МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

А.В. Самохин, Ю.И. Дементьев

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

ПОСОБИЕ
по выполнению практических заданий

*для студентов I курса
направления 23.03.01
очной формы обучения*

Москва-2016

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ» (МГТУ ГА)

Кафедра высшей математики

А.В. Самохин, Ю.И. Дементьев

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

ПОСОБИЕ
по выполнению практических заданий

для студентов I курса
направления 23.03.01
очной формы обучения

Москва - 2016

ББК 51
С 17
Рецензент: канд. физ.-мат. наук, профессор Л.Д. Жулева

Самохин А.В., Дементьев Ю.И.

С17 Прикладная математика: пособие по выполнению практических заданий. - - М.: МГТУ ГА, 2016. - 40с.

Данное пособие издается в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Прикладная математика» по учебному плану для студентов I курса специальности 23.03.01 очной формы обучения.

Пособие охватывает разделы математики, изучаемые студентами по дисциплине «Прикладная математика»: графический метод решения задачи линейного программирования, симплекс-метод, транспортная задача, системы массового обслуживания, марковские цепи, потоки в сетях.

В пособии содержатся варианты контрольного домашнего задания и образцы их решения.

Рассмотрено и одобрено на заседаниях кафедры 15.09.2015 г. и методического совета 19.11.2015 г.

Подписано в печать 07.12.2015 г.

Печать офсетная	Формат 60x84/16	2,9 уч.-изд. л.
2,3 усл.печ.л.	Заказ № 41	Тираж 30 экз.

Московский государственный технический университет ГА
125993 Москва, Кронштадтский бульвар, д.20
Редакционно-издательские услуги ООО «Имидж-студия Арина»
127051 Москва, М. Сухаревская пл., д. 2/4 стр.1

КОНТРОЛЬНОЕ ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

Задание 1. Найти наибольшее и наименьшее значения линейной функции L на области M, заданной системой неравенств.

1.1. $L = 3x + y$,
$$M = \begin{cases} x + y \geqslant 2, \\ x \geqslant \frac{1}{2}, \\ y \leqslant 4, \\ x - y \leqslant 0. \end{cases}$$

1.2. $L = 2x + 2y$,
$$M = \begin{cases} 3x - 2y \geqslant -6, \\ 3x + y \geqslant 3, \\ x \leqslant 3, \\ y \geqslant 0. \end{cases}$$

1.3. $L = 2x + 3y$,
$$M = \begin{cases} x + 3y \geqslant 4, \\ x + y \leqslant 5, \\ x - 2y \geqslant -1, \\ y \geqslant 0. \end{cases}$$

1.4. $L = 3x - 4y$,
$$M = \begin{cases} x + 3y \geqslant 3, \\ x + y \leqslant 5, \\ x \geqslant 1, \\ y \geqslant 0. \end{cases}$$

1.5. $L = x - y$,
$$M = \begin{cases} 3 \leqslant x + y \leqslant 7, \\ 1 \leqslant y \leqslant 4, \\ x \leqslant 4, \\ x \geqslant 0. \end{cases}$$

1.6. $L = -x + 2y$,
$$M = \begin{cases} x - 3y \geqslant 6, \\ x + y \geqslant 1, \\ 0 \leqslant y \leqslant 2, \\ x \geqslant 0. \end{cases}$$

1.7. $L = 4x - y$,
$$M = \begin{cases} 3x + 4y \geqslant 12, \\ 3x - y \geqslant 3, \\ x + y \leqslant 9, \\ y \geqslant 0. \end{cases}$$

1.8. $L = -2x - y$,
$$M = \begin{cases} x + y \geqslant 2, \\ 3x + y \leqslant 6, \\ y \leqslant 4, \\ x \geqslant 0. \end{cases}$$

1.9. $L = x + 3y$,
$$M = \begin{cases} x + y \leqslant 6, \\ x + 2y \geqslant 4, \\ x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0. \end{cases}$$

1.10. $L = -x - 3y$,
$$M = \begin{cases} 3x + 2y \geqslant 4, \\ 3x - 3y \leqslant 4, \\ 3x - 7y \geqslant -21, \\ x \geqslant 0. \end{cases}$$

Задание 2. Найти оптимальное неотрицательное решение максимизирующее линейную форму L при указанной системе ограничений.

2.1. $L = 2x_1 - x_4$,
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 20, \\ x_2 + 2x_4 - x_5 = 5, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_6 = -8. \end{cases}$$

2.2. $L = -x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5$,
$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 9, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_3 + x_5 = 6. \end{cases}$$

2.3. $L = -x_1 - x_2$,
$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + x_4 = 2, \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_3 - x_4 + x_5 = 5. \end{cases}$$

2.4. $L = 2x_1 + x_4$,
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 = 20, \\ x_2 + 2x_4 - x_5 = 5, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_6 = 8. \end{cases}$$

2.5. $L = -12x_1 - 5x_2 - 3x_3,$
$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 180, \\ 4x_2 + 9x_3 + 12x_4 = 900. \end{cases}$$

2.6. $L = -x_1 - 2x_2 - 3x_3,$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -1, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_5 = -1. \end{cases}$$

2.7. $L = x_3 - x_1,$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 2. \end{cases}$$

2.8. $L = x_2 - 2x_3,$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2, \\ x_2 - x_4 = 1. \end{cases}$$

2.9. $L = x_2 + x_3,$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$

2.10. $L = -5x_1 + x_3,$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 3, \\ x_2 + 2x_4 = 1. \end{cases}$$

Задание 3. Найти решение предыдущего задания 2 при помощи симплекс-таблиц.

Задание 4. Составить план перевозок, оптимизирующих ситуацию, данные которой собраны в таблицу. (В правых верхних ячейках таблицы указаны соответствующие стоимости перевозок.)

4.1.

a_i \ b_k	60	80	100
155	6	10	4
85	12	2	8

4.2.

a_i \ b_k	65	85	90
90	7	9	5
150	10	1	6

4.3.

a_i \ b_k	50	90	110
165	3	8	7
85	9	4	6

4.4.

a_i \ b_k	55	100	75
80	7	8	4
150	10	6	5

4.5.

a_i \ b_k	70	90	80
95	9	11	3
145	2	7	6

4.6.

a_i \ b_k	65	105	90
160	2	8	5
100	4	5	10

4.7.

a_i \ b_k	90	70	80
175	8	12	5
65	3	8	9

4.8.

a_i \ b_k	55	110	65
150	4	1	9
80	8	6	5

4.9.

a_i \ b_k	70	75	95
80	5	12	6
160	4	7	9

4.10.

a_i \ b_k	90	110	60
105	7	11	3
155	10	6	8

Задание 5.

5.1. В инструментальном отделении сборочного цеха работают три кладовщика. В среднем за 1 минуту за инструментом приходят $0,8$ рабочего ($\lambda = 0,8$). Обслуживание одного рабочего занимает у кладовщика время $t = 1$ минуту. Очередь не имеет ограничения. Стоимость 1 минуты работы рабочего равна 30 денежных единиц, а кладовщика — 15 денежных единиц. Найдите средние потери цеха при данной организации обслуживания в инструментальном отделении (стоимость простоя) при стационарном режиме работы.

5.2. Билетная касса работает без перерыва. Билеты продаёт один кассир. Среднее время обслуживания — 2 минуты на каждого человека. Среднее число пассажиров, желающих приобрести билеты в кассе в течение одного часа, равно $\lambda = 20$ пассажиров в час. Определите среднюю длину очереди, вероятность простоя кассира, среднее время нахождения пассажира в билетной кассе (в очереди и на обслуживании), среднее время ожидания в очереди в условиях стационарного режима работы кассы.

5.3. Пост диагностики автомобилей представляет собой одноканальную СМО с отказами. Заявка на диагностику, поступившая в момент, когда пост занят, получает отказ. Интенсивность потока заявок на диагностику $\lambda = 0,5$ автомобиля в час. Средняя продолжительность диагностики $t = 1,2$ часа. Определите в установившемся режиме вероятностные характеристики системы.

5.4. Автозаправочная станция представляет собой СМО с одним каналом обслуживания и одной колонкой. Площадка при АЗС допускает пребывание в очереди на заправку не более трёх автомобилей одновременно. Если в очереди уже находится три автомобиля, очередной автомобиль, прибывший к станции, в очередь не становится, а проезжает мимо. Поток автомобилей, прибывающих для заправки, имеет интенсивность $\lambda = 0,7$ автомобиля в минуту. Процесс заправки продолжается в среднем $1,25$ минуты. Определите вероятностные характеристики СМО в стационарном режиме.

5.5. На железнодорожную сортировочную горку прибывают составы с интенсивностью $\lambda = 2$ состава в час. Среднее время, в течение которого горка обслуживает состав, равно $0,4$ часа. Составы, прибывающие в момент, когда горка занята, становятся в очередь и ожидают в парке прибытия, где имеется три запасных пути, на каждом из которых может ожидать один состав. Состав, прибывший в момент, когда все три запасных пути в парке прибытия заняты, становится в очередь на внешний путь. При установившемся режиме найдите среднее число составов, ожидающих в очереди (как в парке прибытия, так и вне его), среднее время ожидания в парке прибытия и на внешних путях, среднее время ожидания состава в системе обслуживания, вероятность того, что прибывший состав займёт место на внешних путях.

5.6. Рассматривается работа АЗС, на которой имеется три заправочные колонки. Заправка одной машины длится в среднем 3 минуты. В среднем на АЗС каждую минуту прибывает машина, нуждающаяся в заправке бензином. Число мест в очереди не ограничено. Все машины, вставшие в очередь на заправку, дожидаются своей очереди. Определите вероятностные характеристики работы АЗС в стационарном режиме.

