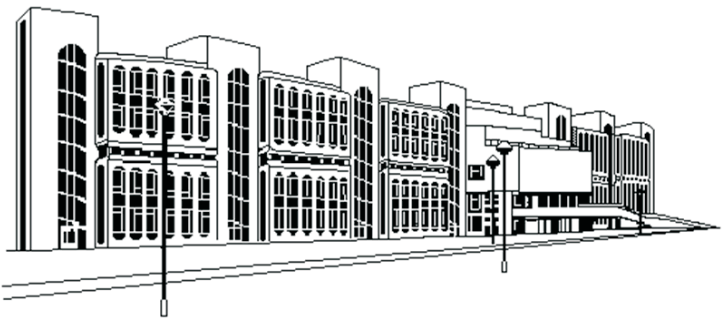
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

Ю.Ф. Касимов, В.Л. Кузнецов, А.А. Пичугин

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА



Москва - 2016

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ» (МГТУ ГА)

Кафедра прикладной математики

Ю.Ф. Касимов, В.Л. Кузнецов, А.А. Пичугин

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Утверждено Редакционно-издательским советом МГТУ ГА в качестве учебного пособия

Москва-2016

УДК 629.7.063.6
ББК 51
К 28

Печатается по решению редакционно-издательского совета Московского государственного технического университета ГА

Рецензенты: д-р. техн. наук, проф. А.В. Балдин (МГТУ им. Н.Э. Баумана);
д-р. физ.-мат. наук, проф. Н.А. Ерзакова (МГТУ ГА)

Касимов Ю.Ф., Кузнецов В.Л., Пичугин А.А.

К 28 Математическая логика: Учебное пособие. - М.: МГТУ ГА, 2016. - 48 с.

ISBN 978-5-86311-989-2

В учебном пособии представлены материалы теоретических и практических основ математической логики, позволяющие студентам овладеть основными знаниями, практическими умениями, навыками, приёмами и компетенциями в области построения и анализа математических моделей в различных областях знаний, науки и техники. В разделах учебного пособия приведены практические примеры и контрольные вопросы.

Данное учебное пособие издается в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Математическая логика» по Учебному плану направления 01.03.04 (231300) дневной формы обучения.

Рассмотрено и одобрено на заседаниях кафедры 23.12.14 г. и методического совета 23.12.14 г.

ББК 51
Доп. св. тем. план 2016 г.
поз. 57

КАСИМОВ Юрий Федорович, КУЗНЕЦОВ Валерий Леонидович,
ПИЧУГИН Андрей Анатольевич

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Учебное пособие

Подписано в печать 20.03.2016 г.

Печать офсетная	Формат 60х84/16	2,45 уч.-изд. л.
2,79 усл.печ.л.	Заказ № 22	Тираж 40 экз.

Московский государственный технический университет ГА
125993 Москва, Кронштадтский бульвар, д.20
Редакционно-издательские услуги ООО «Имидж-студия Арина»
127051 Москва, М. Сухаревская пл., д. 2/4 стр.1

СОДЕРЖАНИЕ

1. ЛОГИКА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

1.1 Логические связки и таблицы истинности.

В логике высказываний изучаются способы образования и истинностные значения составных (сложных) высказываний (из заданных элементарных высказываний). Основным средством образования новых высказываний из уже заданных являются так называемые логические связки. В логике имеются пять основных связок: $\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$. Логические связки являются формальным аналогом грамматических связок, используемых в обычной речи.

Пусть *A* – высказывание. Тогда можно образовать высказывание не A, отрицающее то, что утверждается высказыванием *A*. Конечно, это отрицание можно выразить многими способами, например, можно сказать: «неверно, что *A*», «*A* – не имеет места» и т.д. Поскольку с чисто логической точки зрения все эти способы отрицания равнозначны, то в логике высказываний отрицание высказывания обозначается через $\neg A$, где $\neg$ - знак отрицания, заменяющий все обычные способы построения отрицаний. Запись «$\neg A$» читается как «не *A*».

В логике нас не интересует, что конкретно утверждается в высказывании *A*. В логике имеет значение лишь истинно или ложно это высказывание. Точно также способ (конкретный) построения отрицания высказывания несущественен в логике, важно лишь знать истинностное значение высказывания $\neg A$ в зависимости от истинностного значения высказывания *A*. Из самого смысла ясно, что если *A* – истинно, то $\neg A$ должно быть ложным, и, наоборот, если *A* – ложно, то $\neg A$ - истинно. В логике зависимость истинностных значений сложного высказывания от истинностных значений исходных (входящих в сложное высказывание) высказываний задается с помощь таблиц истинности.

Для отрицания, т.е. для связки $\neg$, таблица истинности выглядит так:

A	$\neg A$
и	*л*
л	*и*

Символ «*и*» - обозначает истину, а «*л*» - ложь.

