

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение .....	5
Условные обозначения и символы .....	6
1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОСТРОЕНИЯ ЧЕРТЕЖА .....	6
1.1. Метод проекций.....	7
1.2. Основные свойства ортогонального проецирования .....	7
Контрольные вопросы к главе 1 .....	12
2. КОМПЛЕКСНЫЙ ЧЕРТЁЖ.....	12
2.1. Точка .....	12
2.2. Прямая .....	14
2.2.1. Основные положения .....	14
2.2.2. Определение натуральной величины отрезка .....	17
2.2.3. Взаимное расположение двух прямых .....	18
2.3. Плоскость .....	21
2.3.1. Задание плоскости на чертеже .....	21
2.3.2. Прямая в плоскости .....	22
2.3.3. Следы плоскости .....	25
Контрольные вопросы к главе 2 .....	26
3. ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ .....	27
3.1. Пересечение прямой с плоскостью .....	27
3.2. Перпендикулярность прямой и плоскости; двух плоскостей .....	28
3.3. Взаимное пересечение двух плоскостей .....	29
3.4. Параллельность прямой и плоскости; двух плоскостей .....	30
Контрольные вопросы к главе 3 .....	31
4. СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КОМПЛЕКСНОГО ЧЕРТЕЖА .....	32
4.1. Способ замены плоскостей проекций .....	32
4.1.1. Перевод прямой общего положения в положение прямой уровня .....	34
4.1.2. Перевод прямой уровня в проецирующее положение .....	35
4.1.3. Перевод плоскости общего положения в проецирующее положение ...	36
4.1.4. Перевод проецирующей плоскости в положение плоскости уровня ...	36
4.2. Способ плоскопараллельного перемещения .....	38
Контрольные вопросы к главе 4 .....	38
5. МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ .....	39
5.1. Определение расстояний .....	39
5.1.1. Расстояние от точки до прямой .....	39
5.1.2. Расстояние от точки до плоскости .....	40
5.1.3. Расстояние между двумя прямыми .....	41
5.2. Определение углов .....	42
5.2.1. Угол между скрещивающимися прямыми .....	43
5.2.2. Угол между прямой и плоскостью .....	43
5.2.3. Угол между двумя плоскостями .....	44

Контрольные вопросы к главе 5 .....	45
6. КРИВЫЕ ЛИНИИ И ПОВЕРХНОСТИ .....	45
6.1. Комплексный чертёж кривой линии .....	45
6.1.1. Комплексный чертёж окружности .....	47
6.1.2. Комплексный чертёж винтовой линии .....	48
6.2. Комплексный чертёж поверхности .....	49
6.2.1. Линейчатые поверхности .....	50
6.2.2. Поверхности вращения .....	54
Контрольные вопросы к главе 6 .....	57
7. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ПЛОСКОСТЬЮ И ПРЯМОЙ. КАСАТЕЛЬНЫЕ ПЛОСКОСТИ .....	57
7.1. Сечение поверхности плоскостью .....	57
7.2. Пересечение прямой с поверхностью .....	63
7.3. Плоскости, касательные к поверхности .....	66
Контрольные вопросы к главе 7 .....	67
8. ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ .....	68
8.1. Пересечение гранных поверхностей .....	69
8.2. Пересечение гранной и криволинейной поверхностей .....	70
8.3. Пересечение двух криволинейных поверхностей .....	71
8.4. Особые случаи пересечения поверхностей вращения .....	72
8.4.1. Пересечение соосных поверхностей .....	72
8.4.2. Пересечение поверхностей с пересекающимися осями .....	73
8.4.3. Пересечение поверхностей, описанных вокруг общей сферы. Теорема Монжа .....	74
8.5. Пересечение цилиндрических поверхностей разного диаметра .....	75
Контрольные вопросы к главе 8 .....	76
9. РАЗВЁРТЫВАНИЕ КРИВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ .....	77
9.1. Развёртывание пирамидальных и конических поверхностей .....	77
9.2. Развёртывание призматических и цилиндрических поверхностей .....	79
Контрольные вопросы к главе 9 .....	82
ЛИТЕРАТУРА .....	83

## ВВЕДЕНИЕ

Существующие учебники, как правило, содержат подробное изложение курса начертательной геометрии в объёме, существенно превосходящем предусмотренный действующим учебным планом, по которому осуществляется обучение на кафедре начертательной геометрии и графики МГТУ ГА. Кроме того в последние годы в университете осуществлён переход к подготовке бакалавров, в связи с чем потребовалась существенная переработка всего дидактического материала по начертательной геометрии, инженерной и компьютерной графике. В связи с этим кафедра приняла решение подготовить и издать данное учебное пособие, в котором бы сжато был изложен необходимый материал, необходимый для специалистов эксплуатационного направления.

Данное учебное пособие имеет следующую структуру.

В первой главе кратко сформулированы основные свойства ортогонального проецирования, на базе которых строится решение большинства графических задач.

Во второй главе даны понятия о комплексном чертеже точки, прямой и плоскости.

В третьей главе рассматриваются способы решения основных позиционных задач начертательной геометрии.

В четвёртой и пятой главах излагается материал о способах преобразования комплексного чертежа с целью упрощения решения задач, часто встречающихся в чертёжной практике. Рассматриваются решения наиболее распространённых метрических задач.

Шестая глава знакомит студентов с пространственными кривыми и поверхностями.

Седьмая и восьмая главы посвящены практическому использованию полученных знаний для решения задач, связанных с построением разрезов, сечений и линий пересечения пространственных фигур.

В девятой главе даётся понятие о построении развёрток некоторых пространственных поверхностей.

Для закрепления знаний, полученных студентами при изучении теоретической части курса, в учебном пособии в заключение всех глав приведены контрольные вопросы, облегчающие подготовку учащихся к различным формам контроля их знаний и умений по графическим дисциплинам.

## УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И СИМВОЛЫ

### Обозначения

Геометрическая фигура обозначается буквой  $\Phi$ .

Точки обозначаются прописными буквами латинского алфавита ( $A, B, C, \dots$ ) или арабскими цифрами ( $1, 2, 3, \dots$ ).

Линии, произвольно расположенные в пространстве, - строчными буквами латинского алфавита ( $a, b, c, \dots$ ).

Линии уровня:  $h$  - горизонталь,  $f$  - фронталь,  $p$  - профильная прямая.

$(AB)$  - прямая, проходящая через точки  $A, B$ .

$[AB)$  - луч из точки  $A$ .

$[AB]$  - отрезок прямой.

Поверхности – прописными буквами греческого алфавита ( $\Delta, \Gamma, \vartheta, \dots, \Omega$ ).

Углы –  $\angle ABC$  или  $\angle \alpha, \angle \beta, \dots$

$/AB/$  - расстояние между точками  $A$  и  $B$ ;  $/A\Theta/$  - расстояние между точкой  $A$  и поверхностью  $\Theta$  и т.д.

Плоскости проекций – буквами:  $\Pi_1$  – горизонтальная,  $\Pi_2$  – фронтальная,  $\Pi_3$  – профильная.

### Символы

$=$  - равны, результат действия.

$\cong$  - конгруэнтны (совмещаемы),  $\equiv$  - тождественны, совпадают.

$\infty$  - подобны.

$\parallel, \perp, \sphericalangle$  - параллельны, перпендикулярны, скрещиваются.

$\rightarrow$  - параллельное проецирование,  $\setminus$  - отрицание.

$\in$  - принадлежит:  $A \in n$  – точка  $A$  принадлежит линии  $n$ .

$\subset$  - включает (является подмножеством):  $\Gamma \supset a$  - поверхность  $\Gamma$  включает в себя линию  $a$  (или множество точек линии  $a$  является подмножеством точек поверхности  $\Gamma$ ).

$\cup$  - объединение множеств ( $ABC = AB \cup BC$  - ломаная линия  $ABC$  есть объединение отрезков  $AB$  и  $BC$ ).

$\cap$  - пересечение множеств ( $m = \Theta \cap \Sigma$  - линия  $m$  - результат пересечения  $\Theta$  и  $\Sigma$ ).

$\Rightarrow$  - импликация - логическое следствие («если, ... то»).

$\Leftrightarrow$  - эквивалентность.

## 1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОСТРОЕНИЯ ЧЕРТЕЖА

Проекционный чертёж, т.е. чертёж, построенный методом проецирования пространственных объектов на плоскость, является в начертательной геометрии основным средством для изучения свойств пространственных фигур. Изучение вопросов, связанных с методикой построения проекционных чертежей про-

пространственных объектов, является прямой задачей начертательной геометрии. Обратная её задача – изучение методики чтения чертежей или мысленного восстановления пространственных объектов по их чертежам.

### 1.1. Метод проекций

Основным изобразительным способом для геометрических элементов является линия. С помощью линий задают проекции точки, плоскости, любой пространственной фигуры. Аппарат проецирования включает в себя проецирующие лучи, проецируемый объект и плоскость, на которую осуществляется проецирование. Все лучи, проецирующие предмет, исходят из одной точки, называемой центром проекций. Если центр проекций  $S$  находится на определённом расстоянии от плоскости проекций  $\Pi$ , то такое проецирование называется центральным. Если  $S$  стремится в бесконечность, то проецирующие лучи становятся параллельными и такое проецирование называется параллельным.

**Ортогональное (прямоугольное) проецирование** есть частный случай параллельного проецирования, когда все проецирующие лучи перпендикулярны плоскости проекций. В дальнейшем мы будем использовать именно этот способ проецирования.

Пусть имеем некоторую горизонтальную плоскость проекций  $\Pi_1$ . Чтобы получить на этой плоскости проекцию любой точки пространства, например точки  $A$  (рис.1.1), нужно через эту точку провести прямую, перпендикулярную плоскости  $\Pi_1$ , до пересечения с ней в точке  $A_1$ , которая является ортогональной проекцией точки  $A$ .

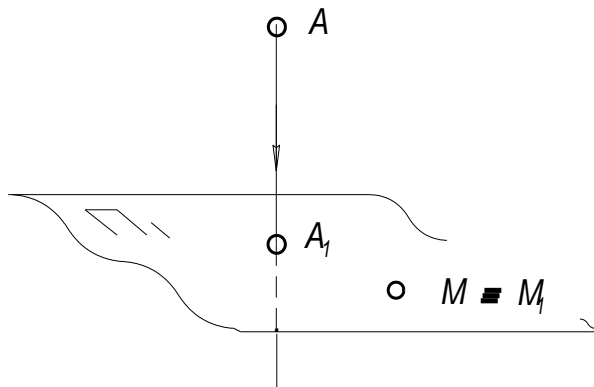


Рис. 1.1

Условно эти действия можно записать так:  $AA_1 \perp \Pi_1$ ;  $A_1 = AA_1 \cap \Pi_1$ . Прямая  $AA_1$  называется **проецирующей прямой**.

### 1.2. Основные свойства ортогонального проецирования

**1.** Проекция любой точки пространства – единственная точка на плоскости проекций.

Справедливость этого утверждения вытекает из самой процедуры проецирования. В частности, любая точка, лежащая в плоскости  $\Pi_1$  (например, точка  $M$  на рис. 1.1), имеет единственную проекцию, совпадающую с этой точкой ( $M \equiv M_1$ ). Необходимо помнить, что обратная формулировка этого свойства неверна. Действительно, любая точка на плоскости  $\Pi_1$  является проекцией не единственной точки пространства, а целого множества точек, принадлежащих этой **проецирующей** прямой. Следовательно, одна единственная проекция точки не определяет эту точку в пространстве. Точки, лежащие на одной и той же проецирующей прямой, называются **конкурирующими**. Проекции конкурирующих точек совпадают. На рис. 1.2 показаны конкурирующие точки  $K$  и  $L$ , и их совпадающие проекции.

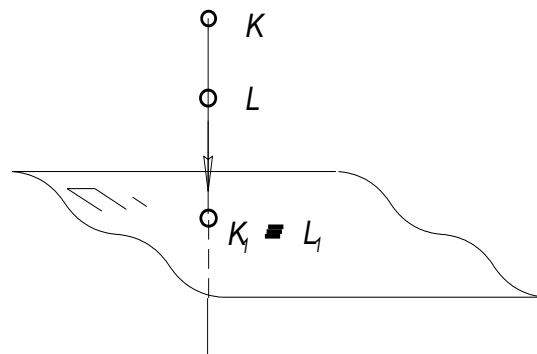


Рис. 1.2

2. Проекция прямой в общем случае единственная прямая на плоскости  $\Pi_1$ .

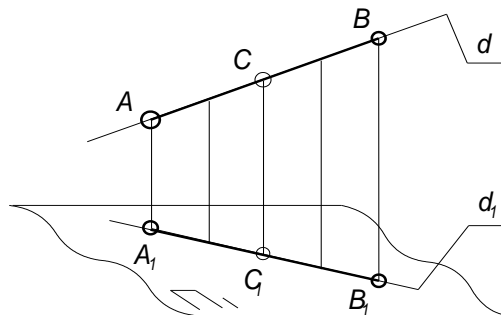


Рис. 1.3

Действительно, пусть точки  $A$  и  $B$  определяют некоторую прямую  $d$  в пространстве (рис. 1.3). Тогда прямые, проецирующие все точки прямой  $d$ , составляют **проецирующую плоскость**  $ABB_1A_1$ , пересекающую плоскость проекций  $\Pi_1$  по прямой  $d_1$ . Прямая  $d_1$  является совокупностью проекций всех точек прямой  $d$ , т.е. проекцией этой прямой. Исключением является любая проецирующая прямая, проекция которой вырождается в точку (например, прямая  $KL$  на рис. 1.2). Утверждение, обратное свойству 2, неверно, так как любая прямая

плоскости  $\Pi_1$  является проекцией множества прямых пространства, лежащих в одной проецирующей плоскости.

3. Если точка принадлежит прямой в пространстве, то проекция этой точки принадлежит проекции прямой, т.е., если  $C \in AB$ , то  $C_1 \in A_1B_1$  (рис. 1.3). Обратное утверждение неверно (рассуждения аналогичны предыдущим).

4. Если отрезок параллелен плоскости проекций, то он проецируется в натуральную величину. Обратное утверждение также верно.

Например (рис. 1.4), если отрезок прямой  $EF \parallel \Pi_1$ , то  $E_1F_1 = EF$  и обратно, если  $E_1F_1 = EF$ , то  $EF \parallel \Pi_1$ .

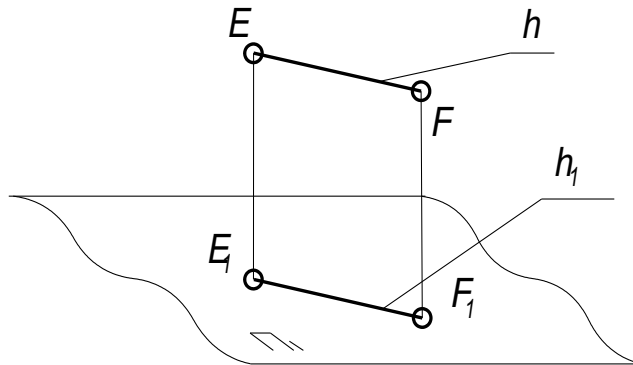


Рис. 1.4

Справедливость этих утверждений вытекает из равенства противоположных сторон прямоугольника  $EFF_1E_1$ . Прямые, параллельные плоскости проекций, называются **линиями уровня** (прямая  $h$  на рис. 1.4).

5. Если прямые в пространстве параллельны друг другу, то их проекции также параллельны между собой. Например (рис. 1.5), если  $a \parallel b$ , то  $a_1 \parallel b_1$ . Действительно, плоскости  $ABB_1A_1$  и  $CDD_1C_1$ , проецирующие прямые  $a$  и  $b$ , параллельны и, следовательно, параллельны прямые  $a_1$  и  $b_1$ , являющиеся линиями пересечения этих плоскостей с плоскостью  $\Pi_1$ .

6. Если отрезки в пространстве параллельны друг другу, то отношение их длин сохраняется при проецировании. Например (рис. 1.5), если  $AB \parallel CD$ , то  $[AB]/[CD] = [A_1B_1]/[C_1D_1]$ . Для доказательства из концов отрезков проведём в проецирующих плоскостях прямые  $AB^* \parallel A_1B_1$  и  $CD^* \parallel C_1D_1$ . Согласно свойству 4  $[AB^*] = [A_1B_1]$  и  $[CD^*] = [C_1D_1]$ . Тогда свойство 6 вытекает из подобия треугольников  $ABB^*$  и  $CDD^*$ . В частности, равные отрезки имеют равные проекции. Свойство 6 относится также к отрезкам, принадлежащим одной и той же прямой. Так, если точка делит пополам отрезок в пространстве, то её проекция делит пополам проекции этого отрезка.

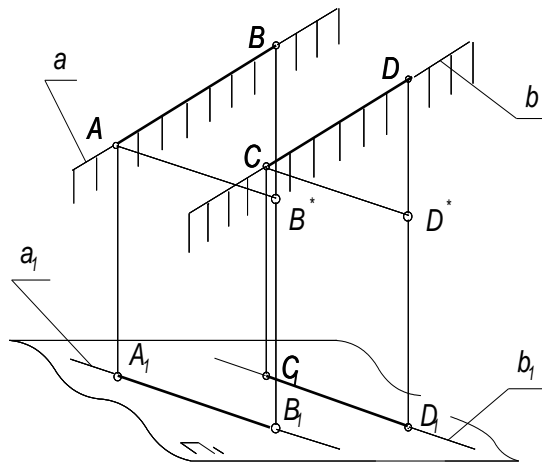


Рис. 1.5

7. Длина отрезка в пространстве равна длине гипотенузы прямоугольного треугольника, у которого один катет равен проекции отрезка, а второй - превышению одного конца отрезка над другим. Действительно, пусть имеем в пространстве отрезок  $AB$  (рис. 1.6).

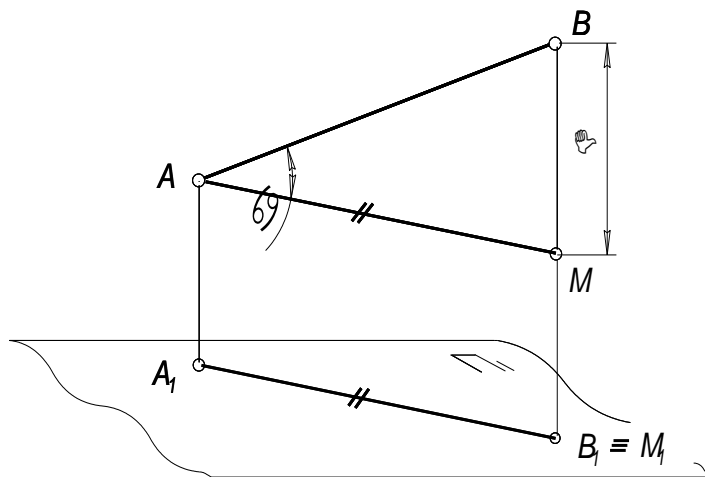


Рис. 1.6

Проведём прямую  $AM \parallel A_1B_1$ . В результате получим прямоугольный треугольник  $ABM$ , у которого  $\Delta$  – превышение одного конца отрезка  $AB$  над другим, а  $\angle \alpha$  – угол наклона этого отрезка к плоскости  $\Pi_1$ . Очевидно, что проекции точек  $B$  и  $M$  совпадают, о чём говорит знак тождества.

8. Если хотя бы одна сторона прямого угла параллельна плоскости проекций, то этот прямой угол проецируется на неё в натуральную величину (рис. 1.7).



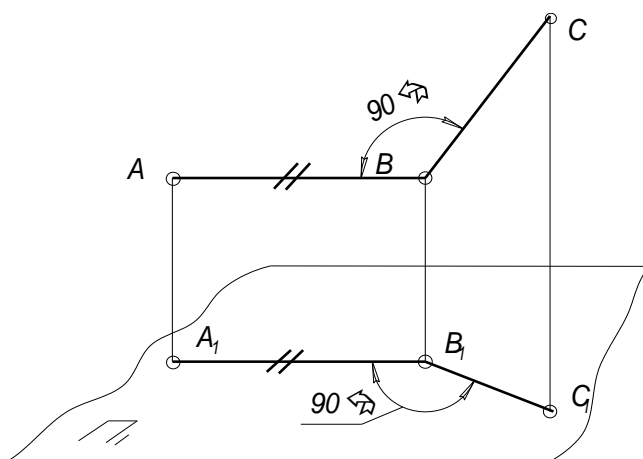


Рис. 1.7

Действительны и два обратных утверждения: а) если  $\angle A_1B_1C_1 = 90^\circ$  и  $AB \parallel \Pi_1$ , то  $\angle ABC = 90^\circ$ ; б) если  $\angle A_1B_1C_1 = 90^\circ$  и  $\angle ABC = 90^\circ$ , то  $AB \parallel \Pi_1$  или  $BC \parallel \Pi_1$  (или вся плоскость  $ABC \parallel \Pi_1$ ). Приведём доказательство теоремы.

Т.к.  $AB \perp BC$  и  $AB \perp BB_1$ , то  $AB \perp \Sigma(BC \cap BB_1)$ , а следовательно,  $AB \perp B_1C_1$ . Но  $AB \parallel A_1B_1$ . Поэтому  $A_1B_1 \perp B_1C_1$ .

**9.** Проекция фигуры не меняется при параллельном переносе плоскости проекций. Пусть проектируемая фигура – треугольник  $ABC$  (рис. 1.8).

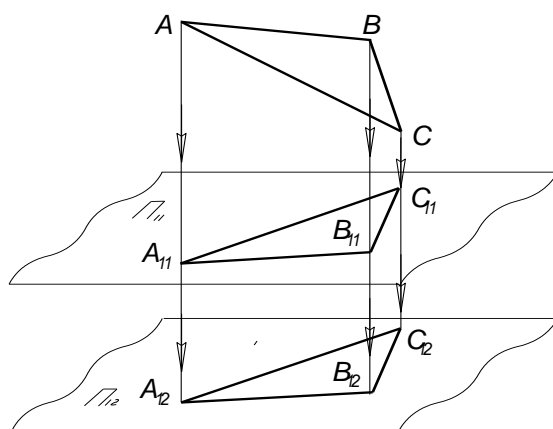


Рис. 1.8

Спроецируем его на плоскости  $\Pi_{11}$  и  $\Pi_{12}$ , параллельные друг другу. Отрезки  $A_{11}A_{12}$ ,  $B_{11}B_{12}$ ,  $C_{11}C_{12}$  параллельны и равны между собой. Они являются рёбрами призмы, у которой основания  $A_{11}B_{11}C_{11}$  и  $A_{12}B_{12}C_{12}$  равны, т.к. лежат в параллельных плоскостях, что и требовалось доказать.

Фигура, поверхность которой нормальна плоскости проекций (например, призма  $ABCC_1B_1A_1$ ), называется проектирующей.

## Контрольные вопросы к главе 1

1. Какие методы проецирования Вы знаете?
2. Сформулируйте основные свойства прямоугольного (ортогонального) проецирования. Приведите примеры.
3. Сформулируйте теорему о проецировании прямого угла.
3. Какие точки называются конкурирующими?
4. Как изменится проекция фигуры при переносе начала координат?

## 2. КОМПЛЕКСНЫЙ ЧЕРТЁЖ

Чертёж, геометрически равноценный изображаемой фигуре, т.е. допускающий возможность воспроизведения (реконструирования) оригинала, называется **обратимым чертежом**. Он позволяет решить обратную задачу начертательной геометрии, т.к. однозначно задаёт фигуру в пространстве. Чертёж, состоящий из одной ортогональной проекции фигуры, не является обратимым. Действительно, при рассмотрении свойств ортогонального проецирования видно, что проекции фигур, заданные на плоскости  $\Pi_1$ , не определяют однозначно свои оригиналы в пространстве (они могут служить проекциями конкурирующих фигур). Для получения обратимого чертежа проекционный чертёж необходимо дополнить. Существуют различные способы таких дополнений. Например, ортогональный чертёж фигуры дополняют числовыми отметками, которые показывают высоту расположения элементов фигуры над плоскостью  $\Pi_1$ . Такие чертежи называются чертежами с числовыми отметками и применяются в топографии и строительстве.

В данном курсе будут рассмотрены два вида обратимых чертежей, применяемых в машиностроении: комплексный и аксонометрический.

**Комплексный чертёж** состоит из двух и более связанных между собой ортогональных проекций предмета. Эти проекции получают на взаимно перпендикулярных плоскостях проекций ( $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  и  $\Pi_3$ ), которые совмещаются с плоскостью чертежа (рис. 2.1 и 2.2). Плоскость  $\Pi_1$  называется горизонтальной,  $\Pi_2$  – фронтальной, а  $\Pi_3$  – профильной плоскостью проекций. Линии пересечения этих плоскостей называются **осями проекций** и обозначаются  $x$ ,  $y$  и  $z$  или в виде дроби  $\Pi_2/\Pi_1$ ,  $\Pi_1/\Pi_3$ ,  $\Pi_2/\Pi_3$ .

### 2.1. Точка

Любая точка пространства (например, точка  $A$  на рис. 2.1) проецируется ортогонально на плоскости  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ , образуя свои горизонтальную  $A_1$  и фронтальную  $A_2$  проекции. Можно строить проекции также на плоскости  $\Pi_3$ , перпендикулярной  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ . Она носит название профильной плоскости проекций. Часто с осями проекций совмещают декартову систему координат.

Важно отметить, что проекции отрезков каждой проецирующей прямой равны между собой.  $AA_1 = A_2A_x = A_3A_y$  (высота точки  $A$ ) – аппликата;

$AA_2 = A_1A_x = A_3A_z$  (глубина точки  $A$ ) – ордината;  $AA_3 = A_1A_y = A_2A_z$  (широта точки  $A$ ) – абсцисса.

Для образования плоского чертежа плоскость проекций  $\Pi_1$  путём вращения вокруг оси  $x$  совмещают с плоскостью  $\Pi_2$ , а плоскость проекций  $\Pi_3$  совмещается с плоскостью  $\Pi_2$  путём вращения вокруг оси  $z$ .

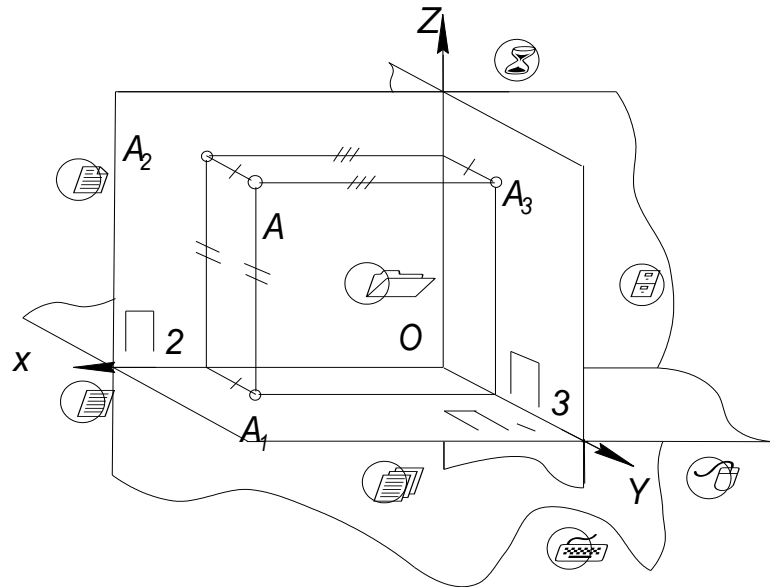


Рис. 2.1

Полученный таким образом плоский комплексный чертёж содержит три проекции точки  $A$ , причём, как видно из рис. 2.2, каждая пара смежных проекций ( $A_1$  и  $A_2$ ;  $A_2$  и  $A_3$ ) лежит на одной прямой, перпендикулярной соответствующей оси. Такая прямая называется **линией связи**. Две связанные между собой ортогональные проекции однозначно определяют положение точки относительно плоскостей проекций. При этом третья проекция не может быть задана произвольно.

Как правило, в инженерной практике нет необходимости задавать положение фигуры относительно какой-либо системы координат. В этих случаях на комплексном чертеже отсутствуют изображения осей координат, а сам чертёж называется **безосным**. В соответствии со свойством 9 ортогонального проецирования, параллельное перемещение плоскостей проекций не влияет на форму изображения на чертеже. На безосном чертеже соответствующие линии связи всех точек пространства остаются параллельными друг другу:  $A_1A_2 // B_1B_2 // \dots$

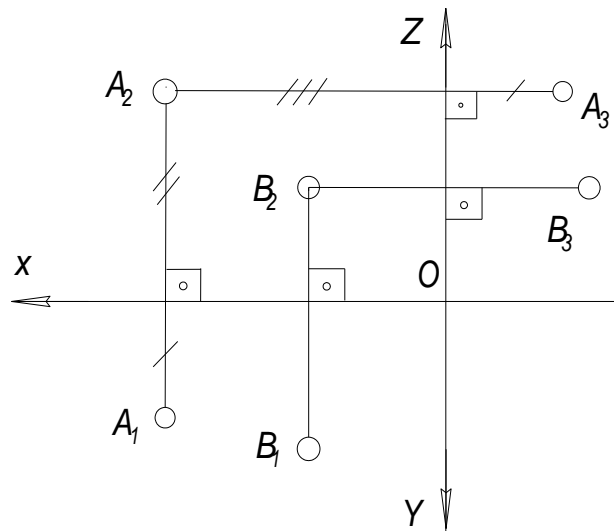


Рис. 2.2

Ось проекций в случае необходимости может быть проведена в любом месте, но обязательно перпендикулярно линиям связи. Три взаимно перпендикулярные плоскости  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$ , и  $\Pi_3$  делят пространство на восемь частей – октантов, принятая нумерация которых дана на рис. 2.1 и обозначена римскими цифрами.