5.7. На станцию технического обслуживания (СТО) автомобилей каждые два часа подъезжает в среднем одна машина. Станция имеет 6 постов обслуживания. Очередь автомобилей, ожидающих обслуживания, не ограниченна. Среднее время обслуживания одной машины 2 часа. Определите вероятностные характеристики станции технического обслуживания автомобилей.

5.8. Малое транспортное предприятие эксплуатирует десять моделей автомобилей одной марки. Поток отказов автомобилей имеет интенсивность $\lambda = 0,25$ отказа в день. Среднее время устранения одного отказа автомобиля одним механиком равно 2 час. Возможны два варианта обслуживания: все автомобили обслуживают два механика с одинаковой производительностью или все автомобили предприятия обслуживают три механика с одинаковой производительностью. Необходимо выбрать наилучший вариант организации обслуживания автомобилей.

5.9. В магазине работает один продавец, который может обслужить в среднем 30 покупателей в час. Поток покупателей простейший с интенсивностью, равной 60 покупателей в час. Все покупатели “нетерпеливые” и уходят, если в очереди стоит 5 человек (помимо обслуживаемых). Определите следующие вероятностные характеристики магазина для стационарного режима работы: вероятность обслуживания покупателя, абсолютную пропускную способность магазина, среднюю длину очереди, среднее время ожидания в очереди, среднее время всего обслуживания, вероятность простоя продавца.

5.10. Имеется двухканальная простейшая СМО с отказами. На её вход поступает поток заявок с интенсивностью $\lambda = 3$ заявки в час. Среднее время обслуживания одной заявки $t = 0,5$ часа. Каждая обслуженная заявка приносит доход 5 денежных единиц. Содержание канала обходится в 3 денежные единицы в час. Решите, выгодно ли в экономическом отношении увеличить число каналов СМО до трёх.

Задание 6. Дано начальное распределение вероятностей цепи Маркова $\mathbf{Q}$ и её матрица переходов $\mathcal{P}$.

a) Найти распределение вероятностей состояний через 2 шага.

б) Найти стационарный режим.

в) Нарисовать размеченный граф переходов в цепи.

6.1. $\mathbf{Q} = (1; 0; 0; 0)$, $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0 & 0,8 & 0 \end{pmatrix}$

6.2. $\mathbf{Q} = (0; 1; 0; 0)$, $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,7 & 0 \\ 0,2 & 0,1 & 0,6 & 0,1 \\ 0,1 & 0,5 & 0,1 & 0,3 \\ 0,5 & 0,3 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}$

6.3. $\mathbf{Q} = (0; 0; 1; 0)$, $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0,7 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$

6.4. $\mathbf{Q} = (0; 0; 0; 1)$, $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,2 & 0,5 \\ 0,2 & 0,4 & 0,1 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0,7 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}$

6.5. $\mathbf{Q} = (0,5; 0; 0; 0,5)$, $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0,7 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$

6.6. $\mathbf{Q} = (0; 0,5; 0,5; 0)$, $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,4 \\ 0 & 0,8 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0 & 0,7 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$

6.7. $\mathbf{Q} = (0; 0,5; 0; 0,5)$, $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,1 & 0,5 \\ 0,2 & 0,3 & 0,3 & 0,2 \\ 0,3 & 0 & 0,7 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,8 & 0 \end{pmatrix}$

6.8. $\mathbf{Q} = (0,5; 0,25; 0,25; 0)$, $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0,7 & 0,3 \\ 0,4 & 0 & 0,4 & 0,2 \end{pmatrix}$

6.9. $\mathbf{Q} = (0,25; 0; 0,5; 0,25)$, $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,7 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,8 & 0 & 0,1 \\ 0,3 & 0 & 0,7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6.10. $\mathbf{Q} = (0,25; 0,25; 0,25; 0,25)$, $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 & 0,1 & 0,3 \\ 0,6 & 0,3 & 0,1 & 0 \\ 0,3 & 0 & 0,7 & 0 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 & 0 \end{pmatrix}$

Задание 7. Транспортная сеть задана матрицей M. Найти её максимальную пропускную способность и нарисовать граф максимальной загрузки этой сети.

7.1. $M = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

7.2. $M = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

7.3. $M = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

7.4. $M = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

7.5. $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

7.6. $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

7.7. $M = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

7.8. $M = \begin{pmatrix} 0 & 11 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

7.9. $M = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

7.10. $M = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ КОНТРОЛЬНОГО ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ

Задача 1. Графический метод решения задачи линейного программирования

Линейные неравенства и область решений системы неравенств

Пусть задано линейное неравенство с двумя переменными x_1 и x_2

$$a_1x_1 + a_2x_2 + b \geqslant 0. \tag{1}$$

Если величины x_1 и x_2 рассматривать как координаты точки плоскости, то совокупность точек плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству (1), называется *областью решений* данного неравенства. Областью решений неравенства (1) является полуплоскость.

Для того чтобы установить, какая из двух полуплоскостей соответствует неравенству (1), достаточно привести это неравенство к виду $x_2 \leqslant kx_1 + l$ или к виду $x_2 \geqslant kx_1 + l$. В первом случае искомая полуплоскость лежит выше прямой $x_2 = kx_1 + l$, во втором — ниже её. Если же $a_2 = 0$, то неравенство приводится к одному из видов $x_1 \leqslant h$ или $x_1 \geqslant h$, где $h = -b/a_1$. То есть полуплоскость лежит справа или слева от прямой $x_1 = h$.

В случае же, когда задана система неравенств

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 \geqslant 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2 \geqslant 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + b_m \geqslant 0, \end{cases} \tag{2}$$

где m — конечное число, получим пересечение конечного числа полуплоскостей, образующее многоугольную область D. Область D называется *областью решений* системы неравенств (2). Эта область не всегда бывает ограничена, она может быть и неограниченной и даже пустой. Последний случай имеет место тогда, когда система неравенств (2) противоречива. Могут быть также случаи лишних неравенств, входящих в совместную систему и определяющих прямые, не имеющие с областью D общих точек. Такие неравенства можно исключить.

Область решений обладает важным свойством — она является *выпуклой,* то есть вместе с любыми своими двумя точками содержит и весь соединяющий их отрезок. Прямая, которая имеет с областью по крайней мере одну общую точку, притом так, что вся область лежит по одну сторону от этой прямой, называется опорной по отношению к этой области.

Основная задача линейного программирования

Задача линейного программирования заключается в изучении способов отыскания наибольшего или наименьшего значений линейной функции при наличии линейных ограничений.

Функция, наибольшее или наименьшее значение которой отыскивается, называется *целевой функцией,* а совокупность значений переменных, при которых достигается наибольшее или наименьшее значение, определяет так называемый *оптимальный план.* Всякая же другая совокупность значений, удовлетворяющая ограничениям, определяет *допустимый план (решение).*

Пусть ограничения заданы совместной системой τ линейных неравенств с n переменными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \geqslant b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \geqslant b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \geqslant b_m. \end{cases} \tag{3}$$

Среди неотрицательных решений этой системы требуется найти такое решение, при котором линейная функция (целевая функция)

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + c_0$$

принимает наибольшее (наименьшее) значение или, как говорят, максимизировать (минимизировать) линейную форму L.

Покажем, как решается указанная задача геометрическим методом, для чего ограничимся рассмотрением совместной системы линейных неравенств с двумя переменными. Пусть, кроме того, задана линейная функция $L = c_1x_1 + c_2x_2 + c_0$. Найдём среди множества точек $(x_1; x_2)$ из области решений совместной системы неравенств такие, которые придают заданной линейной функции наименьшее (наибольшее) значение.

Для каждой точки плоскости функция L принимает фиксированное значение $L = L_0$. Множество всех таких точек есть прямая $c_1x_1 + c_2x_2 + c_0 = L_0$, перпендикулярная вектору $C(c_1, c_2)$, выходящему из начала координат. Если эту прямую передвигать параллельно самой себе в положительном направлении вектора C, то линейная функция $L = c_1x_1 + c_2x_2 + c_0$ будет возрастать, а в противоположном направлении — убывать.

Пусть при движении прямой L в положительном направлении вектора она впервые встретится с многоугольником решений в его вершине, тогда в этом положении $L_{\min}$ прямая L становится опорной, и на этой прямой функция L принимает наименьшее значение. При дальнейшем движении в том же направлении (положительном) прямая L пройдёт через другую вершину многоугольника решений, выходя из области решений, и станет также опорной прямой $L_{\max}$; на ней функция L принимает наибольшее значение среди всех значений, принимаемых на многоугольнике решений.

Таким образом, минимизация и максимизация линейной функции $L = c_1x_1 + c_2x_2 + c_0$ на многоугольнике решений достигаются в точках пересечения этого многоугольника с опорными прямыми, перпендикулярными вектору $C(c_1, c_2)$. Опорная прямая может иметь с многоугольником решений либо одну общую точку (вершину многоугольника), либо бесконечное множество точек (это множество есть сторона многоугольника).

Задание 1.

Найти наибольшее и наименьшее значение линейной функции $L = y - 2x$ на области, заданной системой неравенств

$$\begin{cases} x - y \leqslant 1, \\ y \leqslant 2 + 0,1x, \\ x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0. \end{cases}$$

Рисунок 1 иллюстрирует решение задачи. Жирными линиями изображены прямые $x - y = 1$, $y = 2 + 0,1x$, $x = 0$, $y = 0$. Тёмная область — многоугольник решения системы неравенств. Вектор общей нормали $(-2; 1)$ перпендикулярен прямым $y - 2x = C$ (показаны пунктирными линиями).

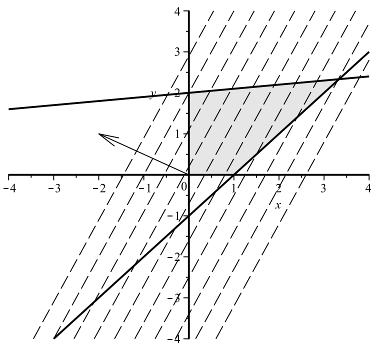

Рис. 1. Графическое решение задачи линейного программирования.

