 4x - 1}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos 2x}{\operatorname{tg}^2 6x}$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x + 2}{2x + 1}\right)^x$; 10) $y = 2\sqrt{x} + \ln x$; 11) $y = \dfrac{3x^3 + 15x - 1}{x^2 - 1}$;

12) $y = e^x \cdot \arcsin x$;   13) $y = 3^{-x^4}$;   14) $y = \sqrt[5]{2 + x - x^2}$;

15) $y = (\operatorname{arctg} 2x)^{x^4+3x}$;   16) $y = \sin^2 x$;   17) $y = \frac{x^3+4}{x^2}$;   18) $z = \dfrac{y}{x^2 - y^2}$.

Вариант 2

1) $\begin{cases} 3x + 2y + z = 5, \\ 2x + 3y + z = 1, \\ 2x + y + 3z = 11. \end{cases}$

2) Дано: $|\overline{a}| = 2$, $|\overline{b}| = 1$, $|\overline{c}| = 8$, $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b}) = 90^0$, $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{c}) = (\overline{b}\,\hat{}\,\overline{c}) = 60^0$.
Найти $(3\overline{a} - 2\overline{b}) \cdot (\overline{b} + 3\overline{c})$.

3) Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a} + \overline{b}$ и $\overline{b}$ как на сторонах, если $|\overline{a}| = 1$, $|\overline{b}| = 2$ и $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b}) = 60^0$.

4) При каком значении λ векторы $\overline{a} = (\lambda, 3, 2)$, $\overline{b} = (2, -3, -4)$ и $\overline{c} = (-3, 12, 6)$ будут компланарны?

5) Составить канонические уравнения прямой, проходящей через две заданные точки $A(0, -2, 3)$ и $B(3, -2, 1)$.

6) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x - 1}{x^2 + 4x - 5}$;   7) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x-1)(x+1)}{x^{10} + 5}$;   8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \sin 3x}{\ln(1 + x^2)}$;

9) $\lim\limits_{x\to 3} (4 - x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{6}}$;   10) $y = \frac{2x^2-1}{3x^3}$;   11) $y = \ln(x + \sqrt{x})$;

12) $y = \cos^2 28x$;   13) $y = e^{2x}\sqrt{1 - x}$;   14) $y = \arccos\frac{1}{x}$;

15) $y = (x^5 + 2x)^{\operatorname{ctg} 3x}$;   16) $y = (2x + 1)^{15}$;   17) $y = \frac{x^2-x+1}{x-1}$;

18) $z = x \cdot \arcsin(xy)$.

Вариант 3

1) $\begin{cases} x + 2y + 4z = -4, \\ 5x + y + 2z = 7, \\ 3x - y + z = 3. \end{cases}$

2) Дано: $|\overline{a}| = 4$, $|\overline{b}| = 10$. При каком значении α векторы $\overline{a} + \alpha\overline{b}$ и $\overline{a} - \alpha\overline{b}$ будут взаимно перпендикулярны?

3) При каком значении α векторы $\overline{p} = \alpha\overline{a} + 5\overline{b}$ и $\overline{q} = 3\overline{a} - \overline{b}$ будут коллинеарны, если $\overline{a}$ и $\overline{b}$ не коллинеарны.

4) При каком значении λ векторы $\overline{a} = (1, 3, \lambda)$, $\overline{b} = (4, 5, -1)$ и $\overline{c} = (2, -1, 5)$ будут компланарны?

5) Составить каноническое уравнение прямой, проходящей через две заданные точки A(4, 5, 13) и B(-6, 0, 1).

6) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{5x^2-24x-5}{x^3-3x^2-10x}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x+5}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x\cdot\sin 5x}$;

9) $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)^{\frac{1}{\sqrt{x}-1}}$; 10) $y=x-\ln\sqrt{x}$; 11) $y=\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x$;

12) $y=2^{\sin x}$; 13) $y=\frac{\operatorname{arctg} 3x}{x^3+12x}$; 14) $y=\cos 3x\cdot\sqrt[7]{x}$; 15) $y=(\sin 2x)^{x^3+8x}$;

16) $y=\sqrt[3]{1-x^3}$; 17) $y=\frac{2}{x^2+2x}$; 18) $z=x^2\cdot\sin\dfrac{x}{y}$.

Вариант 4

1) $\begin{cases} x+y+2z=-1,\\ 4x+y+4z=-2,\\ 3x+4z=-5.\end{cases}$

2) Дано: $|\overline{a}|=3$, $|\overline{b}|=5$, $|\overline{c}|=8$, $(\overline{a}\,^\wedge\overline{b})=90^0$, $(\overline{a}\,^\wedge\overline{c})=(\overline{b}\,^\wedge\overline{c})=60^0$.
Найти $(3\overline{a}-2\overline{b})\cdot(\overline{b}+3\overline{c})$.

3) Вычислить $|[\overline{a},\overline{b}]|$, если $|\overline{a}|=8$, $|\overline{b}|=15$ и $(\overline{a}\,^\wedge\overline{b})=30^0$.

4) При каком значении λ векторы $\overline{a}=(3\lambda, 1, 4)$, $\overline{b}=(3, 2\lambda, -6)$ и $\overline{c}=(3, 1, -2)$ будут компланарны?

5) Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $A(2, 1, -1)$ и имеет нормальный вектор $\overline{n}=(1, -2, 3)$.

6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3-3x+2}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-1+2x}{x+2x^3-10x^5}$; 8) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\operatorname{arctg}(x-3)}{x^2-9}$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)^{-4x}$; 10) $y=3x^2\cdot\operatorname{tg}x$; 11) $y=\ln(7x-5)$;

12) $y=3^{\operatorname{ctg}x}$; 13) $y=\frac{\sqrt{1-x^2}}{2+x^4}$; 14) $y=\frac{4}{x^3}+\sqrt[5]{x^4}$; 15) $y=(x^3-4x)^{\operatorname{tg}2x}$;

16) $y=\sin\sqrt{x}$; 17) $y=\dfrac{4x^2}{x^2+3}$; 18) $z=\dfrac{x}{x^2+2y^2}$.

Вариант 5

1) $\begin{cases} 2x+y+3z=11,\\ 3x+2y+z=5,\\ x+y+z=3.\end{cases}$

2) Дано: $|\overline{a}| = 1$, $|\overline{b}| = 4$, $|\overline{c}| = 2$, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{c}) = 90^0$, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b}) = (\overline{b}\hat{\ }\overline{c}) = 60^0$.
Найти $(\overline{a} - \overline{b})\cdot(3\overline{a} + \overline{c})$.

3) Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $2\overline{a} - \overline{b}$ и $2\overline{a} + \overline{b}$, если $\overline{a}$ = (3, -2, -2) и $\overline{b}$ = (1, -2, -1).

4) При каких значениях λ векторы $\overline{a} = (0, 1, \lambda)$, $\overline{b} = (1, 3, 4\lambda)$ и $\overline{c} = (1, 1, 2\lambda)$ будут компланарны?

5) Составить канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $A(2, 0, 2)$ параллельно прямой:
$x = 2 + 2t, \quad y = 3 + 3t, \quad z = 7 - 4t.$

6) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4 - 1}{x^3 + 2}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1 - \cos 6x}{\cos 4x \cdot \sin 2x}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}(1 + \operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\sin x}}$; 10) $y = \dfrac{x^2}{2\sqrt{1 - 3x}}$; 11) $y = \operatorname{arctg} e^x$;

12) $y = 5x \cdot \ln(2x - 1)$; 13) $y = \cos^2 24x$; 14) $y = 2^{\sin 2x}$;

15) $y = (\arcsin 3x)^{x^2+5x}$; 16) $y = \sqrt{x}(x - 1)$; 17) $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$;

18) $z = \sqrt[3]{3xy + y^2}$.

Вариант 6

1) $\begin{cases} x + 2y + z = 8, \\ 3x + y - z = 2, \\ 5x + 3y - 2z = 5. \end{cases}$

2) Вычислить косинус угла, образованного векторами $\overline{a}$ = (-4, 2, 4) и $\overline{b}$ = (6, 2, -3).

3) Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(2, 3, 4)$, $B(1, 0, 6)$ и $C(4, 5, -2)$.

4) При каком λ векторы $\overline{a} = (\lambda, 2, -3)$, $\overline{b}$ = (1, -1, 4) и $\overline{c}$ = (1, -2, 3) будут компланарны ?

5) Точка $P(0, -1, -2)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость. Составить уравнение этой плоскости.

6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{2x^2 - x - 1}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^{10} - 11x + 2}{(1 + x)^{10}}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x - 1}{\operatorname{tg} 5x \cdot \sin x}$;

9) $\lim\limits_{x\to 1}(2 - x)^{\frac{2x}{1-x}}$; 10) $y = \dfrac{1 + x^8}{12x^{11}}$; 11) $y = 2\sqrt{e^x}$; 12) $y = (x + x^3) \cdot \operatorname{tg} x$;

13) $y = \arcsin\frac{1}{x}$; 14) $y = 3\,\mathrm{arctg}\,2x$; 15) $y = (x^7 - 5x)^{\mathrm{ctg}\,2x}$;

16) $y = \log_2(2x-1)$; 17) $y = \frac{4-x^3}{x^2}$; 18) $z = e^{xy}\cdot(2x+y^2)$.

Вариант 7

1) $\begin{cases} x + y - z = -2, \\ 4x - 3y + z = 1, \\ 2x + y - z = 1. \end{cases}$

2) Вычислить $(\overline{a} - 2\overline{b})\cdot(\overline{b} - 2\overline{c})$, если $|\overline{a}| = 2$, $|\overline{b}| = 3$, $|\overline{c}| = 4$, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{c}) = (\overline{b}\hat{\ }\overline{c}) = 90^0$, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b}) = 60^0$.

3) Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $3\overline{a} - 2\overline{b}$ и $2\overline{a} + 3\overline{b}$, если $|\overline{a}| = 2$, $|\overline{b}| = 5$, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b}) = 30^0$.

4) Лежат ли точки $A(1, 2, -1)$, $B(0, 1, 5)$, $C(-1, 2, 1)$ и $D(2, 1, 3)$ в одной плоскости?

5) Точка $P(-2, 1, -2)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из точки A(1,0,2) на плоскость. Составить уравнение этой плоскости.

6) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^3 + 4x^2 + 3x}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1 - 6x + 7x^3}{3 - x^3}$; 8) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sin(x-4)}{x^2 - 16}$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x+3}\right)^{3x+1}$; 10) $y = \mathrm{ctg}\,3^x$; 11) $y = \dfrac{x^2 - 6}{\sqrt{x}}$;

12) $y = e^{\sin x}$; 13) $y = 3\,\mathrm{tg}\,x - \frac{1}{x}$; 14) $y = \arcsin x\cdot\sqrt[7]{x}$;

15) $y = (\mathrm{ctg}\,5x)^{x^2 + 3\sin x}$; 16) $y = x\cdot\ln x$; 17) $y = \frac{12x}{9+x^2}$; 18) $z = x\cdot\ln(3x^2 + 2y^2)$.

Вариант 8

1) $\begin{cases} x + 3y + 4z = 7, \\ 2x + 5y + 2z = 3, \\ 3x + 2y - z = 2. \end{cases}$

2) Вычислить косинус угла, образованного векторами $\overline{a} = (8, 6, 0)$ и $\overline{b} = (1, -2, 2)$.

3) Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\overline{a} - 2\overline{b}$ и $3\overline{a} + 3\overline{b}$, если $|\overline{a}| = 5$, $|\overline{b}| = 4$, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b}) = 45^0$.

4) Выяснить, лежат ли точки $A(1, 2, -1)$, $B(0, 1, 5)$, $C(-1, 2, 1)$ и $D(2, 1, 3)$ в одной плоскости?

5) Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через две заданные точки $A(2, 3, -1)$ и $B(-1, 2, 3)$.

6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-4x^2+1}{5x^5+x-3x^2}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\cdot\sin\frac{x}{3}}{\cos x-1}$;

9) $\lim\limits_{x\to 2}(3-x)^{\frac{5}{x^2-2x}}$; 10) $y=\ln(3x-5)$; 11) $y=\sqrt{\dfrac{x^2+1}{1-x}}$; 12) $y=\sqrt[3]{x}\cdot\operatorname{tg}3x$;

13) $y=\arccos(-x^2)$; 14) $y=7x-\dfrac{2^x}{4}+5$; 15) $y=(\operatorname{tg}2x+5)^{\ln 3x}$;

16) $y=x^2\cdot e^x$; 17) $y=\frac{x^2-4x+1}{x-4}$; 18) $z=(x^2-y^2)\cdot\cos(xy)$.

Вариант 9

1) $\begin{cases} x+2y+z=1,\\ 2x+7y+9z=0,\\ x+3y+4z=1.\end{cases}$

2) Дано $|\overline{a}|=1$, $|\overline{b}|=2$, $|\overline{c}|=5$, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b})=(\overline{a}\hat{\ }\overline{c})=(\overline{b}\hat{\ }\overline{c})=60^0$.
Найти $(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c})\cdot(2\overline{a}-\overline{b})$.

3) Вычислить $(\overline{a},\overline{b})$, если $|\overline{a}|=12$, $|\overline{b}|=10$, $|[\overline{a},\overline{b}]|=72$ и угол $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b})$ – острый.

4) Лежат ли точки $A(0, -1, 2)$, $B(-2, 4, 1)$, $C(5, 3, 7)$ и $D(4, 0, 3)$ в одной плоскости?

5) Через точки $A(0, -1, -2)$ и $B(2, 1, 0)$ проведена прямая. Найти точки пересечения этой прямой с координатными плоскостями.

6) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^3-x}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x^2+4x}{1+15x-x^3}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{\sin 2x}$;

9) $\lim\limits_{x\to 2}(3-x)^{\frac{x}{2-x}}$; 10) $y=\dfrac{x^2+9}{6x^3}$; 11) $y=3\sqrt{x}\cdot\ln(1-x)$; 12) $y=\arcsin^2 3x$;

13) $y=e^{\operatorname{arctg} x}$; 14) $y=2^x-17\operatorname{tg}x+x^8$; 15) $y=(\cos 2x)^{x^3-6x}$;

16) $y=(5-2x)^6$; 17) $y=\dfrac{2x^3+1}{x^2}$; 18) $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$.

Вариант 10

1) $\begin{cases} x+2y+4z=-4,\\ 5x+y+2z=7,\\ 3x-y+z=3.\end{cases}$

2) Вычислить косинус угла, образованного векторами $\overline{a}=(4, 2, 4)$ и $\overline{b}=(3, 4, 0)$.