## 2.2. Прямая

### 2.2.1. Основные положения

Прямая на комплексном чертеже может быть задана проекциями пары точек (рис. 2.3) или непосредственно своими двумя проекциями, например  $m_1$  и  $m_2$ .

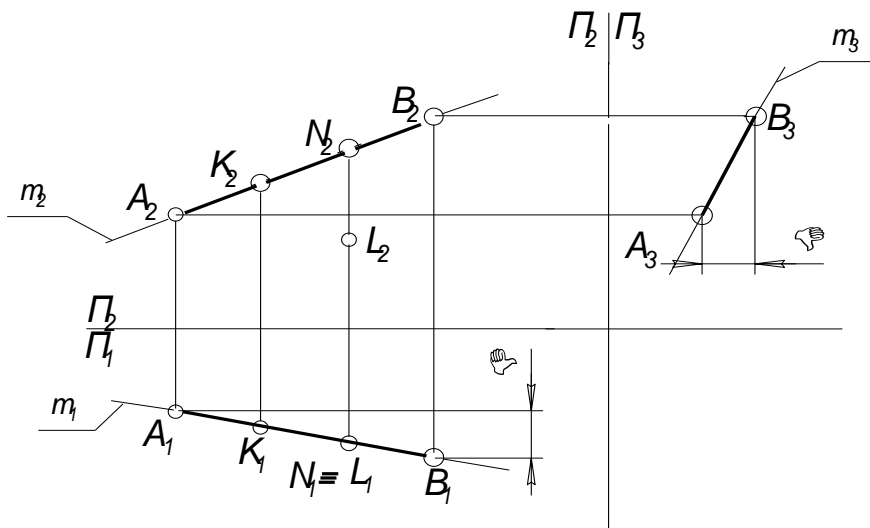


Рис. 2.3

На рис. 2.3 проекции точек  $A$  и  $B$  определяют единственную прямую пространства. Во втором случае прямая в пространстве определяется как линия пересечения двух – фронтально и горизонтально проецирующих плоскостей, расположенных ортогонально соответственно фронтальной и горизонтальной плоскостям проекций и проходящих через данную прямую (см. раздел 2.3).

Для построения профильной проекции можно использовать разность профильных координат точек  $A$  и  $B$  –  $\Delta$ .

Точка принадлежит прямой, если обе её проекции принадлежат соответствующим проекциям этой прямой ( $K \subset m$ ;  $N \subset m$ ;  $L \notin m$ ).

Точки пересечения прямой с плоскостями проекций называются **следами**. На рис. 2.4 показана пространственная модель, а на рис. 2.5 – комплексный чертёж прямой с горизонтальным следом  $C$  и фронтальным следом  $D$ . Очевидно, что горизонтальная проекция  $D_1$  фронтального и фронтальная проекция  $C_2$  горизонтального следов лежат на оси проекций. Поэтому для построения следов прямой на комплексном чертеже достаточно продолжить соответствующие её проекции с одной стороны до пересечения с этой осью, а с другой – до пересечения с линиями связи, проведёнными из полученных на оси  $x$  проекций  $C_2$  и  $D_1$  точек  $C$  и  $D$ .

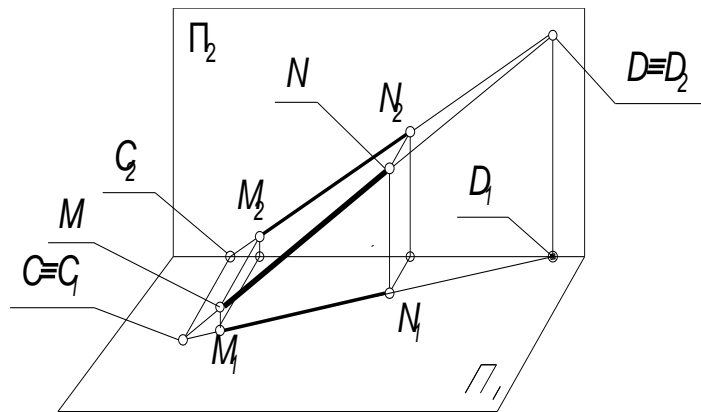


Рис. 2.4

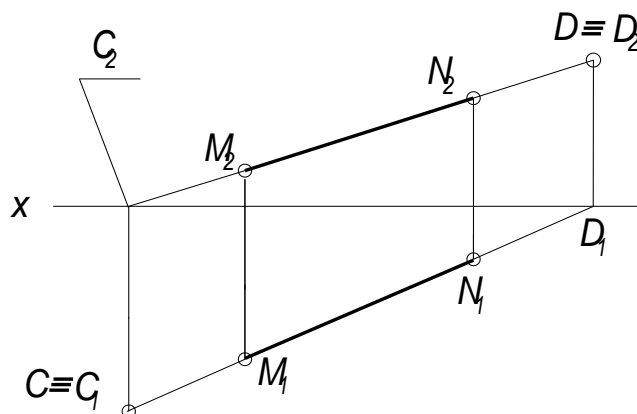


Рис. 2.5

Прямые, не перпендикулярные и не параллельные плоскостям проекций, называются **прямыми общего положения**. Линии, параллельные плоскостям проекций, называются **линиями уровня** (см. раздел 1.2, свойство 4).

Если прямая параллельна горизонтальной плоскости проекций, она называется **горизонталью** (рис. 2.6а), фронтальной – **фронталью** (рис. 2.6б), профильной – **профильной прямой** (рис. 2.6в). Обозначаются они соответственно буквами  $h$ ,  $f$  и  $p$ .

У прямой уровня одна проекция параллельна самой прямой и определяет углы наклона этой прямой к двум другим плоскостям проекций ( $\alpha$  - к  $\Pi_1$  и  $\beta$  - к  $\Pi_2$  (рис. 2.6а и б)).

Отрезок линии уровня в соответствии с четвёртым свойством ортогонального проецирования проецируется на параллельную ему плоскость проекций в натуральную величину. Параллельность по отношению к одной из плоскостей проекций определяет расположение двух других проекций прямой уровня. Так  $f_1 // x$ ;  $h_1 // x$  и т.д.

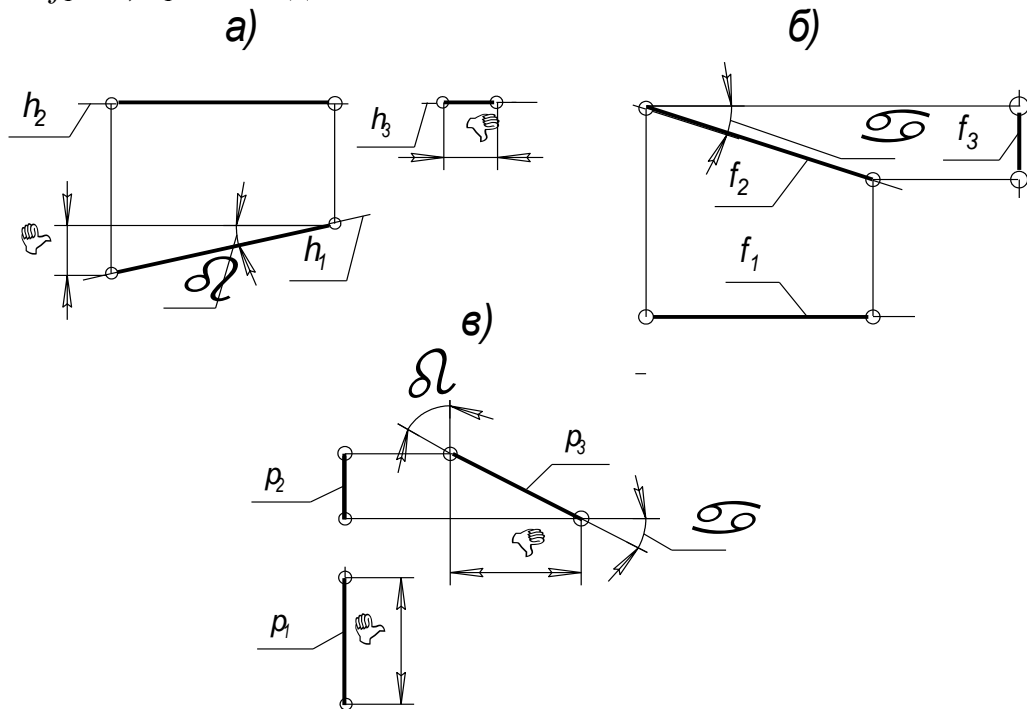


Рис. 2.6

Линии, лежащие в плоскостях проекций, называются **линиями нулевого уровня**. Так, горизонталь  $h^o$  лежит в плоскости  $\Pi_1$ , а фронталь  $f^o$  – в плоскости  $\Pi_2$  (рис. 2.7). Проекции этих линий лежат на оси проекций ( $h^o \in x$ ;  $f^o \in x$ ).

**Проецирующие прямые** – прямые, перпендикулярные одной из плоскостей проекций (см. раздел 1.2, свойство 1) – также являются линиями уровня. Причём одна из её проекций вырождается в точку. На рис. 2.8 приведены горизонтально проецирующая прямая  $m$  и фронтально проецирующая прямая  $n$  ( $m \perp \Pi_1$ ;  $n \perp \Pi_2$ ). Конкурирующие точки, лежащие на одной проецирующей прямой,

дают возможность определить видимость отдельных элементов предмета на данной плоскости проекций.

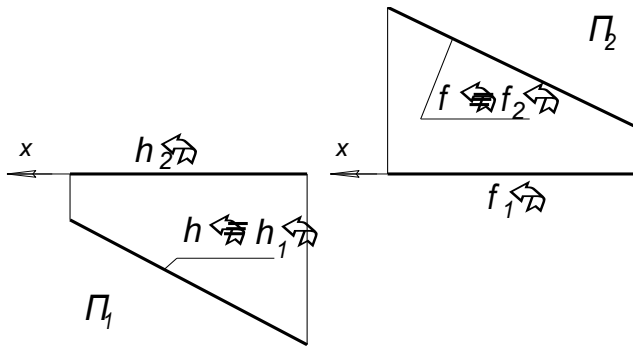


Рис. 2.7

Из двух горизонтально конкурирующих точек  $K$  и  $M$  на плоскости  $\Pi_1$  видима та, которая расположена выше, т.е.  $K$ . Из двух фронтально конкурирующих точек  $L$  и  $N$  на плоскости  $\Pi_2$  видима та, которая ближе к наблюдателю, т.е.  $L$ , а точка  $N$  невидима, так как расположена за точкой  $L$ .

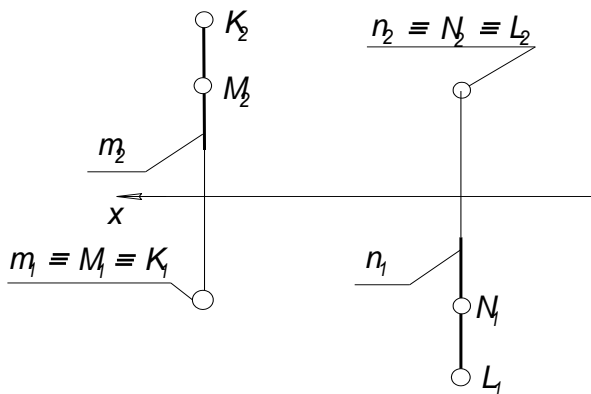


Рис. 2.8

### 2.2.2. Определение натуральной величины отрезка

Отрезок общего положения  $AB$  (рис. 2.9а) на комплексном чертеже представлен своими искажёнными проекциями (рис. 2.9б). Его натуральную величину (НВ) можно определить с помощью комплексного чертежа на основании седьмого свойства ортогонального проецирования (раздел 1.2).

Отрезок  $AB$  является гипотенузой прямоугольного треугольника  $ABC$ , построенного в пространстве. Его катет  $AC$  равен горизонтальной проекции  $A_1B_1$  отрезка  $AB$ , а другой –  $BC$  равен превышению одного конца отрезка –  $B$  над другим –  $A$ . Превышение имеет величину  $\Delta_2$  (берётся с фронтальной проекции  $A_2B_2$  комплексного чертежа отрезка). Таким образом, на горизонтальной проек-

ции  $A_1B_1$  комплексного чертежа (рис.2.9б) можно построить прямоугольный треугольник  $A_1B_1B^*$ , равный треугольнику  $ABC$ , взяв вторым катетом  $\Delta_2$  и отложив его на перпендикуляре, проведённом из точки  $B_1$ . Гипотенуза этого треугольника будет равна натуральной величине отрезка  $AB$  (в силу равенства треугольников  $ABC$  и  $A_1B_1B^*$ ), а угол  $\alpha$  определит угол его наклона к горизонтальной плоскости проекций  $\Pi_1$ .

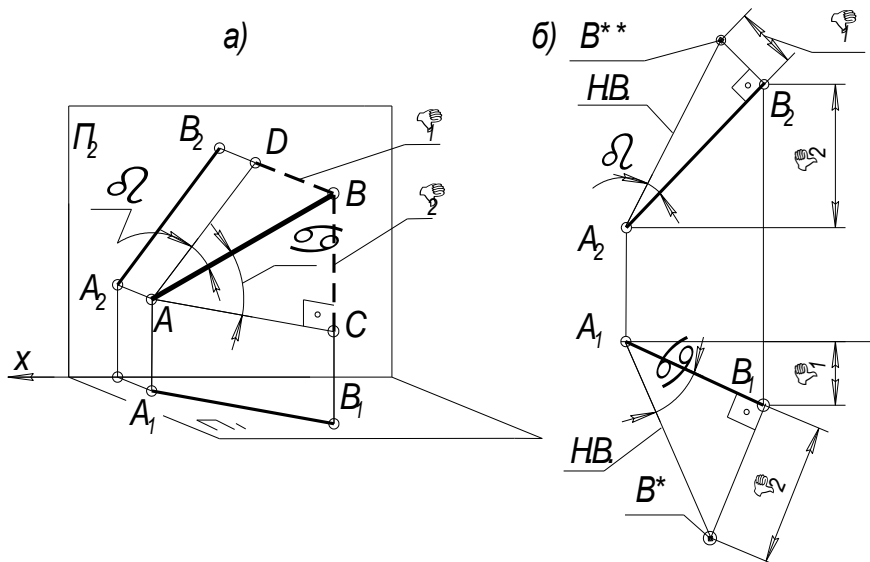


Рис. 2.9

Аналогичное построение на комплексном чертеже можно сделать на фронтальной проекции  $A_2B_2$  отрезка  $AB$ , взяв с плоскости  $\Pi_1$  в качестве второго катета отрезок, равный разности глубин его концов –  $\Delta_1$ . Отложив его на перпендикуляре к отрезку  $A_2B_2$ , проведённом из точки  $B_2$ , получим прямоугольный треугольник  $A_2B_2B^{**}$ , равный по построению треугольнику  $ABD$ , у которого гипотенуза  $A_2B^{**}$  равна  $AB$ . Здесь  $\beta$  – угол наклона  $AB$  к плоскости проекций  $\Pi_2$ .

### 2.2.3. Взаимное расположение двух прямых

Две прямые в пространстве могут совпадать  $a \equiv b$ , быть параллельными  $c // d$ , пересекаться  $m \cap n$  и скрещиваться  $k \oslash l$ .

Если две прямые совпадают (рис. 2.10а), то совпадают и их проекции. Если две прямые параллельны (рис. 2.10б), то на комплексном чертеже их одноимённые проекции параллельны. Если две прямые пересекаются в некоторой точке  $E$  (рис. 2.10в), то, поскольку она принадлежит обеим прямым, проекции этой точки должны принадлежать одноимённым проекциям этих прямых, т.е. точки пересечения одноимённых проекций пересекающихся прямых должны лежать на одной линии связи:  $e \cap g = E \Rightarrow (e_1 \cap g_1 = E_1; e_2 \cap g_2 = E_2)$ .



Две скрещивающиеся прямые не имеют общей точки (рис. 2.10 $\alpha$ ). Поэтому их одноимённые проекции пересекаются в точках, не лежащих на одной линии связи:  $k \cap l \Rightarrow k_1 \cap l_1 = K_1(L_1)$ ;  $k_2 \cap l_2 = M_2(N_2)$ .

Здесь  $K$  и  $L$  - горизонтально конкурирующие, а  $M$  и  $N$  - фронтально конкурирующие точки.

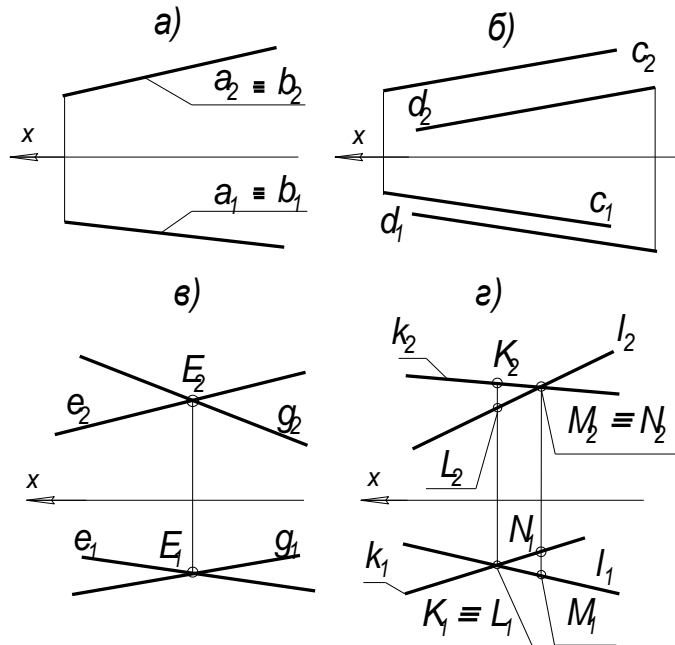


Рис. 2.10

Возможен случай, когда прямые лежат в параллельных проецирующих плоскостях (рис. 2.11). Тогда на комплексном чертеже одна пара проекций пересекается, а вторая – параллельные прямые.

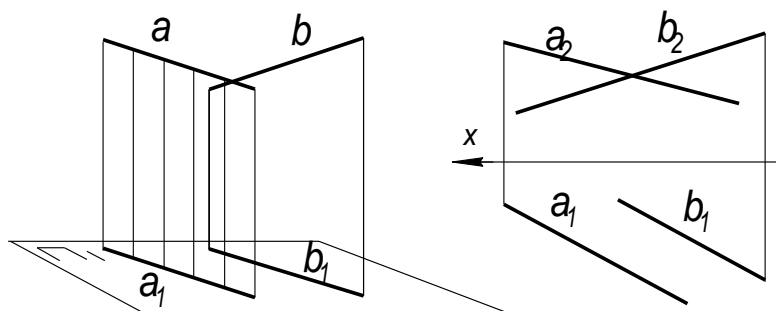


Рис. 2.11

Две параллельные или пересекающиеся прямые могут иметь общую проецирующую плоскость (рис. 2.12).

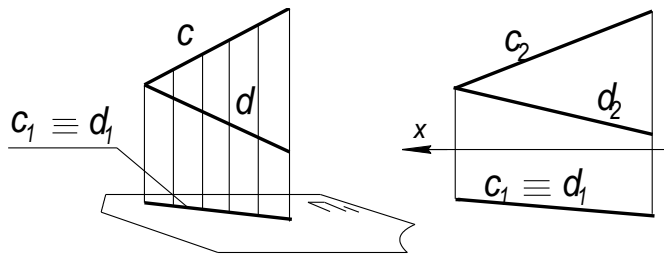


Рис. 2.12

Тогда их проекции на соответствующих плоскостях совпадут. Такие прямые называются **конкурирующими прямыми**.

Часто бывает необходимо построить **перпендикуляр к прямой уровня**. Пусть задана фронталь  $f$  (рис. 2.13а). Требуется из точки  $A$  опустить на фронталь перпендикуляр  $n$ . На основании восьмого свойства ортогонального проецирования прямой угол проецируется без искажения, если одна из его сторон – линия уровня. Следовательно, прямой угол между  $f$  и  $n$  проецируется на  $\Pi_2$  в натуральную величину:  $n_2 \perp f_2$ , т.к.  $n \perp f$  и  $f \parallel \Pi_2$ . Точка  $I_2$  – фронтальная проекция основания перпендикуляра. Горизонтальная проекция перпендикуляра  $n_1$  определяется положением точек  $I_1$  и  $A_1$ . Аналогично строится перпендикуляр  $m$  к горизонтали  $h$  (рис. 2.13б).

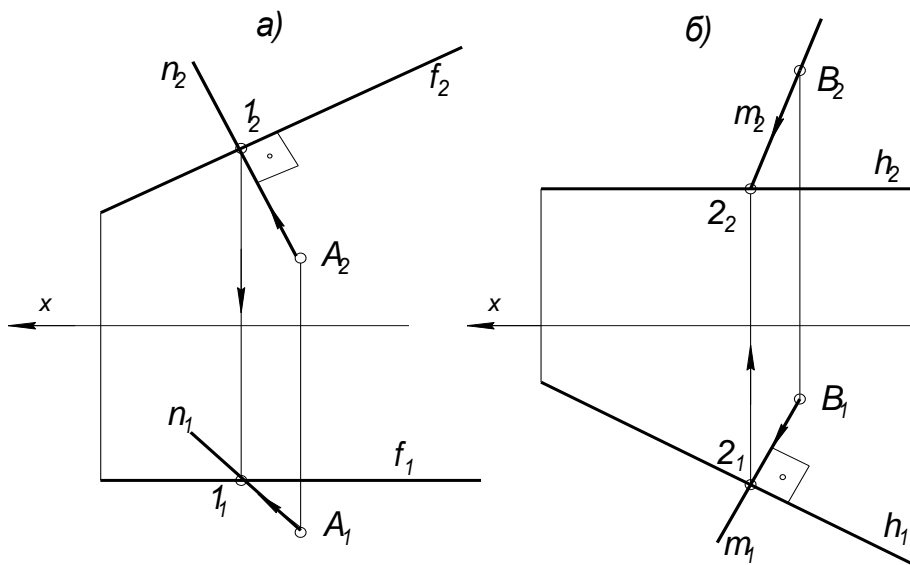


Рис. 2.13

## 2.3. Плоскость

### 2.3.1. Задание плоскости на чертеже

Любую плоскость определяют: три точки, не лежащие на одной прямой  $\Theta (A, B, C)$  (рис. 2.14а); прямая и точка, не лежащая на этой прямой  $\Theta (a, D; D \notin a)$  (рис. 2.14б); две пересекающиеся прямые  $\Theta (a \cap b)$  (рис. 2.14в); две параллельные прямые  $\Theta (a // b)$  (рис. 2.14г); любая плоская фигура, например треугольник  $\Theta (A, B, C)$  (рис. 2.14д).

На комплексном чертеже проекции плоскости задаются, но не ограничиваются проекциями определяющих её элементов. Так плоскость, заданная треугольником, сама по себе безгранична, а треугольник включает в себе лишь ограниченный её сегмент.

Плоскость, не перпендикулярная ни одной из основных плоскостей проекций, называется плоскостью **общего положения**.

Плоскости, перпендикулярные или параллельные основным плоскостям проекций, называются плоскостями **частного положения**.

Плоскость, перпендикулярная одной из плоскостей проекций, как было отмечено ранее, называется **проецирующей**.

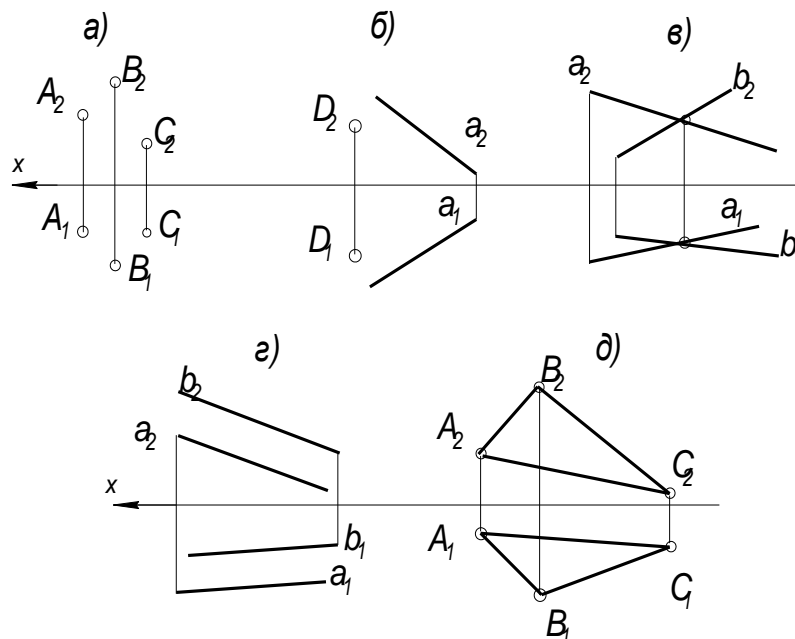


Рис. 2.14

Обычно проецирующие плоскости обозначаются буквой  $\Sigma$ . Различают **горизонтально, фронтально и профильно проецирующие плоскости**. На комплексном чертеже одна из проекций проецирующей плоскости вырождается в прямую линию. Такая плоскость может быть задана одной своей вырожденной проекцией.

На рис. 2.15 в качестве примера представлены горизонтально (рис. 2.15а), фронтально (рис. 2.15б) и профильно (рис. 2.15в) проецирующие плоскости, заданные соответственно двумя параллельными прямыми, треугольником, точкой и прямой.

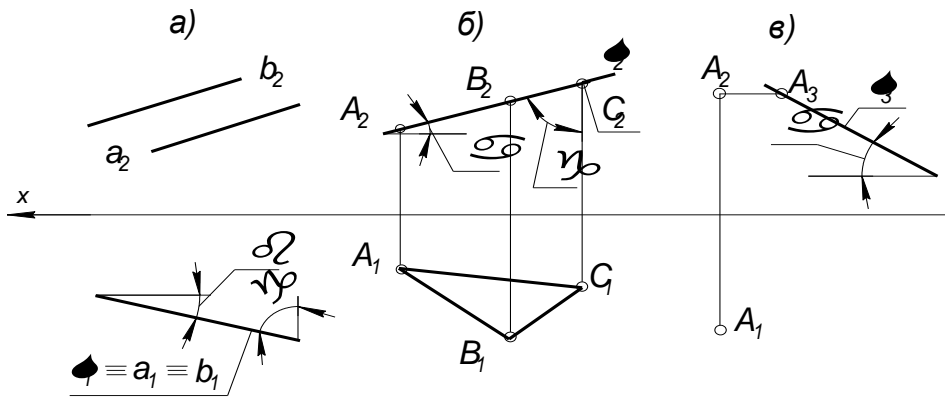


Рис. 2.15

Плоскость, параллельная одной из плоскостей проекций, **называется плоскостью уровня**. Такая плоскость – дважды проецирующая, поэтому на комплексном чертеже её две проекции вырождены и имеют вид прямой, расположенной под прямым углом к линиям связи, а третья проекция даёт изображение всех элементов, лежащих в этой плоскости, в натуральную величину. На рис. 2.16 изображены:  $\Gamma$  – горизонтальная (рис. 2.16а),  $\Phi$  – фронтальная (рис. 2.16б) и  $P$ - профильная плоскости уровня (рис. 2.16в), заданные соответственно точкой (она однозначно определяет положение плоскости уровня), треугольником, прямой и точкой.

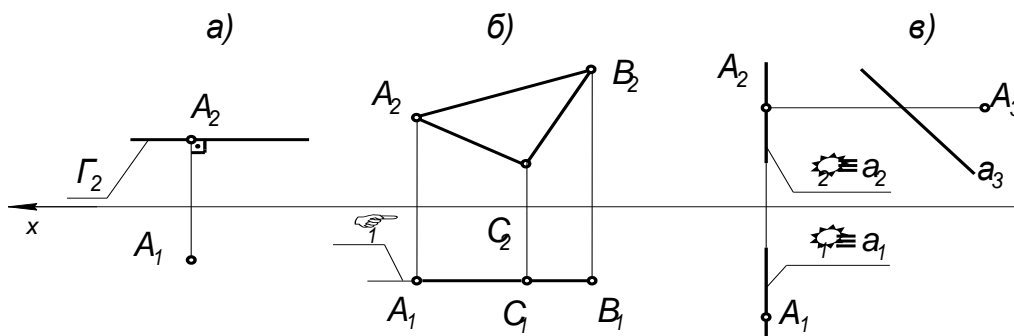


Рис. 2.16

### 2.3.2. Прямая в плоскости

Известно, что прямая принадлежит плоскости, если две её точки принадлежат этой плоскости. На рис. 2.17 точка 1 лежит на  $AB$ , а 2 – на  $BC$ . Соединяя

их прямой  $m$ , “закрепим” её таким образом в плоскости  $ABC$ . Это положение для прямой  $m$  (рис. 2.17) записывается так:  $1 \subset AB; 2 \subset BC \Rightarrow m(12) \subset \Theta(ABC)$ .