При смещении в направлении вектора нормали линия уровня впервые зацепит многоугольник в правой верхней вершине. Координаты вершины (общей точки прямых $x - y = 1$ и $y = 2 + 0,1x$) можно найти, решая систему

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ y = 2 + 0,1x. \end{cases}$$

Получаем $x = \frac{10}{3}$, $y = \frac{7}{3}$. Подставляя эти координаты в функцию L, получаем $L_{\min} = -\frac{13}{3}$. При дальнейшем сдвиге в направлении нормали наибольшее значение получается в левом верхнем углу (далее линии уровня уже не будут иметь общих точек с многоугольником). Координаты левой верхней вершины можно искать как общую точку прямых $x = 0$ и $y = 2+0,1x$. Отсюда находим точку $(0; 2)$. Подставляя эти координаты в функцию L, получаем $L_{\max} = 2$.

Задача 2. Симплекс-метод

Понятие о симплекс-методе

Решение основной задачи линейного программирования геометрическим методом является наглядным в случае двух и даже трёх переменных. Для случая же большего числа переменных геометрический метод становится невозможным. Тогда применяют так называемый *симплекс-метод*, принадлежащий к числу аналитических методов решения основной задачи линейного программирования.

Система ограничений в вычислительных методах обычно задаётся системой линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{4}$$

Среди неотрицательных решений системы уравнений (4) надо найти такие, которые максимизировали бы линейную функцию

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n + c_0.$$

Замечание о связи задач на максимум и минимум

Максимум функции $L(x)$ соответствует минимуму функции $-L(x)$. Поэтому, если требуется найти минимум, то в последующих рассуждениях и примерах надо просто заменить $L(x)$ на $-L(x)$.

Выразим $x_1, x_2, ..., x_r$ $(r \leqslant m)$ через остальные переменные:

$$\begin{cases} x_1 = a'_{1,r+1}x_{r+1} + a'_{1,r+2}x_{r+2} + ... + a'_{1,n}x_n + b'_1, \\ x_2 = a'_{2,r+1}x_{r+1} + a'_{2,r+2}x_{r+2} + ... + a'_{2,n}x_n + b'_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_r = a'_{r,r+1}x_{r+1} + a'_{r,r+2}x_{r+2} + ... + a'_{r,n}x_n + b'_r, \end{cases} \tag{5}$$

где $b'_1 \geqslant 0$, $b'_2 \geqslant 0, ..., b'_r \geqslant 0$.

Замечание о неравенствах в условии

Если ограничительные условия заданы неравенствами, то их можно преобразовать в равенства путём введения новых неотрицательных переменных, так называемых *балансовых* (выравнивающих) переменных. Например, в неравенстве $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leqslant b_1$ достаточно добавить к левой части некоторую величину $x_{n+1} \geqslant 0$, и получится равенство $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1$.

Ограничительные условия могут задаваться и смешанным образом, то есть неравенствами и уравнениями. Тогда указанным путём их можно свести только к уравнениям.

Переменные (неизвестные) $x_1, x_2, ..., x_r$ называются *базисными,* а весь набор $\{x_1, x_2, ..., x_r\}$ — базисом, остальные переменные называются *свободными.* Система ограничений (5) называется *системой, приведённой к единичному базису.* Подставляя в линейную форму L вместо базисных переменных их выражения через свободные переменные из системы (5), получим

$$L = \gamma_{r+1}x_{r+1} + \gamma_{r+2}x_{r+2} + ... + \gamma_n x_n + \gamma_0.$$

Теперь, полагая все свободные переменные равными нулю, найдём значения базисных переменных: $x_1 = b'_1 \geqslant 0$, $x_2 = b'_2 \geqslant 0, ..., x_r = b'_r \geqslant 0$. Таким образом, решение $(b'_1, b'_2, ..., b'_r, 0, ..., 0)$ системы является допустимым — оно называется *базисным решением.*

Для полученного базисного решения значение линейной формы L_B равно γ_0. Решение задачи с помощью симплекс-метода распадается на ряд шагов, заключающихся в том, что от данного базиса B' мы переходим к другому базису B'' с таким расчётом, чтобы значение L увеличивалось или, по крайней мере, не уменьшалось, то есть $L_{B'} \leqslant L_{B''}$.

Идею метода проследим на конкретном примере.

Задание 2.

Найти оптимальное неотрицательное решение максимизирующее линейную форму $L = -x_4 + x_5$ при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ x_2 - 2x_4 + x_5 = 2, \\ x_3 + 3x_4 + x_5 = 3. \end{cases}$$

Данная система уравнений-ограничений совместна, так как ранги матрицы системы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

и расширенной матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

совпадают и равны 3. Следовательно, три переменные (базисные) можно линейно выразить через две свободные переменные. Выразим, например, переменные x_1, x_2 и x_3 через переменные x_4, x_5, то есть приведём систему к единичному базису:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_4 + 2x_5, \\ x_2 = 2 + 2x_4 - x_5, \\ x_3 = 3 - 3x_4 - x_5. \end{cases} \tag{6}$$

Линейную форму $L = -x_4 + x_5$ выразим через свободные переменные x_4, x_5 (в данном примере L уже выражена через x_4 и x_5). Теперь при $x_4 = 0$,

$x_5 = 0$ найдём значения базисных переменных: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. Таким образом, первое допустимое решение системы уравнений есть (1, 2, 3, 0, 0). При найденном допустимом решении линейная форма L имеет значение 0, то есть $L_1 = 0$.

Теперь попытаемся увеличить значение L_1. Увеличение x_4 уменьшит L_1, так как перед x_4 стоит отрицательный коэффициент, а увеличение x_5 даёт увеличение и L_1. Поэтому увеличим значение x_5 так, чтобы числа x_1, x_2, x_3 не стали отрицательными, оставив $x_4 = 0$. Из второго уравнения системы следует, что x_5 можно увеличить до 2. Таким образом, получаем следующие значения переменных: $x_1 = 5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 2$. Или, в векторной форме, $(5, 0, 1, 0, 2)$.

Значение линейной формы L при этом допустимом решении равно $L_2 = = 2$, то есть на втором шаге оно увеличилось.

Далее, примем за свободные переменные x_2 и x_4, то есть именно те переменные, которые в новом решении имеют нулевые значения. С этой целью из второго уравнения системы (6) выразим x_5 через x_2 и x_4 и получим $x_5 = 2 - x_2 + 2x_4$.

Тогда,

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= 5 - 2x_2 + 3x_4, \\ x_3 &= 1 + x_2 - 5x_4, \\ x_5 &= 2 - x_2 + 2x_4, \\ L &= 2 - x_2 + x_4. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Для увеличения значения L будем увеличивать x_4. Из второго уравнения системы (7) видно, что при условии неотрицательности x_3 значение x_4 можно довести до $x_4 = 1/5$. При этом условии новое допустимое решение есть $x_1 = 28/5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1/5$, $x_5 = 12/5$ или $(28/5, 0, 0, 1/5, 28/5)$. Значение линейной формы при этом $L_3 = 11/5$.

Выразим теперь x_1, x_4, x_5 через свободные переменные x_2 и x_3:

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{28}{5} - \tfrac{3}{5}x_3 - \tfrac{7}{5}x_2, \\ x_4 &= \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{5}x_3 + \tfrac{1}{5}x_2, \\ x_5 &= \tfrac{12}{5} - \tfrac{2}{5}x_3 - \tfrac{3}{5}x_2, \\ L &= \tfrac{11}{5} - \tfrac{1}{5}x_3 - \tfrac{4}{5}x_2. \end{aligned}\right.$$

Так как в последней линейной форме обе свободные переменные входят с отрицательными коэффициентами, то наибольшее значение L достигается при $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Это означает, что найденное решение $(28/5, 0, 0, 1/5, 28/5)$ является оптимальным и $L_{\max} = 11/5$.

Задача 3. Симплексные таблицы

Систему ограничений сведём к единичному базису:

$$\begin{cases} x_1 + a_{1,r+1}x_{r+1} + a_{1,r+2}x_{r+2} + ... + a_{1,n}x_n = b_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_i + a_{i,r+1}x_{r+1} + a_{i,r+2}x_{r+2} + ... + a_{i,n}x_n = b_i, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_r + a_{r,r+1}x_{r+1} + a_{r,r+2}x_{r+2} + ... + a_{r,n}x_n = b_r. \end{cases}$$

а линейную форму L — к виду

$$L + \gamma_{r+1}x_{r+1} + ... + \gamma_j x_j + ... + \gamma_n x_n = \gamma_0. \quad (8)$$

В виде таблицы эти данные можно представить так:

Базисные переменные	Свободные члены	x_1	...	x_i	...	x_r	x_{r+1}	...	x_j	...	x_n
x_1	b_1	1	...	0	...	0	$a_{1,r+1}$	...	a_{1j}	...	a_{1n}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
x_i	b_i	0	...	1	...	0	$a_{i,r+1}$	...	a_{ij}	...	a_{in}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
x_r	b_r	0	...	0	...	1	$a_{r,r+1}$	...	a_{rj}	...	a_{rn}
L	γ_0	0	...	0	...	0	γ_{r+1}	...	γ_j	...	γ_n

Равенство (8) будем называть *приведённым* (к свободным переменным) *выражением* для функции L, а коэффициенты γ_j — *оценками* (индексами) соответствующих свободных переменных x_j.

Алгоритм пересчёта симплекс-таблиц.

1. Выбирают разрешающий столбец a_p из условия: оценка $\gamma_p < 0$ и хотя бы один элемент $a_{ip} > 0$.