3) Найти $(\overline{a},\overline{b})$, если $|\overline{a}|=5$, $|\overline{b}|=6$, $|[\overline{a},\overline{b}]|=15$ и угол $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b})$ – острый.

4) Лежат ли точки A(-1, -1, -1), B(1, -2, -2), C(0, -2, -1) и D(2, -3, -2) в одной плоскости?

5) Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A(1, 2, 0) параллельно векторам $\overline{a}$ = (1, -1, 0) и $\overline{b}$ = (0, 4, -2).

6) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{12}{x^3-8}\right)$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-7x+1}{4-2x^2}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^2\cdot\sin 3x}{(1-\cos x)\cdot\sin x}$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{3x+1}$; 10) $y=\frac{4+3x^3}{\sqrt[5]{x^2}}$; 11) $y=\operatorname{tg}x\cdot\ln(18-x)$; 12) $y=2^{-x^7}$;

13) $y=3-\frac{1}{x^4}+x^4$; 14) $y=\arccos\frac{1}{x^3}$; 15) $y(x)=(\operatorname{arctg}3x)^{x^2-5x}$;

16) $y=\cos^2 3x$; 17) $y=\frac{(x-1)^2}{x^2}$; 18) $z=\arcsin\frac{x}{x+y}$.

Вариант 11

1) $\begin{cases} 3x-5y+3z=-1, \\ x-2y+2z=1, \\ -4x+6y-3z=3. \end{cases}$

2) Определить при каком α векторы $\overline{a}$ = (2 α, α, 2) и $\overline{b}$ = (2, -3, -1) будут взаимно перпендикулярны.

3) Является ли четырехугольник с вершинами в точках A(2, -1, 3), B(1, 2, -1), C(-4, 7, 5) и D(-5, 10, 1) параллелограммом? Если да, то найти его площадь.

4) Лежат ли точки A(-1, -1, -1), B(-2, 1, -2), C(-1, 0, -2) и D(3, 2, 1) в одной плоскости? Ответ обосновать.

5) Составить уравнение плоскости, проходящей через точки A(1, 2, -1) и B(0, 3, 2) параллельно вектору $\overline{a}$ = (3, 4, 7).

6) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-10x^7+2}{x^3-x-3}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\operatorname{arctg}^2 x}$;

9) $\lim\limits_{x\to 3}(7-2x)^{\frac{x+5}{x^2-9}}$; 10) $y=\frac{\cos 7x}{\operatorname{tg}x}$; 11) $y=\arccos\sqrt{x}$; 12) $y=2^{\operatorname{arctg}x}$;

13) $y=\ln(x+7x^6)$; 14) $y=\sqrt[5]{x^6}\cdot(x-2)$; 15) $y=(\arccos 4x)^{\ln x}$;

16) $y=\frac{1}{3^x}$; 17) $y=\frac{x^2}{(x-1)^2}$; 18) $z=\ln(8x^2+3y)$.

Вариант 12

1) $\begin{cases} x+9y-4z=9, \\ 2x+5y-3z=4, \\ 4x-3y+2z=9. \end{cases}$

2) Вычислить $(2\overline{a}-5\overline{b})^2$, если $|\overline{a}| = 11$, $|\overline{b}| = 2$ и $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b}) = 90^0$.

3) Вычислить синус угла между векторами $\overline{a}$ = (2, 3, -1) и $\overline{b}$(1, 2, 3).

4) Лежат ли точки A(1, 1, 1), B(2, 0, 1), C(3, 1, -1) и D(4, -2, -2) в одной плоскости?

5) Составить уравнение плоскости, проходящей через точки A(-4, 3, 2) и B(2, 1, -1) параллельно прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-1}$.

6) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-4x}{x^2-3x-4}$; 7) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3-3x}{(x^2-x+2)^2}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\sin 2x}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg} x}$; 10) $y=\sin^2 3x$; 11) $y=\ln\arccos x$; 12) $y=\sqrt[3]{x^2}\cdot 2^x$;

13) $y=e^{\sqrt{x}}$; 14) $y=\frac{\operatorname{tg} x}{1+x^2}$; 15) $y=(x^5+2x)^{\sin 3x}$;

16) $y=\operatorname{ctg} x$; 17) $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^2$; 18) $z=\operatorname{arctg}(xy^2)$.

Вариант 13

1) $\begin{cases} x+2y+3z=1, \\ 5x+8y-z=7, \\ 2x-3y+2z=9. \end{cases}$

2) Вычислить $(3\overline{a}$ - $2\overline{b})\cdot(\overline{b}$ + $3\overline{c})$, если $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 5$, $|\overline{c}| = 8$, $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b}) = 90^0$, $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{c}) = (\overline{b}\,\hat{}\,\overline{c}) = 60^0$.

3) Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{p}=3\overline{a}+2\overline{b}$ и $\overline{q}=2\overline{a}-3\overline{b}$, если $|\overline{a}| = 5$, $|\overline{b}| = 2$ и $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b}) = 60^0$.

4) При каком значении y точки $M(2, y, 0)$, A(5, 2, 1), B(3, -1, 2) и C(2, 0, 1) будут лежать в одной плоскости?

5) Составить параметрические и канонические уравнения прямой, заданной как пересечение двух плоскостей: $3x-z-4=0$ и $x+y-2z+1=0$.

6) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x+x^2}$; 7) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x-6x^3-1}{2x^3-x+1}$; 8) $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{1}{\sin(x-1)}}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}-1}{x}$; 10) $y=\frac{x^2-2}{24x^3}$; 11) $y=\cos^2 18x$; 12) $y=\frac{3+x}{2}\cdot\operatorname{tg} x$;

13) $y = 5^{\sin x}$; 14) $y = \arcsin\sqrt{x}$; 15) $y = (\sin 3x)^{x^4-2x}$; 16) $y = \ln(x^2-1)$;

17) $y = \frac{3-x^2}{x+2}$; 18) $z = \arcsin\frac{x^2}{y}$.

Вариант 14

1) $\begin{cases} x + y - 2z = -6, \\ 3x + 2y + z = 5, \\ 2x + 3y + z = 1. \end{cases}$

2) Определить, при каких значениях α векторы $\overline{a}$ = (1, 3α, 2) и $\overline{b}$ = (2, 3α, -3) будут взаимно перпендикулярны.

3) Найти координаты вектора $\overline{c}$, если он перпендикулярен к векторам $\overline{a}$ = (0, 1, 2) и $\overline{b}$(2, 0, 1), образует тупой угол с осью OX и $|\overline{c}| = \sqrt{7}$.

4) При каком значении x точки $M(x, 0, 1)$, A(1, 3, 0), B(0, 1, -2) и C(-4, 0, 1) будут лежать в одной плоскости?

5) Составить уравнение плоскости, проходящей через точки A(-1, 0, 2) и B(3, 2, 5) параллельно оси OZ.

6) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x^2-4x-5}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+4x+1}{5x^3-x+3}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x \cdot \operatorname{tg} 2x}{5x\cdot\sin 6x}$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+5}\right)^{8x+1}$; 10) $y = \frac{x^6+8x^3+1}{x^2+3}$; 11) $y = 5x\cdot\operatorname{tg}3x$; 12) $y = \cos\ln x$;

13) $y = \operatorname{ctg}\sqrt{x}$; 14) $y = \frac{1}{e^x}$; 15) $y = (x^5-3x)^{\operatorname{ctg}2x}$; 16) $y = \arccos 2x$;

17) $y = \frac{x^2+6x+3}{x+4}$; 18) $z = \ln(5x^2 + 4y^2)$.

Вариант 15

1) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 6, \\ 2x + 3y - 4z = 20, \\ 3x - 2y - 5z = 6. \end{cases}$

2) Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если $|\overline{a}| = 1$, $|\overline{b}| = 3$, $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b}) = 45^0$.

3) Определить α из условия, что площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ = (1, α, 1) и $\overline{b}$ = (2, 1, 0), равна $\sqrt{6}$.

4) При каком значении x точки $M(x, 1, 0)$, A(2, 1, 5), B(-2, 1, 0) и C(1, 0, 2) лежат в одной плоскости?

5) Составить параметрические и канонические уравнения прямой, заданной как пересечение двух плоскостей: $x + 4y - 7z + 8 = 0$ и $5x + 2y - 5z - 2 = 0$.

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^2-(1+3x)}{x^2-2x}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^2+2x-3)^2}{x^3+4x^2+3x}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\operatorname{tg} x)}{\ln(1+\sin 3x)}$;

9) $\lim\limits_{x\to 2}(4x-7)^{\frac{x+3}{x-2}}$; 10) $y=\ln(\operatorname{sh} x)$; 11) $y=\arccos\sqrt{x}$;

12) $y=5x^4\cdot\sin x^3$; 13) $y=5^{1-x}$; 14) $y=\frac{3x+2}{\operatorname{tg} x}$; 15) $y=(\arcsin 4x)^{x^3-2x}$;

16) $y=\frac{1}{x^8}$; 17) $y=\frac{-8x}{x^2+4}$; 18) $z=y\cdot\ln(x^2-y^2)$.

Вариант 16

1) $\begin{cases} 2x-8y+5z=5, \\ 2x+5y-3z=4, \\ 5x+6y-2z=18. \end{cases}$

2) Определить, при каком α векторы $\overline{a}$ = (2α, 4α, 1) и $\overline{b}$(2, 4, 2) будут взаимно перпендикулярны.

3) Найти координаты вектора $\overline{c}$, если он перпендикулярен к векторам $\overline{a}$ = (1, -2, 3) и $\overline{b}$(2, 1, 1), образует острый угол с осью *OZ* и $|\overline{c}|$ = 2.

4) При каком значении x точки *M*(x, 0, 3), *A*(2, 1, 4), *B*(3, 2, 0) и *C*(2, 0, -2) будут лежать в одной плоскости?

5) Составить уравнение плоскости, проходящей через точки *A*(5, 3, 1) и *B*(1, 1, 2) параллельно оси *OZ*.

6) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{6}{x^2-9}\right)$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x-100x^{10}}{3x^{10}+1}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cdot\operatorname{ctg} 2x}{\operatorname{tg} 5x}$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-3}\right)^x$; 10) $y=\frac{x^6+8x^3+12}{\sqrt{8-x}}$; 11) $y=\ln^2(x-6x^2)$;

12) $y=\sqrt[4]{x^3}\cdot\arcsin x$; 13) $y=2^{-x}$; 14) $y=\operatorname{arcctg} 4x$;

15) $y=(x^6-7x)^{\ln 2x}$; 16) $y=\sin^2 2x$; 17) $y=\frac{1}{x^2-1}$; 18) $z=\arccos\dfrac{x}{\sqrt{y}}$.

Вариант 17

1) $\begin{cases} x+2y+z=4, \\ x-12y+4z=-7, \\ 3x-5y+3z=1. \end{cases}$

2) Найти координаты вектора $\overline{c}$, если он коллинеарен вектору $\overline{a}$ = (-2, -2, 1), образует острый угол с осью *OУ* и $|\overline{c}|$ = 27.

3) Определить α из условия, что площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ = (3, 0, 1) и $\overline{b}$ = (α, 2, 2), равна $\sqrt{76}$.

4) При каком значении z точки *M*(1, 0, z), A(2, 3, 2), B(-4, 0, 3) и *C*(0, 4, 2) будут лежать в одной плоскости?

5) Составить уравнение плоскости, проходящей через ось *ОУ* и точку *А*(2, -1, 6).

6) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)^{10}\cdot x}{2x^3-12x+5}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin(2x-x^2)}{\operatorname{arctg} x}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 5x)^{\frac{1+x}{x}}$; 10) $y=\frac{\sqrt{2x-1}}{7x+5}$; 11) $y=\operatorname{arctg}(3x+x^2)$;

12) $y=\ln(1-4x)$; 13) $y=\sqrt[5]{x^7}\sin 6x$; 14) $y=(x^8-1)^4$;

15) $y=(\operatorname{tg}4x)^{x^2+2\cos x}$; 16) $y=e^{-x}$; 17) $y=\frac{3x^4+1}{x^3}$; 18) $z=\frac{4x}{x^3-y^3}$.

Вариант 18

1) $\begin{cases} x+y-z=-2,\\ 2x-4y+z=-4,\\ 4x-3y+z=1. \end{cases}$

2) Найти угол между единичными векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если векторы $\overline{p}=2\overline{a}+\overline{b}$ и $\overline{q}=\overline{a}-3\overline{b}$ взаимно перпендикулярны.

3) Найти координаты вектора $\overline{c}$, если он образует острый угол с осью О*X*, перпендикулярен векторам $\overline{a}$ = (0, 0, 1) и $\overline{b}$ = (8, -15, 3) и $|\overline{c}|$ = 51.

4) При каком значении x точки *M*(x, 0, 0), *A*(1, 2, 2), *B*(3, 2, 0) и *C*(2, 0, 3) лежат в одной плоскости ?

5) Составить уравнение плоскости, проходящей через ось *ОУ* и точку *А*(-1, 3, -3).

6) $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{1}{\sin \pi x}}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2+3}{x-x^2+5x^3}$; 8) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\operatorname{tg}^2(2x-1)}{(2x-1)^2}$;

9) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-3x}{x^2-x-6}$; 10) $y=5^{\operatorname{arctg} x}$; 11) $y=e^{-x^3}$; 12) $y=\frac{\cos 2x}{\operatorname{ctg} x}$;

13) $y=\sin^2\frac{x}{3}$; 14) $y=x\cdot\sqrt{x^2-1}$; 15) $y=(\ln 2x+3)^{5x^2}$;

16) $y=x^2\cdot(15+x)$; 17) $y=\frac{3x-2}{x^3}$; 18) $z=12\cos^2\left(\frac{x}{3}-\frac{y}{4}\right)$.

Вариант 19

1) $\begin{cases} 2x+y+z=3,\\ 2x+2y+z=0,\\ 3x+3y+z=-2. \end{cases}$

2) Доказать, что векторы $\overline{a}=3\overline{i}+4\overline{j}+7\overline{k}$ и $\overline{b}=2\overline{i}-5\overline{j}+2\overline{k}$ взаимно перпендикулярны.

3) В треугольнике с вершинами *A*(2, -1, 6), *B*(3, 0, 5) и *C*(5, 2, 6) найти длину высоты *AM*.

4) Можно ли векторы $\overline{a}$ = (1, 0, 2), $\overline{b}$ = (-1, 1, 0) и $\overline{c}$ = (1, -1, 2) взять за базисные в трехмерном пространстве? Ответ обосновать.

5) Составить уравнение плоскости, проходящей через ось OY и точку A(1, 4, -3).

6) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+4x^2+3x}{x^2+2x-3}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-4x+3}{2x^3+3x+4}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2+x}{1+x}\right)^{3x-1}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{3^x-1}$; 10) $y=\frac{3x-7}{2x^4-1}$; 11) $y=(1-x+5x^2)^{20}$; 12) $y=5x^3\cdot\mathrm{tg}\,x$;

13) $y=\sin 8x$; 14) $y=\arccos(\sqrt{x}+1)$; 15) $y(x)=(\arccos x)^{x+3x^2}$;

16) $y=x\cdot e^x$; 17) $y=\frac{4x}{(x+1)^2}$; 18) $z=(2x+y)\cdot e^{xy^2}$.

Вариант 20

1) $\begin{cases} x-5y-z=-14, \\ x-2y+3z=6, \\ 2x+3y-4z=20. \end{cases}$

2) Найти вектор $\overline{c}$, если он коллинеарен вектору $\overline{a}$ = (2, 1, -1) и скалярное произведение $(\overline{c},\overline{a})$ = 3.

3) Определить α из условия, что площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ = (2, -1, 2) и $\overline{b}$ = (1, α, -1), равна $3\sqrt{2}$.

4) Можно ли векторы $\overline{a}$(-1, 1, 0), $\overline{b}$(1, -1, 1) и $\overline{c}$(0, 2, 1) взять за базисные в трехмерном пространстве? Ответ обосновать.

5) Составить уравнение плоскости, проходящей через ось OY и точку A(-1, 0, -7).

6) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{2x^2-3x-2}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+5x}{1-x-x^2}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{\frac{x-3}{x}}$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\ln(1+4x)}$;

10) $y=\dfrac{x^2+2}{\sqrt{1-x^4}}$; 11) $y=e^{-3x}$; 12) $y=(2x^3-1)\cdot x^4$; 13) $y=\mathrm{arctg}\dfrac{1}{x}$;

14) $y=\ln\mathrm{ctg}\,x$; 15) $y=(\sin 3x)^{x^2-4x}$; 16) $y=\arcsin x$; 17) $y=\frac{1-2x^3}{x^2}$;

18) $z=\sqrt{x}\sin\dfrac{y}{x}$.

Вариант 21

1) $\begin{cases} 2x+y-z=3, \\ 2x-3y=-1, \\ x+y-z=5. \end{cases}$

2) Найти длину вектора $\overline{p} = \overline{a} + \overline{b} - \overline{c}$, если $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 2$, $|\overline{c}| = 5$, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b}) = (\overline{b}\hat{\ }\overline{c}) = 90^0$ и $(\overline{a}\hat{\ }\overline{c}) = 60^0$.

3) Найти координаты вектора $\overline{c}$, если он составляет тупой угол с осью OY, перпендикулярен к векторам $\overline{a} = (4, -2, -3)$ и $\overline{b} = (0, 1, 3)$ и $|\overline{c}| = 26$.

4) Вычислить объем пирамиды с вершинами в точках $A(2, -1, 1)$, $B(5, 5, 4)$, $C(3, 2, -1)$ и $D(4, 1, 3)$.

5) Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1, 4, 1)$, $B(2, 3, -1)$ и $C(0, -1, 0)$.

6) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}} \dfrac{15x^2 - 2x - 1}{3x - 1}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^{11} - x^5 + x}{100x^3 + 1}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \cos^3 x}{4x \cdot \sin 5x}$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2 + x^2}{x^2}\right)^{3x^2}$; 10) $y = \dfrac{x^6 + x^3 - 2}{\sqrt{x^3 - 1}}$; 11) $y = \arccos\sqrt{x}$; 12) $y = 3x^2 \cdot \ln x$;

13) $y = 2^{-x} + \dfrac{1}{x}$; 14) $y = \mathrm{tg}^3\, 8x$; 15) $y = (\mathrm{arcctg}\, 7x)^{x^5 + 2x}$;

16) $y = \log_2(3x)$; 17) $y = \dfrac{4}{x^2 + 2x - 3}$; 18) $z = \mathrm{arctg}\dfrac{x^2}{y}$.

Вариант 22

1) $\begin{cases} 4x + 2y - 3z = -1, \\ x + y - z = 1, \\ 8x + 3y - 6z = 2. \end{cases}$

2) Найти длину вектора $\overline{p} = \overline{b} - \overline{a} + \overline{c}$, если $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 2$, $|\overline{c}| = 5$, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{b}) = (\overline{b}\hat{\ }\overline{c}) = 90^0$, $(\overline{a}\hat{\ }\overline{c}) = 60^0$.

3) При каких α и β вектор $\overline{c} = \alpha\overline{i} + 3\overline{j} + \beta\overline{k}$, будет коллинеарен вектору $[\overline{a}, \overline{b}]$, если $\overline{a} = (3, -1, 1)$ и $\overline{b} = (1, 2, 0)$?

4) Вычислить объем пирамиды с вершинами в точках $A(1, 2, 3)$, $B(6, 0, 0)$, $C(1, 4, 9)$ и $D(1, 8, 3)$.

5) Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-1, 0, 1)$ и $B(2, 3, 4)$ параллельно оси OZ.

6) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}} \dfrac{x^2 - 3}{x^4 - x^2 - 6}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 + 3x - 1}{2x^4 - x^2 + 5}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0} (1 + \sin 2x)^{\frac{1}{\mathrm{tg}\, 4x}}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos 5x}{7x \cdot \sin 3x}$; 10) $y = \frac{\sqrt{x^2 - x}}{x^3 - 1}$; 11) $y = ln(1 - x^2)$; 12) $y = \mathrm{ctg}\sqrt{x}$;

13) $y = \sqrt[4]{1 - x} \cdot \cos x$; 14) $y = 5^{\sin x}$; 15) $y = (x^3 + 5x)^{\mathrm{tg} 7x}$;

16) $y = (7x - 3x^2)^5$; 17) $y = -\left(\frac{x}{x+2}\right)^2$; 18) $z = \sqrt{xy + y^2}$.

Вариант 23

1) $\begin{cases} x + y + 2z = -1, \\ 2x - y + 2z = -4, \\ 4x + y + 4z = -2. \end{cases}$

2) Найти угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если $|\overline{a}| = |\overline{b}| = 1$ и векторы $\overline{a} + 3\overline{b}$ и $7\overline{a} - 5\overline{b}$ перпендикулярны.

3) Найти модуль вектора $\overline{p} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$, если $|\overline{a}| = 1$, $|\overline{b}| = 3$, $|\overline{c}| = 4$, $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b}) = (\overline{a}\,\hat{}\,\overline{c}) = 60^0$, $(\overline{b}\,\hat{}\,\overline{c}) = 90^0$.

4) Вычислить объём пирамиды с вершинами в точках $A(2, 1, 3)$, $B(4, -2, 0)$, $C(1, 3, -8)$ и $D(7, 5, 2)$.

5) Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1, 2, 0)$, $B(2, 5, 0)$ и $C(0, 3, 2)$.

6) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{5x^2 - 24x - 5}{x^2 - 25}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{15x^2 - 2x - 1}{5x^3 + 1}$; 8) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{(x^2 - 3x + 2)\cos\pi x}$;

9) $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{1}{\operatorname{tg}(x-2)}}$; 10) $y = 3\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} + 16x$; 11) $y = \dfrac{\sqrt{2x-5}}{x^2+x-1}$; 12) $y = e^{\operatorname{arctg} x}$;

13) $y = \cos 7x$; 14) $y = x^5 \ln x$; 15) $y = (\sin 3x)^{x^2 - 7x}$; 16) $y = 2^{x^2}$;

17) $y = \dfrac{x^3 - 32}{x^2}$; 18) $z = \sin^2(4x + y)$.

Вариант 24

1) $\begin{cases} 2x - y - z = 4, \\ 3x + 4y - 2z = 11, \\ 3x - 2y + 4z = 11. \end{cases}$

2) Вычислить длину вектора $\overline{p} + 2\,\overline{q}$, если $\overline{p} = \overline{a} - \overline{b}$, $\overline{q} = \overline{a} + 2\,\overline{b}$, $|\overline{a}| = 1$, $|\overline{b}| = 3$ и $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b}) = 120^0$.

3) Найти наименьший внутренний угол треугольника с вершинами в точках $A(-1, 3, 1)$, $B(0, 2, -3)$ и $C(3, -1, 0)$.

4) Вычислить объем пирамиды с вершинами в точках $A(1, 1, 1)$, $B(4, 4, -2)$, $C(2, 0, 2)$ и $D(0, 2, 2)$.

5) Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(0, -1, 0)$, $B(2, 1, -2)$, и $C(1, 4, 1)$.

6) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2 - 5x + 2}{3x - 6x^2 - 2}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\pi - 5x)}{e^{2x} - 1}$;

9) $\lim\limits_{x\to 2}\left(2 - \dfrac{x}{2}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}}$; 10) $y = \dfrac{1+\sqrt{x}}{2x^2+5}$; 11) $y = 7x \arcsin x$; 12) $y = 2x - \dfrac{1}{x} + \sqrt[5]{x}$;

13) $y = e^{\text{ctg}\,x}$; 14) $y = 5^{12x^2}$; 15) $y = (x^2 + 5x)^{\text{tg}3x}$; 16) $y = \text{ctg}\,5x$;

17) $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$; 18) $z = \arcsin(x \cdot \sqrt{y})$.

Вариант 25

1) $\begin{cases} 5x - y - z = 0, \\ x + 2y + 3z = 14, \\ 4x + 3y + 2z = 16. \end{cases}$

2) Вычислить длину диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 5$, $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b}) = 45^0$.

3) Длина гипотенузы *AB* прямоугольного треугольника *ABC* равна *c*. Вычислить $\overline{AB} \cdot \overline{AC} + \overline{BC} \cdot \overline{BA} + \overline{CA} \cdot \overline{CB}$.

4) Даны координаты точек *A*(5, 0, 3), *B*(3, 3, -2) и *C*(4, 2, 2). Найти координаты вершины *D* тетраэдра *ABCD*, если известно, что она лежит на оси *OX*, а объем тетраэдра равен 3.

5) Составить уравнение плоскости, проходящей через точки *A*(0, 3, 2), *B*(1, 0, 4) и *C*(1, 5, -1).

6) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2} + \frac{3}{8-x^3}\right)$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-1}{6x^2-6x+1}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(3x+1)}{\left(e^{5\sqrt{x}}-1\right)\sqrt{x}}$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{5x-1}$; 10) $y = \frac{2x-1}{x^2+5}$; 11) $y = 3^{x^2} \cdot \cos x$; 12) $y = \sqrt{5x - 4 - x^2}$;

13) $y = \ln 2\,\text{tg}\,x$; 14) $y = e^{x^3}$; 15) $y = (x^4 - 2x)^{\ln 3x}$; 16) $y = \text{arcctg}\,(-x)$;

17) $y = \frac{x^3}{x-1}$; 18) $z = \left(xy + \frac{x}{y}\right)^2$.

Вариант 26

1) $\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 8, \\ 2x - y - 3z = -4, \\ x + 5y + z = 0. \end{cases}$

2) Определить при каком α векторы $\overline{a}$ = (5α, α, 2) и $\overline{b}$ = (2, -6, -1) будут взаимно перпендикулярны.

3) Является ли четырехугольник с вершинами в точках *A*(2, -1, 3), *B*(1, 2, -1), *C*(-4, 7, 5) и *D*(-5, 10, 1) параллелограммом? Если да, то найти его площадь.

4) Лежат ли точки *A*(-1, -1, -1), *B*(-2, 1, 3), *C*(-1, 0, -2) и *D*(3, 2, 1) в одной плоскости? Ответ обосновать.

5) Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1, 2, -1)$ и $B(0, 3, 2)$ параллельно вектору $\overline{a} = (1, 0, 5)$.

6) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-x-2}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-10x^3+2}{x^3-x-3}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{\operatorname{arctg}^2 x}$;

9) $\lim\limits_{x\to 3}(4-x)^{\frac{x+5}{x^2-9}}$; 10) $y=\dfrac{\cos 5x}{\operatorname{tg} x}$; 11) $y=\arccos\sqrt{x}$; 12) $y=7^{\operatorname{arctg}\, x}$;

13) $y=\ln(x+3x^5)$; 14) $y=\sqrt[3]{x^5}\cdot(x-2)$; 15) $y=(x^3-7x)^{\cos 2x}$;

16) $y=\dfrac{1}{3^x}$; 17) $y=\dfrac{x^2}{(x-1)^2}$; 18) $z=x^2e^{x^2-y^2}$.

Вариант 27

1) $\begin{cases} x+2y+z=8, \\ 4x+3y-2z=4, \\ 7x+5y-z=14. \end{cases}$

2) Вычислить $(3\overline{a}-4\overline{b})^2$, если $|\overline{a}|=8$, $|\overline{b}|=2$ и $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b}) = 60^0$.

3) Вычислить синус угла между векторами $\overline{a} = (2, -3, 1)$ и $\overline{b} = (1, 2, 3)$.

4) Лежат ли точки $A(1, 1, 1)$, $B(2, 0, 1)$, $C(3, 1, -1)$ и $D(4, -2, -2)$ в одной плоскости? Ответ обосновать.

5) Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-3, 2, 3)$ и $B(2, 1, -1)$ параллельно прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{5}=\frac{z+1}{-1}$.

6) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-4x}{x^2-6x+8}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-3x}{(x^2-x+2)^2}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\sin 2x}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$; 10) $y=\sin^2 3x$; 11) $y=\ln\arccos x$; 12) $y=\sqrt[3]{x^2}\cdot 2^x$;

13) $y=e^{\sqrt{x}}$; 14) $y=\frac{\operatorname{tg} x}{1+x^2}$; 15) $y=(\ln 3x)^{x^2+2\sin x}$; 16) $y=\operatorname{ctg} x$;

17) $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^2$; 18) $z=\ln(\sqrt{x}+\sqrt{y})$.

Вариант 28

1) $\begin{cases} x-4y-2z=-3, \\ 3x+y+z=5, \\ 3x-5y-6z=-9. \end{cases}$

2) Вычислить $(\overline{a} - 2\overline{b})\cdot(3\overline{b}+\overline{c})$, если $|\overline{a}|=2$, $|\overline{b}|=6$, $|\overline{c}|=4$, $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b}) = 90^0$, $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{c}) = (\overline{b}\,\hat{}\,\overline{c}) = 60^0$.

3) Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{p}=5\overline{a}+2\overline{b}$ и $\overline{q}=3\overline{a}-3\overline{b}$, если $|\overline{a}|=5$, $|\overline{b}|=2$ и $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b}) = 30^0$.

4) При каком значении x точки $M(x, 0, 4)$, $A(5, 2, 1)$, $B(3, -1, 2)$ и $C(2, 0, 1)$ будут лежать в одной плоскости?