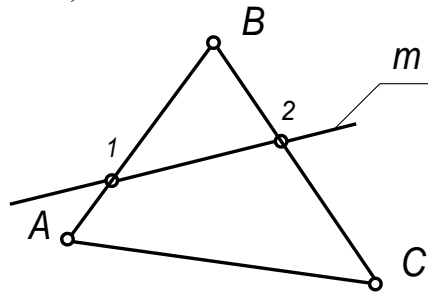


Рис. 2.17

В любой плоскости можно построить прямые, параллельные плоскостям проекций. Их называют **линиями уровня плоскостей**. Линию уровня можно представить как линию пересечения данной плоскости с соответствующей плоскостью уровня. Так на рис. 2.18 представлена плоскость общего положения  $ABC$ , пересечённая горизонтальной плоскостью уровня  $\Gamma$ .

Поскольку прямая  $12$  принадлежит горизонтальной плоскости уровня  $\Gamma$ , она является линией уровня, а именно – горизонталью  $h$ , а так как она расположена также в плоскости  $ABC$ , то она будет горизонталью этой плоскости.

**Горизонталь плоскости  $h$**  – это линия плоскости, параллельная горизонтальной плоскости проекций  $\Pi_1$  (рис.2.19а). Построение горизонтали начинают с её фронтальной проекции  $h_2$ , которая параллельна оси проекций. За начальную точку примем  $A_2$ ;  $h_2 \cap B_2C_2 = 1_2$ ;  $h_2 \perp A_2A_1$ ;  $1_2 1_1 \parallel A_2A_1$ ;  $1_2 1_1 \cap B_1C_1 = 1_1$ ;  $A_1 1_1 \subset h_1$ .

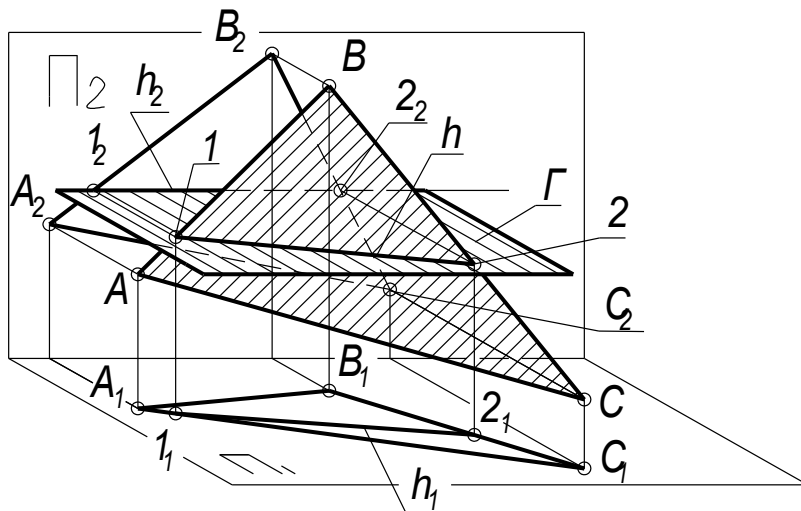


Рис. 2.18

**Фронталь плоскости  $f$**  параллельна фронтальной плоскости проекций  $\Pi_2$  (рис. 2.19б). Её построение аналогично построению горизонтали плоскости, а начинают его с горизонтальной проекции фронтали  $f_1$ , которая параллельна оси проекций.

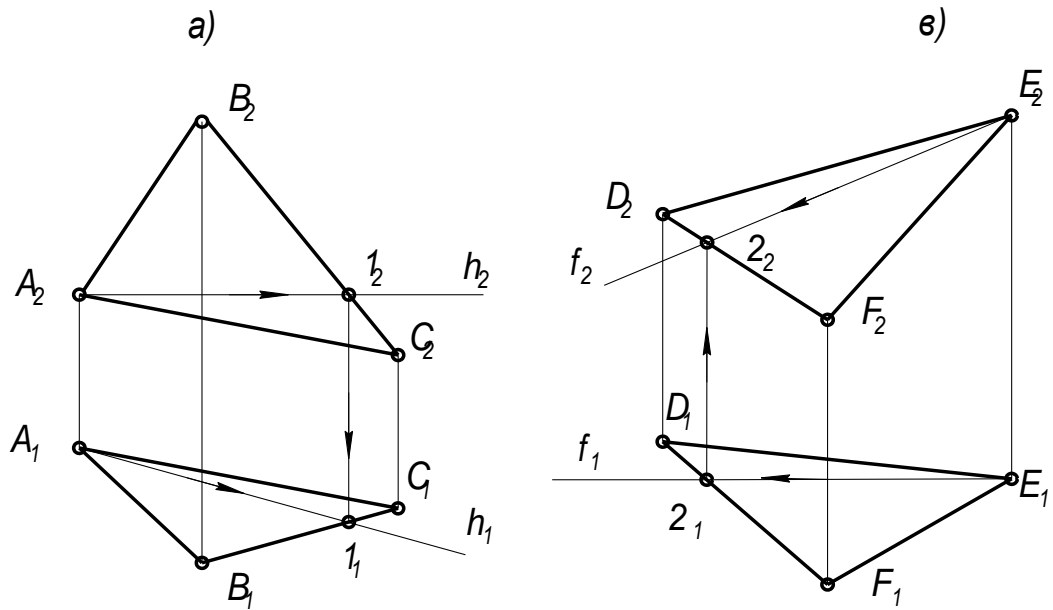


Рис. 2.19

Для плоскостей частного положения соответствующие линии уровня одновременно будут и проецирующими. Так на рис. 2.20а изображена фронтально проецирующая плоскость  $\Sigma$ , горизонталь которой  $h$  является фронтально проецирующей прямой. Их фронтальные проекции  $\Sigma_2$  и  $h_2$  вырождены в прямую и точку. Фронталь  $f$  в горизонтально проецирующей плоскости  $\Sigma$  является горизонтально проецирующей прямой (рис. 2.20б), а их горизонтальные проекции  $f_1$  и  $\Sigma_1$  вырождаются соответственно в точку и прямую.

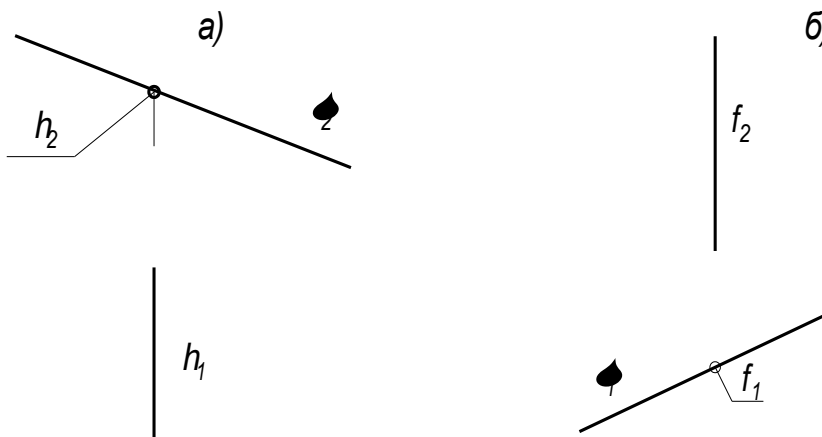


Рис. 2.20

## 2.3.3. Следы плоскости

В плоскости можно провести бесчисленное множество горизонталей и фронталей. Все они параллельны друг другу. Линии уровня, лежащие в плоскостях проекций (линии нулевого уровня), называются **следами плоскости**, поскольку являются линиями её пересечения с плоскостями проекций. На рис. 2.21 представлена пространственная модель и комплексный чертёж плоскости  $\Theta$  ( $a \cap b$ ), а также построены её следы  $h^0$  и  $f^0$ . Для построения

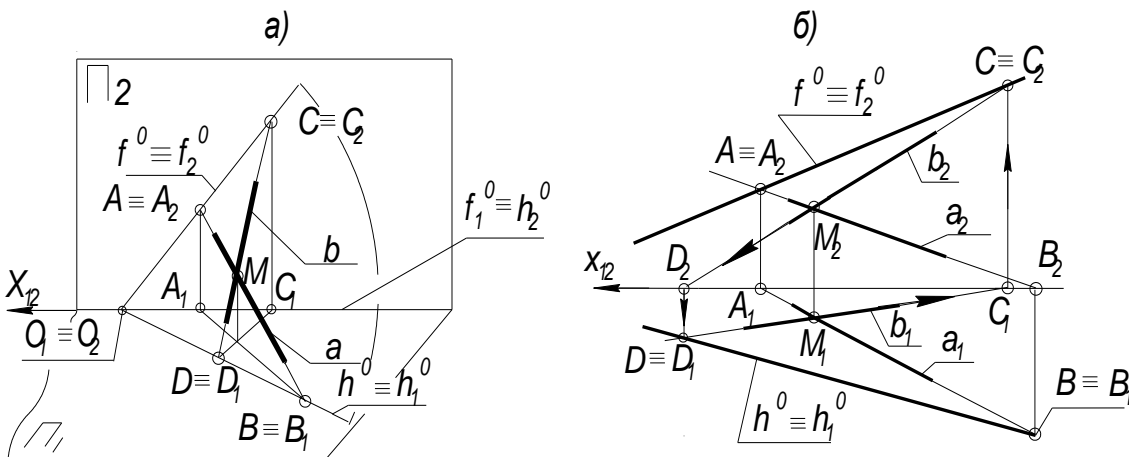


Рис. 2.21

следов плоскости используются следы прямых её образующих (см. раздел 2.2.1 рис. 2.4 и 2.5). Горизонтальный след плоскости  $h^0$  (рис. 2.21а) проводится через два горизонтальных следа  $D$  и  $B$  прямых  $a$  и  $b$ , а фронтальный  $f^0$  – через два их фронтальных следа –  $A$  и  $C$ . Оба следа плоскости имеют общую точку схода  $O$ , лежащую на оси проекций  $x_{12}(\Pi_1 \cap \Pi_2)$ . Поскольку одна из проекций следа прямой лежит на оси проекций, построение начинают с неё. Продолжая проекцию прямой, например  $b_2$  (рис. 2.21б), до пересечения с  $x_{12}$ , получим фронтальную проекцию  $D_2$  горизонтального следа  $D$  прямой  $b$ . Далее из  $D_2$  проводится линия связи до пересечения с  $b_1$ , в результате чего определяется горизонтальная проекция следа  $D_1$ , совпадающая с самим горизонтальным следом  $D$ . Подобным образом получают фронтальный след  $C$  прямой  $b$ :  $C_1 = b_1 \cap x_{12}$ ;  $C_1 C_2 \perp x_{12}$ ;  $C_1 C_2 \cap b_2 = C_2$ ;  $C_2 \equiv C$ . Делая аналогичные построения, определяют горизонтальный  $B$  и фронтальный  $A$  следы прямых  $a$  и  $b$ .

На рис. 2.22а представлен макет, а на рис. 2.22б – комплексный чертёж плоскости, заданной следами. Для построения горизонтали плоскости, заданной следами, проводится фронтальная проекция горизонтали  $h_2$  (рис. 2.22б) до пересечения с фронтальным следом плоскости в точке  $M_2$ . Горизонтальная проекция  $M_1$  точки  $M$  лежит на оси  $x_{12} \equiv h^0$ . Поскольку все горизонталы плоскости параллельны, то  $h_1 \parallel h^0$  и проходит через точку  $M_1$ .

Аналогично строятся горизонтальная и фронтальная проекции  $f_1$  и  $f_2$  фронтали.

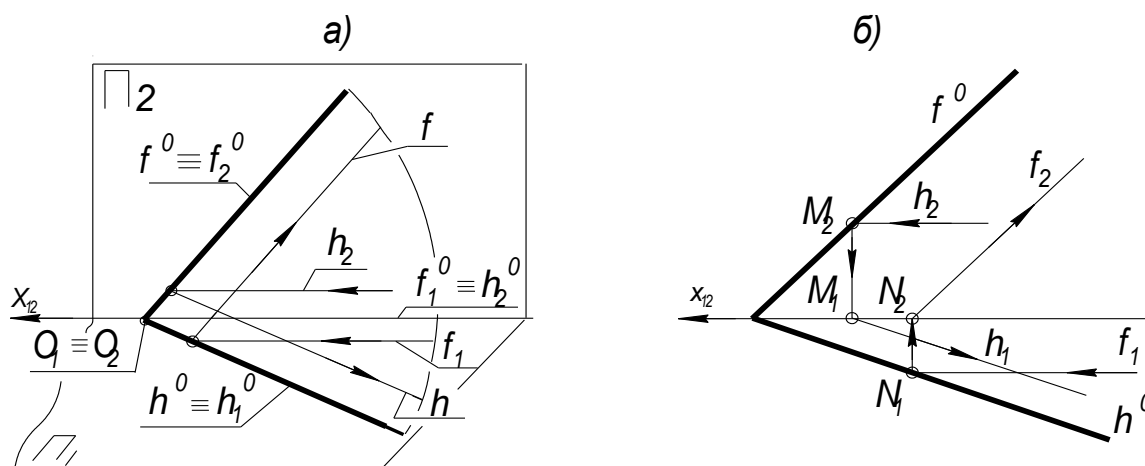


Рис. 2.22

### Контрольные вопросы к главе 2

1. Как определить угол наклона прямой общего положения к плоскостям проекций?
2. В каких случаях используются основные чертежи, а когда безосные? Приведите примеры.
3. Приведите примеры чертежей частных положений прямых линий и укажите их названия.
4. Что называется следами прямой и плоскости?
5. Какие прямые называют линиями уровня?
6. Какие прямые называются проецирующими?
7. Как изображаются на чертежах пересекающиеся, скрещивающиеся и параллельные прямые общего положения?
8. Покажите на примерах способы задания плоскости общего положения.
9. Покажите на примерах плоскости частного положения и назовите их.
10. Покажите на примерах особенности проецирующих плоскостей.
11. Покажите на примерах, как строят точки и линии в плоскости общего положения.
12. Покажите, как построить в плоскости общего положения горизонталь и фронталь.
13. Покажите, как построить в проецирующих плоскостях горизонтали и фронталь.
14. Можно ли провести проецирующую плоскость через прямую общего положения?



### 3. ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

**Позиционными** называются задачи, связанные с определением взаимного расположения геометрических образов. Основными здесь являются задачи на определение:

- взаимной принадлежности,
- взаимного пересечения.

Задачи на взаимную принадлежность органически входят во все ранее рассмотренные вопросы, т.к. точка принадлежит плоскости, если она принадлежит линии плоскости; прямая линия принадлежит плоскости, если две её точки принадлежат плоскости и т.д.

Задачи на взаимное пересечение связаны с построением точек, принадлежащих одновременно двум рассматриваемым геометрическим образам (прямой и плоскости, двум плоскостям, плоскости и поверхности и т.д.).

#### 3.1. Пересечение прямой с плоскостью

Для определения точки пересечения прямой  $l$  с плоскостью  $\Theta(A, B, C)$  выполняют следующие операции.

Через прямую  $l$  проводят проецирующую плоскость  $\Sigma$  (рис. 3.1). В данном примере проводится горизонтально проецирующая плоскость  $\Sigma_1$ . Определяют линию пересечения  $m$  плоскости  $\Sigma$  с плоскостью  $\Theta(ABC)$ . На рис. 3.1 горизонтальная проекция этой линии  $m_1$  совпадает с  $l_1$  по построению, а фронтальная  $m_2$  определяется проецированием точек  $1_1$  и  $2_1$  на фронтальные проекции  $A_2B_2$  и  $B_2C_2$  сторон треугольника  $ABC$ .

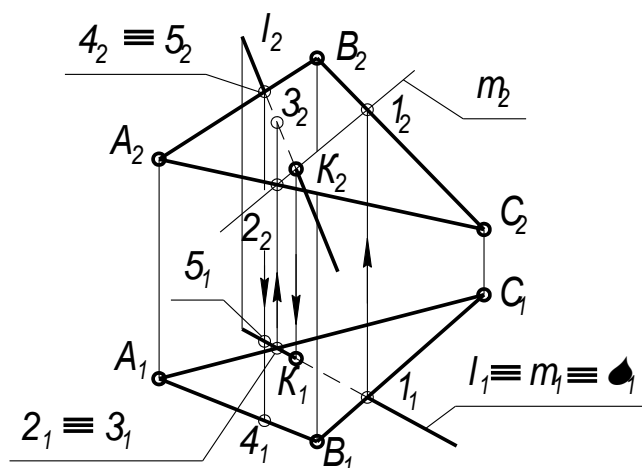


Рис. 3.1

Соединяя точки  $1_2$  и  $2_2$ , получим фронтальную проекцию линии пересечения  $m_2$  вспомогательной плоскости  $\Sigma$  и плоскости  $ABC$ . Очевидно, что все точки, лежащие на  $m_2$ , принадлежат фронтальной проекции плоскости  $A_2B_2C_2$ .

Фронтальная проекция  $m_2$  линии пересечения  $m$  пересекает  $l_2$  в точке  $K_2$ , которая является общей для  $m$  и  $l$ , т.е. фронтальной проекцией точки пересечения  $l$  и  $\Theta$ . Её горизонтальная проекция  $K_1$  получается путём проецирования  $K_2$  на  $l_1$ .

Видимость прямой и плоскости относительно горизонтальной плоскости проекций определяется с помощью горизонтально конкурирующих точек 2 и 3. Точка 2 лежит на  $AC$ , а 3 – на  $l$ . Их фронтальные проекции  $2_2$  и  $3_2$  показывают, что точка 2 находится ниже точки 3 и поэтому на горизонтальной плоскости проекций горизонтальная проекция  $2_1$  точки 2 будет закрыта проекцией  $3_1$  точки 3. Отсюда следует, что проекция  $A_1C_1$  стороны  $AC$  расположена ниже проекции  $l_1$  и участок последней до  $K_1$  будет видимым, а далее скрыт плоскостью. Относительную видимость на фронтальной плоскости проекций можно определить с помощью фронтально конкурирующих точек 4 и 5. Как показывают горизонтальные проекции этих точек  $4_1$  и  $5_1$ , точка 4 лежит ближе к наблюдателю, чем точка 5, но поскольку последняя принадлежит прямой  $l$ , то участок её фронтальной проекции  $5_2K_2$  невидим.

### 3.2. Перпендикулярность прямой и плоскости; двух плоскостей

**Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум прямым этой плоскости, например её горизонтали и фронтали.** Построение перпендикуляра начинают с построения горизонтали и фронтали плоскости (рис. 3.2). Затем к этим прямым проводится перпендикуляр так, как это сделано на рис. 2.13. Прямая  $n$  (рис. 3.2) перпендикулярна плоскости  $\mathcal{A}(ABC)$ , т.к.  $n \perp h$  и  $n \perp f$  (на основании восьмого свойства ортогонального проецирования (раздел 1.1)).

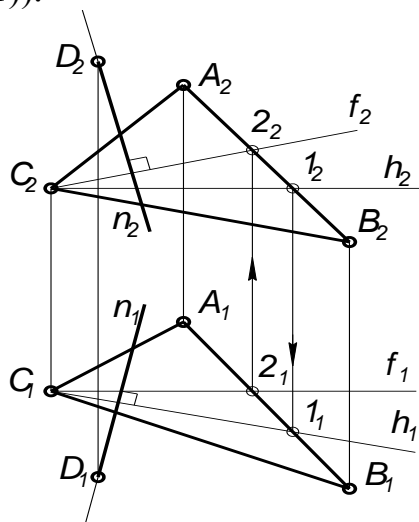


Рис. 3.2

При построении на комплексном чертеже проекций перпендикуляра к плоскости нужно иметь в виду следующее: если  $n \perp \mathcal{A}(h \cap f)$ , то **фронтальная проекция перпендикуляра перпендикулярна фронтальной проекции фронта-**

ли, а его **горизонтальная проекция – горизонтальной проекции горизонтали** ( $n_1 \perp h_1; n_2 \perp f_2$ ). Действительно и обратное утверждение.

Точка пересечения перпендикуляра с плоскостью определяется подобно тому, как это изложено в предыдущем разделе. Приведённое решение широко используется при определении расстояния от точки до плоскости и до других более сложных поверхностей.

На рис. 3.3 рассмотрена задача по проведению через прямую  $a$  плоскости  $\Omega(a \cap n)$ , перпендикулярной плоскости  $\mathcal{G}(ABC)$ .

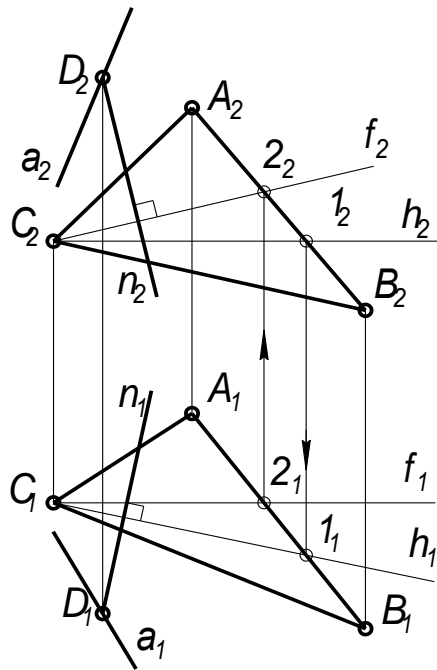


Рис. 3.3

Задача сводится к предыдущей, если на прямой  $a$  задать точку  $D$  и провести через неё перпендикуляр  $n$  к плоскости  $\mathcal{G}$ . Поскольку  $\Omega$  образована двумя пересекающимися прямыми, одна из которых перпендикулярна  $\mathcal{G}$ , то, как известно, **плоскость, содержащая перпендикуляр к другой плоскости, сама перпендикулярна этой плоскости.**

### 3.3. Взаимное пересечение двух плоскостей

Задача по определению линии пересечения двух плоскостей может быть решена с использованием секущей плоскости-посредника. Такая плоскость применялась нами при решении задачи на определение точки пересечения прямой и плоскости (рис. 3.1).

Определим линию пересечения плоскости  $\Omega$ , образованной пересекающимися прямыми  $a$  и  $b$ , и плоскости  $\Theta$ , заданной двумя параллельными прямыми  $n$  и  $q$  (рис. 3.4).

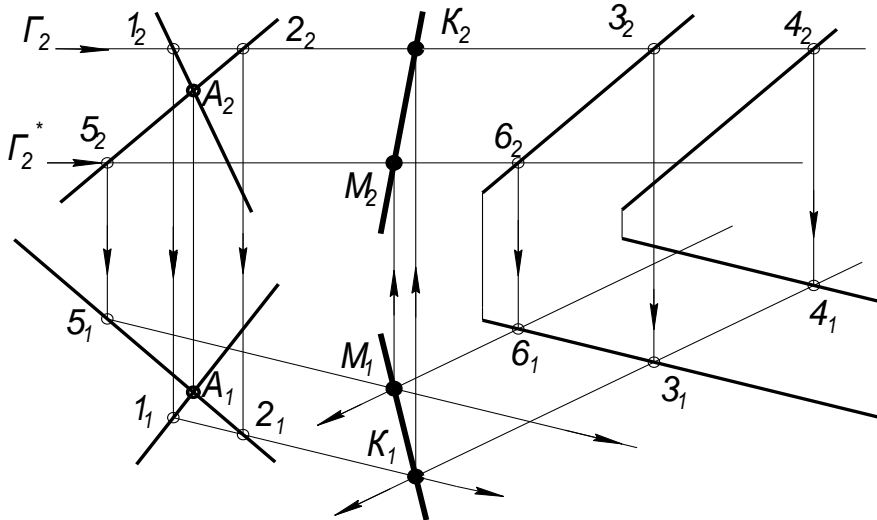


Рис. 3.4

Для этого введём плоскость - посредник, представляющую собой горизонтальную плоскость уровня  $\Gamma_2$  (хотя для этого годится любая проецирующая плоскость). Строятся проекции  $1_1 2_1$  и  $1_2 2_2$ , а также  $3_1 4_1$  и  $3_2 4_2$  линий пересечения плоскости - посредника  $\Gamma_2$  с  $\Omega$  и  $\Theta$ . Точка  $K$ , построение горизонтальной проекции которой  $K_1$  ясно из рисунка, - общий элемент для всех плоскостей, т.е. лежит на линии их пересечения. Фронтальная проекция  $K_2$  точки  $K$  лежит на  $\Gamma_2$ . Для определения второй точки  $M$  линии пересечения двух плоскостей повторяются все построения с использованием другой плоскости - посредника  $\Gamma_2^*$ , параллельной  $\Gamma_2$ . Поэтому проекции её линии пересечения с плоскостями  $\Omega$  и  $\Theta$  будут попарно параллельны предыдущим. Соединив одноимённые проекции  $K$  и  $M$ , получим проекции линии пересечения двух плоскостей.

### 3.4. Параллельность прямой и плоскости; двух плоскостей

Если прямая  $m$  параллельна плоскости  $KLM$  (рис. 3.5), то на этой плоскости существует линия  $l$ , параллельная  $m$ .

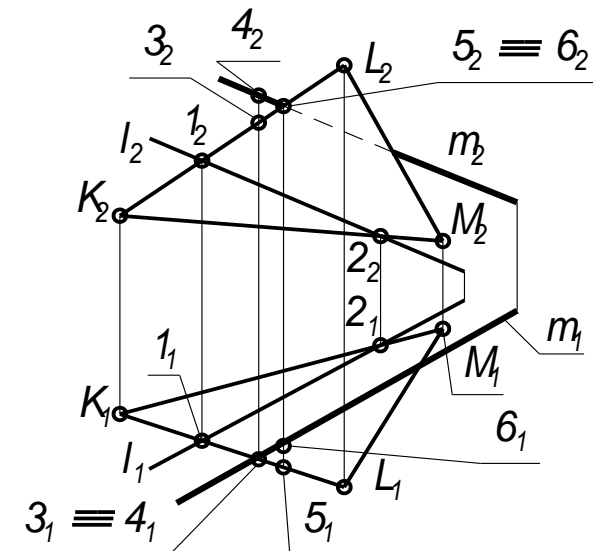


Рис. 3.5

Данное обстоятельство используется для построения прямой, параллельной заданной плоскости. Как показано на рис. 3.5, в плоскости  $KLM$  проводится прямая  $l$ , а затем строится прямая  $m$ , параллельная  $l$ . Фронтальные проекции  $3_2$  и  $4_2$  горизонтально конкурирующих точек  $3$  и  $4$  показывают, что  $m$  лежит выше, чем  $KLM$ , а горизонтальные проекции  $5_1$  и  $6_1$  фронтально конкурирующих точек  $5$  и  $6$  свидетельствуют о том, что плоскость  $KLM$  располагается ближе, чем  $m$ .

Иногда бывает необходимо проверить параллельность прямой  $m$  заданной плоскости. Для этого в какой-либо проекции плоскости проводится прямая  $a$ , параллельная соответствующей проекции  $m$ . Затем строится вторая проекция  $a$  и проверяется параллельность второй пары проекций  $a$  и  $m$ .

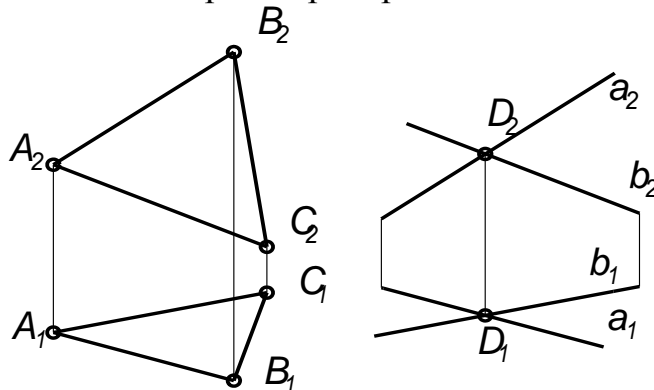


Рис. 3.6

### Контрольные вопросы к главе 3

1. Сформулируйте условия перпендикулярности двух прямых общего положения.
2. Как определить расстояние от точки до прямой частного положения?

3. Как построить точку пересечения плоскости общего положения с прямой линией общего положения? Приведите пример.

4. Покажите на примере построение прямой и плоскости, параллельных плоскости общего положения.

5. Расскажите, как построить прямую, перпендикулярную плоскости общего положения. Приведите пример.

6. Приведите пример построения прямой линии, перпендикулярной проецирующей плоскости.

7. Как определить на чертеже расстояние от точки до проецирующей плоскости? Приведите пример.

8. Сформулируйте, как построить на чертеже плоскость, перпендикулярную другой плоскости общего положения. Приведите пример.

9. Сформулируйте, как построить на чертеже плоскость, параллельную другой плоскости.

10. Расскажите, как построить линию пересечения двух плоскостей. Приведите пример.

#### **4. СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КОМПЛЕКСНОГО ЧЕРТЕЖА**

Решение пространственных задач на комплексном чертеже значительно упрощается, если интересующие нас элементы фигуры занимают частное положение. Получающиеся в этом случае вырожденные проекции помогают решению задачи. В основном используются два способа преобразования чертежа: способ замены плоскостей проекций и способ плоскопараллельного перемещения.