Пусть *A, B* – два высказывания. Тогда можно образовать составное высказывание: «*A* и *B*». Например, если $A = (6 \text{ делитсся на } 3)$, $B = (2 \times 2 = 4)$, то $A \text{ и } B = (6 \text{ делитсся на } 3 \text{ и } 2 \times 2 = 4)$. Существует много способов грамматического образования высказывания равнозначного высказыванию «$A \text{ и } B$». Например, предложение «Миша с Колей пошли гулять» равнозначно предложению «Миша пошел гулять, и Коля пошел гулять». Все эти конструкции с логической точки зрения сводится к утверждению одновременной истинности как высказывания *A*, так и высказывания *B*. В логике такая конструкция называется конъюнкцией высказываний *A, B* и обозначается так: $A \wedge B$, иногда как $A \& B$ или даже просто AB. Читается $A \wedge B$ как «$A \text{ и } B$». Таблица истинности для связки конъюнкции $\wedge$ имеет вид:

A	B	$A \wedge B$
и	*и*	*и*
и	*л*	*л*
л	*и*	*л*
л	*л*	*л*

Следует отметить, что по сравнению с таблицей истинности для отрицания таблица истинности конъюнкции содержит не две, а четыре строки. Дело в том, что отрицание зависит от одного высказывания A, а конъюнкция $A \wedge B$ строится из двух высказываний: A, B. В таблице истинности нужно указывать значение истинности составного высказывания для всех возможных значений истинности входящих в него составляющих высказываний. Каждое из высказываний может принимать независимо от другого два значения истинности, поэтому для двух высказываний может быть всего четыре распределения истинностных значений.

Следующей связкой является дизъюнкция, обозначаемая символом $\vee$. Дизъюнкция двух высказываний A и B обозначается: $A \vee B$ и читается как A *или* B.

С логической точки зрения высказывание $A \vee B$ значит, что по крайней мере одно из высказываний: A, B утверждается как истинное. Заметим, что дизъюнкция в логике понимается в неразделительном смысле, т.е. не как «либо A, либо B», одновременная истинность обоих высказываний A *и* B вполне допустима. Таблица истинности для дизъюнкции имеет вид:

A	B	$A \vee B$
и	*и*	*и*
и	*л*	*и*
л	*и*	*и*
л	*л*	*л*

Пример 1.1. Высказывание «Москва – столица СССР или Париж – столица Испании» представляет истинное высказывание, так как первое, входящее в дизъюнкцию высказывание – истинно, несмотря на то, что второе высказывание – ложно.

Высказывание «Если A, то B» называется импликацией высказываний A и B (в этом порядке!) и обозначается в логике как $A \to B$ (другое обозначении: $A \supset B$). Грамматически «$A \to B$» имеет очень много способов реализации в естественном языке: «A влечет B», «A достаточное условие для B», «B необходимое условие для A».

Связка «$\to$» является формальным аналогом для утверждения о логическом следствии одного высказывания из другого высказывания. Этот факт выражается в том, что при истинном A высказывание $A \to B$ считается истинным тогда и только тогда, когда истинно высказывание B. В случае ложного A высказывание $A \to B$ автоматически считается истинным.

A	B	$A \to B$
и	*и*	*и*
и	*л*	*л*
л	*и*	*и*
л	*л*	*и*

Пример 1.2. Высказывание «Если Париж – столица Франции, то Лондон – столица Германии» - ложно. Высказывание «Если Париж – столица Германии, то Лондон – столица Франции» - истинно.

Следует заметить, что смысл всех связок в логике задается полностью с помощь таблиц истинности.

Таблицы истинности в логике – то же самое, что таблица умножения в арифметике. Они служат для установления истинностного значения составного высказывания, т.е. построенного из элементарных высказываний с помощью логических связок при известных значениях истинности элементарных высказываний.

Последней логической связкой является эквиваленция. Эквиваленция двух высказываний A и B в логике обозначается как $A \leftrightarrow B$ и читается как «A тогда и только тогда, когда B». Таблица истинности для $A \leftrightarrow B$ имеет вид:

A	B	$A \leftrightarrow B$
и	*и*	*и*
и	*л*	*л*
л	*и*	*л*
л	*л*	*и*

Таким образом, высказывание «$A \leftrightarrow B$» истинно тогда и только тогда, когда A и B либо одновременно истинны, либо одновременно ложны, т.е. их значения истинности совпадают.

Пример 1.3. Высказывание «$2 < 3 \leftrightarrow 2 \cdot 2 = 5$» ложно, но высказывание «$2 > 3 = 2 \cdot 2 = 5$» истинно.

1.2. Формулы логики высказываний.