2. Выбирают разрешающую строку номер q из условия

$$\frac{b_q}{a_{qp}} = \min\left\{\frac{b_i}{a_{ip}}\right\} \text{ для } a_{ip} > 0.$$

3. Производят пересчёт элементов разрешающей q-й строки по формуле

$$a'_{qk} = \frac{a_{qk}}{a_{qp}},\ k = 0, 1, ..., n.$$

4. Вычисляют элементы всех остальных строк по формуле

$$a'_{ik} = a_{ik} - a'_{qk}a_{ip},\ i = 0, 1, ..., q-1, q+1, ..., r.$$

Заметим, что после очередного пересчёта симплекс-таблицы на месте разрешающего элемента будет стоять единица, а все остальные числа в разрещающем столбце станут нулями.

Следует иметь в виду основную теорему симплексного метода:

Т Е О Р Е М А. *Если после выполнения очередной итерации:*

1) *найдётся хотя бы одна отрицательная оценка и в каждом столбце с такой оценкой окажется хотя бы один положительный элемент, то есть $\gamma_k > 0$ для некоторых k, и $a_{ik} > 0$ для тех же k и некоторого i, то можно улучшить решение, выполнив следующую итерацию;*

2) *найдётся хотя бы одна отрицательная оценка, столбец которой не содержит положительных элементов, то есть $\gamma_k < 0$, $a_{ik} < 0$ для какого-то k и всех i, то функция L не ограничена в области допустимых решений ($L_{\max} \to \infty$);*

3) *все оценки окажутся неотрицательными, то есть $\gamma_k \geqslant 0$ для всех k,*

то достигнуто оптимальное решение.

Задание 3.

Найти наибольшее значение линейной функции $L = 7x_1 + 5x_2$ на множестве неотрицательных решений системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 19, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 13, \\ 3x_2 + x_5 = 15, \\ 3x_1 + x_6 = 18. \end{cases}$$

Ранг матрицы системы уравнений

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

равен 4. Ранг расширенной матрицы также равен 4. Следовательно,четыре переменные (базисные) можно выразить через две (свободные), то есть

$$\begin{cases} x_3 = 19 - 2x_1 - 3x_2, \\ x_4 = 13 - 2x_1 - x_2, \\ x_5 = 15 - 3x_2, \\ x_6 = 18 - 3x_1. \end{cases}$$

Линейная форма $L = 7x_1 + 5x_2$, $L - 7x_1 - 5x_2 = 0$ уже выражена через эти же свободные переменные. Имеем исходную таблицу (см. таблицу 1).

Таблица 1

Базисные переменные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_3	19	2	**3**	1	0	0	0
x_4	13	2	**1**	0	1	0	0
x_5	**15**	**0**	**3**	**0**	**0**	**1**	**0**
x_6	18	3	**0**	0	0	0	1
L	0	-7	**-5**	0	0	0	0

Выясняем, имеются ли в последней (индексной) строке отрицательные числа. Таких чисел два: -7 и -5. Берём, например, -5 и просматриваем столбец для x_2. В этом столбце имеем три положительных элемента 3, 1, 3. Делим на эти числа соответствующие свободные члены: 19/3, 13/1, 15/3. Из полученных частных наименьшее есть 15/3. Следовательно, разрешающим является элемент 3, стоящий на пересечении строки для x_5 и столбца для x_2. Новый базис состоит из x_3, x_4, x_2, x_6. Для составления следующей таблицы умножим выделенную строку таблицы 1 на 1/3, чтобы получить на месте разрешающего элемента 1 и полученную таким образом строку пишем на месте прежней. К каждой из остальных строк прибавляем вновь полученную, умноженную на такое число, чтобы в клетках столбца для x_2 появились нули, и пишем преобразованные строки на месте прежних. Этим завершается первая итерация.

Таблица 2

Базисные переменные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_3	**4**	**2**	**0**	**1**	**0**	**-1**	**0**
x_4	8	**2**	0	0	1	-1/3	0
x_2	5	**0**	1	0	0	1/3	0
x_6	18	**3**	0	0	0	0	1
L	25	**-7**	0	0	0	5/3	0

Теперь все рассуждения повторяются применительно к таблице 2, то есть выполняем вторую итерацию. Новый разрешающий элемент, находящийся на пересечении строки для x_3 и столбца для x_1, есть 2.

Таблица 3

Базисные переменные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	2	1	0	1/2	0	**-1/2**	0
x_4	**4**	**0**	**0**	**-1**	**1**	**2/3**	**0**
x_2	5	0	1	0	0	**1/3**	0
x_6	12	0	0	-3/2	0	**3/2**	1
L	39	0	0	7/2	0	**-11/6**	0

Переходим к следующей таблице. То же повторим применительно к таблице 3. Здесь разрешающим является элемент 2/3, находящийся на пересечении строки для x_4 и столбца для x_5. Переходим к таблице 4.

Таблица 4

Базисные переменные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	5	1	0	$-1/4$	3/4	0	0
x_5	6	0	0	$-3/2$	3/2	1	0
x_2	3	0	1	1/2	$-1/2$	0	0
x_6	3	0	0	3/4	$-9/4$	0	1
L	50	0	0	3/4	11/4	0	0

Поскольку в индексной строке нет отрицательных чисел, мы получили оптимальный план (5, 3, 0, 0, 6, 3) и наибольшее значение линейной формы L есть $L_{\max} = 50$.

Задача 4. Транспортная задача

Одной из типичных задач линейного программирования является так называемая *транспортная задача*. Она возникает при планировании наиболее рациональных перевозок грузов. В одних случаях это означает определение такого плана перевозок, при котором стоимость последних была бы минимальна, а вдругих — более важным является выигрыш во времени. Первая задача получила название *транспортной задачи по критерию стоимости,* а вторая — *транспортной задачи по критерию времени.*

Первая задача является частным случаем задачи линейного программирования и может быть решена симплексным методом. Однако, в силу особенностей этой задачи, её можно решить проще.

Пусть в p пунктах отправления находятся соответственно $a_1, a_2, ..., a_p$ единиц однородного груза, который должен быть доставлен q потребителям в количествах $b_1, b_2, ..., b_q$ единиц. Заданы стоимости c_{ik} перевозок единицы груза из пункта отправления i в пункт потребления k. Обозначим через $x_{ik} \geqslant 0$ $(i = 1, 2, ..., p;\ k = 1, 2, ..., q)$ количество единиц груза, перевозимого со склада i потребителю k; тогда переменные x_{ik} должны удовлетворять следующим ограничительным условиям:

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{q} x_{ik} = a_i, \quad i = 1, 2, ..., p, \\ \sum\limits_{i=1}^{p} x_{ik} = b_k, \quad k = 1, 2, ..., q, \\ x_{ik} \geqslant 0. \end{cases}$$

Суммарные затраты на перевозки равны

$$L = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + ... + c_{pq}x_{pq} = \sum_{i,k} c_{ik}x_{ik}.$$

Следовательно, требуется найти pq переменных x_{ik}, удовлетворяющих указанным условиям и минимизирующих целевую функцию L.

Таблица 5

b_k / a_i	b_1	b_2	...	b_k	...	b_q
a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1k} x_{1k}	...	c_{1q} x_{1q}
a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2k} x_{2k}	...	c_{2q} x_{2q}
...	...	...	...	...	...	...
a_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	...	c_{ik} x_{ik}	...	c_{iq} x_{iq}
...	...	...	...	...	...	...
a_p	c_{p1} x_{p1}	c_{p2} x_{p2}	...	c_{pk} x_{pk}	...	c_{pq} x_{pq}

Решение такой задачи разбивается на два этапа:

1) определение исходного опорного решения;

2) построение последовательных итераций, то есть приближение к оптимальному решению.

Определение исходного опорного решения

Пусть мы имеем таблицу исходных данных задачи. Исходное опорное решение будем строить по так называемому правилу “северо-западного угла”. Заполним вышеуказанную таблицу, начиная с левого верхнего угла, двигаясь далее по строке вправо или по столбцу вниз. В клетку (a_1, b_1) занесём меньшее из чисел a_1 и b_1, то есть $x_{11} = \min\{a_1, b_1\}$.

Если $a_1 > b_1$, то $x_{11} = b_1$ и первый столбец “закрыт”, то есть потребности первого потребителя удовлетворены полностью. Двигаемся далее по первой строке, записывая в соседнюю клетку (a_1, b_2) меньшее из чисел $a_1 - b_1$ и b_2, то есть $x_{12} = \min\{a_1 - b_1, b_2\}$.

Если же $b_2 > a_1$, то аналогично “закрывается” первая строка и далее переходим к заполнению соседней клетки (a_2, b_1), куда заносим $x_{21} = \min\{a_2, b_1 - a_1\}$. Будем продолжать этот процесс до тех пор, пока на каком-то этапе не исчерпываются ресурсы a_p и потребности b_q.

Рассмотрим работу алгоритма на примере.

Задание 4.

В двух пунктах отправления A и B находится соответственно 150 и 90 тонн горючего. В пункты *1, 2, 3* требуется доставить соответственно 60, 70 и 110 тонн горючего. Стоимости перевозки тонны горючего из пункта A в пункты *1, 2, 3* составляют соответственно 6, 10 и 4 денежных единиц, а из пункта B — соответственно 12, 2 и 8 денежных единиц. Составить оптимальный план перевозок горючего так, чтобы общая сумма транспортных расходов была наименьшей.

Запишем исходные данные в таблицу 6. Заполнение начнём с клетки (a_1, b_1): $x_{11} = \min\{150, 60\} = 60$, первый столбец закрыт. Переходим к клетке (a_1, b_2): $x_{12} = \min\{150 - 60, 70\} = 70$, второй столбец закрыт. Далее, переходим к клетке (a_1, b_3): $x_{13} = \min\{150 - 60 - 70, 110\} = 20$. Так как в третьем столбце оказался остаток, равный 90, то переходим к заполнению клетки (a_2, b_3), куда заносим $x_{23} = \min\{90, 90\} = 90$. Поскольку остатки по строке и столбцу равны нулю, опорное исходное решение построено. Этому плану соответствуют затраты в количестве $L = 6 \cdot 60 + 10 \cdot 70 + 4 \cdot 20 + 8 \cdot 90 = 1860$ денежных единиц.