##### **4.1. Способ замены плоскостей проекций**

Сущность способа замены плоскостей проекций заключается в том, что пространственное положение объекта не изменяется, а вводится новая, дополнительная плоскость проекций, расположенная таким образом, чтобы интересующие нас элементы фигуры или весь объект целиком проецировался на неё в удобном для решения задачи положении. При этом новая плоскость проекций обязательно должна быть перпендикулярна к одной из имеющихся плоскостей проекций. В результате образуется новая система взаимно перпендикулярных плоскостей проекций, заменяющая прежнюю. Введём, например, в систему плоскостей проекций  $\Pi_1/\Pi_2$  новую плоскость проекций  $\Pi_4$ , которая как и  $\Pi_2$  перпендикулярна  $\Pi_1$  (рис. 4.1). В результате будем иметь другую систему плоскостей проекций  $\Pi_1/\Pi_4$ . При этом проецирование остаётся ортогональным, т.е. новое направление проецирования  $S$  перпендикулярно плоскости  $\Pi_4$ .

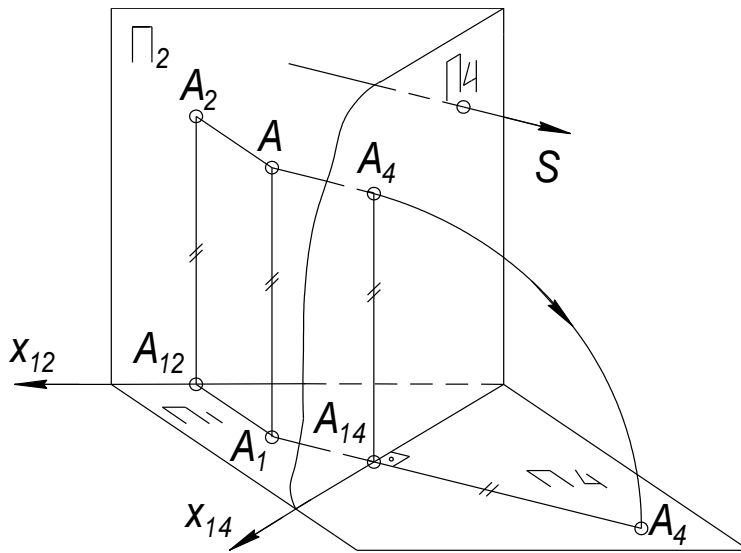


Рис. 4.1

Новая и старая системы плоскостей проекций имеют общую, связывающую их плоскость проекций  $\Pi_1$ . Новой осью проекций будет  $x_{14}$ . Каждая точка пространства, например точка  $A$ , проецируется теперь на три попарно – перпендикулярные плоскости. Следует заметить, что аппликаты точки  $A$  в плоскостях  $\Pi_1$  и  $\Pi_4$  будут равны между собой по построению. Для получения плоского чертежа сначала совмещают плоскость  $\Pi_4$  с плоскостью  $\Pi_1$ , вращая её вокруг оси  $x_{14}$ , а затем полученный плоский чертёж поворотом вокруг оси  $x_{12}$  совмещают с плоскостью  $\Pi_2$ . В результате будем иметь комплексный чертёж, представленный на рис. 4.2а.

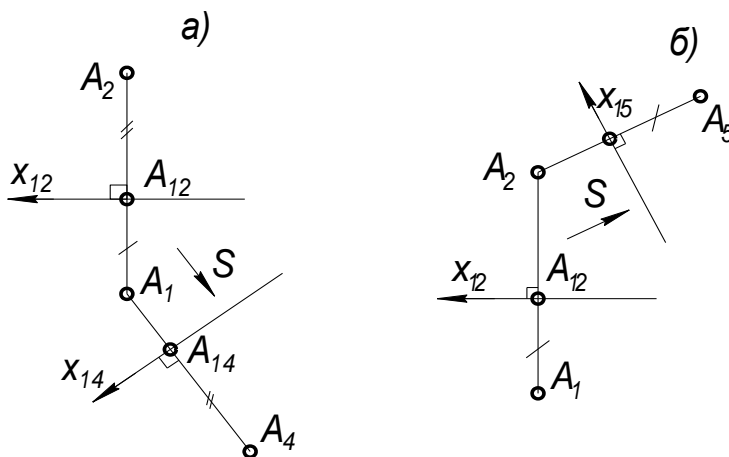


Рис. 4.2

Можно ввести новую плоскость проекций, сохранив в качестве общей (связывающей) плоскости не  $\Pi_1$ , как на рис. 4.2а, а  $\Pi_2$  (рис. 4.2б). При этом все построения производятся аналогично предыдущему.

Рассмотрим четыре исходные задачи преобразования комплексного чертежа.

#### 4.1.1. Перевод прямой общего положения в положение прямой уровня

Для преобразования прямой общего положения  $AB$  в прямую уровня (рис. 4.3) вводится новая плоскость проекций  $\Pi_4$  так, чтобы ось проекций  $x_{14}$

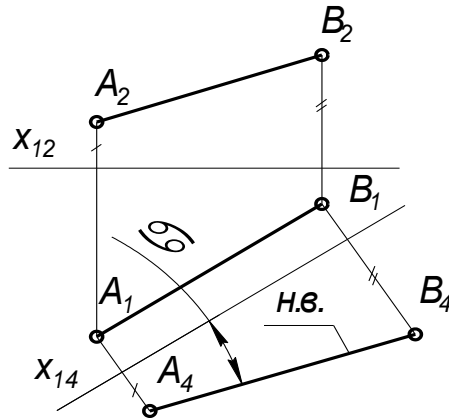


Рис. 4.3

была параллельна какой-либо проекции  $AB$  (в данном случае –  $A_1B_1$ ), затем откладываем на новой плоскости проекций от оси  $x_{14}$  аппликаты точек  $A_4$  и  $B_4$ , равные аппликатам точек  $A_2$  и  $B_2$ . Новая проекция прямой  $A_4B_4$  даёт натуральную величину отрезка  $AB$ , который в новой системе плоскостей проекций  $\Pi_1/\Pi_4$  стал фронталью, и позволяет определить угол наклона  $\alpha$  прямой к плоскости проекций  $\Pi_1$  (раздел 2.2.2).

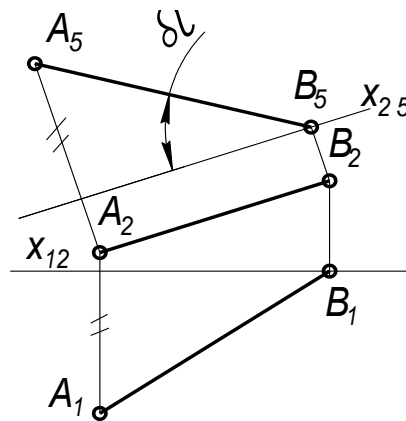


Рис. 4.4

Угол наклона прямой к фронтальной плоскости проекций  $\beta$  можно определить, построив изображение прямой на другой дополнительной плоскости проекций  $\Pi_5 \perp \Pi_2$  (рис. 4.4), параллельной  $A_2B_2$ . В новой системе плоскостей проекций  $\Pi_2/\Pi_5$  отрезок  $AB$  – фронталь, а  $A_5B_5$  – его натуральная величина, которая равна  $A_1B_1$ .



## 4.1.2. Перевод прямой уровня в проецирующее положение

Для того чтобы на новой плоскости проекций изображение прямой уровня выродилось в точку (рис. 4.5), надо эту плоскость расположить перпендикулярно данной прямой, т.е. провести на комплексном чертеже ось проекций перпендикулярно направлению проекции прямой на общую плоскость проекций. На рис. 4.5а общей плоскостью проекций будет  $\Pi_1$ , а на

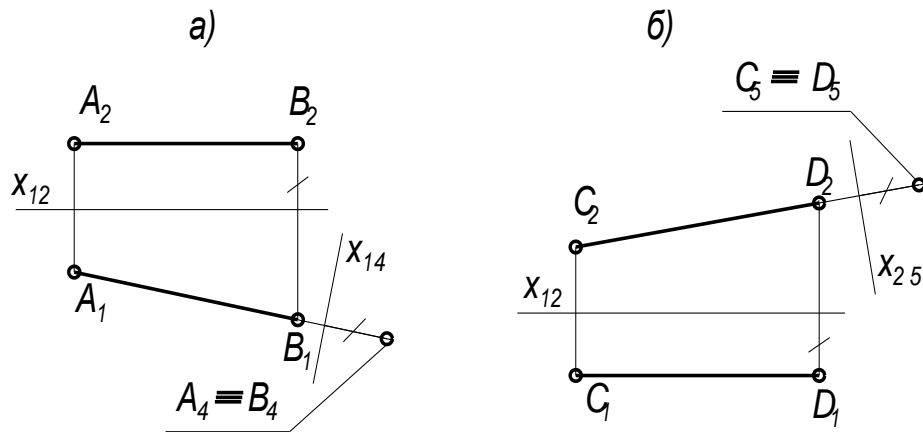


Рис. 4.5

рис. 4.5б –  $\Pi_2$ . Горизонталь будет иметь своей проекцией точку на плоскости  $\Pi_4 \perp \Pi_1$  (рис. 4.5а), а фронталь – на  $\Pi_5 \perp \Pi_2$  (рис. 4.5б).

Для построения вырожденной в точку проекции прямой общего положения необходимо последовательно решить две предыдущие задачи. На рис. 4.6 представлено такое решение.

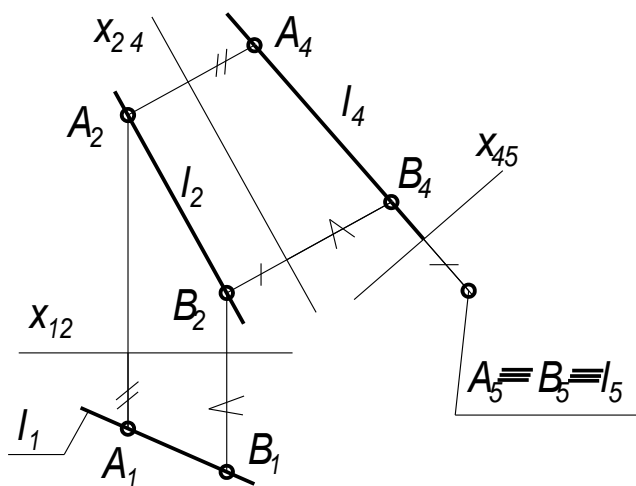


Рис. 4.6



Если в исходном положении плоскость занимает общее положение, а нужно получить её изображение как плоскости уровня, то прибегают к двойной замене плоскостей проекций, решая последовательно две предыдущие задачи.

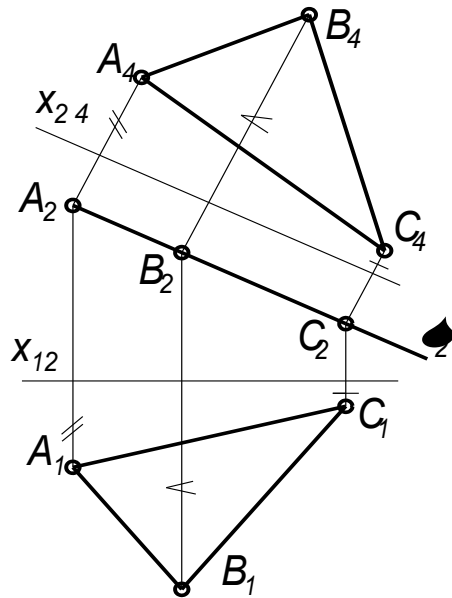


Рис. 4.8

При первой замене плоскость становится проецирующей, а при второй – плоскостью уровня (рис. 4.9).

Расстояния для построения проекций точек на плоскости  $\Pi_5$  нужно брать с плоскости  $\Pi_1$ , отмеряя их от оси проекций  $x_{14}$ .

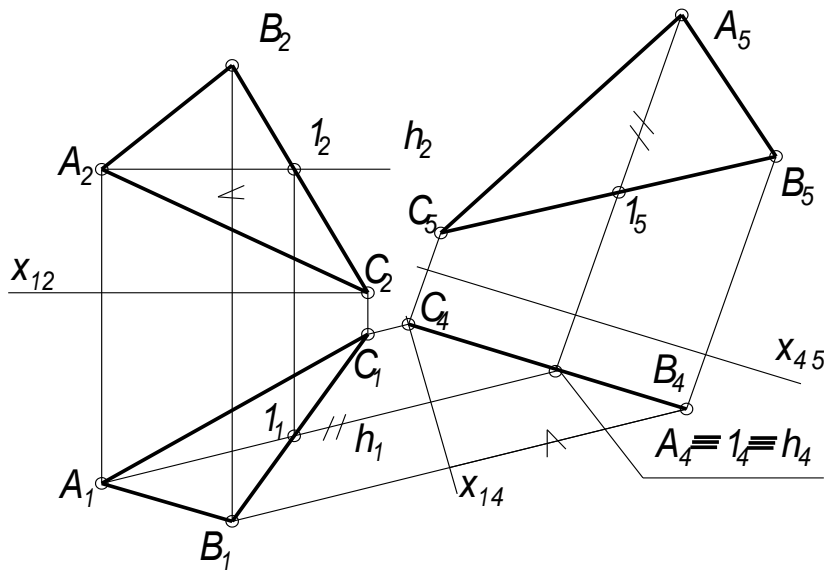


Рис. 4.9

## 4.2. Способ плоскопараллельного перемещения

При плоскопараллельном перемещении заданная фигура движется в пространстве так, что все её точки перемещаются в плоскостях, параллельных друг другу и (как правило) одной из плоскостей проекций. При этом угол наклона к этой плоскости проекций сохраняется неизменным. Сами траектории точек фигуры произвольны. На рис. 4.10а показано плоскопараллельное перемещение отрезка  $AB$  из первоначального положения в положение  $A'B'$ .

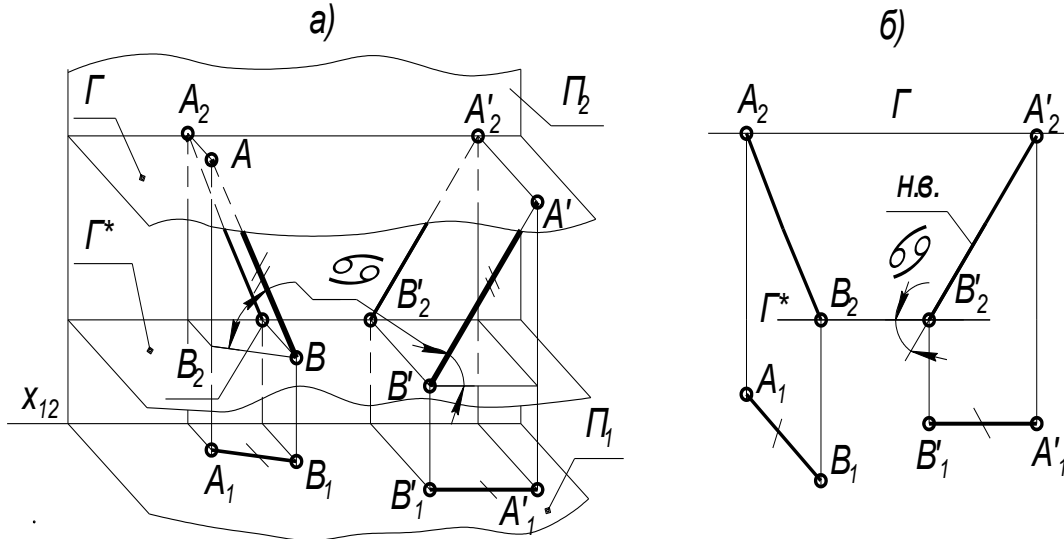


Рис. 4.10

Концы  $A$  и  $B$  отрезка движутся соответственно в плоскостях  $\Gamma$  и  $\Gamma^*$ , параллельных в данном случае горизонтальной плоскости проекций  $\Pi_1$ . Угол наклона отрезка к плоскости  $\Pi_1$  при этом сохраняется неизменным, что сохраняет неизменной длину его горизонтальной проекции (рис. 4.10б).

### Контрольные вопросы к главе 4

1. В чем состоит принцип преобразования чертежа способом замены плоскостей проекций?
2. Какое основное условие должно быть соблюдено при введении новой плоскости проекций?
3. Какая координата точки сохраняется в новой плоскости проекций?
4. Каковы исходные задачи преобразования комплексного чертежа?
5. Как перевести прямую общего положения в положение прямой уровня?
6. Как перевести прямую уровня в проецирующее положение?
7. Переведите плоскость общего положения в положение плоскости уровня.
8. В чём заключается суть способа плоскопараллельного перемещения?
9. Какое основное условие должно быть соблюдено при плоскопараллельном перемещении фигуры?

## 5. МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

**Метрическими** называются задачи, связанные с определением на комплексном чертеже истинных величин расстояний, углов и плоских фигур.

Эти задачи можно объединить в три основные группы.

Первая группа включает в себя определение расстояний от точки до другой точки, до прямой, до плоскости, до поверхности; от прямой до другой прямой, до плоскости; от плоскости до другой плоскости.

Вторая группа включает в себя определение углов между пересекающимися или скрещивающимися прямыми; между прямой и плоскостью; между плоскостями.

Третья группа задач связана с определением истинной величины плоской фигуры или части поверхности (развёртки).

Перечисленные задачи удобно решать с использованием рассмотренных выше методов преобразования комплексного чертежа.

Рассмотрим решение некоторых наиболее часто встречающихся задач указанного типа.

### 5.1. Определение расстояний

Расстояние от точки до точки определяется длиной отрезка прямой, соединяющей эти точки. Как было показано выше, эту задачу можно решить либо методом прямоугольного треугольника (раздел 2.2.2), либо способом замены плоскостей проекций, переводя отрезок в положение линии уровня (раздел 4.1.1).

#### 5.1.1. Расстояние от точки до прямой

Расстояние от точки до прямой измеряется отрезком перпендикуляра, проведённого из точки к прямой. Отрезок этого перпендикуляра изображается в натуральную величину на плоскости проекций в том случае, если он проведён к проецирующей прямой. Таким образом, сначала прямую необходимо перевести в проецирующее положение, как это сделано в разделе 4.1.2, а затем из заданной точки опустить на неё перпендикуляр. На рис. 5.1 представлено решение этой задачи. Для перевода прямой общего положения  $AB$  в положение прямой уровня проводится  $x_{14} // A_1B_1$ . Аппликаты точек  $A_4$  и  $B_4$  берутся с  $\Pi_2$ . Затем  $AB$  переводится в проецирующее положение введением дополнительной плоскости проекций  $\Pi_5$ , для чего проводится новая ось проекций  $x_{45} \perp A_4B_4$ . Аналогично точкам  $A$  и  $B$  в порядке, изложенном в разделе 4.1.2, на плоскость проекций  $\Pi_5$  проецируется точка  $M$ . Проекция  $K_5$  основания  $K$  перпендикуляра, опущенного из  $M$  на  $AB$ , на плоскости проекций  $\Pi_5$  совпадёт с соответствующими проекциями точек  $A$  и  $B$ . Проекция  $M_5K_5$  перпендикуляра  $MK$  есть истинная величина расстояния от  $M$  до  $AB$ . В системе плоскостей проекций  $\Pi_4/\Pi_5$  перпендикуляр

$MK$  будет линией уровня по построению, поскольку лежит в плоскости, параллельной плоскости проекций  $\Pi_5$  ( $K_4M_4 // x_{45}$ ).

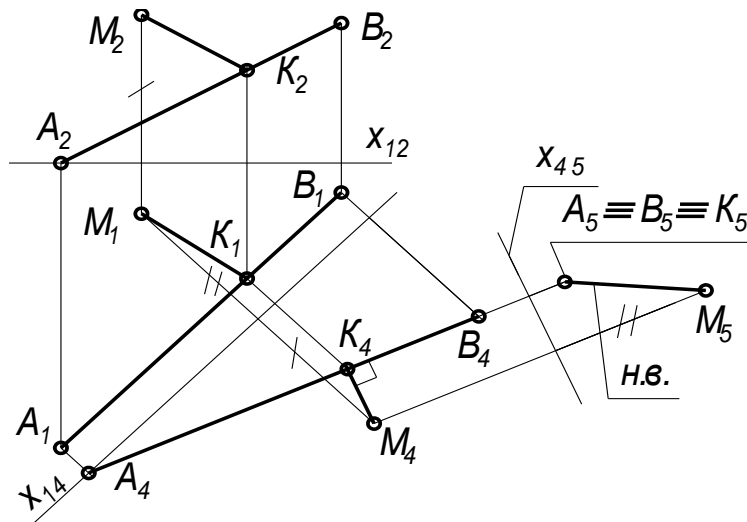


Рис. 5.1

Положение проекции  $K_4$  основания перпендикуляра  $K$  находят, проводя из  $M_4$  прямую параллельно  $x_{45}$  до пересечения с  $A_4B_4$ . Остальные проекции перпендикуляра определяются положением точки  $K$  на  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ .

### 5.1.2. Расстояние от точки до плоскости

Решение этой задачи представлено на рис. 5.2. Расстояние от точки  $M$  до плоскости  $\Omega(ABC)$  измеряется отрезком перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость.

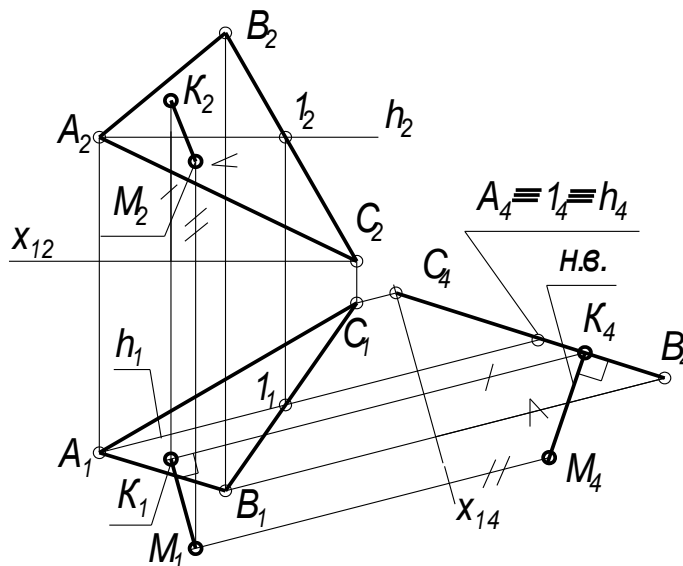


Рис. 5.2

Так как перпендикуляр к проецирующей плоскости есть линия уровня, то переведём в это положение заданную плоскость  $\Omega$  (см. раздел 4.1.3), в результате чего на нововведённой плоскости проекций  $\Pi_4$  получим вырожденную проекцию  $C_4B_4$  плоскости  $ABC$ . Далее на  $\Pi_4$  проецируется точка  $M$ . Натуральная величина расстояния от точки  $M$  до  $\Omega$  определяется отрезком перпендикуляра  $[MK] = [M_4K_4]$ . Остальные проекции перпендикуляра строятся так же, как и в предыдущей задаче, т.е. с учётом того, что отрезок  $MK$  в системе плоскостей проекций  $\Pi_1/\Pi_4$  является линией уровня и его проекция  $M_1K_1$  – параллельна  $x_{14}$ .

### 5.1.3. Расстояние между двумя прямыми

**Кратчайшее расстояние между скрещивающимися прямыми измеряется величиной отрезка общего перпендикуляра к ним, отсекаемого этими прямыми.** Задача решается путём перевода одной из прямых в проецирующее положение (см. раздел 4.1.2, рис. 4.6) двумя последовательными заменами плоскости проекций. В приведённом на рис. 5.3 примере в проецирующее положение переведена прямая  $AB$ .

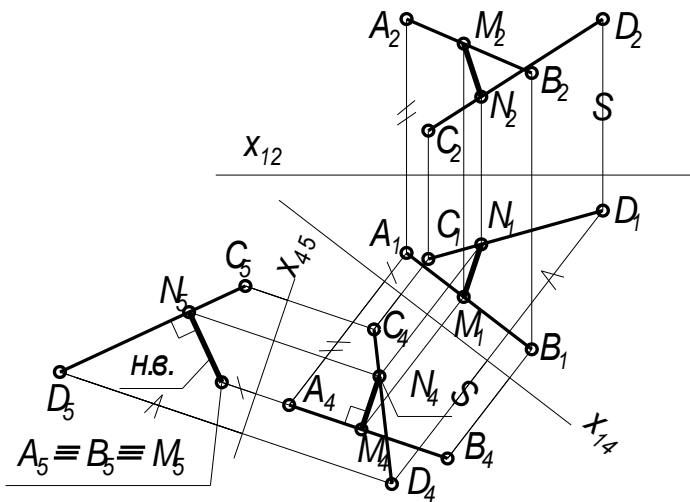


Рис. 5.3

Прямые сначала спроецированы на плоскость проекций  $\Pi_4$ , параллельную  $AB$  и перпендикулярную  $\Pi_1$ .

На плоскости проекций  $\Pi_4$  отрезок  $AB$  изобразится без искажения. Затем отрезки проецируются на новую плоскость  $\Pi_5$ , перпендикулярную той же прямой  $AB$  и плоскости  $\Pi_4$ . На плоскости проекций  $\Pi_5$  проекция перпендикулярного ей отрезка  $AB$  вырождается в точку  $A_5 \equiv B_5$ , после чего из вырожденной проекции прямой опускается перпендикуляр на  $C_5D_5$ . Его длина  $M_5N_5$  является искомым расстоянием, т.к. перпендикуляр будет параллелен плоскости проекций  $\Pi_5$  (раздел 5.1.1) и проецируется на неё без искажения. Как было показано ранее, проекция  $N_4M_4$  искомого отрезка на плоскость  $\Pi_4$  параллельна оси проекций  $x_{45}$ , т.к. он в системе плоскостей проекций  $\Pi_4/\Pi_5$  является линией уровня.

При помощи соответствующих линий связи строятся проекции отрезка  $MN$  на первоначальном чертеже.

Задача по определению расстояния  $\Delta$  между двумя параллельными прямыми  $AB$  и  $CD$  является частным случаем предыдущей (рис. 5.4).

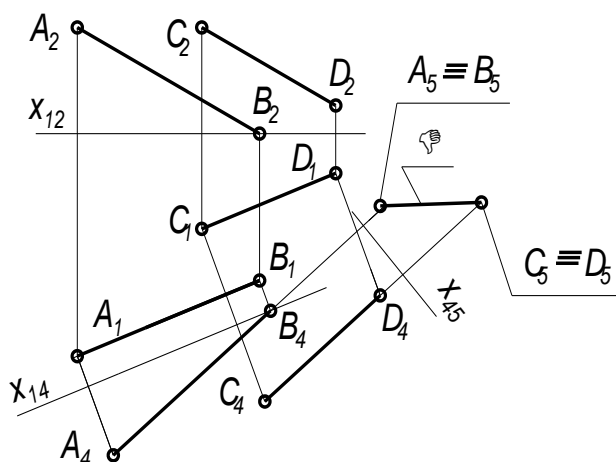


Рис. 5.4

Двойной заменой плоскостей проекций параллельные прямые переводятся в проецирующее положение, в результате чего на плоскости проекций  $\Pi_5$  будем иметь две вырожденные проекции  $A_5 \equiv B_5$  и  $C_5 \equiv D_5$  прямых  $AB$  и  $CD$ . Расстояние между ними  $\Delta$  будет равно его истинной величине.

Расстояние от прямой до плоскости измеряется отрезком перпендикуляра, опущенного из любой точки прямой на плоскость. Поэтому достаточно плоскость общего положения преобразовать в положение проецирующей плоскости, взять на прямой точку и опустить из неё перпендикуляр на вырожденную проекцию плоскости. В результате решение задачи будет сведено к определению расстояния от выбранной точки до плоскости (раздел 5.1.2).

Для определения расстояния между параллельными плоскостями надо перевести их в проецирующее положение и построить перпендикуляр к вырожденным проекциям плоскостей, отрезок которого между ними и будет искомой величиной расстояния.

## 5.2. Определение углов

В общем случае угол, составленный пересекающимися или скрещивающимися прямыми общего положения, проецируется на плоскости проекций искажённо.

Однако если стороны угла параллельны плоскости проекций (занимают частное положение прямых уровня), то угол проецируется на эту плоскость в натуральную величину.



## 5.2.1. Угол между скрещивающимися прямыми

**Угол между скрещивающимися прямыми измеряется величиной плоского угла, образованного пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным скрещивающимся прямым.**

Пусть требуется определить величину угла между скрещивающимися прямыми  $a$  и  $b$  (рис. 5.5).

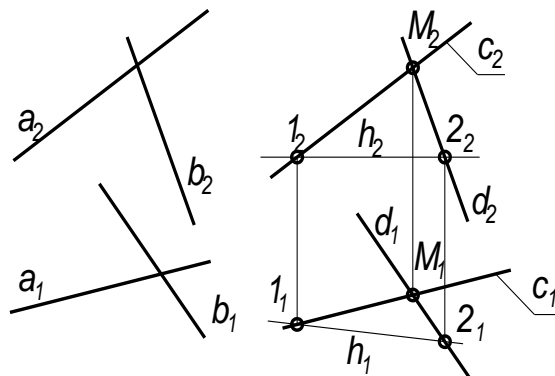


Рис. 5.5

Для этого через произвольную точку  $M$  проведены пересекающиеся прямые  $c \parallel a$  и  $d \parallel b$ .

На комплексном чертеже одноименные проекции параллельных прямых соответственно параллельны, т.е.  $c_2 \parallel a_2$ ,  $d_2 \parallel b_2$ ;  $c_1 \parallel a_1$ ,  $d_1 \parallel b_1$ .