5) Составить параметрические и канонические уравнения прямой, заданной как пересечение двух плоскостей: $3x - z - 4 = 0$ и $x + y - 2z + 1 = 0$.

6) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2 - x - 2}{-x + x^3}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x - 6x^3 + 1}{2x^3 - x + 1}$; 8) $\lim\limits_{x\to 1}(3 - 2x)^{\frac{1}{\sin(x-1)}}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-3x} - 1}{x}$; 10) $y = \frac{x^2-2}{24x^3}$; 11) $y = \cos^2 18x$; 12) $y = \frac{3+x}{2}\cdot \operatorname{tg} x$;

13) $y = 5^{\sin x}$; 14) $y = \arcsin\sqrt{x}$; 15) $y = (\operatorname{ctg} 5x + 1)^{\ln 2x}$;

16) $y = \ln(x^2 - 1)$; 17) $y = \frac{3-x^2}{x+2}$; 18) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y^2}{x}$.

Вариант 29

1) $\begin{cases} 2x + y + 3z = 11, \\ 3x + 2y + z = 5, \\ x + y + z = 3. \end{cases}$

2) Найти угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если $|\overline{a}| = 1$, $|\overline{b}| = 2$ и выполняется условие $(\overline{a} - \overline{b})^2 + (\overline{a} + 2\overline{b})^2 = 20$.

3) Найти координаты вектора $\overline{c}$, если он перпендикулярен к векторам $\overline{a} = (0, 1, 2)$ и $\overline{b} = (2, 0, 1)$, образует тупой угол с осью OX и $|\overline{c}| = \sqrt{7}$.

4) При каком значении x точки $M(x, 0, 2)$, $A(1, -1, 0)$, $B(0, 1, 3)$ и $C(1, 0, 1)$ будут лежать в одной плоскости?

5) Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-1, 0, 2)$ и $B(3, 2, 5)$ параллельно оси OZ.

6) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 4x - 5}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2 + 4x + 1}{5x^3 - x + 3}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x \cdot \operatorname{tg} 2x}{5x\cdot \sin 6x}$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x + 3}{2x + 5}\right)^{8x+1}$; 10) $y = \frac{x^6+8x^3+1}{x^2+3}$; 11) $y = 5x\cdot \operatorname{tg} 3x$; 12) $y = \cos\ln x$;

13) $y = \operatorname{ctg}\sqrt{x}$; 14) $y = \frac{1}{e^x}$; 15) $y = (\cos 3x)^{x^2+5x}$; 16) $y = \arccos 2x$;

17) $y = \frac{x^2+6x+3}{x+4}$; 18) $z = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}$.

Вариант 30

1) $\begin{cases} x - 4y - 2z = -5, \\ 3x + y + z = 5, \\ -3x + 5y + 6z = 8. \end{cases}$

2) Определить, при каких значениях α векторы $\overline{a} = (\alpha -4,\ \alpha,\ 4)$ и $\overline{b} = (\alpha, -1, 1)$ будут взаимно перпендикулярны.
3) Определить α из условия, что площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a} = (1, \alpha, 1)$ и $\overline{b} = (2, 1, 0)$, равна $\sqrt{6}$.
4) При каком значении x точки $M(x, 3, 0)$, $A(4, -1, 1)$, $B(2, 1, 0)$ и $C(1, 0, 2)$ лежат в одной плоскости?
5) Составить параметрические и канонические уравнение прямой, заданной как пересечение двух плоскостей: $x + 4y - 7z + 8 = 0$ и $5x + 2y - 5z - 2 = 0$.

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2+x)^2-(4+3x)}{x^2-2x}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^2+2x-3)^2}{x^4+4x^2+3x}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\operatorname{tg}x)}{\ln(1+\sin 3x)}$;

9) $\lim\limits_{x\to 2}(4x-7)^{\frac{x-3}{x-2}}$; 10) $y = \ln(1+2e^x)$; 11) $y = \arccos\sqrt{x}$;

12) $y = 5x^4\cdot\sin x^3$; 13) $y = 5^{1-x}$; 14) $y = \frac{3x+2}{\operatorname{tg}x}$; 15) $y = (\operatorname{arcctg}5x)^{x^2+7x}$;

16) $y = \frac{1}{x^8}$; 17) $y = \frac{-8x}{x^2+4}$; 18) $z = \dfrac{xy}{x-y}$.

ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ №1 – 5, 17 КОНТРОЛЬНОГО ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ №1

Вариант 0

Задача 1. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} x+2y+3z=5\\ 2x-y-z=1\\ x+3y+4z=6\end{cases}$ тремя методами: а) методом Крамера, б) методом Гаусса, в) матричным методом.

а) *Решение системы методом Крамера.*

Метод Крамера применяется для решения систем n линейных уравнений с n неизвестными, у которых главный определитель не равен нулю. В нашем случае n =3.

Выписываем матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & -1\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$ системы уравнений, она состоит из коэффициентов при неизвестных.

Вычисляем определитель этой матрицы $\det A = \Delta$ (главный определитель системы), например, методом треугольников:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & -1\\ 1 & 3 & 4\end{vmatrix}=1\cdot(-1)\cdot 4+2\cdot(-1)\cdot 1+2\cdot 3\cdot 3-3\cdot(-1)\cdot 1-2\cdot 2\cdot 4-3\cdot(-1)\cdot 1=$$

$$=-4-2+18+3-16+3=2.$$

Определитель $\Delta=2\neq 0$, следовательно, система имеет единственное решение. Далее вычисляем определители Δ_x, Δ_y, Δ_z, которые получаются из главного определителя заменой соответствующего столбца при неизвестных на столбец свободных членов:

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}5 & 2 & 3\\ 1 & -1 & -1\\ 6 & 3 & 4\end{vmatrix}=2,\quad \Delta_y=\begin{vmatrix}1 & 5 & 3\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 6 & 4\end{vmatrix}=-2,\quad \Delta_z=\begin{vmatrix}1 & 2 & 5\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 3 & 6\end{vmatrix}=4.$$

Находим решение системы по формулам Крамера:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{2}{2}=1,\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-2}{2}=-1,\quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{4}{2}=2.$$

Ответ: $x=1,\ y=-1,\ z=2.$

б) *Решение системы методом Гаусса.*

Рассмотрим матрицу C – расширенную матрицу системы. С помощью элементарных преобразований строк приведём матрицу C к треугольному виду. Для этого умножаем первую строку на (–2) и прибавляем ко второй, затем умножаем первую строку на (–1) и прибавляем к третьей:

$$C=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 5\\ 2 & -1 & -1 & 1\\ 1 & 3 & 4 & 6\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 5\\ 0 & -5 & -7 & -9\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{array}\right).$$

Далее меняем местами вторую и третью строки, умножаем вторую строку на 5 и прибавляем к третьей:

$$C\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 5\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -5 & -7 & -9\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 5\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -2 & -4\end{array}\right).$$

Таким образом, $\operatorname{rang} A=\operatorname{rang} C=3$, значит, система совместна и имеет единственное решение. Последняя матрица есть расширенная матрица системы, равносильной исходной системе:

$$\begin{cases}x+2y+3z=5,\\ \quad y+z=1,\\ \quad -2z=-4,\end{cases}\qquad \text{откуда } z=2,\ y=-1,\ x=1.$$

Ответ: $x=1,\ y=-1,\ z=2.$

в) *Решение системы матричным методом.*

Данную систему уравнений можно записать в матричном виде

$$A \cdot X = B,$$

где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Если главный определитель системы $\det A$ отличен от нуля, то решение матричного уравнения имеет вид $X = A^{-1} \cdot B$. У нас $\det A = 2 \neq 0$.

Найдём A^{-1}. Вычислим алгебраические дополнения:

$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1$, $A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -9$, $A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7$,

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1$, $A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1$, $A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1$,

$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1$, $A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 7$, $A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5$.

Таким образом,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -9 & 1 & 7 \\ 7 & -1 & -5 \end{pmatrix},$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -9 & 1 & 7 \\ 7 & -1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5+1+6 \\ -45+1+42 \\ 35-1-30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x = 1,\ y = -1,\ z = 2$.

Задача 2. Найти вектор $\overline{x}$, коллинеарный вектору $\overline{a} = \{2, 1, -2\}$ и удовлетворяющий условию $(\overline{x} \cdot \overline{a}) = 27$.

Решение. В силу коллинеарности вектор $\overline{x}$ можно представить в виде $\overline{x} = \lambda\overline{a}$, где λ – пока неизвестный множитель. Для его определения используем второй пункт условия: $(\overline{x} \cdot \overline{a}) = \lambda\overline{a}^2 = \lambda(4+1+4) = 9\lambda = 27$.

Получаем $\lambda = 3$ и $\overline{x} = 3\overline{a} = \{6, 3, -6\}$.

Ответ: $\overline{x} = \{6, 3, -6\}$

Задача 3. Найти вектор $\overline{x}$, перпендикулярный векторам $\overline{a} = \{1, 1, 1\}$ и $\overline{b} = \{2, 0, 1\}$ и образующий с осью ОХ тупой угол, если $|\overline{x}| = \sqrt{6}$.

Решение. Найдем вектор $\overline{c}$ такой, что $\overline{c} \perp \overline{a}$, $\overline{c} \perp \overline{b}$. Можно положить $\overline{c} = [\overline{a}, \overline{b}] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \overline{i} + \overline{j} - 2\overline{k}$.

Поскольку вектор $\overline{x}$ перпендикулярен векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$, то он коллинеарен вектору $\overline{c}$. Следовательно, $\overline{x} = \lambda \cdot \overline{c} = \{\lambda, \lambda, -2\lambda\}$.

Так как $|\overline{x}| = \sqrt{\lambda^2 + \lambda^2 + 4\lambda^2} = \sqrt{6}|\lambda| = \sqrt{6}$, то $\lambda = \pm 1$. Вектор $\overline{x}$ образует тупой угол с осью OX, поэтому его проекция (координата) на эту ось должна быть отрицательной, отсюда $\lambda = -1$ и $\overline{x} = -\overline{c} = \{-1, -1, 2\}$.

Ответ: $\overline{x} = \{-1, -1, 2\}$.

Задача 4. Определить, лежат ли точки A(1, 2, 3); B(0, 5, 5); C(3, -1, -1) и D(-2, 14, 9) в одной плоскости.

Решение. Рассмотрим три вектора $\overline{AB} = \{-1, 3, 2\}$, $\overline{AC} = \{2, -3, -4\}$ и $\overline{AD} = \{-3, 12, 6\}$. Если точки *A, B, C, D* лежат в одной плоскости, то векторы $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ компланарны. Для проверки компланарности вычислим смешанное произведение этих векторов:

$$\left(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}\right) = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -3 & 12 & 6 \end{vmatrix} = 18 + 36 + 43 - 18 - 36 - 48 = 0.$$

Оно равно нулю, следовательно, векторы $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ компланарны и точки *A, B, C, D* лежат в одной плоскости.

Ответ: точки *A, B, C, D* лежат в одной плоскости.

Задача 5. Найти длину высоты пирамиды ABCD, опущенную из вершины D, если D(1, 6, 3), A(4, 5, 2), B(-1, 11, 6) и C(2, -1, 3).

Решение. Длина высоты равна расстоянию от вершины D до плоскости ABC. Составим уравнение этой плоскости, воспользовавшись уравнением плоскости, проходящей через три точки:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x - 4 & y - 5 & z - 2 \\ -1 - 4 & 11 - 5 & -6 - 2 \\ 2 - 4 & -1 - 5 & 3 - 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x - 4 & y - 5 & z - 2 \\ -5 & 6 & -8 \\ -2 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x - 4) \cdot \begin{vmatrix} 6 & -8 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} - (y - 5) \cdot \begin{vmatrix} -5 & -8 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + (z - 2) \cdot \begin{vmatrix} -5 & 6 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-42(x - 4) + 21(y - 5) + 42(z - 2) = 0 \Rightarrow 2x - y - 2z + 1 = 0.$$

Находим теперь расстояние от *D* до плоскости *ABC*:

$$h = \frac{|2 \cdot 1 - 1 \cdot 6 - 2 \cdot 3 + 1|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{9}{3} = 3.$$

Ответ: *h* = 3.

Задача 17. Провести полное исследование функции $y = \frac{x^2-x-6}{x-2}$ и построить её график.

Решение.

1. Функция определена всюду, кроме точки $x = 2$, так как знаменатель дроби не должен обращаться в нуль. Следовательно, область определения функции $D(y) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

2. Функция общего вида (не является ни чётной, ни нечётной, не является периодической, не является ограниченной).

3. Находим асимптоты графика функции.

3а). Исследуем на наличие вертикальной асимптоты функцию в точке $x = 2$. Вычислим односторонние пределы:

$$\lim_{x\to 2+0} \frac{x^2-x-6}{x-2} = \left\{\frac{2^2-2-6}{2+0-2} = \frac{-4}{+0}\right\} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 2-0} \frac{x^2-x-6}{x-2} = \left\{\frac{2^2-2-6}{2-0-2} = \frac{-4}{-0}\right\} = +\infty.$$

Эти пределы бесконечны, следовательно, в точке $x = 2$ функция имеет разрыв второго рода и прямая $x = 2$ является для графика этой функции вертикальной асимптотой.

3б). Наклонная асимптота имеет уравнение $y = kx + b$, коэффициенты которого определяются по формулам:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-x-6}{x(x-2)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}{1-\frac{2}{x}} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2-x-6}{x-2} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-6}{x-2} = 1.$$

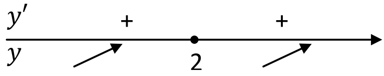
График имеет наклонную асимптоту $y = x + 1$.

4. Найдем производную функции:

$$y' = \frac{(2x-1)(x-2)-(x^2-x-6)}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x+8}{(x-2)^2}.$$

Найдем критические точки. Производная не существует при $x = 2$. Выясним, при каких значениях x производная равна нулю. Решим уравнение $x^2 - 4x + 8 = 0$. Вычисляя дискриминант, получаем $D = 16 - 32 = -16 < 0$, поэтому у этого уравнения нет корней.

Отметим критические точки на числовой оси OX и определим знак производной в каждом их полученных интервалов:

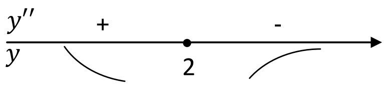


Производная всюду положительна, экстремумов у графика функции нет, функция возрастает на интервалах $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

5. Найдем вторую производную функции:

$$y'' = \frac{(2x-4)(x-2)^2 - 2(x-2)\left(x^2-4x+8\right)}{(x-2)^4} = \frac{-8}{(x-2)^3}$$

Вторая производная нигде не обращается в нуль, поэтому функция не имеет точек перегиба.