Таблица 6

		1	*2*	*3*
	b_k / a_i	60	70	110
A	150	6 60	10 70	4 20
B	90	12	2	8 90

В правиле “северо-западного угла” не учитывается величина затрат c_{ik}, а потому исходное опорное решение часто может быть далёким от оптимального. Применяют также приём “минимального элемента”, в котором учитывается величина c_{ik}.

В этом случае построение исходного опорного решения начинают с клетки с наименьшей величиной c_{ik}, в данном примере — с клетки (a_2, b_2), где $c_{22} = 2$ (см. таблицу 7). В эту клетку заносим $x_{22} = \min\{a_2, b_2\} = \min\{90, 70\} = 70$. Остатки по строке и столбцу записываем в соответствующие клетки строки и столбца остатков. Столбец b_2 закрыт. Теперь переходим к клетке (a_1, b_3), так как после $c_{22} = 2$ наименьшим является $c_{13} = 4$. В клетку (a_1, b_3) заносим $x_{13} = \min\{a_1 - b_1, b_3\} = \min\{150 - 60, 110\} = 90$. Затем переходним к клетке (a_1, b_1): $x_{11} = \min\{a_1, b_1\} = \min\{150, 60\} = 60$. Наконец, переходим к клетке (a_2, b_3), в которую заносим $x_{23} = \min\{a_2 - b_2, b_3\} = \min\{90-70, 110\} = 20$.

Таблица 7

b_k / a_i	60	70	110	Остаток
150	6 60	10	4 90	60
90	12	2 70	8 20	20
Остаток	0	0	20	

Применяя это правило, мы получили другой вариант исходного опорного решения, при котором затраты $L = 6 \cdot 60 + 2 \cdot 70 + 4 \cdot 90 + 8 \cdot 20 = 1020$ денежных единиц, то есть сумма затрат ближе к оптимальному плану.

Построение последовательных итераций

Получив исходное опорное решение, перейдём теперь к построению новых опорных решений, улучшающих предыдущее. Для этого применим метод потенциалов.

Итак, после построения исходного опорного решения все переменные разбиты на две группы: x_{ki} — базисные и x_{pq} — свободные. Линейные функции стоимости перевозок выразятся через свободные переменные так:

$$L = \sum_{p,q} \gamma_{pq} x_{pq} + \gamma_0. \tag{9}$$

Для нахождения коэффициентов γ_{pq} при свободных переменных сопоставим каждому пункту отправления A_i некоторую величину u_i ($i = 1, 2, \ldots, m$), которую назовём *потенциалом* пункта A_i и каждому пункту назначения B_j величину v_j — потенциал пункта B_j. Свяжем эти величины равенством $u_k + v_l = c_{kl}$, где c_{kl} — стоимость перевозки одной тонны груза из пункта A_k в пункт B_l.

Отметим, что совокупность уравнений $u_k + v_l = c_{kl}$, составленных для всех базисных переменных, составляет совместную систему линейных уравнений, причём значение одной из переменных можно задавать произвольно, и тогда значения остальных переменных находятся из системы однозначно. Обозначим для свободных переменных сумму соответствующих потенциалов через c'_{pq}, то есть $u_p + v_q = c'_{pq}$ и назовем её *косвенной стоимостью* (в отличие от заданной стоимости c_{pq}). Тогда коэффициенты при свободных переменных в соотношении (9) определяются с помощью равенства $\gamma_{pq} = c_{pq} - c'_{pq}$.

Если все величины γ_{pq} неотрицательны, то исходное решение является оптимальным. Если же среди них имеются отрицательные, то переходим к следующему базису путём увеличения члена с отрицательным коэффициентом, оставляя другие переменные равными нулю.

Воспользуемся изложенными общими понятиями и продолжим решение задачи. Мы получили исходное опорное решение (следуя правилу “минимального элемента”):

$$x_{11} = 60,\ x_{12} = 0,\ x_{13} = 90,\ x_{21} = 0,\ x_{22} = 70,\ x_{23} = 20,\ L = 1020.$$

Для нахождения потенциалов необходимо решить систему

$$u_1 + v_1 = c_{11} = 6,\ u_1 + v_3 = c_{13} = 4,\ u_2 + v_2 = c_{22} = 2,\ u_2 + v_3 = c_{23} = 8.$$

Значение одного из неизвестных зададим произвольно, например, $u_1 = 1$. Тогда, $v_1 = 5$, $v_3 = 3$, $u_2 = 5$, $v_2 = -3$. Далее вычисляем косвенные стоимости:

$$u_1 + v_2 = c'_{12} = -2, \quad u_2 + v_1 = c'_{21} = 10.$$

Подсчитаем теперь разности $\gamma_{pq} = c_{pq} - c'_{pq}$:

$$\gamma_{12} = c_{12} - c'_{12} = 10 - (-2) = 12, \quad \gamma_{21} = c_{21} - c'_{21} = 12 - 10 = 2.$$

Следовательно, выражение L через свободные переменные имеет вид $L = 1020 + 12x_{12} + 2x_{21}$. Среди коэффициентов при переменных в правой части нет отрицательных. Значит, исходное опорное решение является оптимальным. Таким образом, правило “минимального элемента” сразу даёт оптимальное решение.

Решим теперь эту же задачу при условии, что исходное решение получено по правилу “северо-западного угла”, то есть

$$x_{11} = 60,\ x_{12} = 70,\ x_{13} = 20,\ x_{21} = 0,\ x_{22} = 0,\ x_{23} = 90,\ L = 1860.$$

Для нахождения потенциалов необходимо решить систему

$$u_1 + v_1 = c_{11} = 6,\ u_1 + v_2 = c_{12} = 10,\ u_1 + v_3 = c_{13} = 4,\ u_2 + v_3 = c_{23} = 8.$$

Полагая $u_1 = 1$, получим $v_1 = 5$, $v_2 = 9$, $v_3 = 3$, $u_2 = 5$.

Вычисляем косвенные стоимости c_{pq}:

$$u_2 + v_1 = c'_{21} = 10, \quad u_2 + v_2 = c'_{22} = 14.$$

Подсчитаем теперь разности $\gamma_{pq} = c_{pq} - c'_{pq}$:

$$\gamma_{21} = c_{21} - c'_{21} = 12 - 10 = 2, \quad \gamma_{22} = c_{22} - c'_{22} = 2 - 14 = -12.$$

Следовательно, выражение L через свободные переменные имеет вид $L = 1860 + 2x_{21} - 12x_{22}$. Среди коэффициентов при переменных в правой части есть отрицательный при x_{22}, следовательно, можно попытаться уменьшить L, увеличив x_{22} (сохранив нулевое значение x_{21}). Положим $x_{22} = \lambda$. Поскольку суммы значений неизвестных по строкам и столбцам должны остаться неизменными, нужно произвести следующий балансовый пересчёт:

60	$70-\lambda\ldots$ $\uparrow$	$\to 20+\lambda$ $\downarrow$
	$\vdots$ $\lambda\ldots\leftarrow$	$\vdots$ $\ldots 90-\lambda$

Добавление λ к x_{22} компенсируется вычитанием λ из x_{12}, а это в свою очередь — прибавлением λ к x_{13} и так далее до тех пор, пока мы не вернёмся обратно к x_{22}. Обходя клетки по пунктирной ломаной линии, в одной из вершин которой находится свободная переменная x_{22}, а в остальных вершинах — базисные переменные (причём не обязательно все), мы получим так называемый *цикл пересчёта* (ломаная называется *циклом*), отвечающий свободной клетке x_{22}. Как видно из таблицы, для неотрицательности переменных число λ можно увеличить до $\lambda = 70$, тогда получим второе опорное решение:

60	0	90
0	70	20

Итак, $x_{11} = 60,\ x_{12} = 0,\ x_{13} = 90,\ x_{21} = 0,\ x_{22} = 70,\ x_{23} = 20.$

Значение функции L для него составляет $L = 1860 - 12 \cdot 70 = 1020$, то есть получили оптимальное решение (судя по предыдущему решению).

Таким образом, правила вычислений по методу потенциалов сводятся к следующему алгоритму:

1. Находят потенциалы u_k и v_l всех пунктов отправления A_k и назначения B_l .

2. Выбирают какую-нибудь свободную переменную, для которой сумма потенциалов строго больше соответствующей стоимости, это соответствует элементу с отрицательным коэффициентом при свободной переменной в правой части функции L .

3. Для выбранной в пункте 2 переменной находят соответствующий ей цикл пересчёта и производят сдвиг по этому циклу. Этот сдвиг приводит к новому допустимому решению.

4. Вышеуказанные пункты 1 — 3 повторяют до тех пор, пока не получат оптимальный базис, то есть неотрицательные коэффициенты при свободных переменных в правой части линейной функции L.

Задача 5. Системы массового обслуживания (СМО)

Схемы решения задач по СМО

Модели СМО с простейшими потоками событий характеризуются следующими входными параметрами:

1) n — число каналов обслуживания;
2) M — допустимая длина очереди;
   - $M = 0$ — система с отказами;
   - $m = M < \infty$ — система с ожиданием, ограничение по длине очереди;
   - $M = \infty$ — система с ожиданием, длина очереди не регламентирована;
3) λ — плотность потока заявок (в единицу времени); $\lambda = 1/t_0$, где t_0 — средний интервал времени между последовательными заявками;
4) μ — плотность потока обслуживания (в единицу времени); $\mu = 1/\bar{t}$, где $\bar{t}$ — среднее время обслуживания заявки;
5) ν — плотность потока ухода из очереди (в единицу времени); $\nu = 1/t_s$, где t_s — средний интервал времени между последовательными уходами.