Затем через  $c$  и  $d$  проводится горизонталь  $h$  (или фронталь  $f$ ), после чего треугольник  $IM_2$  переводится в положение плоскости уровня так, как это было сделано в разделе 4.1.4 (рис. 4.9).

Все его углы (и в том числе искомый) проецируются на соответствующую плоскость проекций без искажения.

## 5.2.2. Угол между прямой и плоскостью

Угол наклона прямой к плоскости измеряется величиной линейного острого угла, сторонами которого являются прямая и её проекция на данную плоскость. Однако вместо искомого угла можно найти величину угла между прямой и перпендикуляром из любой её точки на плоскость, так как этот угол будет дополнительным до  $90^\circ$  к искомому.

Пусть требуется найти угол наклона  $\alpha$  прямой  $t$  к плоскости треугольника  $ABC$  (рис. 5.6.) Для этого из некоторой точки  $N$  прямой  $t$  опущен перпендикуляр  $n$  к заданной плоскости (раздел 3.2). Проекции  $n_2$  и  $n_1$  этого перпендикуляра соответственно перпендикулярны к одноимённым проекциям  $f_2$  фронтали и  $h_1$  горизонтали плоскости треугольника  $ABC$ . Угол  $\beta$  между прямыми  $n$  и  $t$  является дополнительным к искомому углу  $\alpha$ , т.е.  $\alpha = 90^\circ - \beta$ . Действительную

величину угла  $\beta$  можно определить в соответствии с изложенным в разделе 5.2.1.

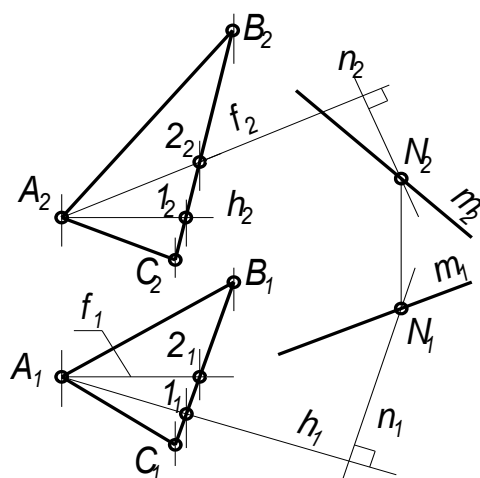


Рис. 5.6

### 5.2.3. Угол между двумя плоскостями

Двугранный угол (между двумя плоскостями) измеряется линейным острым углом, составленным линиями пересечения граней с плоскостью, перпендикулярной к ребру двугранного угла, т.е. к линии пересечения двух плоскостей.

Линейный угол, служащий мерой двугранного угла, изображается без искажения на плоскости проекций, перпендикулярной его ребру. Однако ребро двугранного угла во многих случаях занимает общее положение относительно плоскостей проекций. Так на рис. 5.7 представлен комплексный чертёж двугранного угла, образованного плоскостями  $ABC$  и  $BCD$ , где их общее ребро  $BC$  занимает общее положение.

После перевода этого ребра в проецирующее положение на плоскости проекций  $\Pi_5$  обе грани угла вместе с ребром также займут проецирующее положение (раздел 4.1.3). В результате двугранный угол  $\angle A_5B_5D_5 = \alpha$  на этой плоскости проекций будет показан в натуральную величину.

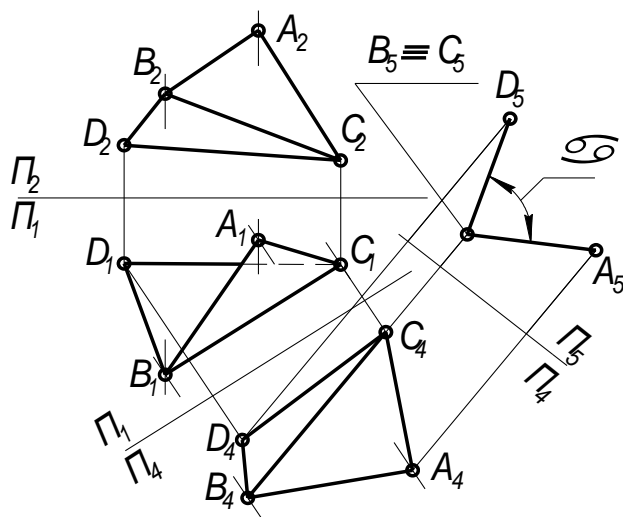


Рис. 5.7

## Контрольные вопросы к главе 5

1. Каков порядок решения задачи по определению расстояния между двумя скрещивающимися прямыми способом замены плоскостей проекций?
2. Каков порядок решения задачи по определению натуральной величины расстояния между точкой и плоскостью общего положения способом замены плоскостей проекций?
3. Каков порядок решения задачи на определение натуральной величины расстояния между двумя прямыми способом замены плоскостей проекций?
4. Каков порядок решения задачи на определение натуральной величины расстояния между двумя параллельными плоскостями способом замены плоскостей проекций?
5. Каков порядок решения задачи на определение натуральной величины угла между двумя скрещивающимися прямыми?
6. Каков порядок решения задачи на определение натуральной величины угла между прямой и плоскостью?
7. Каков порядок решения задачи на определение натуральной величины угла между двумя плоскостями?

## 6. КРИВЫЕ ЛИНИИ И ПОВЕРХНОСТИ

### 6.1. Комплексный чертёж кривой линии

Кривая линия представляет собой геометрическое место последовательных положений непрерывно перемещающейся в пространстве точки.

Аналитически заданные кривые линии могут быть **алгебраическими** и **трансцендентными**. Примером алгебраических кривых линий являются так называемые конические сечения (раздел 7), которые представляют собой

кривые второго порядка. Порядок кривой соответствует максимальному числу точек пересечения её с прямой.

Примерами трансцендентных кривых являются синусоида, циклоида, эвольвента окружности и др.

Если все точки кривой лежат в одной плоскости, кривая называется **плоской**. В противном случае она называется **пространственной**. Примером пространственных кривых могут служить винтовые линии.

Касательную прямую можно рассматривать как предельное положение секущей при бесконечно близком расположении точек пересечения друг к другу (прямая  $t$  на рис. 6.1а). Если кривая имеет в каждой своей точке определённую и единственную касательную, то она называется **гладкой кривой линией**.

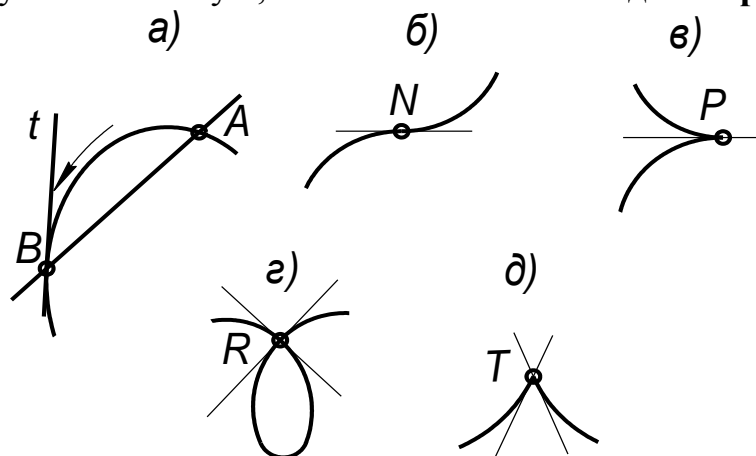


Рис. 6.1

Точки плоских кривых разделяются на **обыкновенные** и **особые**. Некоторые случаи особых точек показаны на рис. 6.1б, в, г и д:  $N$  – **точка перегиба**,  $P$  – **точка возврата**,  $R$  – **узловая точка**,  $T$  – **точка излома**.

Отметим некоторые свойства ортогонального проецирования кривой.

Касательная к кривой в пространстве проецируется в касательную к её проекции. На рис. 6.2 проведены проекции касательной  $t$  к кривой  $l$  в точке  $K$ .

Особые точки плоской кривой проецируются в особые точки её проекций.

Порядок алгебраической кривой в общем случае сохраняется при проецировании. Так кривые второго порядка (конические сечения) проецируются также в кривые второго порядка.

В частном случае, при расположении плоской кривой в проецирующей плоскости, её проекция вырождается в прямую (или отрезок прямой).

На рис. 6.3 показан комплексный чертёж плоской кривой  $m$ , лежащей во фронтально проецирующей плоскости  $\Sigma_2 \perp \Pi_2$ .

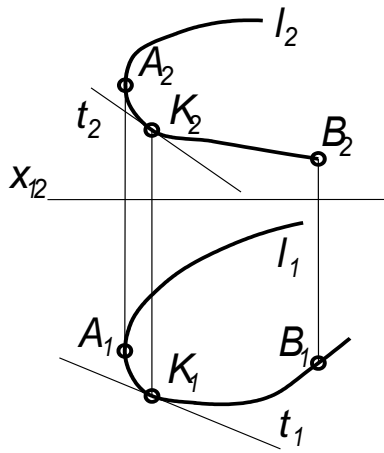


Рис. 6.2

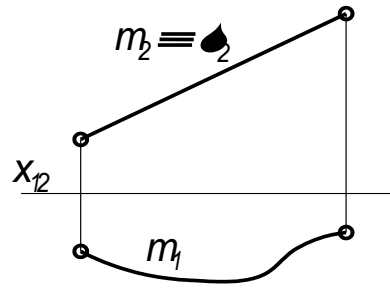


Рис. 6.3

Чтобы установить по чертежу, какая задана кривая (плоская или пространственная), необходимо выяснить, принадлежат ли все точки кривой одной плоскости. Заданная на рис. 6.4 кривая является пространственной, так как две прямые  $AD$  и  $BE$ , соединяющие две пары точек кривой  $m$ , не пересекаются, т.е. не образуют плоскости, поскольку точки пересечения их проекций  $K_2$  и  $M_1$  не лежат на одной линии связи.

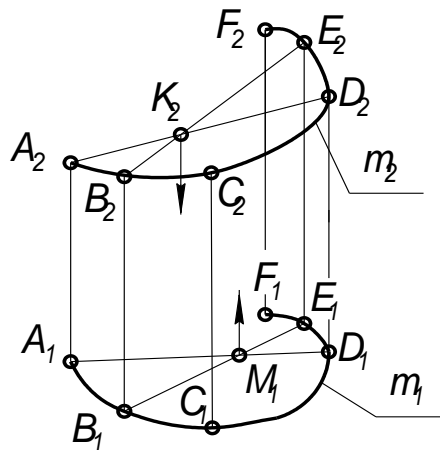


Рис. 6.4

Приведём примеры двух кривых, часто встречающихся в инженерной практике.

### 6.1.1. Комплексный чертёж окружности

Окружность – плоская кривая второго порядка, ортогональные проекции которой в общем случае – эллипсы. Диаметр окружности, параллельный плоскости проекций, проецируется на неё в натуральную величину, и его проекция является большой осью эллипса.

На рис. 6.5 приведён комплексный чертёж окружности, расположенной во фронтально проецирующей плоскости  $\Sigma_2$ .

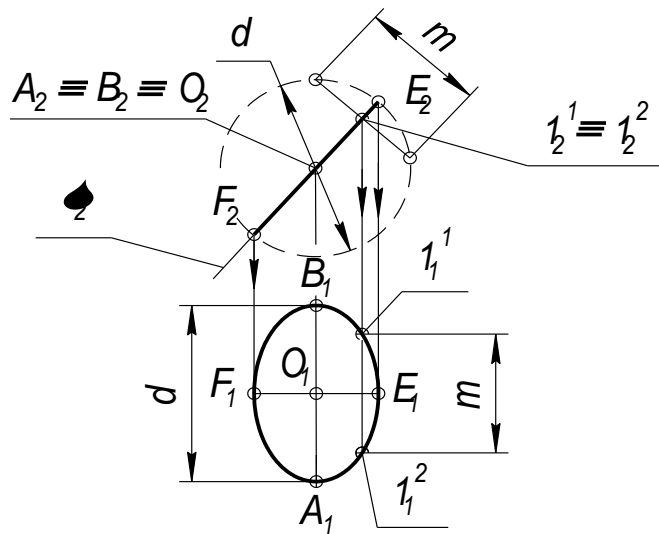


Рис. 6.5

Очевидно, что длина вырожденной фронтальной проекции окружности  $E_2F_2$  будет равна её диаметру  $d$ . Каждая точка фронтальной проекции представляет собой вырожденную проекцию хорды окружности, которая проецируется на  $\Pi_1$  в натуральную величину в виде прямой (горизонтали), перпендикулярной оси проекций. Горизонтальная проекция окружности представляет собой эллипс, построение которого осуществляется по точкам. Возьмём произвольную точку  $I_2$  на отрезке  $E_2F_2$  (здесь находятся две фронтально конкурирующие точки окружности  $1_2^1$  и  $1_2^2$ ). Хорда окружности  $1_2^1 1_2^2$ , длина которой  $m$  может быть определена с помощью вспомогательного построения так, как показано на рисунке, откладывается на горизонтальной плоскости проекций в натуральную величину. В результате получим точки  $1_1^1$  и  $1_1^2$  горизонтальной проекции окружности. Повторяем эту операцию необходимое количество раз. Соединив все точки плавной кривой, будем иметь искомую горизонтальную проекцию окружности.

### 6.1.2. Комплексный чертёж винтовой линии

Цилиндрическая винтовая линия (гелиса) – пространственная кривая, представляющая собой траекторию точки, выполняющей винтовое движение (рис. 6.6). Винтовое движение включает в себя равномерно поступательное движение вдоль оси  $i$  и равномерно вращательное движение вокруг этой оси. Высота  $h$ , на которую точка поднимается за полный оборот, называется шагом винтовой линии. Если ось  $i$  перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций, то горизонтальная проекция винтовой линии – окружность, а фронтальная – синусоида. Для построения фронтальной проекции винтовой линии при заданном диаметре  $d$  и шаге  $h$  нужно разделить и окружность, и шаг на равное

количество частей. Дальнейшие построения видны из чертежа. Цилиндрическую винтовую линию можно развернуть на плоскость. Её развёртка представляет собой прямую линию с углом подъёма  $\alpha$ , где  $\operatorname{tg} \alpha = h/\pi d$ .

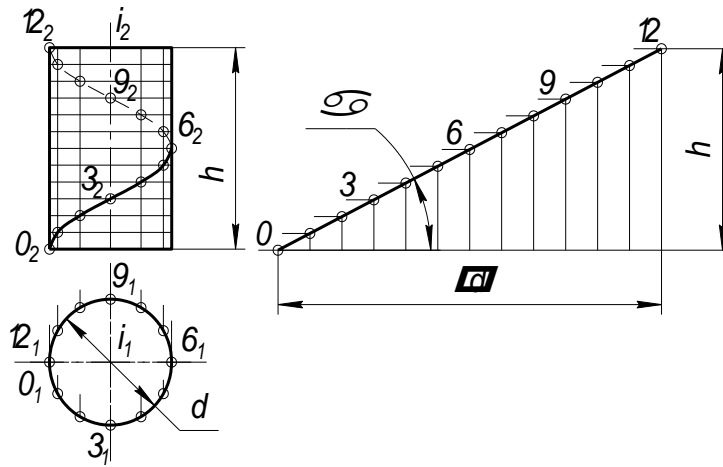


Рис. 6.6

## 6.2. Комплексный чертёж поверхности

**Поверхность** представляет собой множество последовательных положений линии, перемещающейся в пространстве. Эту линию называют **образующей поверхности**. Она может быть прямой или кривой. Кривая образующая может быть постоянного или переменного вида.

Закон перемещения образующей может быть задан тоже линиями, но иного направления. Эти линии называются **направляющими**. Совокупность нескольких последовательных положений образующей и направляющих создаёт **каркас поверхности** (рис. 6.7).

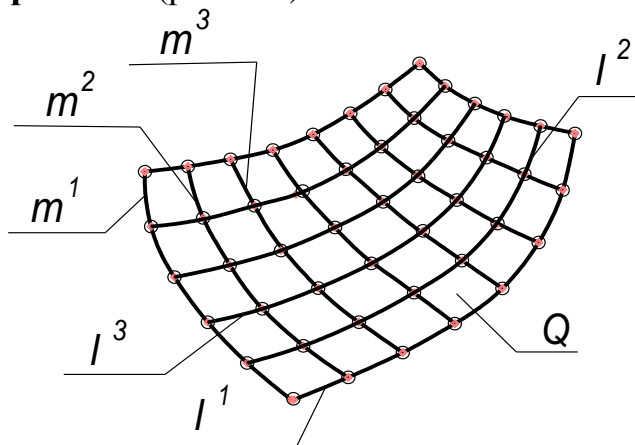


Рис. 6.7

Образующие  $l$  и направляющие  $m$  можно поменять местами. При этом поверхность не изменится.

Поверхности можно получать различными способами. Так прямой круговой цилиндр получается путём вращения образующей вокруг его оси или перемещением центра окружности вдоль той же оси.

В зависимости от формы образующей все поверхности можно разделить на **линейчатые** (образующая – прямая линия) и **нелинейчатые** (образующая – кривая линия).

Линейчатые поверхности подразделяются на **развёртывающиеся**, совмещаемые всеми своими точками с плоскостью без разрывов и складок, и **неразвёртывающиеся**, которые нельзя совместить с плоскостью таким образом. К развёртывающимся поверхностям относятся поверхности многогранников, цилиндрические, конические и торсовые (см. ниже). Все остальные поверхности – неразвёртывающиеся.

Нелинейчатые поверхности могут иметь образующую постоянной и переменной формы.

Совокупность независимых геометрических условий, которая однозначно определяет данную поверхность в пространстве, называется **определителем поверхности**.

При проецировании поверхности на плоскость проекций проецирующие лучи касаются этой поверхности в точках, образующих на ней некоторую линию, которая называется **контурной линией**. Проекция контурной линии называется **очерком поверхности**. Таким образом, существуют горизонтальный, фронтальный и профильный очерки поверхности.

### 6.2.1. Линейчатые поверхности

Линейчатой поверхностью называется поверхность, которая описывается какой-либо прямой (образующей) при её движении в пространстве по какому-нибудь закону.

**Гранные поверхности** (рис. 6.8) получают перемещением прямолинейной образующей по ломаной направляющей.

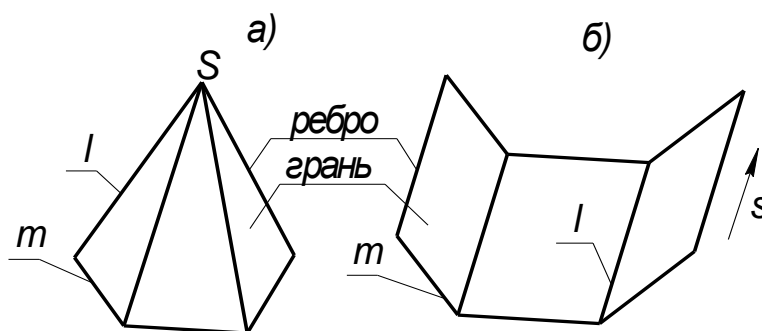


Рис. 6.8

При этом, если одна точка  $S$  образующей неподвижна, создаётся **пирамидальная поверхность** (рис. 6.8а), если же образующая при перемещении



параллельна заданному направлению  $s$ , то создаётся **призматическая поверхность** (рис. 6.8б).

Замкнутые гранные поверхности называются **многогранниками**. Из числа многогранников выделяют группу правильных многогранников, у которых все грани – правильные многоугольники, а многогранные углы при вершинах выпуклые и содержат одинаковое число граней. Например, тетраэдр – правильный четырёхгранник, гексаэдр – куб, октаэдр – восьмигранник и т.д. (рис. 6.9а, б, в).

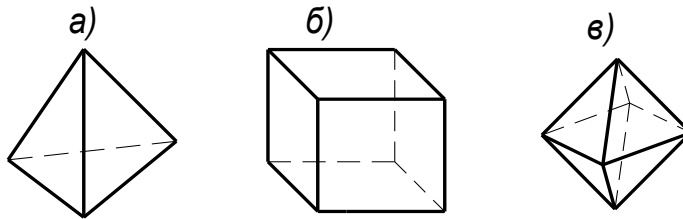


Рис. 6.9

**Пирамида** – многогранник, в основании которого лежит произвольный многоугольник, а боковые грани – треугольники с общей вершиной  $S$ .

На комплексном чертеже (рис. 6.10) пирамида задаётся проекциями её вершин и рёбер с учётом их видимости. Видимость рёбер определяется с помощью конкурирующих точек.

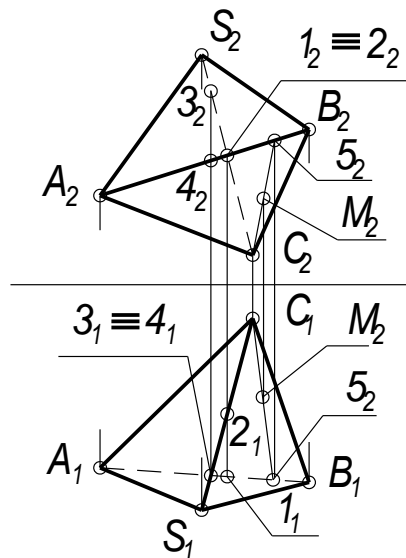


Рис. 6.10

Точки 1 и 2 – фронтально конкурирующие. Горизонтальная проекция  $1_1$  точки 1, лежащей на ребре  $AB$ , расположена ближе к наблюдателю, чем горизонтальная проекция  $2_1$  точки 2, лежащей на  $SC$ . Поэтому на фронтальной проекции пирамиды отрезок  $A_2B_2$  будет видимой, а  $S_2C_2$  – невидимой линией. Проекция  $3_2$  точки 3 расположена на фронтальной плоскости проекций выше, чем

$4_2$  (точки 3 и 4 являются горизонтально конкурирующими и лежат соответственно на  $SC$  и  $AB$ ). Это говорит о том, что на горизонтальной проекции пирамиды ребро  $SC$  будет видимым, а  $AB$  – невидимым. Любую точку на гранной поверхности можно построить с помощью образующей, проходящей через эту точку. Так на грани  $ABC$  с помощью образующей  $C5$  построена точка  $M$ .

**Призма** – многогранник, у которого основаниями являются два взаимно параллельных многоугольника, а боковые грани – параллелограммы. Если у призмы рёбра перпендикулярны плоскости основания, её называют прямой. На рис. 6.11 дан комплексный чертёж прямой четырёхугольной призмы с горизонтально проецирующей поверхностью.

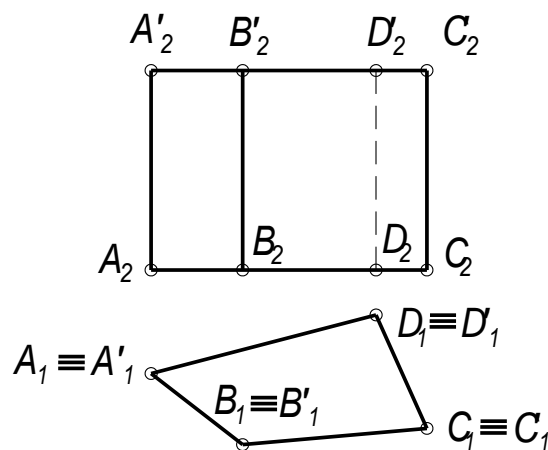


Рис. 6.11

**Коническая** поверхность образуется перемещением прямолинейной образующей  $l$  по криволинейной направляющей  $m$  (рис. 6.12а). При этом одна точка  $S$  образующей всегда неподвижна и является вершиной. Определитель конической поверхности включает в себя вершину  $S$  и направляющую  $m$ . При этом  $l \ni S$ ;  $l \cap m$ .

**Цилиндрическая** поверхность образуется прямой  $l$ , пересекающей кривую направляющую  $m$  и параллельной заданному направлению  $s$  (рис. 6.12б).

Цилиндрическую поверхность можно рассматривать как частный случай конической поверхности с бесконечно удалённой вершиной. Определитель цилиндрической поверхности состоит из направляющей  $m$  и направления  $s$  образующих  $l$ , при этом  $l \parallel s$ ;  $l \cap m$ .

Если образующие цилиндрической поверхности перпендикулярны плоскости проекций, то такую поверхность называют проецирующей.

Обычно точки на конических и цилиндрических поверхностях строят с помощью образующих, проходящих через них. Линии на поверхностях строятся с помощью отдельных точек.

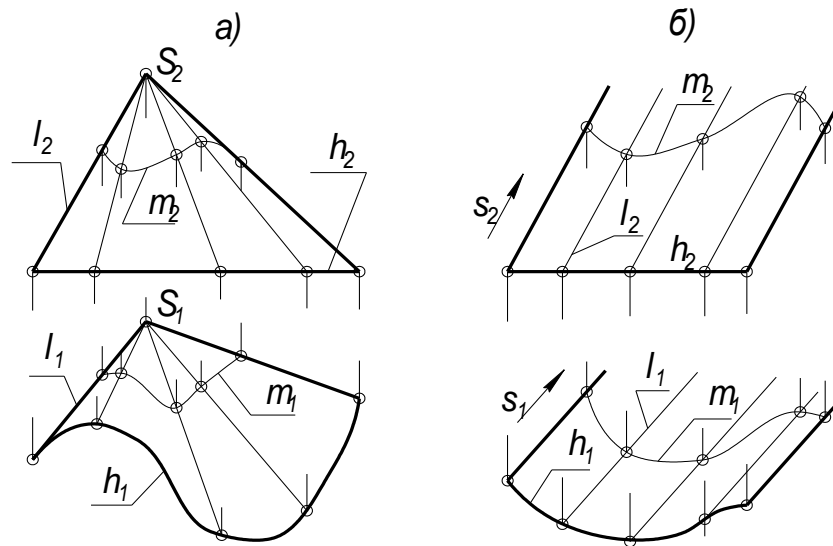


Рис. 6.12

**Торсом** называется поверхность, образованная прямолинейной образующей  $l$ , касающейся при своём движении во всех своих положениях некоторой **пространственной кривой  $m$** , называемой **ребром возврата**.

На рис. 6.13а, б приведены пространственный и комплексный чертежи торса.

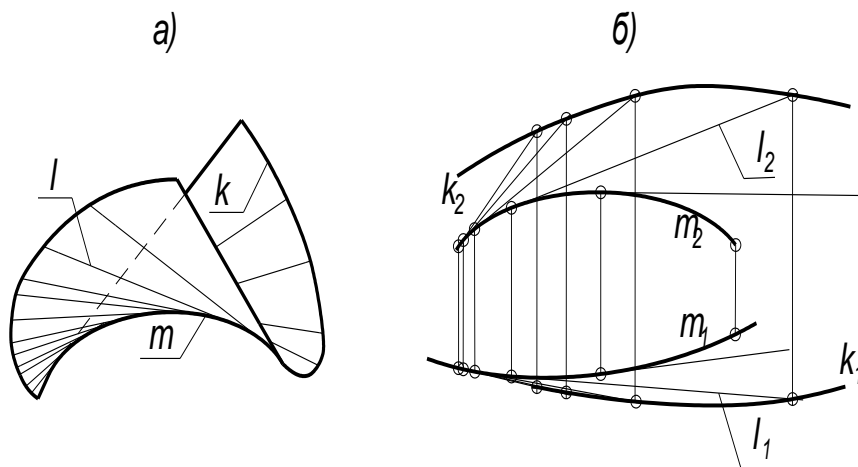


Рис. 6.13

Если  $m$  плоская кривая, то торс вырождается в плоскость.

Коническая поверхность является частным случаем торса, у которого ребро возврата  $m$  вырождено в точку  $S$  – вершину конической поверхности.

Цилиндрическая поверхность – частный случай торса, у которого ребро возврата – точка в бесконечности.

**Винтовой поверхностью** называется поверхность, создаваемая при винтовом движении прямолинейной образующей  $l$  по двум направляющим – винтовой линии  $m$  и её оси  $i$  (рис. 6.14).

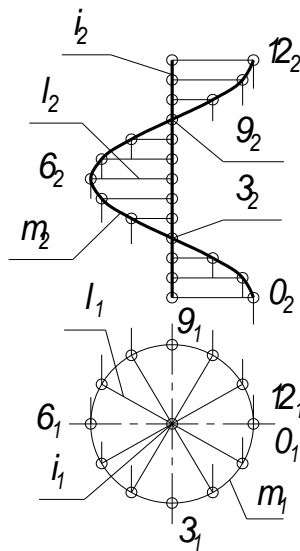


Рис. 6.14

### 6.2.2. Поверхности вращения

**Поверхности вращения** (рис. 6.15 – 6.18) образуются вращением линии  $l$  вокруг прямой  $i$  – оси вращения. Они могут быть **линейчатыми** и **нелинейчатыми** (криволинейными).

Определитель поверхности вращения включает образующую  $l$  и ось  $i$ .