Итак, были описаны пять логических связок, одна унарная связка - $\neg$ - отрицание и четыре бинарных связки - $\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$. Используя эти связки, можно из заданных элементарных высказываний $A, B, C, \ldots$ строить составные высказывания, например, $\neg A \to (B \vee C)$ $\neg B \leftrightarrow \neg A$, $(B \wedge A) \leftrightarrow (A \to \neg C)$ и т.д.

Таким образом, может быть представлена логическая структура (с точки зрения логики высказываний) любого сложного высказывания в математике, физике, и т.д. Если структура сложного высказывания с помощюью логических связок установлена, то можно, используя таблицы истинности, установить истинность этого сложного высказывания, если значения истинности входящих в него высказываний известны, либо в общем случае выяснить все возможные истинностные значения этого высказывания. Процедура получения истинностных значений составного высказывания также может быть описана с помощью таблицы истинности этого высказывания. Рассмотрим, например, высказывание $\neg A \to (\neg B \vee C)$. Оно состоит из трех элементарных высказываний A, B, C и четырех связок $\neg, \to, \neg, \vee$. Для трех высказываний возможно всего восемь возможных распределений истинностных значений. Для каждого их таких распределений значений можно легко подсчитать истинностное значение высказывания $\neg A \to (\neg B \vee C)$. Например, если A - *и*, B - *л*, C - *и*, то $\neg A$ - *л*, $\neg B$ - *и*, а значит $\neg B \vee C$ - *и*, $\neg A \to (\neg B \vee C)$ - *и*. Точно так же можно вычислить значения истинности и при других распределениях истинностных значений A, B, C. В итоге получим таблицу:

A	B	C	$\neg A$	$\neg B$	$\neg B \vee C$	$\neg A \to (\neg B \vee C)$
и	*и*	*и*	*л*	*л*	*и*	*и*
и	*и*	*л*	*л*	*л*	*л*	*и*
и	*л*	*и*	*л*	*и*	*и*	*и*
и	*л*	*л*	*л*	*и*	*и*	*и*
л	*и*	*и*	*и*	*л*	*и*	*и*
л	*и*	*л*	*и*	*л*	*л*	*л*
л	*л*	*и*	*и*	*и*	*и*	*и*
л	*л*	*л*	*и*	*и*	*и*	*и*

Она будет таблицей истинности составного высказывания $\neg A \to (\neg B \vee C)$.

Выражения, которые строятся из символов для элементарных высказываний $A, B, C, \ldots$ и символов логических связок, называются формулами логики высказываний или пропозициональными формулами. Формулы строятся точно так же, как и в обычной алгебре, только вместо обычных арифметических операций здесь используются логические операции, представляемые логическими связками. Если в формулу логики высказываний вместо входящих в нее символов, обозначающих элементарные высказывания, поставить конкретные высказывания, то получится новое составное высказывание, также конкретное.

Пример 1.4. $A \wedge B \to C$ - формула. Пусть $A =$"12 делится на 3", $B =$"12 делится на 2", $C =$"12 делится на 6". Тогда $A \wedge B \to C$ изображает высказывание: «Если 12 делится на 3 и 12 делится на 2, то 12 делится на 6».

Теперь мы в состоянии описать некоторый формальный язык, так называемый язык логики высказываний - Z_0. Для этого опишем сначала алфавит языка Z_0, который состоит из трех групп символов:

1) пропорциональных высказывательных переменных

$$P, Q, R, \ldots, R_1, Q_1, P_1, \ldots;$$

2) логических связок $\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$;

3) скобок $($,$)$.

Элементы языка, т.е. выражения в этом алфавите, которые принадлежат языку Z_0, называются формулами. Понятие формулы определяется индуктивно. Сначала приводятся некоторые выражения, структура которых очень проста и которые объявляются формулами. Эти формулы называются базисными. Затем даются правила построения новых формул из уже имеющихся формул:

1) Базисные формулы. Каждая пропозициональная переменная $P,Q,R,\ldots$ и т.д. есть формула.

2) Правила построения. Если α,β - формулы, то $\neg\alpha,(\alpha\leftrightarrow\beta)(\alpha\wedge\beta),(\alpha\vee\beta),(\alpha\to\beta)$ - формулы.

3) Других формул нет.

Таким образом, формулы – это те и только те выражения языка, которые могут быть построены согласно пунктам 1) и 2) определения формулы.