В задачах на СМО необходимо бывает определить следующие выходные параметры, характеризующие стабильный (установившийся) режим:

1) p_0 — вероятность простоя (все каналы свободны);
2) $p_k,\ k \leqslant n$ — вероятность того, что заняты k каналов (может быть не все);
3) $p_{n+s},\ 0 \leqslant s \leqslant n + m$ — вероятность того, что заняты все каналы и s заявок стоит в очереди;
4) p_{n+m}, если $m = 0$ или $m = M < \infty$ — вероятность того, что заняты все каналы и все места в очереди, то есть вероятность отказа в обслуживании;
5) $p_{n+s},\ 0 \leqslant s,\ M = \infty$ — вероятность того, что очередь имеет длину s;
6) m_s — средняя длина очереди;
7) t_s — среднее время ожидания в очереди;
8) T — среднее время пребывания в системе на обслуживании.

Введём обозначения: $\alpha = \dfrac{\lambda}{\mu}$; $\beta = \dfrac{\nu}{\mu}$.

Схемы и формулы

I. *СМО с отказами (очередь не предусмотрена)*

$$p_0 = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!}}, \quad p_k = \frac{\alpha^k}{k!} \cdot p_0, \quad p_{\text{отказа}} = p_n.$$

Относительная пропускная способность $q = 1 - p_n$.

II. *СМО с ожиданием (очередь не ограничена, заявки из очереди уходят)*

$$p_0 = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum\limits_{s=1}^{\infty} \frac{\alpha^s}{\prod\limits_{m=1}^{s}(n+m\beta)}}, \quad p_k = \frac{\alpha^k}{k!} \cdot p_0 \quad (0 < k \leqslant n),$$

$$p_{n+s} = \frac{\frac{\alpha^{n+s}}{n!}}{\prod\limits_{m=1}^{s}(n+m\beta)} \cdot p_0 \quad (s \geqslant 1).$$

Средняя длина очереди $m_s = p_0 \cdot \left(\dfrac{\alpha^n}{n!} \sum\limits_{s=1}^{\infty} \dfrac{s\alpha^s}{\prod\limits_{m=1}^{s}(n+m\beta)} \right)$.

Вероятность того, что заявка покинет очередь необслуженной $p_H = \frac{\beta}{\alpha} m_s$.

Относительная пропускная способность $q = 1 - p_H$.

Абсолютная пропускная способность $\lambda \cdot q$.

При решении задач в формулах для p_0 и m_s следует ограничиваться конечными суммами, обрывая суммирование с того момента, когда последующие слагаемые становятся относительно малы.

III. *СМО с ожиданием (очередь не ограничена, заявки из очереди не уходят)*

Формулы справедливы только в случае $\alpha < n$

$$p_0 = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)}}, \quad p_k = \frac{\alpha^k}{k!} \cdot p_0 \quad (0 < k \leqslant n), \quad p_{n+s} = \frac{\alpha^{n+s}}{n! \cdot n^s} \cdot p_0 \quad (s \geqslant 1).$$

Средняя длина очереди $m_s = p_0 \cdot \dfrac{\alpha^{n+1}}{n \cdot n! \cdot (1 - \frac{\alpha}{n})^2}$.

Среднее время ожидания в очереди $t_s = \frac{m_s}{n \cdot \mu}$.

Вероятность того, что заявка покинет очередь необслуженной $p_H = 0$.

Относительная пропускная способность $q = 1$.

IV. *СМО с ожиданием (очередь ограничена длиной* m*, заявки из очереди не уходят)*

$$p_0 = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \cdot \sum\limits_{s=1}^{m} \left(\frac{\alpha}{n}\right)^s}, \quad p_k = \frac{\alpha^k}{k!} \cdot p_0 \quad (0 < k \leqslant n),$$

$$p_{n+s} = \frac{\alpha^n}{n!} \cdot \left(\frac{\alpha}{n}\right)^s \cdot p_0 \quad (m \geqslant s \geqslant 1).$$

Средняя длина очереди $m_s = \sum\limits_{s=1}^{m} s \cdot p_{n+s}$.

Среднее время ожидания в очереди $t_s = \frac{m_s}{n \cdot \mu}$.

Среднее время пребывания в системе на обслуживании $T = t_s + \bar{t}$.

Вероятность того, что заявка покинет СМО необслуженной $p_H = p_{n+m}$.

Относительная пропускная способность $q = 1 - p_H$.

Рассмотрим несколько примеров. Отметим, что решение любого примера начинается с определения того, какая из вышеприведённых схем может быть применена.

Задание 5а. В вычислительный центр коллективного пользования с тремя ЭВМ поступают заказы от предприятий на вычислительные работы. Если работают все три ЭВМ, то вновь поступающий заказ не принимается, и предприятие вынуждено обратиться в другой вычислительный центр. Пусть среднее время работы с одним заказом составляет 3 часа. Интенсивность потока заявок 0,25 ч$^{-1}$. Найти вероятность отказа и относительную пропускную способность.

Из условия следует, что в задаче описана СМО с отказами.

Имеем: $n = 3$, $\lambda = 0,25$ ч$^{-1}$, $\bar{t} = 3$ ч. Находим: $\alpha = \lambda \cdot \bar{t} = 3 \cdot 0,25 = 0,75$,

$$p_0 = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{3} \frac{\alpha^k}{k!}} = \frac{1}{1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{6}} = \frac{10}{21},$$

$$p_{\text{отказа}} = p_3 = \frac{\alpha^3}{3!} \cdot p_0 \approx 0,033, \quad q \approx 1 - 0,33 = 0,67.$$

Задание 5б. На автозаправочной станции установлены три колонки для выдачи бензина. Около станции находится площадка на три машины для их ожидания в очереди. На станцию прибывает в среднем две машины в минуту. Среднее время заправки одной машины одна минута. Требуется определить вероятность отказа и среднюю длину очереди.

Из условия следует, что в задаче описана СМО с ограничением по длине очереди. Имеем: $n = 3$, $m = 3$, $\lambda = 2$ мин$^{-1}$, $\bar{t} = 1$ мин, $\mu = 1/\bar{t} = 1$ мин$^{-1}$. Находим: $\alpha = \lambda/\mu = 2/1 = 2$, тогда

$$p_0 = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \cdot \sum\limits_{s=1}^{m} \left(\frac{\alpha}{n}\right)^s} =$$

$$= \left(1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^3}{3!}\left(\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3\right)\right)^{-1} = 0.12,$$

$$m_s = \sum_{s=1}^{m} s \cdot p_{n+s} = p_{3+1} + 2p_{3+2} + 3p_{3+3} = p_0 \frac{2^3}{3!}\left(\frac{2}{3} + 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 3\left(\frac{2}{3}\right)^3\right) \approx 0.4.$$

Задание 5в. В порту имеется два причала для разгрузки грузовых судов. Интенсивность потока судов равна 0,8 судов в сутки. Среднее время разгрузки одного судна составляет двое суток. Предполагается, что очередь ожидающих разгрузки судов может быть неограниченной длины. Найти среднее время пребывания судна в порту.

Из условия следует, что в задаче описана СМО с неограниченной очередью. Имеем: $\bar{t}=2$, $\lambda=0,8$ сут$^{-1}$, $\mu=1/\bar{t}=0,5$ сут, $\alpha=\lambda/\mu=0,8/0,5=$ $=1,6$. Находим:

$$p_0=\frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{2}\frac{1,6^k}{k!}+\frac{1,6^{2+1}}{2!(2-1,6)}}=\left(1+1,6+\frac{1,6^2}{2}+\frac{1,6^3}{2\cdot 0,4}\right)^{-1}\approx 0,11,$$

$$m_s=p_0\cdot\frac{1,6^{2+1}}{2\cdot 2!\cdot(1-\frac{\alpha}{2})^2}\approx 2,8,\quad t_s=\frac{m_s}{2\cdot 0,5}\approx 2,8.$$

Задание 5г. В пункте химчистки имеется три аппарата для чистки. Интенсивность потока посетителей $\lambda=6$ посетителей в час. Интенсивность обслуживания посетителей одним аппаратом $\mu=3$ посетителя в час. Среднее количество посетителей, покидающих очередь, не дождавшись обслуживания $\nu=1$ посетитель в час. Найти абсолютную пропускную способность пункта.

Из условия следует, что в задаче описана СМО с ожиданием, заявки из очереди уходят. Имеем: $n=3$, $\lambda=6$, $\mu=3$, $\nu=1$. Находим: $\alpha=\lambda/\mu=$ $=6/3=2$, $\beta=\nu/\mu=1/3$.

В формулах, содержащих бесконечные суммы, возьмём по 3 слагаемых:

$$p_0\approx\frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!}+\frac{\alpha^n}{n!}\sum\limits_{s=1}^{3}\frac{\alpha^s}{\prod\limits_{m=1}^{s}(n+m\beta)}}=\Bigg(1+2+2+\frac{2^3}{3!}+\frac{2^3}{3!}\bigg(\frac{2}{3+1/3}+$$
$$+\frac{2^2}{(3+1/3)(3+2/3)}+\frac{2^3}{(3+1/3)(3+2/3)(3+3/3)}\bigg)\Bigg)^{-1}\approx 0,13,$$

$$m_s\approx p_0\cdot\frac{\alpha^n}{n!}\sum_{s=1}^{3}\frac{s\alpha^s}{\prod\limits_{m=1}^{s}(n+m\beta)}=0,13\cdot\frac{2^3}{3!}\bigg(\frac{2}{3+1/3}+$$
$$+\frac{2\cdot 2^2}{(3+1/3)(3+2/3)}+\frac{3\cdot 2^3}{(3+1/3)(3+2/3)(3+3/3)}\bigg)\approx 0,3.$$

Далее, $p_H=\frac{\beta}{\alpha}\cdot m_s\approx\frac{1}{6}\cdot 0,3=0,05$, $q=1-p_H=0,95$.
Абсолютная пропускная способность $\lambda\cdot q\approx 6\cdot 0,95=5,7$ чел/час.