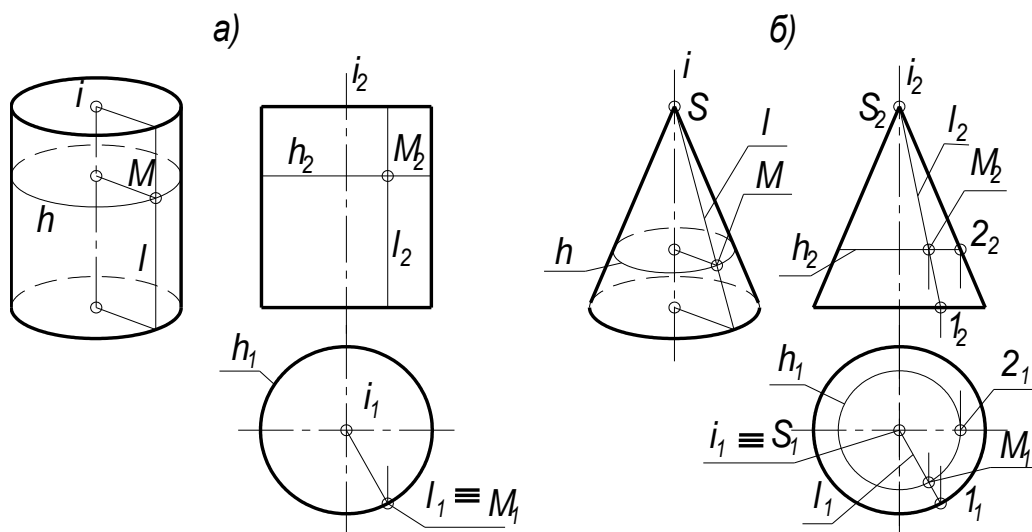


Рис. 6.15

Каждая точка образующей описывает при вращении окружность, плоскость которой перпендикулярна оси вращения. Эти окружности называются **параллелями**. Наибольшая и наименьшая параллели называются соответственно **экватором** и **горлом**.

Кривые, образующиеся на поверхности вращения в результате пересечения поверхности плоскостями, проходящими через ось вращения, называются **меридианами**.

**Цилиндр вращения** образуется вращением прямой  $l$  вокруг параллельной ей оси  $i$  (рис. 6.15а).

**Конус вращения** образуется вращением прямой  $l$  вокруг пересекающейся с ней оси  $i$  (рис. 6.15б).

Точки на поверхности вращения обычно строят с помощью параллелей  $h$  и образующих  $l$ . На рисунках показано построение проекций точки  $M$ , лежащей на поверхности цилиндра и конуса.

**Однополостный гиперboloид вращения** также является линейчатой поверхностью и образуется вращением прямой  $l$  вокруг скрещивающейся с ней оси  $i$  (рис. 6.16).

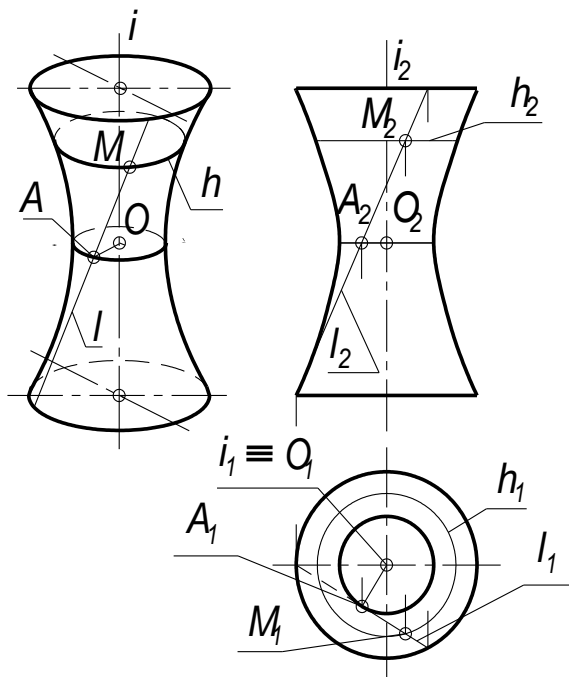


Рис. 6.16

При вращении прямой вокруг оси  $i$  все точки прямой  $l$  опишут окружности различных радиусов, причём общий перпендикуляр  $AO$  прямых  $i$  и  $l$  будет наименьшим из всех радиусов, и точка  $A$  опишет окружность, которую называют горлом гиперboloида. Фронтальным его очерком будет гипербола, откуда он и получил своё название. Стержневые конструкции, выполненные в форме гиперboloида, получили широкое распространение в строительстве. Примером может служить башня инженера Шухова, являющаяся одной из московских достопримечательностей.

В повседневной практике часто приходится иметь дело с нелинейчатыми поверхностями, образованными вращением окружности вокруг какой-либо оси. К таким поверхностям относятся сфера и тор.

**Сфера**, как известно, образуется вращением окружности вокруг собственного диаметра.

**Тор** образуется вращением окружности вокруг оси  $i$ , лежащей в плоскости окружности, но не проходящей через её центр. При этом, если ось  $i$  проходит внутри окружности (рис. 6.17а), то тор называется самопересекающимся, а если вне её, то – открытым (рис. 6.17б). Сфера является поверхностью второго порядка, а тор – четвёртого,

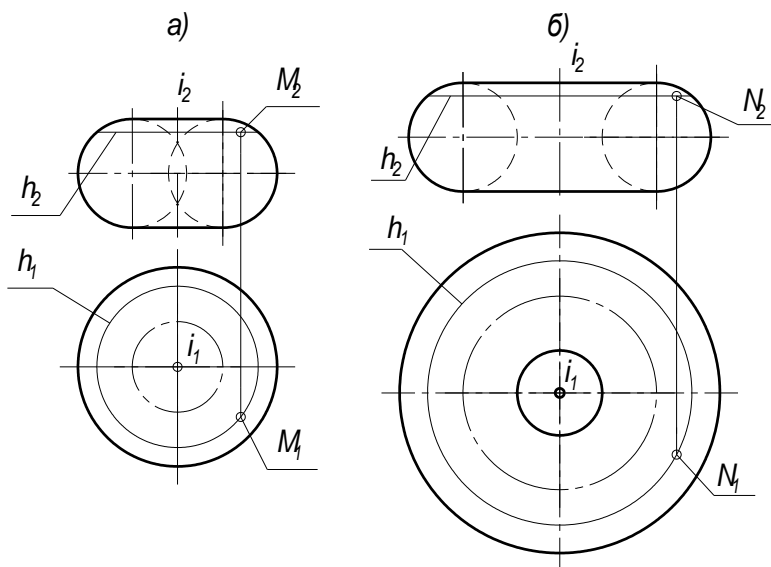


Рис. 6.17

что соответствует максимальному числу точек пересечения этих поверхностей с прямой линией. На рисунке также показано, как определяется положение точек  $M$  и  $N$  на поверхности тора.

**Эллипсоид вращения** образуется вращением эллипса вокруг одной из его осей (рис. 6.18).

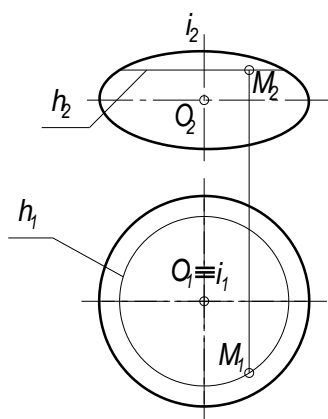


Рис. 6.18

Сфера является частным случаем эллипсоида, когда обе его оси равны между собой.

## Контрольные вопросы к главе 6

1. Какова классификация линий?
2. Как построить проекции окружности в плоскостях общего и частного положения?
3. Какие кривые линии Вы знаете?
4. Расскажите о цилиндрической винтовой линии.
5. Каковы основные принципы образования поверхности?
6. Расскажите о классификации поверхностей.
7. Что такое определитель поверхности?
8. Как образуются линейчатые поверхности?
9. Как образуются поверхности вращения?
10. Как образуются гранные поверхности?
11. Какого типа поверхность однополостного гиперболоида?

## 7. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ПЛОСКОСТЬЮ И ПРЯМОЙ. КАСАТЕЛЬНЫЕ ПЛОСКОСТИ

### 7.1. Сечение поверхности плоскостью

Если одна из пересекающихся поверхностей – плоскость, то такое пересечение принято называть сечением поверхности плоскостью. Полученная при этом линия называется **линией сечения**. Если она замкнута, то ограниченная ею фигура называется **сечением**. В сечении поверхности плоскостью получается плоская линия.

Если поверхность гранная (рис. 7.1), то эта линия будет ломаной.

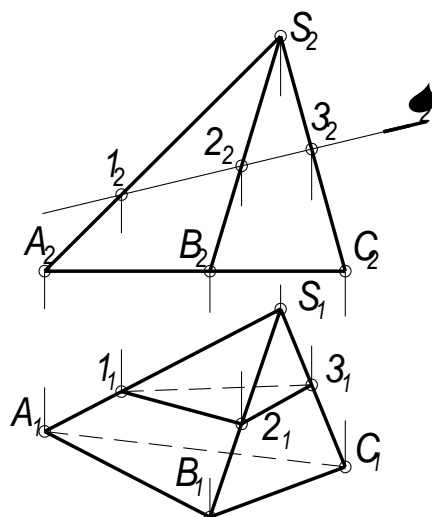


Рис. 7.1

Для её построения достаточно определить точки пересечения рёбер и сторон основания (если имеет место пересечение основания) и соединить полученные точки с учётом их видимости. На рис. 7.1 секущая плоскость  $\Sigma_2$  занимает фронтально проецирующее положение, поэтому точки пересечения рёбер определяются без дополнительных построений. Так как грань  $ASC$  невидима относительно плоскости  $\Pi_1$ , то и ребро  $1_1 3_1$  тоже невидимо.

В сечении цилиндрической поверхности вращения плоскостью могут быть получены следующие линии (рис.7.2):

окружность, если секущая плоскость  $\Gamma_2$  перпендикулярна оси вращения поверхности;

эллипс, если секущая плоскость  $\Sigma_2$  не перпендикулярна и не параллельна оси вращения;

две образующие прямые, если секущая плоскость  $P_2$  параллельна оси вращения поверхности.

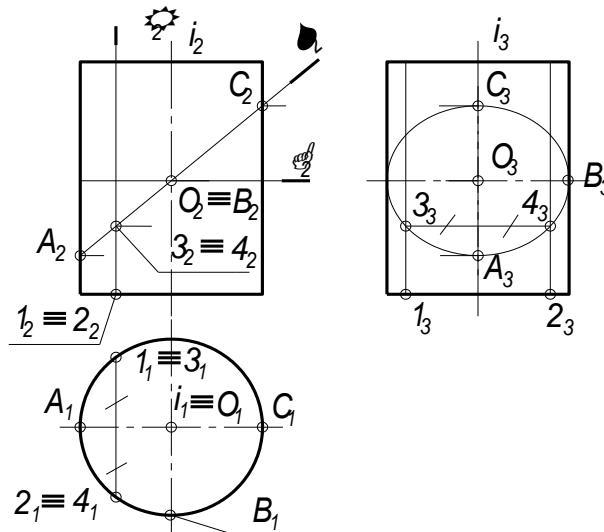


Рис. 7.2

При сечении цилиндра плоскостью  $\Sigma_2$  на профильной проекции (рис. 7.2) будем иметь эллипс, построение которого начинается с определения положения опорных точек  $C_3$  и  $A_3$ , диктуемое фронтальными проекциями  $C_2$  и  $A_2$ .

Здесь следует напомнить, что к опорным относятся экстремальные точки (высшая и низшая, ближняя и дальняя и т.д.) и точки видимости (проекции этих точек лежат на контурной линии поверхности). Точки видимости разграничивают линию пересечения на видимую и невидимую части.

Малая ось эллипса равна  $A_3C_3$ , а большая – диаметру цилиндра. Положение промежуточных точек 3 и 4 можно определить введением вспомогательных секущих плоскостей – **плоскостей посредников**, дающих при пересечении с поверхностью геометрически простые линии. В данном случае в качестве плоскостей посредников удобно выбрать фронтально проецирующие плоскости  $P_2$ .



При сечении цилиндра этой плоскостью на его профильной проекции получим две образующие, положение которых относительно оси определится горизонтальными проекциями  $1_1$  и  $2_1$  точек  $1$  и  $2$ , лежащих на основании цилиндра. Пересечение образующих с линией связи, проведённой из точки  $3_2 \equiv 4_2$ , даст промежуточные точки  $3_3$  и  $4_3$  на профильной проекции. Поступая подобным образом, определим необходимое количество промежуточных точек для построения эллипса. В заключение соединяем все точки плавной кривой, имея в виду, что участок кривой, проходящей через точки  $B_3$  и  $C_3$  между двумя крайними образующими, – невидимый.

В сечении конической поверхности вращения плоскостью могут быть получены следующие линии (рис. 7.3 и 7.4):

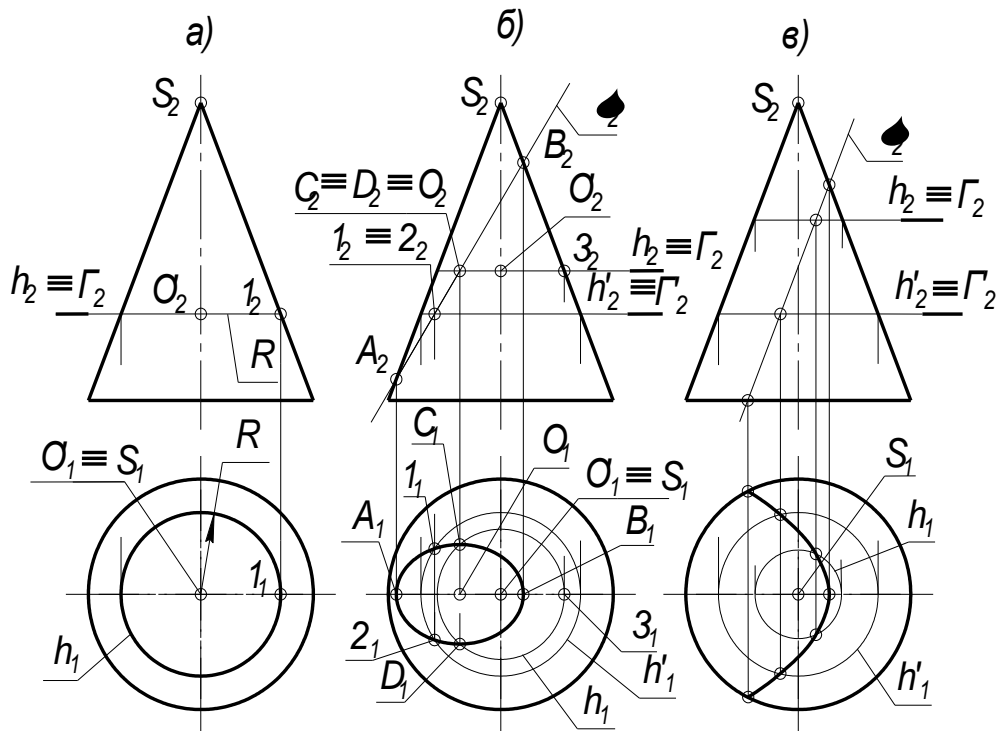


Рис. 7.3

окружность, если секущая плоскость  $\Sigma$  перпендикулярна оси вращения;  
 эллипс, если секущая плоскость  $\Sigma$  пересекает все образующие поверхности;

парабола, если секущая плоскость  $\Sigma$  параллельна одной из образующих;  
 гипербола, если секущая плоскость  $\Sigma$  параллельна двум образующим поверхности;

две образующие прямые, если секущая плоскость  $\Sigma$  проходит через вершину  $S$  конуса.

Проекции кривых линий сечений конуса плоскостью целесообразно строить с использованием плоскостей посредников, перпендикулярных его оси. Линия пересечения при этом будет окружностью радиуса  $R$  (рис. 7.3а).

Рассмотрим построение линии пересечения на примере, приведённом на рис. 7.3б. Построение начинают с опорных точек. В рассматриваемом примере опорными будут точки  $A, B, C$  и  $D$ . Положение точек  $A$  и  $B$ , ограничивающих большую ось эллипса, очевидно. Точка  $O$ , являющаяся центром эллипса, делит отрезок  $AB$  пополам. Точки  $C$  и  $D$  – фронтально конкурирующие и ограничивают малую ось эллипса. Положение этих точек можно определить, вводя вспомогательную фронтально проецирующую плоскость  $\Gamma$ , проходящую через фронтальную проекцию  $O_2$  центра эллипса  $O$ . Горизонтальная проекция  $h_1$  линии пересечения вспомогательной плоскости с поверхностью конуса – окружность.

Горизонтальная проекция линии пересечения секущей плоскости  $\Sigma$  и вспомогательной плоскости  $\Gamma$  – фронтально проецирующая прямая, т.к. обе эти плоскости – фронтально проецирующие.

Эта линия совпадает с линией связи  $O_1O_2$ , а все точки, лежащие на ней, принадлежат секущей плоскости  $\Sigma$ . Таким образом, точки пересечения линии связи  $O_1O_2$  и  $h_1$  принадлежат одновременно поверхности конуса и секущей плоскости  $\Sigma$ , т.е. являются точками, лежащими на линии их пересечения.

Аналогично строятся промежуточные точки пересечения, например точки  $1$  и  $2$ . Проводится вспомогательная плоскость  $\Gamma'_2$  и, как и ранее, определяется вырожденная в точку фронтальная проекция линии пересечения этой плоскости и секущей плоскости  $\Sigma$ . Из этой точки проводится линия связи до пересечения в точках  $1_1$  и  $2_1$  с окружностью  $h'_1$ . Такие построения повторяются необходимое число раз, после чего полученные точки соединяются плавной кривой. В рассматриваемом примере сечение будет иметь форму эллипса. Натуральный вид эллиптического сечения можно построить так, как показано на примере, приведённом в конце данного раздела (рис. 7.6).

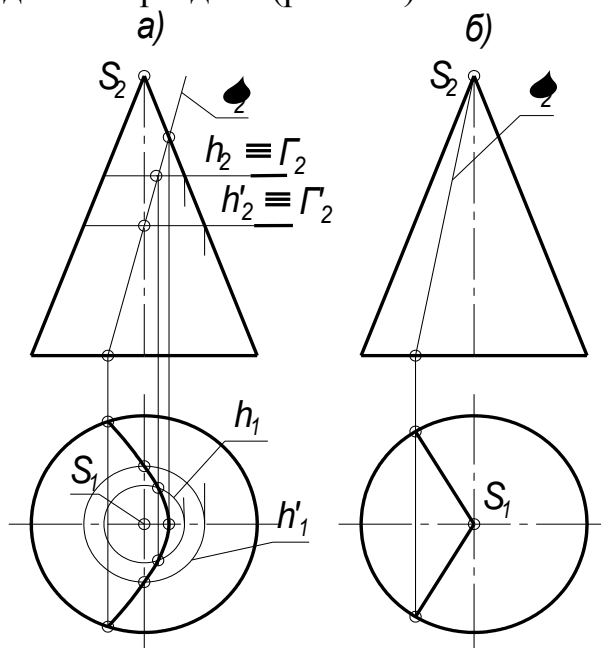


Рис. 7.4

Аналогично строятся конические сечения, приведённые на рис. 7.3в (парабола) и рис. 7.4а (гипербола). На рис. 7.4б показано сечение конуса плоскостью, проходящей через его вершину. Линии пересечения с его поверхностью в данном случае – две образующие прямые.

При пересечении конуса вращения не проецирующей плоскостью, а плоскостью общего положения задачу можно свести к предыдущей заменой плоскостей проекций, переводя секущую плоскость в новой системе плоскостей проекций в проецирующее положение. При этом используются приёмы, рассмотренные в разделе 4.1.3.

Приведём пример (рис.7.5), в котором плоскостью общего положения  $\Sigma(a \cap h)$  пересекается сфера. При этом примем во внимание, что одна из прямых, образующих плоскость, - горизонталь.

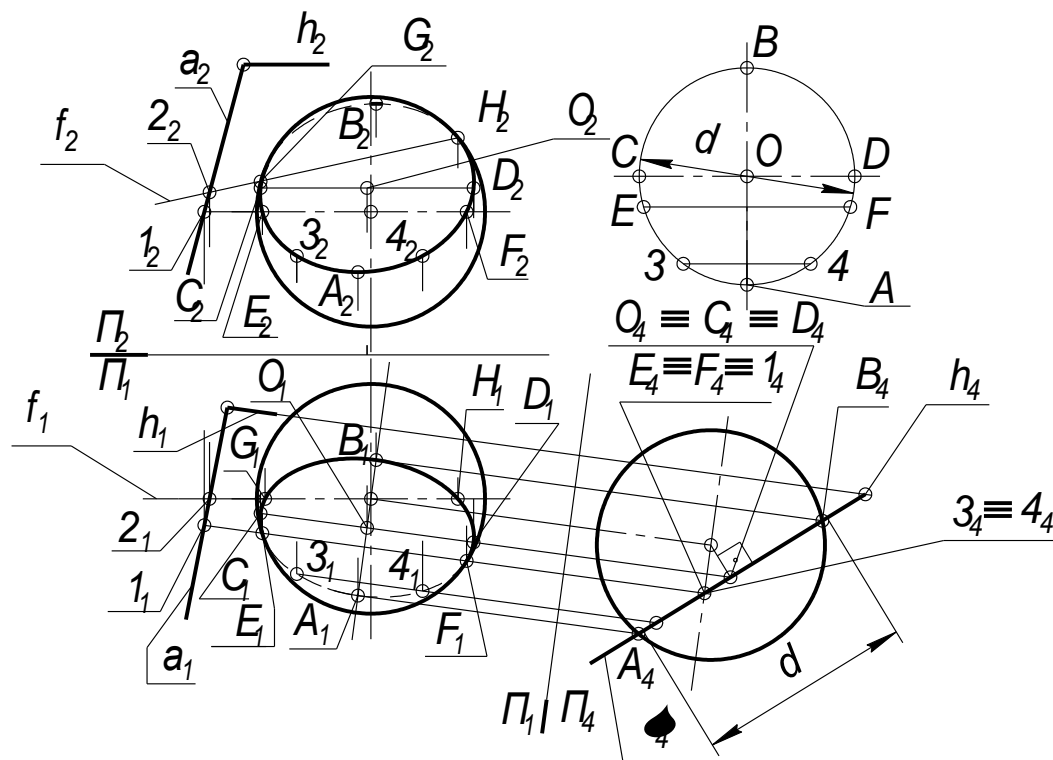


Рис. 7.5

Построим дополнительное изображение сферы и секущей плоскости, вводя плоскость проекций  $\Pi_4 \perp \Pi_1$  так, чтобы  $\Pi_4 \perp h_1$ . Тогда в новой системе плоскостей проекций плоскость  $\Sigma$  станет проецирующей по отношению к  $\Pi_4$ . То есть  $\Sigma \cap \Pi_4 = \Sigma_4$ , где  $\Sigma_4$  – вырожденная в прямую проекция секущей плоскости  $\Sigma(a \cap h)$ . На плоскости проекций  $\Pi_4$  горизонталь  $h$  вырождается в точку  $h_4$ . Для построения  $\Sigma_4$  возьмём любую вторую точку, лежащую на  $\Sigma$ , например точку  $I_2$ , которая лежит на пересечении экваториальной плоскости и  $a_2$ . Проецируя  $I_2$  на  $\Pi_4$ , получим точку  $I_4$  для построения  $\Sigma_4$ . С этой точкой совпадают точки  $E_4 \equiv F_4$  – на экваторе сферы. Их проекции  $E_1$  и  $F_1$  являются точками видимости относительно плоскости  $\Pi_1$ , т.к. лежат на очерковой линии.

Любая плоскость рассекает сферу по окружности. На плоскости  $\Pi_4$  отмечаем проекции опорных точек:  $A_4$  – самой нижней точки сечения,  $B_4$  – самой верхней, определяющих величину диаметра  $d$  окружности сечения с центром в точке  $O_4$ , дополнительно изображённой в правом верхнем углу чертежа. При этом  $C_4 \equiv D_4 \equiv O_4$ , где  $CD = d$  – диаметр сечения, совпадающий по направлению с горизонталью секущей плоскости. Горизонтальная проекция сечения – эллипс – строится по большой  $C_1D_1$  и малой  $A_1B_1$  осям. Дополнительно надо построить промежуточные точки (точки 3 и 4), задаваясь ими на  $\Sigma_4$ . Построение фронтальной проекции сечения выполняют как обычно по двум проекциям точек на плоскостях проекций  $\Pi_1$  и  $\Pi_4$ .

Часто бывает необходимо определить натуральный вид косоуго сечения. Для простоты рассмотрим случай сечения поверхности вращения, когда секущая плоскость является проецирующей, например, фронтально проецирующей плоскостью  $\Sigma$  (рис. 7.6).

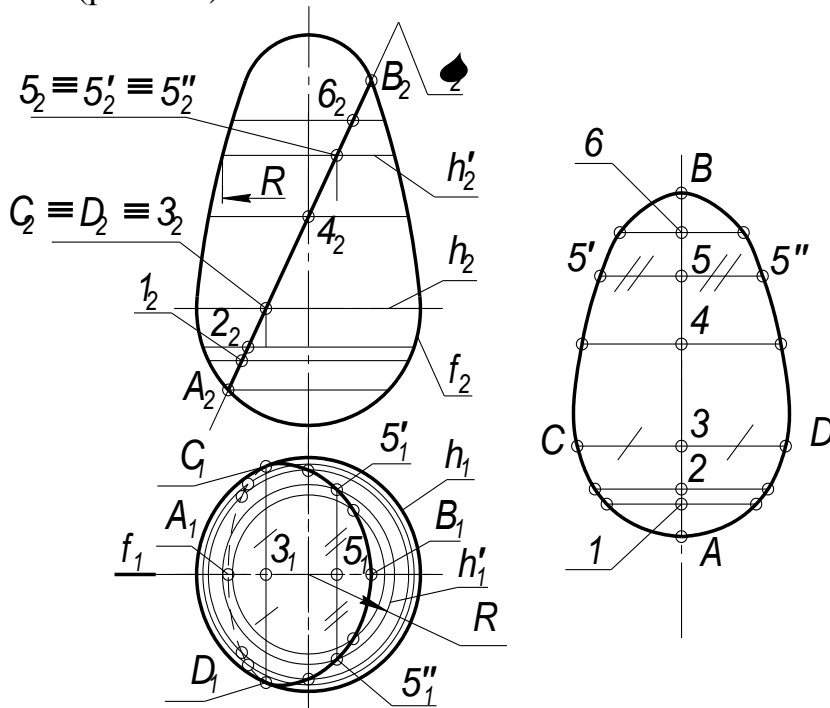


Рис. 7.6

Предварительно строим опорные точки. На главном меридиане  $f$  данной поверхности отмечаем низшую точку  $A$  и высшую точку  $B$  (точки  $A_2, B_2$  на фронтальной плоскости проекций). На экваторе  $h$  отмечаем точки  $C$  и  $D$ , которые являются точками видимости для плоскости проекций  $\Pi_1$  и разделяют горизонтальную проекцию искомой линии пересечения на видимую и невидимую части. Для построения промежуточных точек на поверхности вращения проводим графически простые линии, которыми являются её параллели, и отмечаем на них точки, принадлежащие секущей плоскости  $\Sigma$ . На рис. 7.6 проведена параллель  $h'$ , являющаяся на  $\Pi_1$  окружностью радиуса  $R$ . На ней отмечены горизонтальные проекции  $5'_1$  и  $5''_1$  точек  $5'$  и  $5''$ , принадлежащих плоскости  $\Sigma$ .

Построение натурального вида сечения проще всего выполнить путём непосредственного измерения высот и широт точек сечения. При этом высоты (точки  $1 - 6$ ) следует измерять на поле  $\Pi_2$  (точки  $1_2 - 6_2$ ), беря их с проекции  $\Sigma_2$  секущей плоскости  $\Sigma$ , а широты – на поле  $\Pi_1$  (например отрезок  $5'_1 - 5''_1$ ), так как они располагаются на фронтально проецирующих прямых (горизонтальных) и поэтому не искажаются на поле  $\Pi_1$ .

Получив достаточное количество точек и соединив их между собой плавной кривой, будем иметь натуральный вид косоуго сечения, приведённый на рис. 7.6 справа. Аналогично строится натуральный вид косоуго сечения любой фигуры вращения, в частности сечений конуса.

## 7.2. Пересечение прямой с поверхностью

Для определения точек пересечения прямой с поверхностью необходимо выполнить следующие операции:

- через данную прямую провести вспомогательную секущую плоскость;
- построить контур сечения вспомогательной плоскости с заданной поверхностью;
- отметить точки пересечения контура построенного сечения с заданной прямой. Полученные точки будут искомыми.

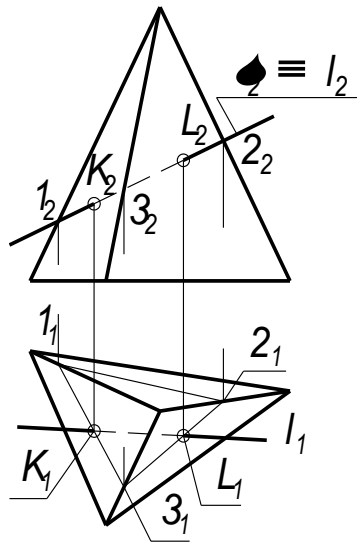


Рис. 7.7

На рис. 7.7 приведён пример определения точек входа и выхода при пересечении прямой с пирамидой.

Для решения задачи проводится фронтально проецирующая секущая плоскость  $\Sigma$ . Определяются точки её пересечения с рёбрами пирамиды. Используя полученные точки, строятся проекции треугольного сечения, точки пересечения горизонтальной проекции которого с прямой  $l$  ( $K_1$  и  $L_1$ ) есть горизонталь-

ные проекции искомых точек. Строятся их фронтальные проекции  $K_2$  и  $L_2$ , после чего определяется видимость прямой.