При $x \in (-\infty; 2)$ выполнено неравенство $y'' > 0$, поэтому на интервале $(-\infty; 2)$ график функции является вогнутым. При $x \in (2; +\infty)$ выполняется неравенство $y'' < 0$, поэтому на интервале $(2; +\infty)$ график функции является выпуклым.

6. Найдем точки пересечения графика функции с осями координат. Имеем $y(0) = \frac{0^2-0-6}{0-2} = 3$, поэтому с осью y функция пересекается в точке $(0; 3)$.

Далее, $y = 0 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0,\quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2},\quad x_1 = -2,\ x_2 = 3$, следовательно, с осью $0x$ функция пересекается в точках $(-2; 0)$ и $(3; 0)$.

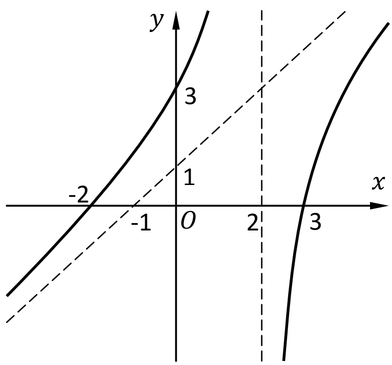


Рис. 1. График функции $y = \frac{x^2-x-6}{x-2}$

ВТОРОЙ СЕМЕСТР

Во втором семестре студент должен выполнить КДЗ №2 по темам «Неопределённый и определённый интегралы», «Дифференциальные уравнения», «Комплексные числа», «Операционное исчисление».

КОНТРОЛЬНОЕ ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ №2

Задачи 1 – 5 . Найти неопределённые интегралы.

Задачи 6, 7. Вычислить определённые интегралы.

Задачи 8, 9. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

Задача 10. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной данными линиями.

Задачи 11, 13, 14, 16. Найти общее решение или общий интеграл дифференциального уравнения.

Задачи 12, 15. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

Задача 17. Представить комплексное число z в тригонометрической и показательной формах, вычислить z^6.

Задача 18. По данному оригиналу $f(t)$ найти изображение $F(p)$.

Задача 19. По данному изображению $F(p)$ найти оригинал $f(t)$.

Вариант 1

1) $\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}\,dx$; 2) $\int \left(2\sin 6x + \cos\frac{x}{4}\right)dx$; 3) $\int \frac{dx}{\sqrt{9x+5}}$;

4) $\int \frac{e^{\arcsin x} + x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; 5) $\int (4-3x)\,e^{-3x}\,dx$; 6) $\int_4^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}\,dx$;

7) $\int_0^{\pi/4} x\sin 2x\,dx$; 8) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^3}$; 9) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{4+x^2}$; 10) $y=(x-2)^2,\ y=x$;

11) $(x^2\cdot y+9y)\cdot dy+\sqrt{2+y^2}\cdot dx=0$; 12) $x\cdot y' + y = x^5,\ y(1)=0$;

13) $y'' = 24\sin 2x + 3x^2 + 1$; 14) $y'' + 25y = 50\cdot e^{5x}$;

15) $y'' + y = -\sin 2x,\ y(\pi)=1,\ y'(\pi)=1$; 16) $y''' + 36y' = 0$;

17) $z=-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$; 18) $f(t)=4t\cdot\sin t - e^{2t}\cdot\cos 4t$; 19) $F(p)=\dfrac{3p^2-p+2}{(p-1)(p^2-4p+5)}$.

Вариант 2

1) $\int\left(\frac{x^2}{3}-\frac{3}{x\sqrt{x}}\right)dx$; 2) $\int(6e^{-3x}+3\cos 2x)\,dx$; 3) $\int\frac{dx}{(1+2x)^3}$;

4) $\int\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}dx$; 5) $\int(4x-1)\,e^{4x}\,dx$; 6) $\int\limits_0^2\frac{x\,dx}{16+x^4}$; 7) $\int\limits_0^{\pi/2}x\cdot\cos 4x\cdot dx$;

8) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)^2}$; 9) $\int\limits_1^2\frac{dx}{x\cdot\ln x}$; 10) $y=4-x^2$, $y=x^2-2x$;

11) $\sqrt{3+y^2}+\sqrt{1-x^2}\cdot y\cdot y'=0$; 12) $y'-\frac{y}{x}=\ln x$, $y(1)=0$;

13) $y''=6e^{2x}-x^2+7$; 14) $y''+y'=4x-1$;

15) $y''-2y'=e^x(3x-1)$, $y(0)=2$, $y'(0)=0$; 16) $y'''-3y''+2y'=0$;

17) $z=4i+4$; 18) $f(t)=3t^2-e^{-2t}\cos 5t-7$; 19) $F(p)=\frac{4p+5}{(p-2)(p^2+4p+15)}$.

Вариант 3

1) $\int\left(\frac{4}{5x}-\frac{2}{x^3}+4\sqrt[3]{x}\right)dx$; 2) $\int\left(6e^{2x}+\sin\frac{x}{2}\right)dx$; 3) $\int 2^{2x+1}\,dx$;

4) $\int\frac{\cos x}{3+\sin^2 x}dx$; 5) $\int(2+3x)e^{2x}dx$; 6) $\int\limits_0^{\pi/2}\cos^5 x\cdot\sin 2x\cdot dx$; 7) $\int\limits_0^{16}\frac{dx}{\sqrt{x+9}+\sqrt{x}}$;

8) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{4+x^2}$; 9) $\int\limits_0^1\frac{x\cdot dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 10) $y=0$, $y=x\cdot\sqrt{9-x^2}$ $(0\le x\le 3)$;

11) $y\cdot(1+\ln y)+x\cdot y'=0$; 12) $y'-y\cdot\cos x=\cos^2 x\cdot e^{\sin x}$, $y(0)=0$;

13) $y''=2x^{-3}+8e^{4x}+5$; 14) $y''-6y'+9y=4x\cdot e^x$;

15) $y''+4y=e^{-2x}$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$; 16) $y''''-9y''=0$;

17) $z=-6\sqrt{3}i-6$; 18) $f(t)=3e^{2t}\sin t-2e^{-t}\cos 5t$; 19) $F(p)=\frac{p+3}{p^3+2p^2+3p}$.

Вариант 4

1) $\int\left(3\sqrt{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{3x}\right)dx$; 2) $\int(12\cos 4x+e^{-x})\,dx$; 3) $\int\frac{dx}{(3+4x)^2}$;

4) $\int \frac{3^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$;   5) $\int (4x-2)\cos 2x\,dx$;   6) $\int\limits_0^1 \frac{x+4}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$;   7) $\int\limits_0^{\pi/2} x\cdot\sin 4x\cdot dx$;

8) $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x\cdot\ln^3 x}$;   9) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^4}$;   10) $y=e^x,\ y=e^{-x},\ x=1$;

11) $\sqrt{1-x^2}\cdot y' + xy^2 + x = 0$;   12) $y' - \frac{y}{x} = \frac{-2}{x^2},\ \ y(1)=1$;

13) $y'' = \sqrt{x} - 15 - 3\sin 4x$;   14) $y'' + y = x^2 + 6$;

15) $y'' - 5y' - 6y = e^x\cdot(-10x-3),\ \ y(0)=0,\ \ y'(0)=8$;

16) $y''' + 5y'' - 14y' = 0$;   17) $z = 6 + 2\sqrt{3}i$;

18) $f(t) = (3t^2-8t)e^{-t} - 4e^{15t}\cos 8t$;   19) $F(p) = \frac{p}{(p+1)(p^2+4p+5)}$.

Вариант 5

1) $\int \left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + x\sqrt{x}\right)dx$;   2) $\int \left(2\sin 6x + 4e^{\frac{x}{2}}\right)dx$;   3) $\int 2^{1-5x}\,dx$;

4) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{16-e^{2x}}}$;   5) $\int (4-16x)\sin 4x\,dx$;   6) $\int\limits_0^3 \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx$;   7) $\int\limits_0^{\pi/3} \cos^3 x\cdot dx$;

8) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{x^2}$;   9) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$;   10) $y = \sin x\cdot\cos^2 x,\ y=0\ \left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$;

11) $y\cdot\ln y + x\cdot y' = 0$;   12) $y' - 3x^2\cdot y = x^2\cdot e^{x^3},\ \ y(0)=0$;

13) $y'' = 3\cos 6x - \frac{5}{\cos^2 x} + 1$;   14) $y'' - 2y' + y = (2x+5)\cdot e^{2x}$;

15) $y'' - 4y' + 13y = 26x + 5,\ y(0)=1,\ y'(0)=1$;

16) $y''' - 3y'' - 4y' = 0$;   17) $z = 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i$;

18) $f(t) = 2e^{-3t}\sin 4t - (4t^2+2t)e^{-t}$;   19) $F(p) = \frac{3p-2}{(p-1)(p^2-6p+10)}$.

Вариант 6

1) $\int 2^x\cdot\left(5 - \frac{2^{-x}}{\sqrt{x}}\right)dx$;   2) $\int (2\cos 3x + e^{-5x})\,dx$;   3) $\int \sin(4x-1)\,dx$;

4) $\int x\cdot e^{-5x^2}\,dx$; 5) $\int (5x-2)\cdot\cos 10x\,dx$; 6) $\int\limits_0^{\ln 5}\frac{e^x}{e^x+3}dx$; 7) $\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$;

8) $\int\limits_1^2\frac{dx}{(x-1)^2}$; 9) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x+1}$; 10) $y=\sqrt{x+4},\ x=0,\ y=0$;

11) $\sqrt{5+y^2}+y'\cdot y\cdot\sqrt{1-x^2}=0$; 12) $y'-4xy=4x^3\cdot e^{2x^2},\ \ y(0)=0$;

13) $y''=6x^5-\frac{3}{e^{2x}}+\sin 7x$; 14) $y''+2y'+5y=17\sin 2x$;

15) $y''-6y'+9y=x^2-x+3,\ \ y(0)=\frac{4}{3},\ \ y'(0)=\frac{1}{27}$;

16) $y'''-3y''-4y'=0$; 17) $z=2\sqrt{3}i-6$;

18) $f(t)=3t^2+t-2+3e^{-7t}\cos 2t$; 19) $F(p)=\frac{1}{p^5+p^3}$.

Вариант 7

1) $\int\left(4\sqrt{x}-\frac{5}{2\sqrt{x}}+1\right)dx$; 2) $\int\left(4\sin 4x-3e^{\frac{x}{3}}\right)dx$; 3) $\int 5^{4-3x}\,dx$;

4) $\int\frac{\arcsin^5 x+x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; 5) $\int(1-6x)\,e^{2x}\,dx$; 6) $\int\limits_0^{\pi/2}\cos x\cdot\sin^3 x\cdot dx$; 7) $\int\limits_1^e\ln x\cdot dx$;

8) $\int\limits_1^3\frac{dx}{(x-3)^3}$; 9) $\int\limits_0^{+\infty}e^{-3x}\cdot dx$; 10) $y=\sqrt{4-x^2},\ y=0\ \ (0\le x\le 2)$;

11) $\sqrt{4-x^2}\cdot y'+x\cdot(y^2+1)=0$; 12) $y'-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^3,\ \ y(0)=\frac{1}{2}$;

13) $y''=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{2}{\sin^2 x}+4$; 14) $y''-4y'+3y=-4x\cdot e^x$;

15) $y''+6y'+9y=25\cdot e^{2x},\ y(0)=3,\ \ y'(0)=2$;

16) $y''''-81y=0$; 17) $z=2\sqrt{3}i-6$;

18) $f(t)=(t^2+2)e^{2t}-e^{-3t}\cos 2t$; 19) $F(p)=\frac{p}{(p-1)(p^2-4p+4)}$.

Вариант 8

1) $\int \frac{(\sqrt{x}-2)^2}{x}dx$; 2) $\int \left(5e^{-2x}+\cos\frac{x}{2}\right)dx$; 3) $\int \sin(8x+3)\,dx$;

4) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{2+\cos x}}dx$; 5) $\int (3x+2)\cos 3x\,dx$; 6) $\int_1^e \frac{dx}{x\cdot\sqrt{1+\ln x}}$; 7) $\int_0^{\pi} x\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot dx$;

8) $\int_0^3 \frac{dx}{(x-2)^2}$; 9) $\int_{-\infty}^1 \frac{1}{x^2+3}dx$; 10) $y=x^2-4x,\ \ y=x$;

11) $y'\cdot y\cdot\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}}+1=0$; 12) $y'+\frac{y}{2x}=x$, $y(1)=0$;

13) $y''=15e^{3-2x}-\frac{1}{x^2}+8x$; 14) $y''-y'-2y=(1-2x)\cdot e^x$;

15) $y''-2y'+y=16\cdot e^x,\ y(0)=1,\ y'(0)=2$; 16) $y'''-9y''+8y'=0$;

17) $z=-3+3i$; 18) $f(t)=8e^{-2t}\sin 3t+2e^{2t}\cos 8t$; 19) $F(p)=\frac{1}{p^3+p^2+2p+2}$.

Вариант 9

1) $\int \frac{7x+x^2-\sqrt{x}}{x^2}dx$; 2) $\int \left(4\cos 6x-2e^{\frac{x}{4}}\right)dx$; 3) $\int (4+5x)^9\,dx$;

4) $\int \frac{x+\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2}dx$; 5) $\int (x-5)\cdot\sin 5x\cdot dx$; 6) $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}+1}dx$; 7) $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx$;

8) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}$; 9) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}$; 10) $y=\frac{1}{4}x^2,\ \ y=5-x^2$;

11) $\sqrt{4+x^2}\cdot dx-4y\cdot dy=x^2\cdot y\cdot dy$; 12) $y'-\frac{y}{x}=x^2$, $y(1)=0$;

13) $y''=14\cos 7x-\sqrt[5]{x+4}+6$; 14) $y''+6y'+13y=75\cos 2x$;

15) $y''+y=4\cdot e^x,\ y(0)=4,\ y'(0)=-3$; 16) $y'''-6y''+9y'=0$;

17) $z=-2i+2\sqrt{3}$; 18) $f(t)=e^{-4t}\sin 3t\cos 2t+t^2\sin t$; 19) $F(p)=\frac{p}{p^4-1}$.