Задача 6. Марковские цепи

Цепью Маркова называют последовательность испытаний, в каждом из которых появляется только одно из k несовместных событий $A_1,A_2,\ldots,A_k$ полной группы, причём условная вероятность $p_{ij}(s)$ того, что в s-м испытании наступит событие A_j, $(j=1,2,\ldots,k)$ при условии, что в $(s-1)$-м испытании наступило событие A_i, $(j = 1, 2, \ldots, k)$ не зависит от результатов предшествующих испытаний.

Например, если последовательность испытаний образует цепь Маркова и полная группа состоит из четырёх несовместных событий A_1, A_2, A_3, A_4, причём известно, что в шестом испытании появилось событие A_2, то условная вероятность того, что в седьмом испытании наступит событие A_4, не зависит от того, какие события появились в первом, втором, ..., пятом испытаниях.

Укажем терминологию, которая принята при изложении цепей Маркова. Пусть некоторая система в каждый момент времени находится в одном из k состояний: первом, втором, ..., k-м. В отдельные моменты времени в результате испытания состояние системы изменяется, то есть система переходит из одного состояния, например i, в другое, например j. В частности, после испытания система может остаться в том же состоянии («перейти» из состояния i в состояние $j = i$).

Таким образом, события называют состояниями системы, а испытания — изменениями её состояний. Дадим теперь определение цепи Маркова, используя новую терминологию. Цепью Маркова называют последовательность испытаний, в каждом из которых система принимает только одно из k состояний полной группы состояний, причём условная вероятность $p_{ij}(s)$ того, что в s-м испытании система будет находиться в состоянии j, при условии, что после $(s-1)$-го испытания она находилась в состоянии i, не зависит от результатов остальных, ранее произведённых испытаний.

Цепью Маркова с дискретным временем называют цепь, изменение состояний которой происходит в определённые фиксированные моменты времени.

Цепью Маркова с непрерывным временем называют цепь, изменение состояний которой происходит в любые случайные возможные моменты времени. Далее рыссматриваются только дискретные однородные цепи Маркова.

Однородная цепь Маркова. Переходные вероятности. Матрица перехода

Однородной называют цепь Маркова, если условная вероятность $p_{ij}(s)$ (перехода из состояния i в состояние j) не зависит от номера испытания. Поэтому вместо $p_{ij}(s)$ пишут просто p_{ij}; это условная вероятность того, что из состояния i (в котором система оказалась в результате некоторого испытания, безразлично какого номера) в итоге следующего испытания система перейдёт в состояние j. Таким образом, в обозначении p_{ij} первый индекс указывает номер предшествующего, а второй — номер последующего состояния.

Пусть число состояний конечно и равно k. Матрицей перехода системы называют матрицу, которая содержит все переходные вероятности этой системы

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{k1} & p_{k2} & \dots & p_{kk} \end{pmatrix}.$$

Так как в каждой строке матрицы помещены вероятности событий (перехода из одного и того же состояния i в любое возможное состояние j), которые образуют полную группу, то сумма вероятностей этих событий равна единице. Другими словами, сумма переходных вероятностей каждой строки матрицы перехода равна единице:

$$\sum_{j=1}^{k} p_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, k.$$

Приведём пример матрицы перехода системы, которая может находиться в трёх состояниях:

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,5 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Здесь $p_{21} = 0,4$ — вероятность перехода из состояния $i = 2$ в состояние $j = 1$. Аналогичный смысл имеют остальные элементы матрицы.

Наглядное представление о возможных переходах в системе и о вероятностях этих переходов даёт так называемый *граф состояний*. Применительно к последней матрице он будет выглядеть следующим образом (см. рис. 2).

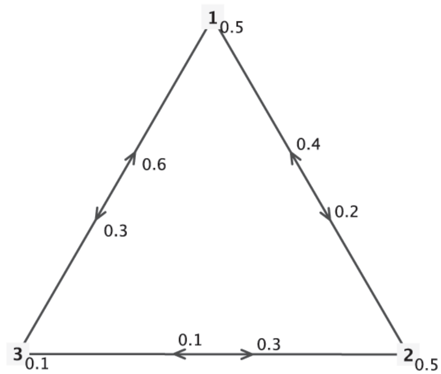

Рис. 2. Граф переходов в системе с тремя состояниями.

Вершины треугольника соответствуют состояниям (и занумерованы соответственно). Число $0,5$ у вершины 2 соответствует вероятности остаться в вершине 2 после перехода к новому состоянию (то есть это p_{22}). Число $0,3$ у стрелки на основании, направленной от вершины 3 к вершине 2, есть p_{32}, то есть вероятность перехода от состояния 3 к состоянию 2. (Если вероятность перехода равна нулю, то стрелка не рисуется.)

Наоборот, по таким образом размеченному графу состояний нетрудно восстановить матрицу переходов.

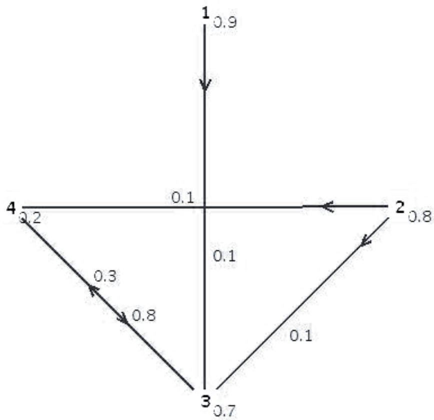

Рис. 3. Граф переходов в системе с четырьмя состояниями.

Рассмотрим рисунок 3 для системы с четырьмя состояниями. Будучи в состоянии 1 можно либо остаться в этом состоянии с вероятностью $0,9 = p_{11}$, либо перейти в состояние 3 с вероятностью $0,1 = p_{13}$. Переход из 1 в 2 невозможен (нет стрелки!) и, значит, $p_{12} = 0$. Продолжая подобным образом возможные переходы по графу, составляем его матрицу:

$$\begin{pmatrix} 0,9 & 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0,7 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Равенство Маркова

Вследствие случайного характера марковского процесса о том, в каком состоянии будет находиться система спустя несколько шагов, можно говорить лишь с определённой вероятностью (например, в состоянии 1 она будет находиться с вероятностью $0,3$, в состоянии 2 — с вероятностью $0,01$ и так далее). Таким образом, состояние системы на n-м шаге характеризуется вектором распределения вероятностей $\mathbf{P}(n) = (p_1(n), p_2(n), \ldots, p_k(n))$, где k —

число возможных состояний системы. Поскольку этот вектор содержит вероятности *всех* возможных состояний, то $\sum\limits_{i=1}^{k} p_i = 1$.

Справедливо равенство $\mathbf{P}(n+1) = \mathbf{P}(n) \cdot \mathcal{P}$ (здесь $\mathcal{P}$ — матрица переходов и имеется в виду умножение матриц). Отсюда следует, что если $\mathbf{Q}$ — начальное распределение вероятностей состояний, то выполнено равенство Маркова:

$$\mathbf{P}(n) = \mathbf{Q} \cdot \mathcal{P}^n.$$

Задание 6а. Пусть для системы с тремя состояниями и матрицы переходов $\mathcal{T}$ (см. матрицу (10)) исходно все состояния равновероятны: $\mathbf{Q} = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$. Найти распределение вероятностей состояний через два шага.

Воспользуемся равенством Маркова $\mathbf{P}(2) = \mathbf{Q} \cdot \mathcal{T}^2$.

$$\mathbf{P}(2) = \mathbf{Q} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,5 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,5 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,5 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Перемножая матрицы, находим $\mathbf{P}(2) \approx (0,483; 0,317; 0,2)$.

В марковских цепях в прикладных задачах особо интересны так называемые *стационарные* режимы. Это значит, что найдётся такое распределение $\mathbf{Q}$, что $\mathbf{Q} \cdot \mathcal{P} = \mathbf{Q}$. Иными словами, распределение вероятностей в стационарном режиме остаётся постоянным на каждом шагу. С точки зрения линейной алгебры вектор $\mathbf{Q}$ является собственным для матрицы $\mathcal{P}$ с собственным числом $\lambda = 1$. Если на этот вектор наложить ещё условие нормировки $\sum\limits_{i=1}^{k} p_i = 1$, то вектор $\mathbf{Q}$ определится единственным образом.

Задание 6б. Найти стационарные режимы для цепи Маркова с матрицей переходов $\mathcal{T}$.

Пусть стационарный режим есть $\mathbf{Q} = (x; y; z)$. Тогда уравнения на x, y и z имеют следующий вид.

$$\begin{cases} (x; y; z) \cdot \mathcal{T} = (x; y; z) \cdot \begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,5 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix} = (x; y; z), \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

После перемножения матриц получим следующую систему.

$$\begin{cases} 0,5x + 0,4y + 0,6z = x, \\ 0,2x + 0,5y + 0,3z = y, \\ 0,3x + 0,1y + 0,1z = z, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

Обратим внимание, что коэффициенты при первой переменной (x), составлены из элементов первой строки матрицы $\mathcal{T}$, при второй переменной (y), из второй строки и так далее.

Решением системы будет вектор $(x; y; z) = (0,488; 0,314; 0,198)$. Это и есть распределение вероятностей состояний в стационарном режиме.