Приведём пример пересечения прямой с поверхностью конуса (рис. 7.8).

Для решения задачи проведём секущую плоскость через данную прямую  $m$  и вершину конуса  $S$ . В этом случае, как было показано ранее, конус будет пересекаться по прямолинейным образующим (рис. 7.4б). В сечении получается треугольник, одна вершина которого совпадает с вершиной конуса, а две другие  $1$  и  $2$  располагаются на его основании.

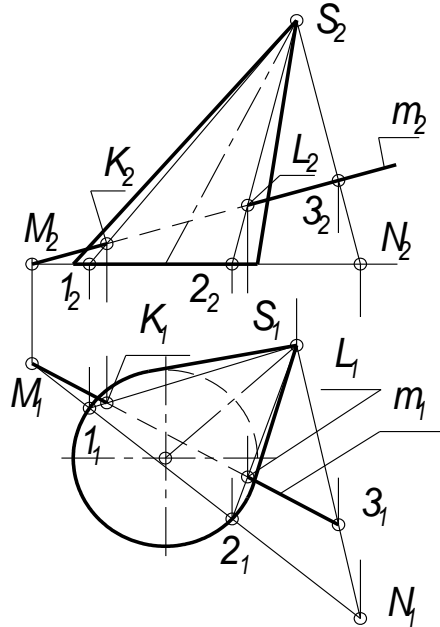


Рис. 7.8

Указанная секущая плоскость будет плоскостью общего положения. Для её построения из фронтальной проекции вершины  $S_2$  проведём произвольную прямую до пересечения с плоскостью основания конуса в точке  $N_2$ , пересекающую заданную проекцию прямой  $m_2$  в точке  $3_2$ . Затем продолжим  $m_2$  до пересечения с плоскостью основания конуса в точке  $M_2$ . Таким образом получим фронтальные проекции  $M_2$  и  $N_2$  следов двух прямых  $SN$  и  $3M$ , образующих секущую плоскость (о следах прямой и плоскости см. в разделах 2.2.1 и 2.3.3). Определяем на  $m_1$  горизонтальную проекцию  $3_1$  точки  $3$ , а затем на продолжении прямой  $S_13_1$  находим горизонтальную проекцию  $N_1$  следа  $N$ .

Проводя из  $M_2$  линию связи до пересечения с  $m_1$ , находим горизонтальную проекцию  $M_1$  другого следа. Соединив  $M_1$  и  $N_1$ , получим горизонтальную проекцию следа секущей плоскости  $MSN$ , пересекающую окружность основания конуса в точках  $1_1$  и  $2_1$ . Проецируем их на  $\Pi_2$  и соединяем фронтальные проекции  $1_2$  и  $2_2$  с проекцией вершины  $S_2$ . Точки пересечения  $K_2$  и  $L_2$  полученных образующих конуса с фронтальной проекцией  $m_2$  прямой  $m$  являются соответствующими проекциями искомых точек входа и выхода  $K$  и  $L$ . В заключение обычным путём определяются их горизонтальные проекции  $K_1$  и  $L_1$ .

Решение сходной с предыдущей задачи по определению точек пересечения прямой с цилиндрической поверхностью приведено на рис. 7.9.

Здесь через фронтальную проекцию  $3_2$  произвольной точки  $3$ , лежащей на прямой  $m$ , проводят прямую параллельно образующей цилиндра. Далее находят проекции  $M_2$  и  $N_2$  следов  $M$  и  $N$  заданной и построенной прямых  $m$  и  $3N$ , определяющих секущую плоскость  $M3N$ . Полученная плоскость по построению параллельна образующим цилиндра.

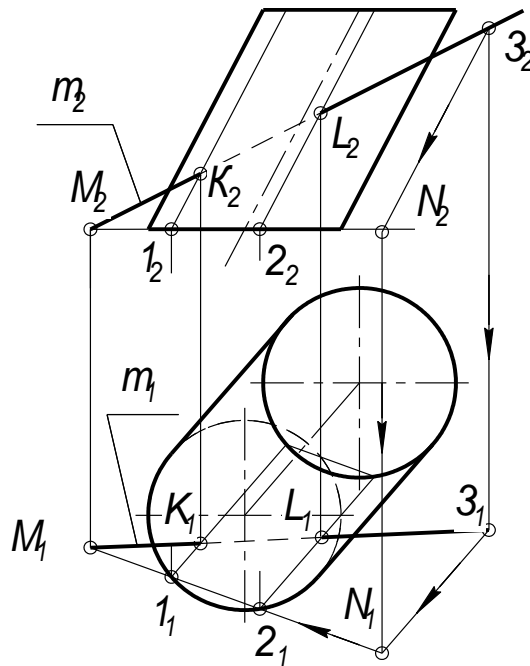


Рис. 7.9

Затем строят горизонтальные проекции следов  $M_1$  и  $N_1$ . Соединив эти точки, определяют горизонтальную проекцию  $M_1N_1$  следа секущей плоскости. Далее находят точки  $1_1$  и  $2_1$ , в которых этот след пересекает нижнее основание цилиндра. Через полученные точки  $1_1$ ;  $2_1$  и их фронтальные проекции  $1_2$  и  $2_2$  проводят образующие цилиндра, которые пересекают прямую  $m$  в точках  $K$  и  $L$ . Эти точки являются искомыми точками входа и выхода.

На рис. 7.10 приведено построение точек пересечения прямой с поверхностью сферы.

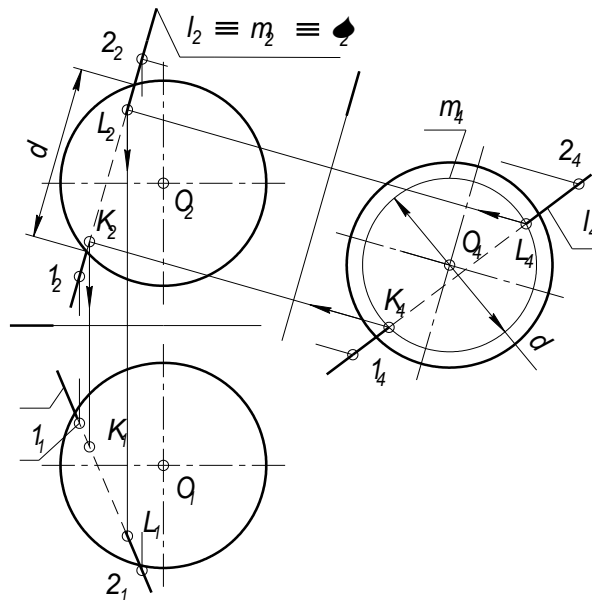


Рис. 7.10

Для упрощения построений введём дополнительную плоскость проекций  $\Pi_4$ , по отношению к которой секущая плоскость является плоскостью уровня. Тогда сечение сферы спроецируется на  $\Pi_4$  в натуральную величину в виде окружности  $m_4$  диаметром  $d$ . После этого мы можем отметить проекции  $K_4$  и  $L_4$  точек пересечения  $K$  и  $L$  с прямой  $l$ . Проецируем их последовательно на  $\Pi_2$  и  $\Pi_1$ .

### 7.3. Плоскости, касательные к поверхности

Касательная плоскость является геометрическим местом всех касательных, проведённых к данной кривой поверхности, проходящих через одну её точку.

Очевидно, что для построения касательной плоскости к поверхности в какой – либо её точке достаточно через эту точку провести на поверхности только две кривые линии и построить к ним касательные прямые в данной точке. Эта пара касательных и определит искомую касательную плоскость.

В зависимости от вида поверхности касательная плоскость может иметь с ней только одну общую точку, например, в случае сферы, или бесконечное их количество, составляющее прямую или кривую линии, например, в случае конической поверхности.

Построим касательную плоскость к поверхности конуса в точке  $M$  (рис. 7.11а). С этой целью через точку  $M$  проводится образующая  $l(l_1, l_2)$ . Она является одной из прямых, определяющих касательную плоскость. Второй прямой будет касательная  $t$  к окружности  $h$  в её точке  $M$ , проведённая на горизонтальной проекции конуса. Нетрудно видеть, что касательная  $t$  параллельна касательной  $t'$ , проведённой в точке  $N$  к окружности  $h'$  основания конуса, поэтому окружность  $h$  можно не строить.



На рис 7.11б приведено построение касательной плоскости  $\Theta$ , проведенной к цилиндрической поверхности через точку  $A$ .

Решение задачи строится в следующей последовательности. Так как касательная плоскость должна содержать в себе образующую цилиндра, то проведем через точку  $A$  параллельно ей прямую  $a$  ( $a_1, a_2$ ). Если теперь провести через точку  $B$ , которая является точкой пересечения прямой  $a$  с плоскостью основания цилиндра  $\Gamma$ , касательную к окружности основания  $m$ , то прямая  $a$  и касательная  $m$  определяют искомую касательную плоскость  $\Theta$  ( $a \cap m$ ), которая касается поверхности цилиндра по её образующей  $l$ .

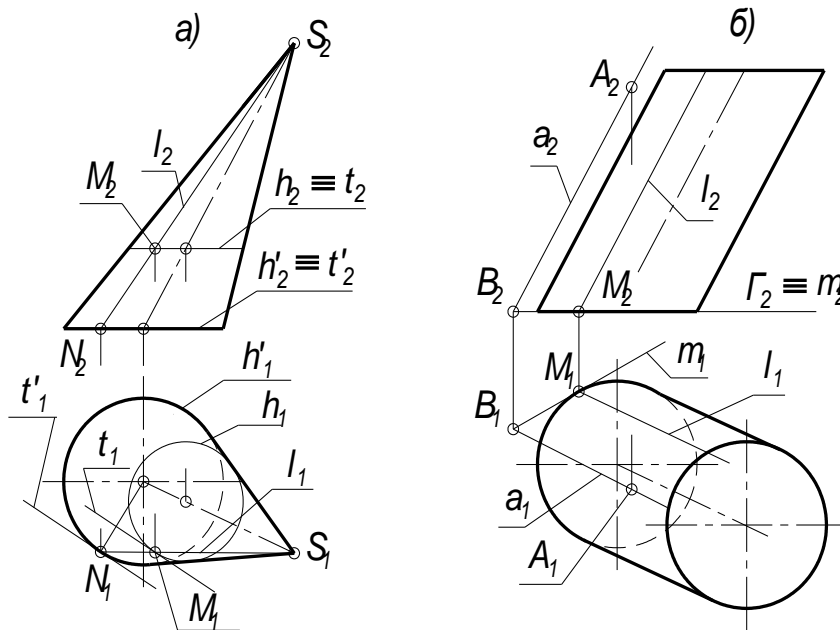


Рис. 7.11

### Контрольные вопросы к главе 7

1. Что называется сечением?
2. Как строится линия сечения поверхности плоскостью?
3. Какие линии могут быть получены в сечении прямого кругового цилиндра?
4. Какие линии могут быть получены в сечении прямого кругового конуса?
5. Какие линии могут быть получены в сечении сферы?
6. Каков общий принцип построения точек пересечения прямой с поверхностью?
7. Дайте определение касательной плоскости к поверхности.

## 8. ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Линия пересечения двух поверхностей в общем виде представляет собой пространственную кривую, которая может распадаться на несколько частей. Надо иметь в виду, что проекции линий пересечения всегда располагаются в пределах площади наложения одноимённых проекций пересекающихся поверхностей.

При пересечении гранных поверхностей в общем случае получается пространственная ломаная линия.

Обычно линию пересечения двух поверхностей строят по отдельным точкам. При этом требуется выполнить **условие инцидентности (взаимопринадлежности)** точек и поверхностей. Для чего необходимо и достаточно, чтобы эти точки принадлежали линиям, находящимся в заданных поверхностях и пересекающимся между собой. Точки пересечения таких линий будут общими для заданных поверхностей, т.е. точками их пересечения.

Такие линии получаются при пересечении заданных поверхностей вспомогательными поверхностями или плоскостями – посредниками.

В результате можно сформулировать следующий алгоритм построения линии пересечения двух поверхностей:

- заданные поверхности, например  $\Phi$  и  $\mathcal{G}$  (рис.8.1), пересекаются вспомогательной поверхностью  $\Theta$ ;

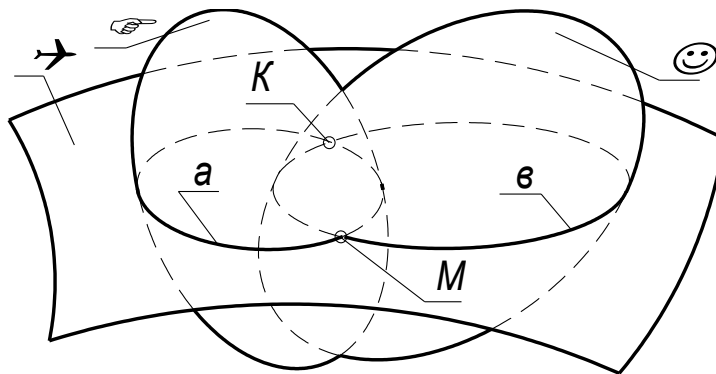


Рис. 8.1

- строят линии пересечения  $a$  и  $b$  поверхностей  $\Phi$  и  $\mathcal{G}$  вспомогательной поверхностью  $\Theta$  ( $a = \Phi \cap \Theta$ ;  $b = \mathcal{G} \cap \Theta$ );

- точки пересечения  $K$  и  $M$  линии  $a$  с линией  $b$  принадлежат как  $\Phi$ , так и  $\mathcal{G}$  ( $a \cap b = K, M$ ;  $K, M \subset \Phi$ ;  $K, M \subset \mathcal{G}$ );

- выполняют указанные операции необходимое количество раз;

- соединяя определённым образом полученные точки между собой, строят линии пересечения поверхностей  $\Phi$  и  $\mathcal{G}$ .

Следует выбирать поверхности-посредники так, чтобы они давали графически простые линии пересечения с заданными поверхностями (например, прямые или окружности).

При составлении алгоритма не вкладывалось никаких конкретных понятий о виде, расположении и способе задания поверхностей  $\Phi$  и  $\mathcal{Q}$ , поэтому приведённый алгоритм является обобщённым, пригодным для решения задач по определению линии пересечения любых поверхностей.

В качестве вспомогательных поверхностей при определении линии пересечения обычно используются плоскости или сферы.

### 8.1. Пересечение гранных поверхностей

Линия пересечения гранных поверхностей представляет собой одну или несколько замкнутых ломаных (рис. 8.2) и определяется с помощью вспомогательных секущих плоскостей двумя способами.

Применяя первый способ, находят линии пересечения граней одного тела с гранями другого, т.е. сводят задачу к нахождению линии пересечения двух плоскостей.

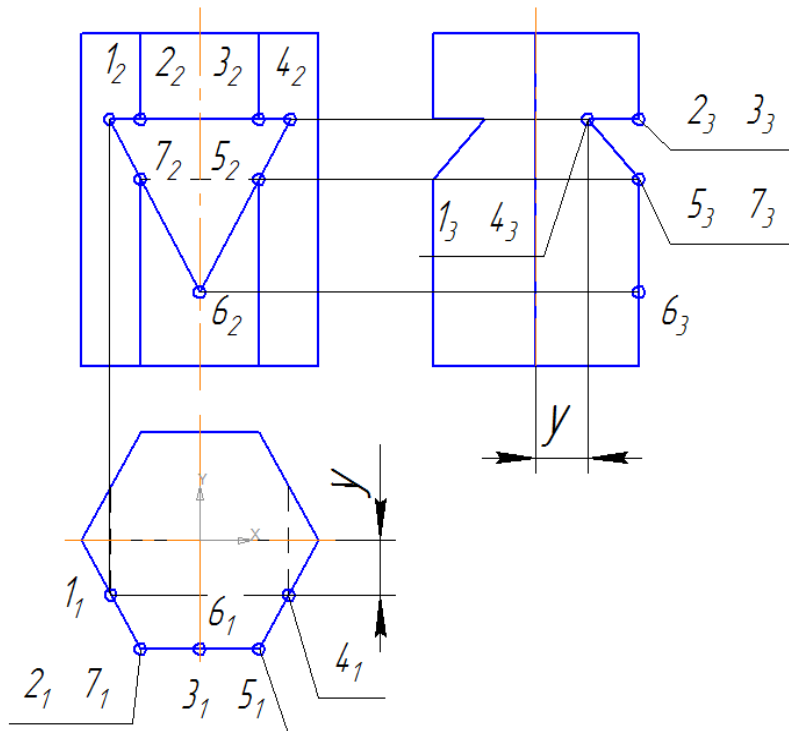


Рис. 8.2

Второй способ заключается в том, что находят точки пересечения рёбер одного многогранника с гранями другого. При этом задача сводится к нахождению точек встречи прямой и плоскости. Обычно пользуются вторым способом.

Рассмотрим построение линии пересечения отверстия в виде трёхгранной призмы и шестигранной призмы (рис. 8.2). Как видно из рисунка, отверстие – фронтально, а шестигранник – горизонтально проецирующие фигуры. Поэтому в данном случае на фронтальной проекции заданы и не требуют построения семь точек их пересечения. Проецируем их на горизонтальную и профильную

плоскости проекций, как показано на рисунке. Линию отсчёта координат у всех точек на горизонтальной проекции производим от горизонтальной оси симметрии и переносим их на профильную плоскость проекций.

## 8.2. Пересечение гранной и криволинейной поверхностей

В качестве примера рассмотрим пересечение поверхностей фронтально проецирующего призматического сквозного отверстия и конуса вращения, показанного на рис. 8.3.

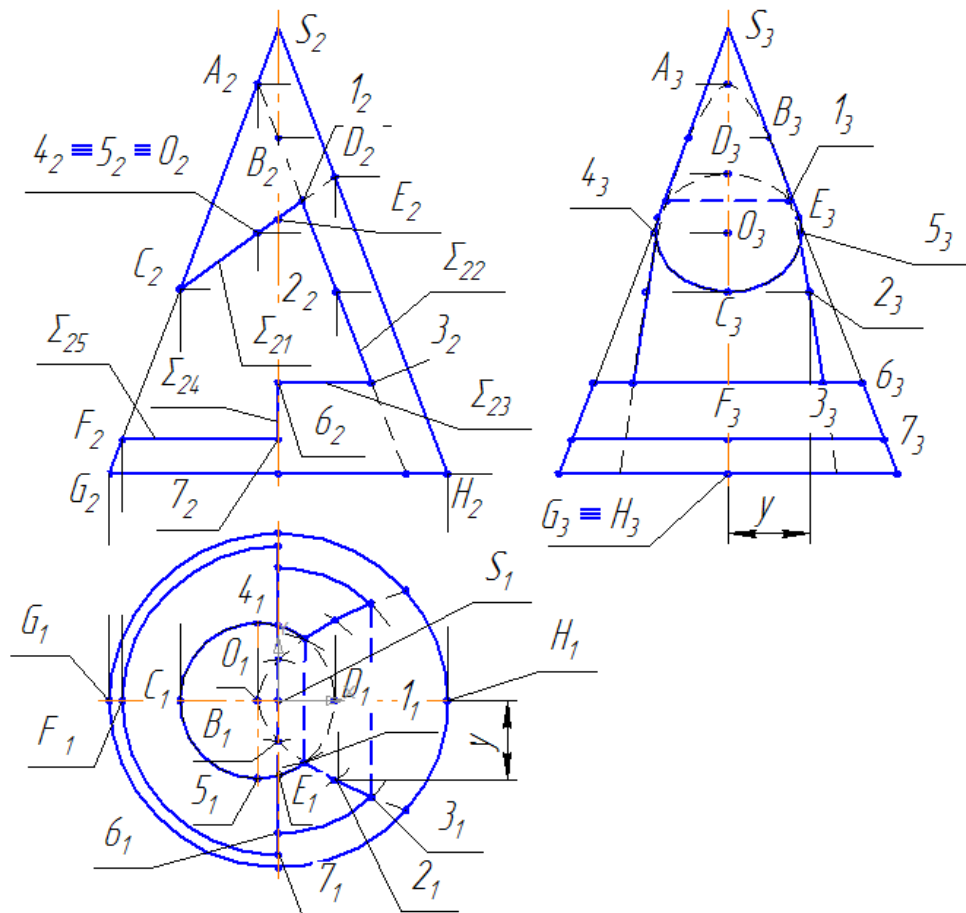


Рис. 8.3

Поскольку в данной задаче решение связано с определением формы сечения поверхности конуса плоскостями, воспользуемся материалом, изложенным в разделе 7.1, где рассмотрены конические сечения. Последовательно рассмотрим каждое сечение. Все сечения образованы пятью фронтально проецирующими плоскостями.

Плоскость  $\Sigma_{21}$  пересекает все образующие конуса, т.е. это сечение имеет форму эллипса с центром в точке  $O$ , большая ось которого  $C_2D_2$ , а малая -  $4_15_1$ . Нас интересует часть кривой, ограниченная фронтально проецирующей прямой, проходящей через точку  $1$ . Промежуточные точки эллипса строятся, как

показано на рис. 7.3б. Особое внимание надо обратить на точки видимости  $E$  и ей симметричную относительно горизонтально проецирующей плоскости симметрии  $SGH$ . На плоскости проекций  $\Pi_3$  они лежат на крайних образующих конуса и разделяют эллипс на видимую и невидимую части.

Следующее сечение образовано плоскостью  $\Sigma_{22}$ , проходящей через вершину  $S_2$ , параллельной одной крайней образующей конуса  $S_2H_2$  и проходящей через точки 1, 2, 3. Как показано в разделе 7.1 (рис. 7.3в), в этом случае линией пересечения будет парабола, вершина которой  $A_2$  лежит на другой образующей  $S_2G_2$ . Промежуточные точки параболы (например точка 2) строятся с помощью вспомогательных секущих горизонтальных плоскостей уровня  $\Gamma_2$  путём перенесения их координаты  $y$  с плоскости  $\Pi_1$  на плоскость  $\Pi_3$  (рис. 8.3). После обводки участка 1 – 3 перейдём к построению сечений плоскостями  $\Sigma_{23}$  и  $\Sigma_{25}$ . Очевидно, что они представляют собой две полуокружности разного радиуса с центрами, определяемыми точками  $b$  и  $F$ , лежащими на оси конуса. Меньшая полуокружность ограничена хордой, проходящей через точку 3. Последнее сечение  $\Sigma_{24}$  – трапеция, ограниченная двумя отрезками крайних образующих конуса и фронтально проецирующими прямыми, проходящими через точки 6 и 7.

### 8.3. Пересечение двух криволинейных поверхностей

Построение линии пересечения двух криволинейных поверхностей рассмотрено на примере, приведённом на рис. 8.4, где представлено пересечение кругового конуса со сферой.

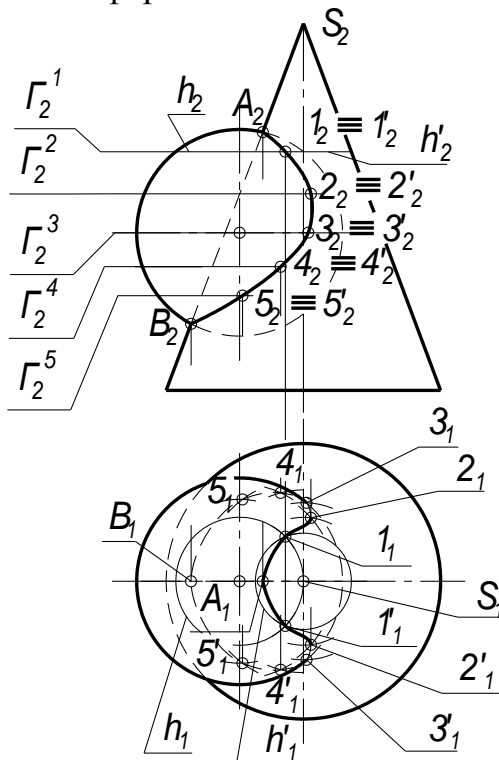


Рис. 8.4

В качестве вспомогательных секущих плоскостей выбираем горизонтальные секущие плоскости  $\Gamma_2^1 - \Gamma_2^5$ , пересекающие конус и сферу по окружностям, которые проецируются на горизонтальную плоскость проекций без искажения. Точки пересечения горизонтальных проекций окружностей будут горизонтальными проекциями точек искомой линии пересечения. Так на рис. 8.4 секущая плоскость  $\Gamma_2^1$  пересекает сферу и конус по окружностям, горизонтальные проекции которых  $h_1$  и  $h'_1$  пересекаются в точках  $1_1$  и  $1'_1$ . Затем полученные точки проецируются на фронтальную плоскость проекций.

Таким же образом строятся остальные точки линии пересечения. Опорные точки  $A$  и  $B$  определяются их фронтальными проекциями, как точки пересечения очерковых линий конуса и сферы. Точки  $3$  и  $3'$  лежат на экваторе сферы и являются точками видимости для горизонтальной проекции линии пересечения. Та часть её, которая лежит выше экватора, видима, а которая ниже – невидима. Соединив найденные точки плавной кривой, получим линию пересечения поверхностей.

## 8.4. Особые случаи пересечения поверхностей вращения

### 8.4.1. Пересечение соосных поверхностей

Соосные поверхности вращения (поверхности с общей осью) пересекаются по окружностям. Проекция этих окружностей на плоскость, параллельную оси вращения, вырождаются в прямые линии. На рис. 8.5а, б и в изображены соосные цилиндр и сфера, конус и сфера, цилиндр и конус.

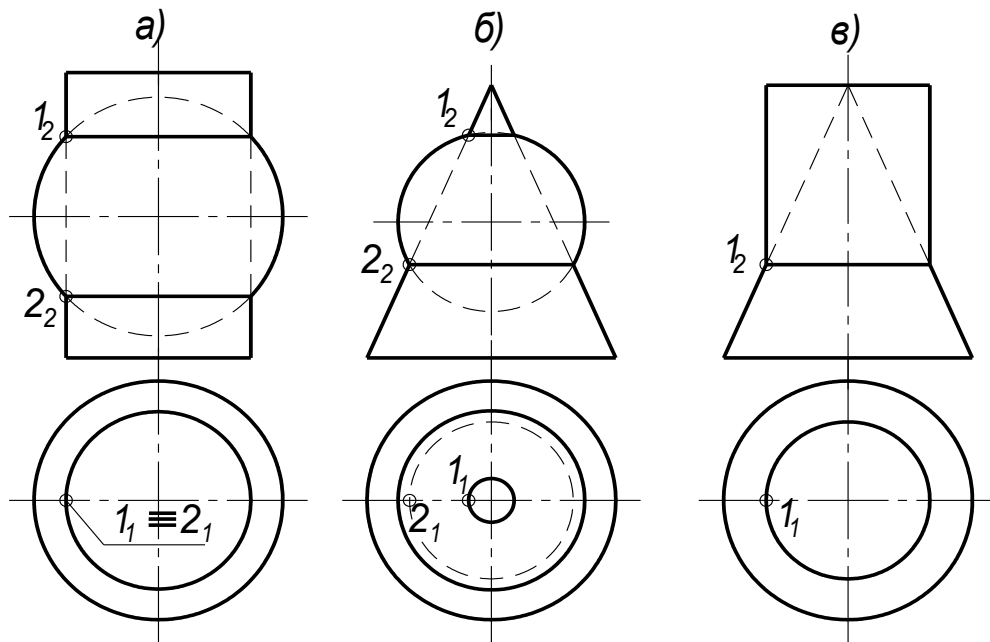


Рис. 8.5

Особенности пересечения соосных поверхностей вращения позволяют в качестве посредника при построении линии пересечения поверхностей вращения с пересекающимися осями использовать сферы.

#### 8.4.2 Пересечение поверхностей с пересекающимися осями

Из точки пересечения осей поверхностей проводится вспомогательная сфера, которая пересекает каждую из них по окружностям. Точки пересечения этих окружностей являются общими для обеих поверхностей, то есть являются точками линии их пересечения. Такой метод построения носит название метода вспомогательных концентрических сфер. Он используется тогда, когда нельзя применить метод вспомогательных секущих плоскостей по той причине, что они не дают графически простых линий при пересечении поверхностей. Метод вспомогательных сфер может применяться и в случае, когда оси поверхностей тел вращения не пересекаются. Тогда вводятся эксцентрические сферы, центр каждой из которых располагается на соответствующей оси вращения. На рис. 8.6 представлено построение линии пересечения конуса и цилиндра вращения методом вспомогательных сфер.

Оси вращения поверхностей пересекаются в точке  $O$  и параллельны фронтальной плоскости проекций.

Построение линий пересечения начинают с определения опорных точек  $ABCD$  (рис. 8.6), положение которых очевидно. Затем из точки  $O$  проводятся концентрические сферы, пересекающие поверхности по окружностям, которые вырождаются на  $\Pi_2$  в прямые линии.