Вариант 10

1) $\int e^{x}\cdot\left(\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x^3}}-8\right)dx$; 2) $\int\left(10\sin\dfrac{x}{2}+3e^{-3x}\right)dx$; 3) $\int\dfrac{3\,dx}{\sqrt{5-3x}}$; 4) $\int\dfrac{3^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$;

5) $\int(2-4x)\cdot\sin 2x\,dx$; 6) $\int\limits_{1}^{e}\dfrac{dx}{x\,(1+\ln x)^2}$; 7) $\int\limits_{0}^{\pi}x\cdot\cos\dfrac{x}{4}\cdot dx$;

8) $\int\limits_{0}^{1}\dfrac{dx}{x^2-2x}$; 9) $\int\limits_{-\infty}^{0}\dfrac{dx}{4x^2+1}$; 10) $y=-x^2+1,\quad y=x-1$;

11) $x\cdot\sqrt{1+y^2}+y\cdot y'\cdot\sqrt{1+x^2}=0$; 12) $y'-\dfrac{y}{x}=x\sin x,\quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}$;

13) $y''=6\cdot\sin 3x+\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{5}{\sin^2 x}$; 14) $y''+2y'+y=2-3x^2$;

15) $y''+81y=162\cdot e^{9x},\ y(0)=0,\ y'(0)=9$; 16) $y'''-2y''-8y'=0$;

17) $z=3-3\sqrt{3}i$; 18) $f(t)=5e^{3t}\cos 3t\cos 4t+1+t^2e^{3t}$; 19) $F(p)=\dfrac{p+3}{p^3+p^2-2p}$.

Вариант 11

1) $\int\left(\sqrt{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^2dx$; 2) $\int\left(\dfrac{1}{5\sin^2 5x}+2e^{-8x}\right)dx$; 3) $\int 4^{3x-1}\cdot dx$; 4) $\int\dfrac{x^2}{\sqrt{2-x}}\,dx$;

5) $\int(3-2x)\cos\dfrac{x}{2}\,dx$; 6) $\int\limits_{0}^{\pi/6}\cos 2x\cdot\sin 4x\cdot dx$; 7) $\int\limits_{0}^{1}x\cdot e^{-2x}\cdot dx$; 8) $\int\limits_{0}^{2}\dfrac{dx}{(x-1)^4}$;

9) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2+2x+5}$; 10) $y=(x+1)^2,\quad x=0,\quad y=0$;

11) $y\cdot(1+\ln y)+x\cdot y'=0$; 12) $xy'+y=\ln x,\ y(1)=1$;

13) $y''=2\sin 4x+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{5}{\cos^2 x}$; 14) $y''+y'-6y=10e^{2x}$;

15) $y''+y=1,\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0,\ y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$; 16) $y'''-6y''+12y'-8y=0$;

17) $z=i-\sqrt{3}$; 18) $f(t)=t(e^{t}+\operatorname{sh}t)-2\sin^2 2t$; 19) $F(p)=\dfrac{4p^2+16p-8}{p^3-4p}$.

Вариант 12

1) $\int \frac{(2-x)^2}{x^3}dx$; 2) $\int\left(\frac{1}{2\sin^2 2x}-4e^{\frac{x}{4}}\right)dx$; 3) $\int \frac{4\,dx}{(2x-5)^5}$; 4) $\int \frac{(5+3\ln x)^4}{x}dx$;

5) $\int (4x-3)\cdot\cos 4x\cdot dx$; 6) $\int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$; 7) $\int\limits_0^{\pi/6} \sin 2x\cdot\sin 4x\cdot dx$; 8) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2}$;

9) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2-2x+5}$; 10) $y=x^2-4x+3,\ \ y=3-x$;

11) $2x+2xy^2+\sqrt{2-x^2}\cdot y'=0$; 12) $y'+\frac{y}{x}=3x,\ \ y(1)=1$;

13) $y''=10e^{1-5x}+(x+3)^5-2$; 14) $y''+3y'+2y=(6x-1)\cdot e^x$;

15) $y''+9y=18x+9,\ y(0)=0,\ \ y'(0)=5$; 16) $y'''+2y''-24y'=0$;

17) $z=-6i+2\sqrt{3}$; 18) $f(t)=\operatorname{sh}t\cdot\cos 2t+t^3e^{-3t}$; 19) $F(p)=\frac{1}{p^3+8}$.

Вариант 13

1) $\int\left(\frac{x^4}{2}-\frac{4}{\sqrt{x}}+1\right)dx$; 2) $\int\left(2\sin 3x\cos 3x+e^{\frac{x}{10}}\right)dx$; 3) $\int (4x+1)^3\,dx$;

4) $\int x^2\cdot\sqrt{x^3+5}\cdot dx$; 5) $\int e^{-3x}(2-9x)\,dx$; 6) $\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{\sin x}\cdot\cos x\cdot dx$; 7) $\int\limits_1^e x\cdot\ln x\ dx$;

8) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{9x^2+4}$; 9) $\int\limits_1^e \frac{1}{x\cdot\ln x}dx$; 10) $y=\frac{6}{x},\quad y=7-x$;

11) $2x\cdot dx-y\cdot dy=yx^2\cdot dy-xy^2\cdot dx$; 12) $y'+\frac{3y}{x}=\frac{2}{x^3},\ y(1)=1$;

13) $y''=3\sqrt{x-8}-4\cos 5x+\frac{2}{x^4}$; 14) $y''+2y'-3y=30\cdot\cos 3x$;

15) $y''-2y'=2e^x,\ \ y(0)=0,\ \ y'(0)=0$; 16) $y'''+4y''+4y'=0$;

17) $z=6i-6\sqrt{3}$; 18) $f(t)=-\frac{t}{2}\sin 2t-e^{-3t}\cos t$; 19) $F(p)=\frac{2p^2-3p+1}{p^3+1}$.

Вариант 14

1) $\int \frac{x^3 \cdot \cos x - 2x^2 + 7x}{x^3} dx$; 2) $\int \left(4\cos\frac{x}{3} - \frac{2}{e^x}\right) dx$; 3) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{4x+3}}$;

4) $\int \frac{1}{\cos^2 x \cdot \sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 3}} dx$; 5) $\int \frac{x \cdot \sin x}{\cos^3 x} dx$; 6) $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\cdot\sqrt{x}}$; 7) $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cdot dx$;

8) $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{x^4}$; 9) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 8x + 17}$; 10) $y = x^2, \quad y = 2 - x^2$;

11) $(1 + e^x) \cdot y \cdot y' = e^x$; 12) $y' + \frac{y}{x} = e^x, \ y(1) = 0$;

13) $y'' = (2x+5)^6 - e^{-x} + 4$; 14) $y'' - 3y' + 2y = -5e^x$;

15) $y'' - y = 2x + 1, \ y(0) = 0, \ y'(0) = 0$; 16) $y''' + 3y'' - 4y' = 0$;

17) $z = 5\sqrt{2}i - 5\sqrt{2}$; 18) $f(t) = 3t^4 e^{2t} + e^{-t}\sin 8t$; 19) $F(p) = \frac{p^2 - 3}{p^4 + 5p^2 + 6}$.

Вариант 15

1) $\int \frac{2x^3 - 4x^2 \sin x + 7}{x^2} dx$; 2) $\int \left(5\sin\frac{2x}{5} + e^{-2x}\right) dx$; 3) $\int 2^{3-4x} dx$; 4) $\int \frac{x^3 dx}{4 + x^8}$;

5) $\int (4x+5) e^{\frac{x}{2}} dx$; 6) $\int_0^1 \frac{x\,dx}{2x^2 + 1}$; 7) $\int_0^{\pi/8} x \cdot \cos 4x \cdot dx$; 8) $\int_{-3}^{3} \frac{dx}{x^2}$;

9) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 6x + 10}$; 10) $y = \ln x, \quad x = e, \quad y = 0$;

11) $\sqrt{5 + y^2} \cdot dx + 4(x^2 \cdot y + y) \cdot dy = 0$; 12) $y' + \frac{2xy}{1+x^2} = \frac{3x^2}{1+x^2}, \ y(0) = 0$;

13) $y'' = \frac{5}{x^2} - 2\sqrt{x+4} - 7$; 14) $y'' + y' - 2y = 9e^x$;

15) $y'' + y = 48\cos 5x + 72\sin 5x, \ y(0) = 0, \ y'(0) = 0$;

16) $y''' - 9y'' + 8y' = 0$; 17) $z = -4\sqrt{3}i - 12$;

18) $f(t) = 2t\cos 3t - t^3 e^{4t} + 1 - t^2$; 19) $F(p) = \frac{2p+3}{p^3 + 4p^2 + 5p}$.

Вариант 16

1) $\int\left(3x^5+\frac{5}{\sqrt{x}}-\frac{1}{2x}\right)dx$; 2) $\int\left(\frac{1}{e^{2x}}+2\cos\frac{2x}{3}\right)dx$; 3) $\int\frac{dx}{8x+6}$; 4) $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^4}}$;

5) $\int(2-x)e^{-x}\,dx$; 6) $\int\limits_1^e\frac{dx}{x\cdot(1+\ln x)^2}$; 7) $\int\limits_0^{\pi/4}\mathrm{tg}^2\,x\cdot dx$; 8) $\int\limits_0^2\frac{dx}{1-x}$;

9) $\int\limits_{-\infty}^0\frac{dx}{3x^2+4}$; 10) $y=\sin x,\quad y=x^2-\pi x$;

11) $(e^{2x}+2)dy+y\cdot e^{2x}\cdot dx=0$; 12) $y'+\frac{y}{x}=\sin x,\ y(\pi)=1$;

13) $y''=\sqrt[3]{x-5}-\frac{11}{\cos^2 x}+3$; 14) $y''+y'=x$;

15) $y''-3y'+2y=24\cdot e^{-2x},\ \ y(0)=-1,\ \ y'(0)=4$;

16) $y'''+4y''-5y'=0$; 17) $z=5i+5\sqrt{3}$;

18) $f(t)=\mathrm{ch}3t\cdot\sin^2 t-t^{10}e^t$; 19) $F(p)=\frac{3p+2}{(p+1)(p^2+4p+5)}$.

Вариант 17

1) $\int\left(6x^5-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)dx$; 2) $\int\left(e^{10x}-\frac{10}{\sin^2 10x}\right)dx$; 3) $\int\frac{dx}{(5x+1)^6}$;

4) $\int\frac{1-2\sin x}{\cos^2 x}dx$; 5) $\int(5x+6)\cdot\cos 2x\cdot dx$; 6) $\int\limits_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx$; 7) $\int\limits_0^{\pi/2}\sin x\cdot\cos^2 x\cdot dx$.

8) $\int\limits_2^3\frac{dx}{\sqrt{x-2}}$; 9) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{9x^2+1}$; 10) $y=x^2-3x,\quad y=x$;

11) $xdx-ydy=yx^2dy-xy^2dx$; 12) $y'-\frac{y}{x+1}=e^x\cdot(x+1),\quad y(0)=1$;

13) $y''=\frac{1}{(2x-5)^2}+9e^{3x-1}$; 14) $y''+3y'+2y=12x^2+8x$;

15) $y''-5y'+4y=3\cdot e^{4x},\ \ y(0)=0,\ \ y'(0)=4$;

16) $y'''+3y''+3y'+y=0$; 17) $z=4+4\sqrt{3}i$;

18) $f(t)=2-3t^2+t\cos 5t+e^{-t}\sin 3t$; 19) $F(p)=\frac{p^2-p+1}{p^4+2p^2-3}$.

Вариант 18

1) $\int \frac{x-2x^2\cos x+1}{x^2}dx$; 2) $\int\left(\cos\frac{x}{3}+\frac{2}{\cos^2 3x}\right)dx$; 3) $\int \frac{dx}{(2x-7)^3}$;

4) $\int \frac{dx}{x\sqrt{3-\ln^2 x}}$; 5) $\int (3x-2)\sin 6x\cdot dx$; 6) $\int_0^4 \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+9}}$; 7) $\int_0^{\pi/4}\cos x\cdot\cos 3x\cdot dx$;

8) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$; 9) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2-4x+13}$; 10) $y=\frac{4}{x}$, $y=5-x$;

11) $y' = (2y+1)\operatorname{ctg} x$; 12) $y' + y\cdot tgx = \cos^2 x$, $y(\pi)=0$;

13) $y'' = 2\sin(5x-3)-4x^3+13$; 14) $y''-2y'+y=9e^{-2x}$;

15) $y''+y'=16x+10$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$; 16) $y'''+8y''+15y'=0$;

17) $z=-3\sqrt{2}+3\sqrt{2}i$; 18) $f(t)=\operatorname{sh}4t\cdot\cos^2 3t-t\cdot\cos 5t$; 19) $F(p)=\frac{p^3-6}{p^4+6p^2+8}$.

Вариант 19

1) $\int\left(5x^4-\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{3}{x^2}\right)dx$; 2) $\int(2\sin 4x\cos 4x+6e^{5x})\,dx$; 3) $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{4+x}}$;

4) $\int\frac{\sin x}{2+\cos^2 x}dx$; 5) $\int(2x-3)\cos 4x\cdot dx$; 6) $\int_1^2\left(x^2+\frac{1}{x^4}\right)dx$; 7) $\int_0^1 x\cdot e^{-x}\cdot dx$;

8) $\int_4^5\frac{dx}{\sqrt[3]{x-4}}$; 9) $\int_{-\infty}^0\frac{dx}{16x^2+9}$; 10) $y=\frac{1}{x}$, $y=x$, $x=2$;

11) $x\sqrt{5+y^2}dx+y\sqrt{4+x^2}dy=0$; 12) $y'-y\operatorname{ctg} x=2x\sin x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{4}$;

13) $y''=3\cos(7x-2)-5e^{2x-7}+\sqrt{x}$; 14) $y''-3y'+2y=-5\cdot e^x$;

15) $y''-64y=128\cdot\cos 8x$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$; 16) $y'''+y''-2y'=0$;

17) $z=-5+5\sqrt{3}i$; 18) $f(t)=t^2e^t+4e^{2t}\cos 5t$; 19) $F(p)=\frac{p+5}{(p-1)(p^2-2p+5)}$.

Вариант 20

1) $\int\frac{7x^2+5x\cdot 3^x-3}{x}dx$; 2) $\int(2\sin^2 3x+4e^{-4x})\,dx$; 3) $\int\sqrt[3]{1+5x}\,dx$;

4) $\int \frac{x^3+x}{\sqrt{x^4-9}}dx$; 5) $\int (4x+7)\sin\frac{x}{3}dx$; 6) $\int\limits_0^{\pi/2}\cos x\cdot\sin^2 x\cdot dx$; 7) $\int\limits_1^e \ln x\cdot dx$;

8) $\int\limits_0^1 \frac{x\cdot dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 9) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+10}$; 10) $y^2=2x,\quad x=8$;

11) $6x\cdot dx - y\cdot dy = y\cdot x^2\cdot dy - 3x\cdot y^2\cdot dx$; 12) $y' - \frac{y}{x} = x^2,\ y(1)=0$;

13) $y'' = (2x-1)^9 - \frac{1}{e^{3x}} + 11$; 14) $y'' + y = 2\cos 7x - 3\sin 7x$;

15) $y'' + 3y' + 2y = 1 - 2x^2,\ y(0)=0,\ y'(0)=0$; 16) $y''' + 6y'' + 5y' = 0$;

17) $z=-2\sqrt{3}-6i$; 18) $f(t)=t^2\cos t-\frac{1}{2}t^4e^{-2t}+e^t\sin 3t$; 19) $F(p)=\frac{p^2}{p^4-81}$.