Задача 7. Потоки в сетях

Рассмотрим задачу о перегрузке товаров. Готовая продукция должна распределяться по складам, а оттуда попадать к потребителям. Всё это должно осуществляться с минимальными расходами. Источники, склады и потребители представляют собой *узлы* сети, а пути между ними называются *дугами.*

Одна модель такого сорта показана на рисунке 4, где на каждой дуге указана её максимальная пропускная способность. Задача состоит в получении максимально возможного потока от источника (узел 1) к стоку (узел 6). Направления потоков, указанные стрелками, не могут быть изменены. Расходы на перевозку также не учитываются. Это частный случай сетевой задачи, называемый ***задачей о максимальном потоке***. (Здесь в качестве ещё одной интерпретации можно предложить сеть нефтепроводов от месторождения до экспортного терминала морского порта.)

Неизвестными величинами являются потоки x_{ij} из одного узла i в другой узел j. В рассмотрении участвуют только пары вида $x_{12},\ x_{24}, \ldots, x_{56}$, соответствующие дугам (отрезкам), изображённым на рисунке. Если верхние пределы (пропускные способности) этих дуг равняются a_{ij}, то ограничения на отдельные потоки имеют вид $x_{ij} \leqslant a_{ij}$.

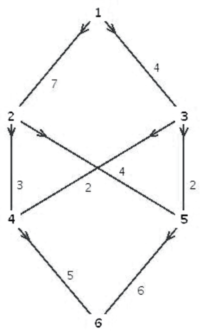

Рис. 4. Система с ограниченной пропускной способностью.

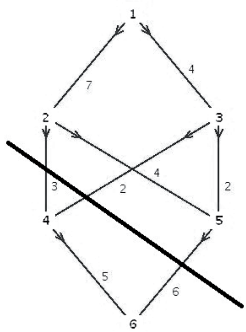

Рис. 5. Максимальный поток.

В дополнение к этому существует также ограничение на каждый промежуточный узел, состоящее в равенстве входящего и выходящего потоков.

Это справедливо также для источника и стока, если мы введём в рассмотрение фиктивную трубу с бесконечно большой пропускной способностью и будем возвращать всё назад от стока к источнику. Суммарный поток, поступающий в узел с номером j, равен $\sum x_{ij}$ по всем i, а суммарный поток из j-го узла равен $\sum x_{jk}$ по всем k. Поэтому ограничение по равновесию имеет вид

$$\sum x_{ij} - \sum x_{jk} = 0.$$

В задаче о максимальном потоке стремятся сделать величину x_{61} как можно большей, так что эта задача представляет собой обычную задачу линейного программирования и можно пользоваться симплекс-методом. Но мы хотим воспользоваться укороченным вариантом. Максимальный поток можно определить, не прибегая к помощи компьютера, так что мы сразу перейдём к рассмотрению условия, показывающего, что поток действительно является максимальным и не может быть увеличен. Прежде всего, введём понятия ***разреза*** сети, означающего разделение всех узлов на две группы S и S' с источником в группе S и стоком в S'. *Пропускной способностью разреза* назовём сумму пропускных способностей по всем дугам, идущим из S в S'.

Например, если S содержит первый и третий узлы, то пропускная способность этого разреза равна $7 + 4 + 2 = 13$. Поток, больший чем 13, невозможен, поскольку он не сможет пройти через разрез.

Теорема о максимальном потоке и минимальном разрезе. *Максимальный поток в сети равняется пропускной способности минимального разреза.*

Эта теорема даёт нам возможность проверять, что заданный поток является максимальным, нужно лишь найти соответствующий разрез. В нашем примере максимальный поток равен 11, и один из возможных минимальных разрезов изображён на рисунке 5.

Эта теорема даёт также и алгоритм решения: для любого потока нужно вычислять неиспользованную пропускную способность каждой дуги, и если сток может быть достигнут по какому-то недозаполненному пути, то нужно увеличить поток по нему до максимально возможного и вычислить результат. Постепенно должен быть достигнут максимальный поток, и в случае целочисленных пропускных способностей целочисленным будет и поток, то есть эта задача относится к *целочисленному программированию.*

Задание 7. Рассмотрим транспортную сеть, заданную матрицей

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Граф сети представлен на рисунке 6 (элемент $m_{12} = 5$ означает, что вершину 1 с вершиной 2 соединяет путь с пропускной способностью 5, элемент $m_{14} = 0$ означает, что из вершины 1 к вершине 4 пути нет и так далее).

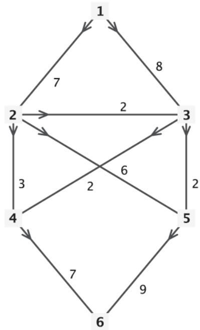

Рис. 6. Исходный граф сети.

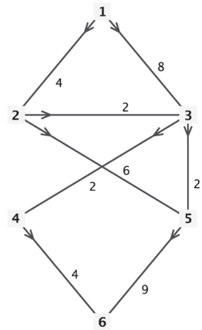

Рис. 7. Заполнили и устранили первый путь 1-2-4-6.

Сначала заполняем по максимуму путь $1-2-4-6$, имеющий пропускную способность 3. Использованные пропускные возможности устраняем из графа (см. рис. 7). Продолжаем заполнять и устранять доступные пути (см. рис. 8 — 11).

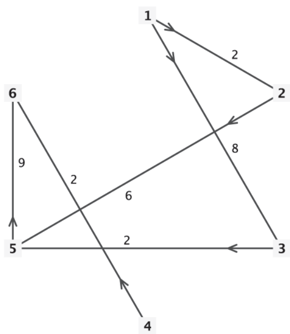

Рис. 8. Устранили 1-2-3-4-6.

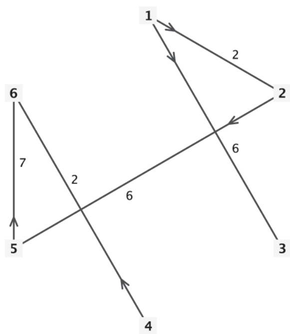

Рис. 9. Устранили 1-3-5-6.

В результате использованы все возможности сети — не осталось ни одного пути, ведущего из 1 в 6. Неиспользованные пропускные способности сети представлены графом на рисунке 10.

Соответствующая матрица неиспользованных способностей имеет вид

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

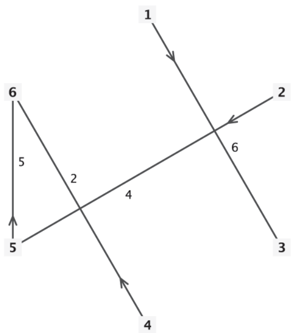

Рис. 10. Устранили 1-2-5-6. Неиспользованные мощности.

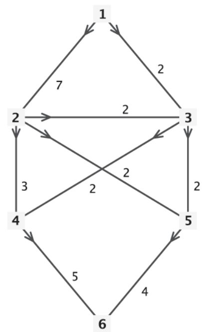

Рис. 11. Сеть полностью загружена.

Распределение потоков в максимально загруженной сети будет, таким образом, иметь матрицу

$$C = M - \Delta = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и граф, приведённый на рисунке 11.

Полученная полная пропускная способность равна 9 — достаточно посмотреть на поток у истока 1 или у стока 6.

Этот поток не обязательно будет максимальным. Следующий шаг состоит в составлении графа приращений.

Начинаем рисовать новый граф с теми же вершинами, что и исходный. Там, где есть стрелки на графе неиспользованных мощностей (рис. 10), на новом графе рисуем стрелку-ребро в том же направлении, что и в полном графе. Там, где есть стрелка-поток полного графа на ребре (рис. 11), рисуем ребро-стрелку в обратном направлении (и с отрицательной пропускной способностью). Некоторые вершины будут соединены стрелками в противоположных направлениях.

Матрица графа приращений представляется формулой $S = \Delta - C^T$, где C^T — матрица, транспонированная матрице C.

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

В нашем примере граф приращений представлен на рисунке 12.

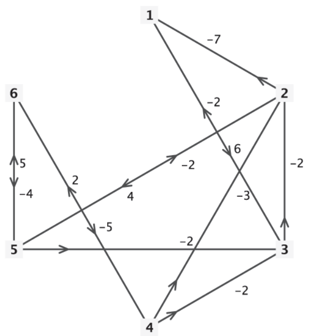

Рис. 12. Граф приращений.

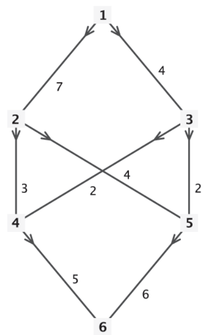

Рис. 13. Добавляем 2 вдоль пути 1-3-2-5-6. Получен максимальный поток.

Если на графе приращений можно найти путь от истока до стока (учитывая направления всех стрелок), то по нему следует нарастить поток до насыщения. В нашем примере это путь $1 \to 3 \to 2 \to 5 \to 6$. Поток в нём можно увеличить на 2, что приведёт к обнулению потока на ребре $3 \to 2$, ведь там выбрана стрелка, противоположная по отношению к исходному графу направлении. Вообще, при добавлении нагрузки вдоль пути графа приращений поток не может превышать абсолютных величин нагрузок в выбранном направлении.

Поток в сети увеличился на величину 2 и достиг величины 11 (см. рис. 13).

Процедуру с графом приращений надо повторять до тех пор, пока в нём не останется путей от истока до стока. В нашем примере последний поток уже максимален.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

1. Лебедева Г. И., Микулик Н. А. Прикладная математика. Математические модели в транспортных задачах. Асар, 2009.

2. Плотников А. Д. Математическое программирование: Экспресс-курс. Новое знание, 2006.

3. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах (в двух частях). Часть 1. Высшая школа, 1999.

Дополнительная литература

1. Юденков А. В., Дли М. И., Круглов В.В. Математическое программирование в экономике. Финансы и статистика, 2010.

2. Невежин В. П., Кружилов С. И. Сборник задач по курсу “Экономико-математическое моделирование”. Городец, 2005.

Содержание