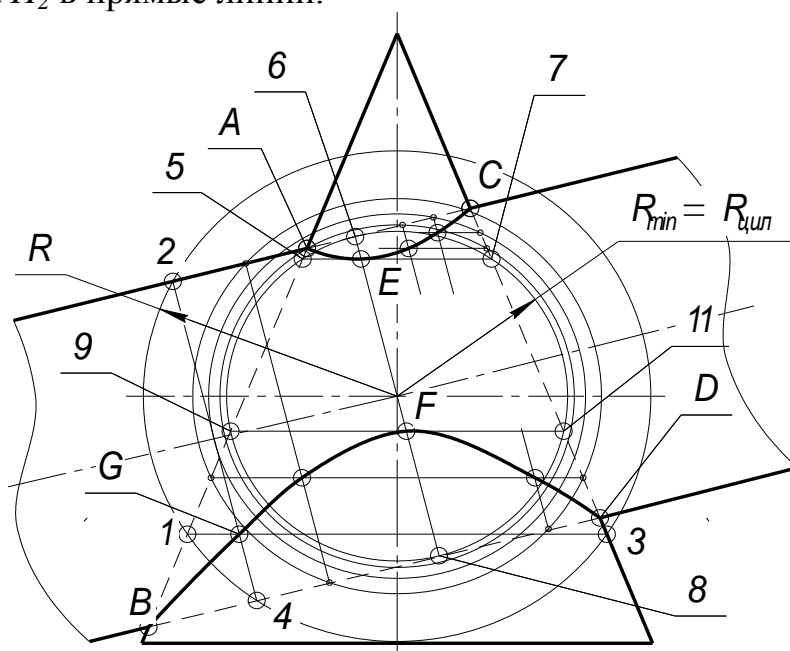


Рис. 8.6

Точки пересечения этих линий являются точками пересечения поверхностей. Так, на рис. 8.6 сфера радиуса  $R$  даёт вырожденную в прямую 2-4 линию пересечения с цилиндром, а с конусом – прямую 1-3. Обе указанные прямые пересекаются в точке  $G$ , которая является точкой пересечения обеих поверхностей. Подобным образом определяются все промежуточные точки. Экстремальные точки  $E$  и  $F$  получаются с использованием секущей сферы минимального радиуса  $R_{min}$ , равного радиусу цилиндра  $R_{цил.}$ . Она касается цилиндра по линии 6-8, пересекая конус по линиям 5-7 и 9-11. Точки  $E$  и  $F$  являются результатом их пересечения.

### 8.4.3. Пересечение поверхностей, описанных вокруг общей сферы. Теорема Монжа

В частном случае, когда пересекающиеся поверхности вращения второго порядка описаны вокруг общей сферы, линия их пересечения распадается на две плоские кривые второго порядка.

Последнее положение формулируется **теоремой Монжа**: **если две поверхности второго порядка описаны вокруг третьей поверхности второго порядка, то они пересекаются по двум плоским кривым второго порядка.**

На рис. 8.7 приведены примеры, где пересекаются поверхности вращения (цилиндр и конус, а также два конуса), описанные вокруг общей сферы.

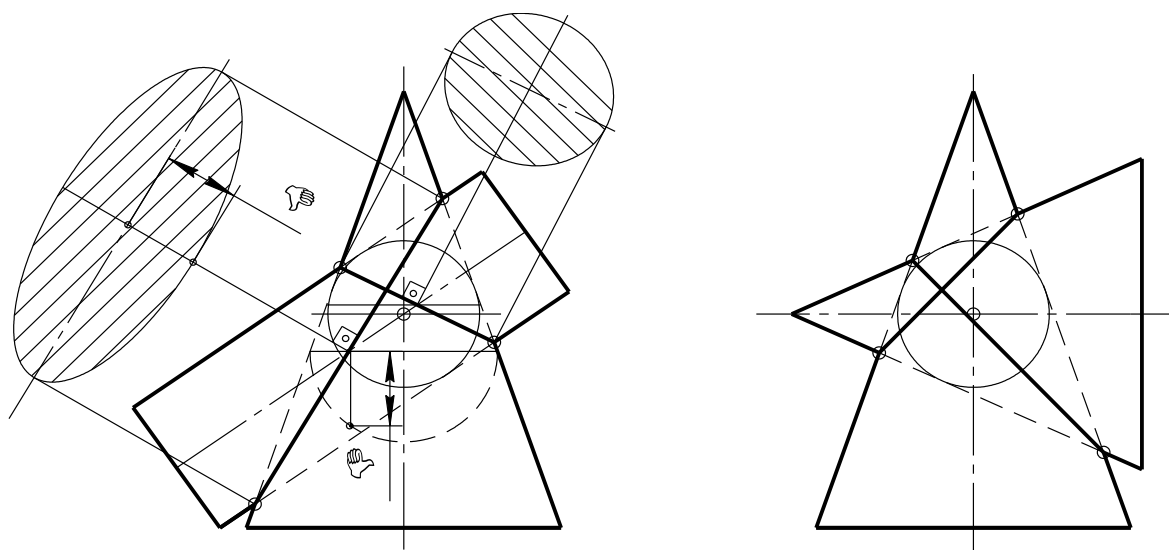


Рис. 8.7

Здесь линия пересечения представляет собой два эллипса (построение сечений конуса см. раздел 7.1).

На рис. 8.8а показаны два цилиндра равного диаметра с пересекающимися под прямым углом осями.



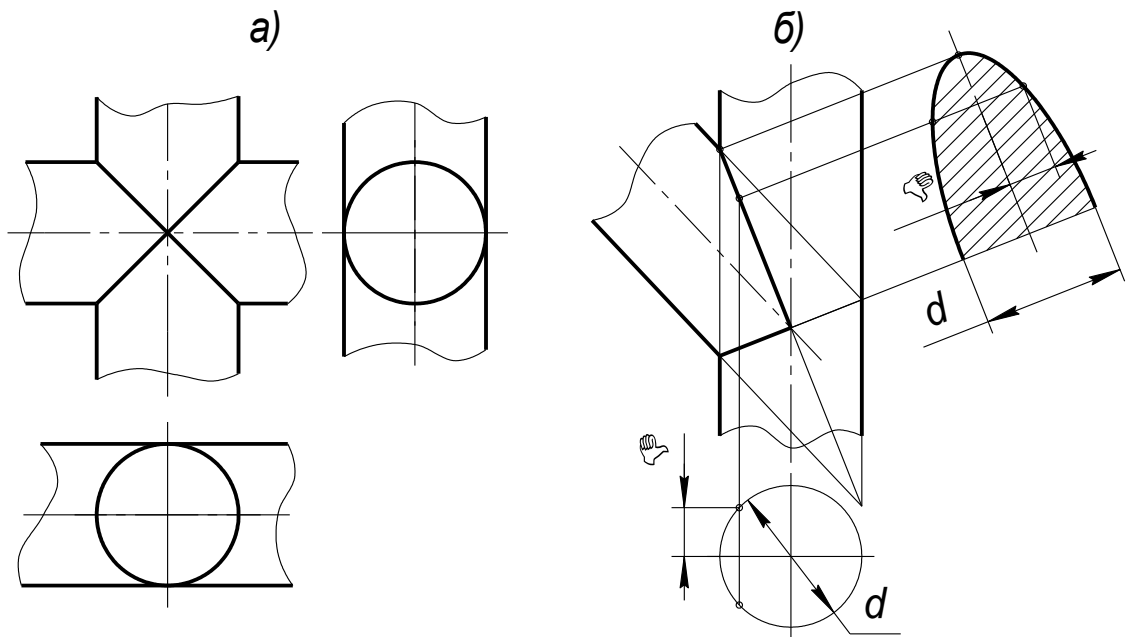


Рис. 8.8

Из точки пересечения осей проведена сфера, равная диаметру цилиндров. Обе поверхности пересекаются по линии, состоящей из двух эллипсов. На рис. 8.8б также изображены два цилиндра равного диаметра, но их оси пересекаются не под прямым углом. Здесь линия пересечения состоит из двух эллипсов, большие оси которых имеют разную величину, а малые равны диаметру цилиндра. Линия пересечения обычно строится по точкам с использованием метода замены плоскостей проекций так, как показано на рис. 8.8б.

### 8.5. Пересечение цилиндрических поверхностей разного диаметра

На рис. 8.9 представлено построение по точкам линии пересечения цилиндров разного диаметра, чьи оси пересекаются под прямым углом. При этом используется их профильная проекция.

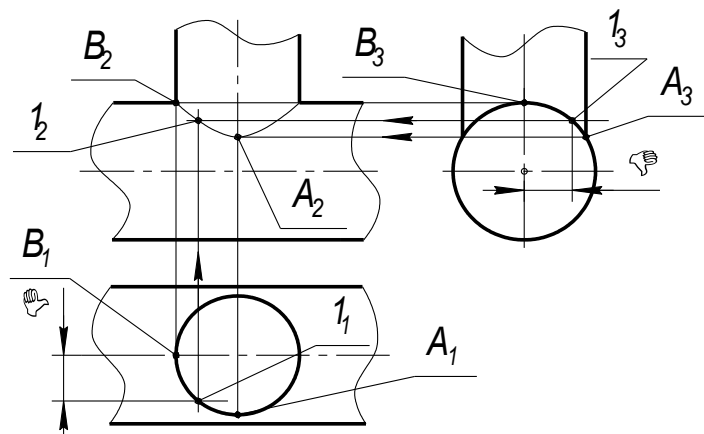


Рис. 8.9

Сначала строятся опорные точки  $A$  и  $B$ . Положение на фронтальной плоскости проекций точки  $A$  определяется её положением на профильной и горизонтальной плоскостях проекций, которое очевидно. Положение любой промежуточной точки линии пересечения (например, точки 1) определяется так. Поскольку поверхности горизонтального и вертикального цилиндра проецируются соответственно на профильную и горизонтальную плоскости проекций в виде окружностей, то все точки линии их пересечения будут принадлежать этим окружностям. Произвольно выбираем положение точки  $I_3$  на профильной проекции поверхности горизонтального цилиндра. Измеряем расстояние  $\Delta$  от его оси и откладываем на горизонтальной плоскости проекций, определяя тем самым положение горизонтальной проекции  $I_1$  этой точки. Точка пересечения линий связи ( $I_2$ ), проведённых из  $I_1$  и  $I_3$ , определяет положение точки пересечения обеих поверхностей на фронтальной плоскости проекций. Подобным образом производится построение необходимого количества промежуточных точек.

В реальных деталях машин и механизмов, особенно в тех, которые изготавливаются литьём, пересекающиеся поверхности плавно сопрягаются между собой по некоторому радиусу (рис. 8.10). При этом на чертеже линию пересечения условно заменяют одной тонкой сплошной циркульной линией, которую называют линией перехода. Линию перехода не доводят до точек пересечения очерковых линий основных поверхностей.

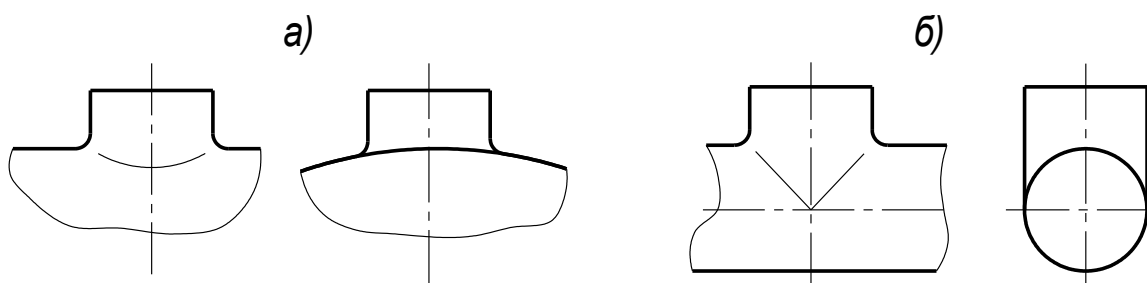


Рис. 8.10

### Контрольные вопросы к главе 8

1. Как строят линию пересечения двух поверхностей?
2. В чём сущность способа вспомогательных секущих плоскостей при построении линии пересечения двух поверхностей?
3. Каков алгоритм решения задач на определение точек пересечения кривой линии с поверхностью?
4. Каков принцип построения линии пересечения поверхностей, одна из которых занимает проецирующее положение?
5. В каких случаях удобно применять метод секущих сфер?

6. По каким линиям пересекаются соосные поверхности?
7. В чём суть теоремы Монжа?
8. По каким линиям пересекаются два прямых круговых цилиндра одинакового диаметра, если их оси пересекаются?

## 9. РАЗВЁРТЫВАНИЕ КРИВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

**Развёрткой поверхности** называется плоская фигура, получаемая при совмещении поверхности с плоскостью. При развёртывании поверхности на плоскости каждой точке поверхности соответствует единственная точка на развёртке; линия поверхности переходит в линию развёртки; длины линий, величины плоских углов и площадей, ограниченных замкнутыми линиями, остаются неизменными. Теоретически точно развёртываются только гранные поверхности, торсы, конические и цилиндрические поверхности.

Обычно при развёртывании конических и цилиндрических поверхностей общего вида их аппроксимируют вписанными гранными поверхностями. Такие развёртки приближённо соответствуют натуре.

### 9.1. Развёртывание пирамидальных и конических поверхностей

Развёртки пирамидальных и конических поверхностей строят **способом треугольников (триангуляции)**. Этот метод сводится к построению истинных величин треугольных граней, из которых состоит пирамида или которыми заменяют развёртываемую коническую поверхность (рис. 9.1).

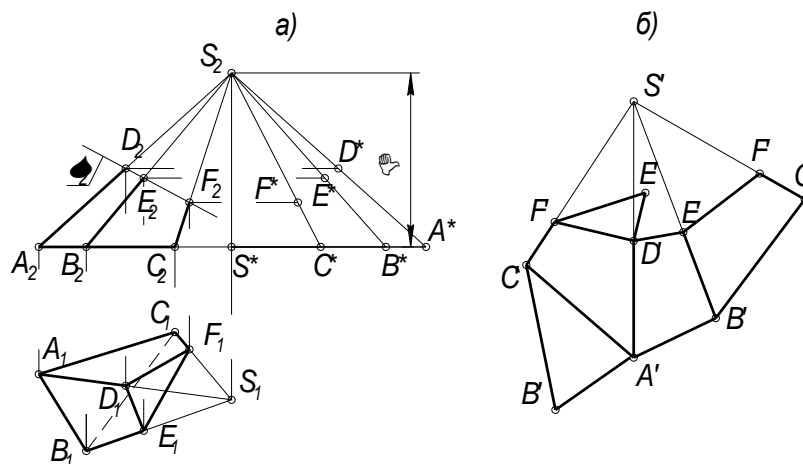


Рис. 9.1

На рисунке построена развёртка пирамиды  $SABC$ , усечённой фронтально проецирующей плоскостью  $\Sigma(\Sigma_2)$ . Для построения развёртки боковой поверхности пирамиды сначала строят истинную величину боковых рёбер.

В данном случае они построены способом прямоугольных треугольников (раздел 2.2.2).

В качестве одного катета взято превышение  $S_2 S^* = \Delta$  точки  $S$  над точками  $A, B$  и  $C$  (рис. 9.1а), а второго – горизонтальные проекции рёбер  $S_1 A_1 = S^* A^*$ ;  $S_1 B_1 = S^* B^*$  и  $S_1 C_1 = S^* C^*$ .

Гипотенузы  $S_2 A^*$ ,  $S_2 B^*$  и  $S_2 C^*$  дают истинную величину боковых рёбер. Так как основание пирамиды расположено горизонтально, то на плоскости  $\Pi_1$  имеем истинную его величину. Каждая треугольная боковая грань на развёртке (рис. 9.1б) строится по трём известным сторонам.

Натуральная величина расстояний точек  $D, E$  и  $F$  сечения пирамиды от вершины  $S$  (отрезки  $S_2 D^*$ ,  $S_2 E^*$  и  $S_2 F^*$ ) определяется так, как показано на рис. 9.1а и откладывается от точки  $S'$  на развёртке (рис. 9.1б). После построения развёртки боковой поверхности усечённой части пирамиды необходимо пристроить к ней треугольники  $A'B'C'$  и  $D'E'F'$ , дающие истинную величину основания и сечения пирамиды. Натуральная величина сторон этих треугольников берётся с рис. 9.1б.

На рис. 9.2б способом триангуляции построена развёртка конической поверхности, которая заменена поверхностью вписанной в неё двенадцатиугольной пирамиды.

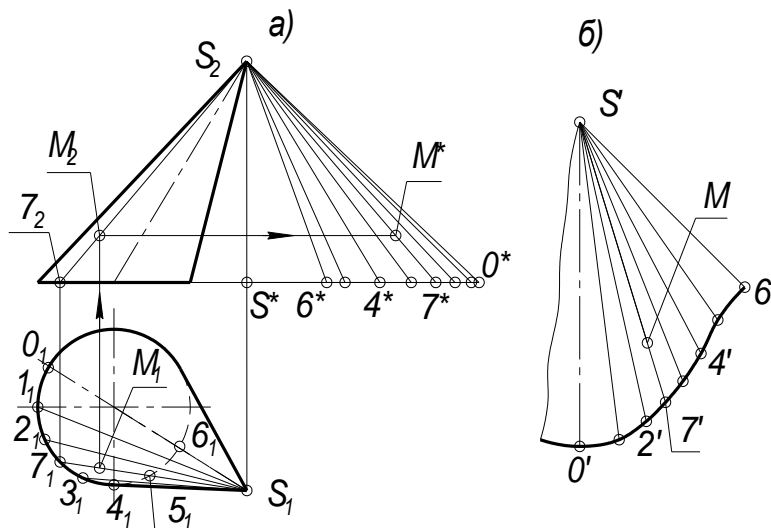


Рис. 9.2

Развёртка представляет собой симметричную фигуру. Осью симметрии является образующая  $S'O'$ . Натуральные величины образующих определены с помощью метода прямоугольных треугольников, как это было сделано в предыдущем примере.

В качестве одного (общего для всех треугольников) катета берётся превышение одной точки образующей над другой  $S_2 S^*$  (рис. 9.2а). Величина другого катета равна длине горизонтальной проекции соответствующей образующей и берётся с  $\Pi_1$ . Гипотенузы полученных прямоугольных треугольников равны натуральной величине образующих конуса. Его развёртка (рис. 9.2б) состоит из примыкающих друг к другу треугольников с общей вершиной  $S'$ .

Каждый из треугольников строится по трём сторонам. При этом две стороны равны построенным истинным величинам образующих, а третья – хорде, стягивающей дугу окружности основания между соседними точками деления, и берётся с горизонтальной проекции конуса.

Построенные на развёртке точки соединяются плавной кривой. В качестве примера там же показана точка  $M(M')$ , взятая с поверхности конуса, как показано на рис. 9.2а, с помощью образующей  $S7$ .

Развёртка конической поверхности вращения (рис. 9.3б) представляет собой сектор круга, имеющий радиус, равный длине образующей конуса  $l$  и длину дуги  $m$ , равную длине окружности его основания  $2\pi R$ , где  $R$  – радиус окружности основания. Угол при вершине сектора можно определить из очевидного соотношения

$$\frac{m}{2\pi l} = \frac{\alpha}{360},$$

откуда следует, что  $\alpha = (R/l) 360^\circ$ .

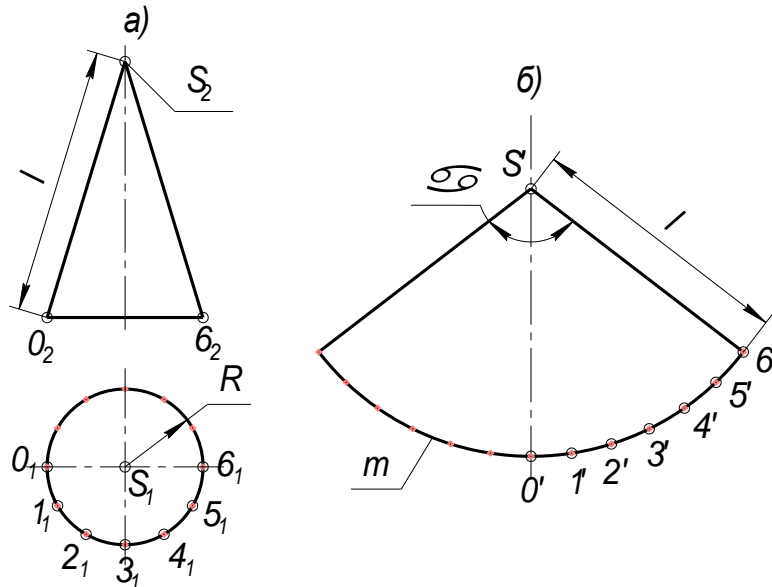


Рис. 9.3

В приведённом примере коническая поверхность условно заменена поверхностью вписанной правильной двенадцатигранной пирамиды, а для построения развёртки применён способ триангуляции.

## 9.2. Развёртывание призматических и цилиндрических поверхностей

Развёртки призматических и цилиндрических поверхностей строят способом нормального сечения. Пусть призма (рис. 9.4а) расположена относительно плоскостей проекций так, что её боковые рёбра являются фронталями.

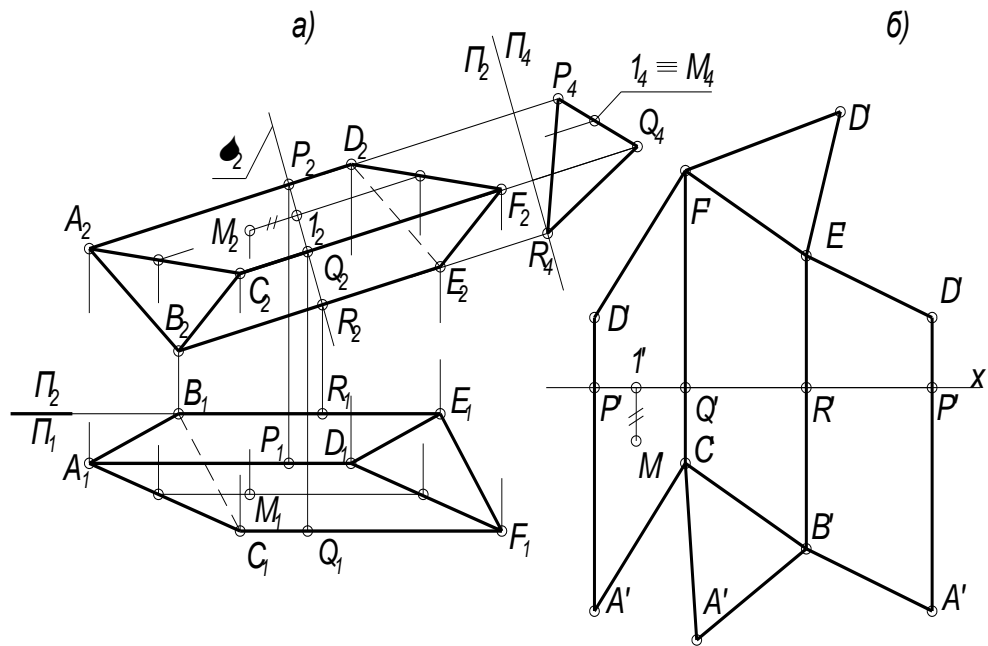


Рис. 9.4

Тогда они проецируются на  $\Pi_2$  в натуральную величину. Фронтально проецирующая секущая плоскость  $\Sigma(\Sigma_2)$ , перпендикулярная к боковым рёбрам призмы, даст её нормальное сечение в виде треугольника  $PQR$ .

Построим его натуральный вид, применив метод замены плоскостей проекций и введя дополнительную плоскость проекций  $\Pi_4$  перпендикулярно рёбрам призмы. В результате найдём истинные величины  $P_4Q_4$ ,  $Q_4R_4$  и  $P_4R_4$  сторон сечения. Боковые грани призмы представляют собой параллелограммы, у которых полученные стороны сечения являются высотами (рис. 9.4б). Для построения развёртки нужно отложить на произвольной прямой  $x$  натуральные величины сторон нормального сечения  $P'Q'$ ,  $Q'R'$  и  $P'R'$ , как это сделано на рис. 9.4б. Затем через их концы провести перпендикуляры. Если теперь отложить на этих перпендикулярах по обе стороны от прямой  $x$  отрезки боковых рёбер, взятые с плоскости проекций  $\Pi_2$ , и соединить их концы, то получим развёртку боковой поверхности призмы. Присоединив к ней оба основания  $A'B'C'$  и  $D'E'F'$ , будем иметь её полную развёртку.

Точку  $M$  на поверхности призмы можно построить, проведя через неё соответствующую образующую так, как показано на чертеже.

Несмотря на то, что цилиндрические поверхности являются развёртывающимися, на практике строят приближённые развёртки, вписывая в них призматические поверхности.

Построим развёртку цилиндрической трубы кругового сечения, состоящей из трёх элементов (1, 2 и 3) одного диаметра, расположенных фронтально (рис. 9.5а).

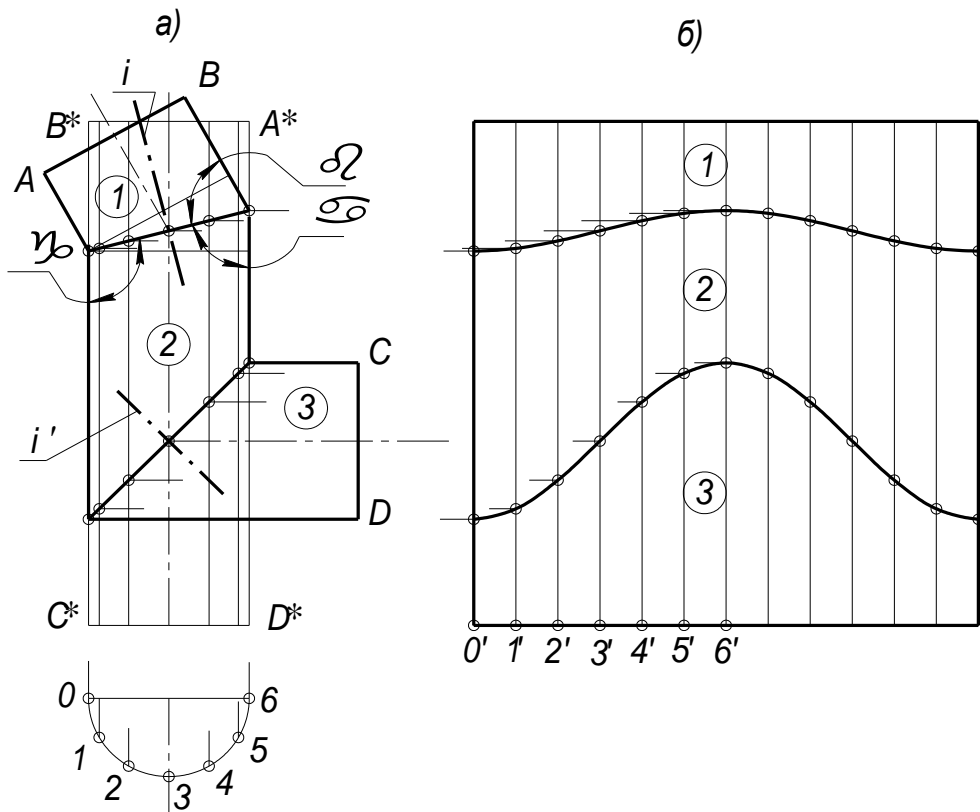


Рис. 9.5

Для построения развёртки следует предварительно развернуть на  $180^\circ$  элементы 1 и 3 вокруг осей  $i$  и  $i'$ , перпендикулярных плоскости их стыка с элементом 2, после чего оси всех элементов совпадут, а труба будет представлять собой единый цилиндр и займёт положение  $A^*B^*C^*D^*$ .

Справедливость этого утверждения следует из рассмотрения углов  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ . Нетрудно видеть, что  $\alpha + \gamma = 180^\circ$ , но  $\alpha = \beta$ , так как оба прямоугольных треугольника, показанных на рисунке, равны между собой.

Дугу полуокружности нормального сечения трубы разделим на несколько частей так, чтобы хорды, стягивающие эти части, возможно меньше отличались от дуг окружности. Далее проводим на поверхности цилиндра образующие, соответствующие точкам деления нормального сечения. На произвольной горизонтальной прямой (рис. 9.5б) откладываем хорды, а из их концов – образующие. В результате получим прямоугольную развёртку цилиндра. После этого переносим на неё так, как показано на чертеже, точки пересечения косых эллиптических сечений трубы с образующими и соединяем их плавными кривыми, которые представляют собой развёртки эллипсов.

Аналогично строится развёртка цилиндрической трубы, имеющей не плоскую, а пространственную ось.

**Контрольные вопросы к главе 9**

1. Что называется развёрткой поверхности?
2. Какие поверхности относятся к развёртываемым поверхностям?
3. Можно ли построить развёртку неразвёртываемой поверхности?
4. Каким способом строят развёртки пирамидальных (конических) поверхностей? В чём его сущность?
5. Какую форму имеет развёртка поверхности прямого кругового конуса?
6. Каким способом строят развёртки призматических (цилиндрических) поверхностей?
7. Что собой представляет развёртка поверхности прямого кругового цилиндра?
8. Как нанести на развёртку поверхности точку, ей принадлежащую?



**ЛИТЕРАТУРА**

1. Бубенников А.В. Начертательная геометрия. - М.: Высшая школа, 1985.
2. Гордон В.О., Семенцов – Огиевский М.А. Курс начертательной геометрии. - М.: Наука, 1988.
3. Гордон В.О., Иванов Ю.Б., Солнцева Т.Е. Сборник задач по курсу начертательной геометрии. - М.: Наука, 1989.
4. Лагерь А.И., Колесникова Э.А. Инженерная графика. - М.: Высшая школа, 1985.
5. Фролов С.А. Начертательная геометрия. - М.: Машиностроение, 1983.
6. Чекмарёв А.А. Начертательная геометрия и черчение. - М.: Просвещение, 1987.