Вариант 21

1) $\int\frac{3x^3+\sqrt{x}-2}{x}dx$; 2) $\int(2\cos^2 5x-e^{8x})\,dx$; 3) $\int\sqrt{5x-4}\,dx$; 4) $\int\frac{1-e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$;

5) $\int(2x-5)\cos\frac{x}{4}dx$; 6) $\int\limits_0^1\frac{x^3}{x^4+1}dx$; 7) $\int\limits_0^3\frac{dx}{\sqrt{25-3x}}$; 8) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9}$;

9) $\int\limits_0^{1/2}\frac{dx}{x\cdot\ln x}$; 10) $y=\ln x,\quad y=0,\quad x=e$;

11) $(2-e^x)\cdot dy + 3e^x\cdot \mathrm{tg}\, y\cdot dx = 0$; 12) $y' - \mathrm{tg}\, x\cdot y = \frac{1}{\cos x},\ y(0)=0$;

13) $y'' = 3\sqrt{x-8}+\frac{7}{x^2}-5\sin(2x-3)$; 14) $y''+y=16\cos 3x-24\sin 3x$;

15) $y''-y'=2x,\ y(0)=1,\ y'(0)=0$; 16) $y'''+10y''+16y'=0$;

17) $z=-3\sqrt{3}+3i$; 18) $f(t)=\mathrm{sh}\,2t\cdot\sin^2 3t-3+t\cdot\sin t$; 19) $F(p)=\frac{2p^2-4p+8}{(p-2)^2(p^2+4)}$.

Вариант 22

1) $\int\left(7x^6-\frac{3}{x^3}+\frac{2}{3x}\right)dx$; 2) $\int\left(\frac{14}{\cos^2 7x}-e^{\frac{x}{4}}\right)dx$; 3) $\int(1-8x)^8\,dx$;

4) $\int\frac{x^2+3x}{x^2-1}dx$; 5) $\int(8-3x)\cdot\sin 3x\cdot dx$; 6) $\int\limits_0^1\frac{x^2\cdot dx}{\sqrt{4-x^6}}$; 7) $\int\limits_0^{\pi}x\cdot\cos^2 x\cdot dx$;

8) $\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{x \cdot \ln^2 x}$; 9) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$; 10) $y = 3 - 2x, \quad y = x^2$;

11) $6x \cdot dx - 2y \cdot dy = 2yx^2 \cdot dy - 3xy^2 \cdot dx$; 12) $y' - \frac{3y}{x} = x, \ y(1) = 6$;

13) $y'' = 5e^{-5x} - \frac{1}{x}$; 14) $y'' + 4y' + 4y = 8x^2 + 6$;

15) $y'' + 6y' + 5y = 84\, e^{2x}, \ y(0) = -1, \ y'(0) = 1$; 16) $y''' + y' = 0$;

17) $z = -2i - 2$; 18) $f(t) = 1 + 2t^5 - \operatorname{sh} t \cdot \cos 4t$; 19) $F(p) = \frac{1}{p(p^3+1)}$.

Вариант 23

1) $\int \frac{3x + 2x^2 \cdot \sin x - 7}{x^2}\,dx$; 2) $\int \left(\frac{5}{\sin^2 10x} + 8e^{-\frac{x}{4}} \right) dx$; 3) $\int \frac{dx}{5 - 3x}$;

4) $\int \frac{\sin x + \cos^2 x}{\cos^4 x}\,dx$; 5) $\int (x+5) \cdot \sin \frac{x}{2}\,dx$; 6) $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$; 7) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1 + \operatorname{ctg} x}{\sin^2 x}\,dx$;

8) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-2x} \cdot dx$; 9) $\int\limits_0^{3} \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}$; 10) $y = x^2, \quad y = \frac{x^2}{2}, \quad x = 3$;

11) $y' \sin x = y \ln y$; 12) $y' - \frac{3y}{x} = x, \ y(1) = 6$;

13) $y'' = 6x + 5e^{2-x} + \sqrt[3]{3x}$; 14) $y'' - 4y' + 4y = 8x^2$;

15) $y'' - 3y' + 2y = 10 \sin x, \ y(0) = 1, \ y'(0) = 0$; 16) $y''' + 25y' = 0$;

17) $z = 6 - 2\sqrt{3}i$; 18) $f(t) = 2e^{-2t} \sin 5t - t + t^3 e^t$; 19) $F(p) = \frac{1}{(p-2)(p^2+2p+3)}$.

Вариант 24

1) $\int \frac{x^6 + 3x^3 \cdot 5^x - 5}{x^3}\,dx$; 2) $\int \left(\sin \frac{x}{5} + 9e^{3x} \right) dx$; 3) $\int \frac{5\,dx}{\sqrt{1 - 5x}}$; 4) $\int \frac{2 + \operatorname{tg}^5 x}{\cos^2 x}\,dx$;

5) $\int (x - 10) \sin 7x\,dx$; 6) $\int\limits_0^{1} \frac{e^x}{1 + e^{2x}}\,dx$; 7) $\int\limits_{-3}^{-1} \frac{x - 1}{x^2 + 6x + 13}\,dx$; 8) $\int\limits_0^{1} \ln x \cdot dx$;

9) $\int\limits_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{(x+2)^3}$; 10) $y = \frac{x^2}{3}, \quad y = 4 - \frac{2}{3}x^2$;

11) $x\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$; 12) $y' - y\cos x = \sin x \cdot e^{\sin x}$, $y(0) = 0$;

13) $y'' = 20\sin 2x + 3x^2 + 6$; 14) $xy'' + y' = 3x + 2$;

15) $y'' - 4y' + 3y = 10\cos x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$; 16) $y'''' - 16y = 0$;

17) $z = 5 - 5i$; 18) $f(t) = e^{3t} \cdot \cos t \cdot \cos 3t + \frac{t}{2} + te^t$; 19) $F(p) = \frac{5}{(p-1)(p^2+4p+5)}$.

Вариант 25

1) $\int \frac{(\sqrt{x}+2)^2}{x^2}dx$; 2) $\int\left(\cos\frac{x}{6} - 12e^{-3x}\right)dx$; 3) $\int (4x+2)^5\, dx$; 4) $\int \frac{x^2 - 4\ln^3 x}{x}dx$;

5) $\int \frac{x}{\sin^2 x}dx$; 6) $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$; 7) $\int_0^{\pi/2} x \cdot \sin x \cdot \cos x \cdot dx$; 8) $\int_0^{\pi/2} \operatorname{ctg} x \cdot dx$;

9) $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln^2 x}$; 10) $y = x \cdot \sqrt{4 - x^2}$, $y = 0$ $(0 \le x \le 2)$;

11) $y' \sin x - y\cos x = 0$; 12) $y' - 4xy = 2x \cdot e^{x^2}$; $y(0) = 1$;

13) $y'' = 12e^{6x-5} + \sqrt{x} + 7$; 14) $y'' - 9y = 5x\mathrm{e}^{2x}$;

15) $y'' + 4y' + 5y = 25x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$; 16) $y'''' - 7y'' = 0$;

17) $z = 9i + 3\sqrt{3}$; 18) $f(t) = 5t\cos 2t - e^{2t}t^3 + e^t \sin t$; 19) $F(p) = \frac{2p+1}{(p+1)(p^2+2p+3)}$.

Вариант 26

1 $\int\left(\frac{1}{5\sin^2 5x} + 2e^{-8x}\right)dx$; 2) $\int\left(\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$; 3) $\int 4^{3x-1} \cdot dx$; 4) $\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}dx$;

5) $\int (3-2x)\cos\frac{x}{2}\, dx$; 6) $\int_0^{\pi/6} \cos 2x \cdot \sin 4x \cdot dx$; 7) $\int_0^1 x \cdot e^{-2x} \cdot dx$; 8) $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^4}$;

9) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$; 10) $y = (x+1)^2$, $x = 0$, $y = 0$;

11) $y(1 + \ln^2 y) + x \cdot y' = 0$; 12) $xy' + y = \ln x$, $y(1) = 1$;

13) $y'' = 2\sin 4x + \frac{2}{x^2} + \frac{5}{\sin^2 x}$; 14) $y'' + y' - 6y = 10e^{2x}$;

15) $y'' + y = 1,\ \ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0;$ 16) $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0;$

17) $z = -2 - 2i$; 18) $f(t) = e^{-7t}\sin 6t - (3t^2 + 2t)e^{-t}$; 19) $F(p) = \dfrac{3p-2}{(p-1)(p^2-6p+10)}$.

Вариант 27

1) $\int \dfrac{(2-x)^2}{x^3}dx$; 2) $\int\left(\dfrac{1}{2\sin^2 2x} - 4e^{\frac{x}{4}}\right)dx$; 3) $\int \dfrac{4\,dx}{(2x-5)^5}$; 4) $\int \dfrac{(5+3\ln x)^4}{x}dx$;

5) $\int (4x-3)\cdot\cos 4x\cdot dx$; 6) $\int\limits_0^4 \dfrac{dx}{\sqrt{x}+1}$; 7) $\int\limits_0^{\pi/6} \sin 2x\cdot\sin 4x\cdot dx$; 8) $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{(x-1)^2}$;

9) $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2-2x+5}$; 10) $y = x^2 - 4x + 3,\ \ y = 3 - x$;

11) $2x + 2xy^2 + \sqrt{2-x^2}\cdot y' = 0;$ 12) $y' + \dfrac{y}{x} = 3x,\ \ y(1) = 1;$

13) $y'' = 10e^{1-5x} + (x+3)^5 - 2;$ 14) $y'' + 3y' + 2y = (6x-1)\cdot e^x;$

15) $y'' + 9y = 18x + 9,\ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 5;$ 16) $y''' + 2y'' - 24y' = 0;$

17) $z = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$; 18) $f(t) = 7e^{-3t}\sin 2t + 2e^{2t}\cos 5t$; 19) $F(p) = \dfrac{1}{p^3 + p^2 + 4p + 4}$.

Вариант 28

1) $\int\left(\dfrac{x^4}{2} - \dfrac{4}{\sqrt{x}} + 1\right)dx$; 2) $\int\left(2\sin 3x\cos 3x + e^{\frac{x}{10}}\right)dx$; 3) $\int (4x+1)^3\,dx$;

4) $\int x^2\cdot\sqrt{x^3+5}\cdot dx$; 5) $\int e^{-3x}(2-9x)\,dx$; 6) $\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{\sin x}\cdot\cos x\cdot dx$; 7) $\int\limits_1^e x\cdot\ln x\ dx$;

8) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx}{9x^2+4}$; 9) $\int\limits_1^e \dfrac{1}{x\cdot\ln x}dx$; 10) $y = \dfrac{6}{x},\ \ \ y = 7 - x$;

11) $2xdx - ydy = yx^2dy - xy^2dx;$ 12) $y' + \dfrac{3y}{x} = \dfrac{2}{x^3},\ y(1) = 1;$

13) $y'' = 3\sqrt{x-8} - 4\cos 5x + \dfrac{2}{x^4};$ 14) $y'' + 2y' - 3y = 30\cdot\cos 3x$;

15) $y'' - 2y' = 2e^x,\ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 0;$ 16) $y''' + 4y'' + 4y' = 0;$

17) $z=-6i+6\sqrt{3}$; 18) $f(t)=3t(e^t+\operatorname{sh}t)-\sin^2 5t$; 19) $F(p)=\dfrac{p+7}{p^3-p^2-2p}$.

Вариант 29

1) $\displaystyle\int \frac{x^3\cdot\cos x-2x^2+7x}{x^3}dx$; 2) $\displaystyle\int\left(4\cos\frac{x}{3}-\frac{2}{e^x}\right)dx$; 3) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt[3]{4x+3}}$;

4) $\displaystyle\int\frac{1}{\cos^2 x\cdot\sqrt{\operatorname{tg}^2 x+3}}dx$; 5) $\displaystyle\int\frac{x\cdot\sin x}{\cos^3 x}dx$; 6) $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{(x+1)\cdot\sqrt{x}}$; 7) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^3 x\cdot dx$;

8) $\displaystyle\int_{-2}^{2}\frac{dx}{x^4}$; 9) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+8x+17}$; 10) $y=x^2,\ \ y=2-x^2$;

11) $(1+e^x)\cdot y\cdot y'=e^x$; 12) $y'+\dfrac{y}{x}=e^x,\ y(1)=0$;

13) $y''=(2x+5)^6-e^{-x}+4$; 14) $y''-3y'+2y=-5e^x$;

15) $y''-y=4x,\ y(0)=0,\ \ y'(0)=0$; 16) $y'''+3y''-4y'=0$;

17) $z=5\sqrt{3}+5i$; 18) $f(t)=-\dfrac{t}{4}\sin 2t-e^{-7t}\cos t$; 19) $F(p)=\dfrac{4p+5}{(p-2)(p^2+6p+10)}$.

Вариант 30

1) $\displaystyle\int\frac{x^2-4x^3\cos x+1}{x^3}dx$; 2) $\displaystyle\int\left(2\sin 5x\cdot\cos 5x+\frac{1}{e^{5x}}\right)dx$; 3) $\displaystyle\int 2^{3-4x}\,dx$;

4) $\displaystyle\int\frac{x^3dx}{4+x^8}$; 5) $\displaystyle\int(4x+5)\,e^{-\frac{x}{2}}\,dx$; 6) $\displaystyle\int_0^1\frac{x\,dx}{2x^2+1}$; 7) $\displaystyle\int_0^{\pi/8}x\cdot\cos 4x\cdot dx$;

8) $\displaystyle\int_{-3}^{3}\frac{dx}{x^2}$; 9) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+6x+10}$; 10) $y=\ln x,\ \ x=e,\ \ y=0$;

11) $\sqrt{5+y^2}\cdot dx+4(x^2\cdot y+y)\cdot dy=0$; 12) $y'+\dfrac{2xy}{1+x^2}=\dfrac{3x^2}{1+x^2},\ y(0)=0$;

13) $y''=\dfrac{5}{x^2}-2\sqrt{x+4}-7$; 14) $y''+y'-2y=9e^x$;

15) $y''+y=48\cos 5x+72\sin 5x,\ y(0)=0,\ y'(0)=0$; 16) $y'''-5y''=0$;

17) $z=2\sqrt{3}i-6$; 18) $f(t)=\operatorname{ch}5t\cdot\sin^2 t-t^6e^t$; 19) $F(p)=\dfrac{2p^2+5}{p^4+5p^2+6}$.

ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ № 11, 15, 17 КОНТРОЛЬНОГО ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ №2

Задача 11. Найти общее решение или общий интеграл уравнения

$$y'\cos 2x = 4y\ln y.$$

Решение. Это уравнение является уравнением первого порядка с разделяющимися переменными. Разделив обе части уравнения на $\cos 2x\cdot 4y\cdot\ln y \neq 0$ и умножив на dx, получаем уравнение $\dfrac{dy}{y\ln y}=\dfrac{4dx}{\cos 2x}$.

Интегрируем обе части уравнения: $\displaystyle\int\frac{d\ln y}{\ln y}=4\int\frac{dx}{\cos 2x}$;

$$\ln|\ln y| = 4\int\frac{\cos 2x dx}{\cos^2 2x}=2\int\frac{d\sin 2x}{1-\sin^2 2x}=-2\int\frac{d\sin 2x}{\sin^2 2x-1}=-\ln\left|\frac{\sin 2x-1}{\sin 2x+1}\right|+\ln C.$$

По свойствам логарифмов находим: $\ln y=\pm C\dfrac{\sin 2x+1}{\sin 2x-1}$; $\ln y=C_1\dfrac{\sin 2x+1}{\sin 2x-1}$.

Таким образом, $y=e^{C_1\frac{\sin 2x+1}{\sin 2x-1}}$ – общее решение, где произвольная постоянная $C_1\neq 0$.

Отдельно рассмотрим случай $\cos 2x\cdot 4y\cdot\ln y=0$. Непосредственной подстановкой в исходное уравнение получаем, что $x=\dfrac{\pi n}{2}$, где n – натуральное число, и $y=0$ не являются решениями, а $y=1$– решение, которое входит в общее решение при $C_1=0$. Окончательно получаем

Ответ: $y=e^{C_1\frac{\sin 2x+1}{\sin 2x-1}}$, где C_1 - произвольная постоянная.

Задача 15. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$y''-10y'+21=50\sin x,\ y(0)=2,\ \ y'(0)=13.$$

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^2-10\lambda+21=0$ имеет корни $\lambda_1=3$ и $\lambda_2=7$. Значит, общее решение однородного уравнения $y''-10y'+21y=0$ записывается в виде $Y=C_1e^{3x}+C_2e^{7x}$. Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $\varphi(x)=A\cos x+B\sin x$, где A и B – неопределенные коэффициенты. Для их определения вычислим производные $\varphi'(x)=-A\sin x+B\cos x$, $\varphi''(x)=-A\cos x-B\sin x$ и подставим их в исходное уравнение. Тогда получим

$$-A\cos x-B\sin x-10(-A\sin x+B\cos x)+21(A\cos x+B\sin x)=50\sin x$$

или

$$(20A-10B)\cos x+(20B+10A)\sin x=0\cdot\cos x+50\cdot\sin x.$$

Это равенство должно выполняться для всех x, что возможно лишь при выполнении условий:

$\begin{cases}20A-10B=0\\20B+10A=50\end{cases}$. Значит, $A=1, B=2$. Таким образом, общее решение исходного уравнения имеет вид: $y=C_1e^{3x}+C_2e^{7x}+\cos x+2\sin x$.

Для решения задачи Коши найдем производную $y'=3C_1e^{3x}+7C_2e^{7x}-\sin x+2\cos x$. Подставив в начальные условия для y и y', получим систему $\begin{cases}2=C_1+C_2+1\\13=3C_1+7C_2+2\end{cases}$, откуда $C_1=-1, C_2=2$.

Ответ: $y=-e^{3x}+2e^{7x}+\cos x+2\sin x$.

Задача 17. Представить число $z=-8-i\,8\sqrt{3}$ в тригонометрической и показательных формах.

Решение. Вычисляем модуль и аргумент числа z.

$|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-8)^2+(-8\sqrt{3})^2}=16.$

Так как $x=-8<0,\ y=-8\sqrt{3}<0,$ то угол $\varphi=arctg\dfrac{y}{x}-\pi=arctg\sqrt{3}-\pi=-\dfrac{2}{3}\pi.$

Следовательно, в тригонометрической форме

$z=|z|\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)=16(\cos(-\dfrac{2}{3}\pi)+i\sin(-\dfrac{2}{3}\pi)),$

в показательной форме $z=16\cdot e^{-\frac{2\pi}{3}i}$.

Для возведения комплексного числа в степень n воспользуемся формулой

$$z^n=|z|^n\cdot(\cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi)).$$

Получаем

$z^6=16^6(\cos((-\dfrac{2}{3}\pi)\cdot 6)+i\sin((-\dfrac{2}{3}\pi)\cdot 6)))=16^6(\cos(-4\pi)+i\sin(-4\pi))=16^6.$

Ответ: $z=16(\cos(-\dfrac{2}{3}\pi)+i\sin(-\dfrac{2}{3}\pi))$; $z=16\cdot e^{-\frac{2\pi}{3}i}$; $z^6=16^6$.

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Замечательные пределы и эквивалентности

$$\lim_{\substack{x\to a\\ \varphi(x)\to 0}} \frac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)} = 1, \qquad \lim_{\substack{x\to a\\ \varphi(x)\to 0}} \left(1+\varphi(x)\right)^{\frac{1}{\varphi(x)}} = e$$

Если при $x \to a$ $\varphi(x) \to 0$, то

$\sin\varphi(x) \sim \varphi(x)$, $\quad e^{\varphi(x)} - 1 \sim \varphi(x)$,

$\operatorname{tg}\varphi(x) \sim \varphi(x)$, $\quad a^{\varphi(x)} - 1 \sim \varphi(x)\cdot\ln a$,

$1-\cos\varphi(x) \sim \frac{1}{2}\varphi(x)^2$, $\quad \ln(1+\varphi(x)) \sim \varphi(x)$,

$\arcsin\varphi(x) \sim \varphi(x)$, $\quad \log_a\left(1+\varphi(x)\right) \sim \frac{1}{\ln a}\varphi(x)$,

$\operatorname{arctg}\varphi(x) \sim \varphi(x)$, $\quad \left(1+\varphi(x)\right)^m - 1 \sim m\,\varphi(x)$.

Таблица производных

1. $(C)' = 0$
2. $(u^n)' = n\cdot u^{n-1}\cdot u'$;
3. $(a^u)' = a^u\cdot\ln a\cdot u'$;
4. $(e^u)' = e^u\cdot u'$;
5. $(\log_a u)' = \frac{1}{u\cdot\ln a}\cdot u'$;
6. $(\ln u)' = \frac{1}{u}\cdot u'$;
7. $(\sin u)' = \cos u\cdot u'$;
8. $(\cos u)' = -\sin u\cdot u'$;
9. $(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$;
10. $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$;
11. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$;
12. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$;
13. $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2}\cdot u'$;
14. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$;
15. $(\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u\cdot u'$;
16. $(\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u\cdot u'$;
17. $(\operatorname{th} u)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u}\cdot u'$;
18. $(\operatorname{cth} u)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 u}\cdot u'$;

Правила дифференцирования

$$(u \pm v)' = u' \pm v'; \quad (u \cdot v)' = u'v + uv'; \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}; \quad (cu)' = cu' \ (c - \text{число}).$$

Таблица основных интегралов

1) $\int dx = \int 1 \cdot dx = x + C$;

2) $\int x^n \cdot dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \ (n \neq -1)$;

3) $\int \dfrac{1}{x} \cdot dx = \ln|x| + C$;

4) $\int e^x \cdot dx = e^x + C$;

5) $\int a^x \cdot dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$;

6) $\int \cos x \cdot dx = \sin x + C$;

7) $\int \sin x \cdot dx = -\cos x + C$;

8) $\int \dfrac{1}{\cos^2 x} \cdot dx = \operatorname{tg} x + C$;

9) $\int \dfrac{1}{\sin^2 x} \cdot dx = -\operatorname{ctg} x + C$;

10) $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = \arcsin x + C$;

11) $\int \dfrac{1}{1+x^2} \cdot dx = \operatorname{arctg} x + C$;

12) $\int \dfrac{1}{x^2+a^2} \cdot dx = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + C$;

13) $\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \cdot dx = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$;

14) $\int \dfrac{1}{x^2-a^2} \cdot dx = \dfrac{1}{2a} \ln \left| \dfrac{x-a}{x+a} \right| + C$;

15) $\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2+k}} \cdot dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2+k} \right| + C$;

16) $\int \sqrt{a^2-x^2} \cdot dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \dfrac{a^2}{2} \arcsin \dfrac{x}{a} + C$;

17) $\int \sqrt{x^2+A} \cdot dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2+A} + \dfrac{A}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2+A} \right| + C$;

18) $\int \operatorname{sh} x \cdot dx = \operatorname{ch} x + C$;

19) $\int \operatorname{ch} x \cdot dx = \operatorname{sh} x + C$;

20) $\int \dfrac{1}{\sin x} dx = \ln \left| \operatorname{tg} \dfrac{x}{2} \right| + C$;

21) $\int \dfrac{1}{\cos x} dx = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4} \right) \right| + C$.

Правила интегрирования

$\int A\cdot f(x)\cdot dx = A\cdot\int f(x)\,dx$;

$\int \big(f(x)\pm g(x)\big)dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$.

Подведение функции под знак дифференциала (a, c – постоянные)

При вычислении используем формулу: $d\,(f(x)) = f'(x)\cdot dx$.

1) $a\cdot dx = d(ax)$;

2) $dx = d(x+c)$;

3) $dx = \frac{1}{a}d(ax+c)$;

4) $x\cdot dx = \frac{1}{2}d(x^2)$;

5) $\frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\cdot d(\sqrt{x})$;

6) $\frac{1}{x^2}dx = -d\left(\frac{1}{x}\right)$;

7) $x^n\cdot dx = \frac{1}{n+1}d(x^{n+1})$;

8) $\frac{1}{x}\cdot dx = d(\ln x)$;

9) $e^x\cdot dx = d(e^x)$;

10) $\cos x\cdot dx = d(\sin x)$;

11) $\sin x\cdot dx = -d(\cos x)$;

12) $\frac{1}{\cos^2 x}dx = d(\mathrm{tg}\, x)$;

13) $\frac{1}{\sin^2 x}dx = -d(\mathrm{ctg}\, x)$;

14) $\frac{1}{x^2+1}dx = d(\mathrm{arctg}\, x) = -d(\mathrm{arcctg}\, x)$;

15) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = d(\arcsin x) = -d(\arccos x)$.

Основные методы интегрирования

1) Метод подстановки (или замены переменной)

Для нахождения интеграла $\int f(x)\cdot dx$ делаем замену $x=\varphi(t)$. Если существует обратная функция $t=g(x)$, то $dx=\varphi'(t)\,dt$ и

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\cdot dt = F(t)+C = F(g(x))+C.$$

2) Формула интегрирования по частям

$$\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du; \qquad \int_a^b u\,dv = u\cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

Две полезные формулы

1) $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|\,f(x)|+C$; 2) $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = 2\sqrt{f(x)}+C$.

Некоторые формулы для тригонометрических функций

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$; $1+\mathrm{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; $1+\mathrm{ctg}^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$;

$\mathrm{tg}\, x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$; $\mathrm{ctg}\, x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$;

$\sin 2x = 2\sin x\cdot\cos x$; $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$; $\mathrm{tg}\, 2x = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\, x}{1-\mathrm{tg}^2 x}$;

$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$; $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$;

$\sin x\cdot \sin y = \dfrac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y))$;

$\cos x\cdot \cos y = \dfrac{1}{2}(\cos(x-y)+\cos(x+y))$;

$\sin x\cdot \cos y = \dfrac{1}{2}(\sin(x-y)+\sin(x+y))$.

Некоторые формулы для гиперболических функций

$\mathrm{sh}\, x = \dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$; $\mathrm{ch}\, x = \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$; $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$;

$\mathrm{th}\, x = \dfrac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x} = \dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$; $\mathrm{cth}\, x = \dfrac{\mathrm{ch}\, x}{\mathrm{sh}\, x} = \dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$;

$\mathrm{sh}\, 2x = 2\,\mathrm{sh}x\cdot\mathrm{ch}x$; $\mathrm{ch}\, 2x = \mathrm{sh}^2 x + \mathrm{ch}^2 x$;

$\mathrm{sh}^2 x = \dfrac{-1+\mathrm{ch}\, 2x}{2}$; $\mathrm{ch}^2 x = \dfrac{1+\mathrm{ch}\, 2x}{2}$.

Таблица оригиналов и изображений

№ п/п	Оригиналы f(t)	Изображения F(p)
1	1	$\frac{1}{p}$
2	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
3	t	$\frac{1}{p^2}$
4	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
5	$sh(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
6	$ch(\omega t)$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
7	$sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
8	$cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
9	$e^{at}\cdot sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$
10	$e^{at}\cdot cos(\omega t)$	$\frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$
11	$t^n\cdot e^{at}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
12	$t\cdot sin(\omega t)$	$\frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$
13	$t\cdot cos(\omega t)$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
14	$\frac{\frac{1}{\omega}\cdot sin(\omega t)-t\cdot cos(\omega t)}{2\omega^2}$	$\frac{1}{(p^2+\omega^2)^2}$

Рекомендуемая литература

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. – М.: Айрис-пресс, 2014.
2. Шипачёв В.С. Высшая математика. – М.: Высшая школа, 2012.
3. Шипачёв В.С. Задачи по высшей математике. – М.: Высшая школа, 2011.
4. Данко П.Е., Кожевникова Т.Я., Попов А.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах, ч. I, II – М.: Айрис-пресс, 2006 .
5. Самохин А.В., Жулёва Л.Д и др. Сборник задач по высшей математике, ч. II. Пределы, производные и графики функций. – М.: РИО МГТУ ГА, 2003, №536.
6. Жулёва Л.Д., Самохин А.В. и др. Сборник задач по высшей математике, ч. IV. Интегралы. Дифференциальные уравнения. – М.: РИО МГТУГА, 2005, №1448.

Содержание

Первый семестр

Контрольное домашнее задание №1……………………………………………..3

Образцы решения задач №1-6, 17 КДЗ №1……………………………………..20

Второй семестр

Контрольное домашнее задание №2 ……………………………………………26

Образцы решения задач №11, 15, 17 КДЗ №2 …………………………………..41

Справочные материалы …………………………………………………………….. 43

Рекомендуемая литература ………………………………………………… 48