Про формулу, получающуюся согласно правилам, будем говорить, что она находится в канонической записи. Однако, как и в алгебре, удобно ввести некоторые упрощения в запись формул. Для этого, во-первых, договариваются не писать самих внешних скобок в формуле, если таковые имеются, например, $(P\vee Q)$ - каноническая запись, а $P\vee Q$ - упрощенная; во-вторых, будем придерживаться следующего порядка выполнения логических операций: $\neg,\wedge,\vee,\to,\leftrightarrow$. Так, формула $((P\wedge Q)\vee R)$ может быть упрощена до выражения $P\wedge Q\vee R$, тогда как формула $\neg((P\to Q)\wedge(Q\vee R))$ вообще не может быть упрощена. «Выполнение» здесь означает просто порядок связывания скобками. Но при вычислении логического значения этот порядок «выполнения» будет действительно, как в алгебре, совпадать с последовательностью вычисления логического значения.

Пример 1.5. Упростим формулу $(((P\wedge Q)\to\neg(P\vee Q))\leftrightarrow R)$. Опуская внешние скобки, получим $((P\wedge Q)\to\neg(P\vee Q))\leftrightarrow R$. Учитывая, что $\to$ старше, чем $\leftrightarrow$, а $\wedge$ старше, чем $\to$, получим: $P\wedge Q\to\neg(P\vee Q)\leftrightarrow R$. Заметим, что внутренние скобки убрать нельзя, так как $\neg(P\vee Q)$ вовсе не является равносильной формуле $(\neg P\vee Q)$.

Пример 1.6. Восстановить до канонической записи формулу $P\wedge Q\to\neg R\leftrightarrow R\vee P$. Последовательно получаем $(P\wedge Q)\to\neg R\leftrightarrow R\vee P$, $(P\wedge Q)\to\neg R\leftrightarrow(R\vee P)$, $((P\wedge Q)\to\neg R)\leftrightarrow(R\vee P)$, $(((P\wedge Q)\to\neg R)\leftrightarrow R\vee P)$.

Заметим, что если одна и та же связка встречается в выражении несколько раз, то она связывает в том порядке, в каком встречается.

Формула $P\to Q\to R$ означает $((P\to Q)\to R)$,а не $P\to(Q\to R)$; $P\vee Q\vee R$ - означает $(P\vee Q)\vee R$ и т.д.

Замечание. Начиная с этого места, как это принято в дискретной математике (математической логике), истинностные значения: истина и ложь, будем обозначать соответственно символами 1 и 0.

Пример 1.7. Покажем, что выражение $((\neg P\vee Q)\to(P\wedge\neg Q))$ есть формула. Выпишем последовательно все этапы построения этой формулы.

1. P,Q - формулы в силу 1)
2. $\neg P$ - формула по 2) (правило $\neg\alpha$)
3. $\neg Q$ - формула по 2) (правило $\neg\alpha$)
4. $(\neg P\vee Q)$ - формула по 2) (правило $(\alpha\vee\beta)$)

5. $(P \wedge \neg Q)$ - формула по 2) (правило $(\alpha \wedge \beta)$)

6. $((\neg P \vee Q) \to (P \wedge \neg Q))$ - формула по 2) (правило $(\alpha \to \beta)$).

Выписанные этапы построения образуют так называемую конструкцию этой формулы. Конструкция формулы β - это последовательность формул $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n = \beta$, кончающаяся этой формулой и начинающаяся с базисной формулы α_1, при этом каждая промежуточная формула $\alpha_j, 2 \le j \le n$ есть либо базисная, либо получается из предыдущих формул применением какого-либо одного из правил образования 2) определения формулы.

Таким образом, конструкция указывает последовательный способ построения формулы. Доказать, что данное выражение есть формула – это значит привести конструкцию этого выражения как формулы.

Пример 1.8.

1) P, Q - формулы,

2) PP, PQ - не формулы (нет связок),

3) $(P \to P)$ - формула, $P \to P$ - не формула (нет внешних скобок),

4) $(\neg Q)$ - не формула (имеется пара ненужных скобок),

5) $\to \neg$ - не формула (нет переменных).

1.3. Равносильность (эквивалентность) формул. Опровержимые и тождественно истинные формулы (тавтологии) логики высказываний.

Пусть α - формула логики высказываний, т.е. $\alpha \in Z_0$. Выпишем все пропозициональные переменные, входящие в формулу α. Пусть список этих переменных $P_1, P_2, ..., P_n$. В этом случае формулу α с указанием всех входящих в нее переменных будем записывать в виде $\alpha(P_1, ..., P_n)$. Если придать переменным какие-либо конкретные истинностные значения из двух возможных, то формула α примет также конкретное истинностное значение (0 или 1). В целом, все возможные истинностные значения формулы $\alpha(P_1, ..., P_n)$ в зависимости от значений переменных $P_1, ..., P_n$ можно представить таблицей истинности формулы α:

$P_1, ..., P_n$	$\alpha(P_1, ..., P_n)$
0…0	$\alpha(0,\ldots,0)$
0…1	$\alpha(0,\ldots,1)$
$\vdots$	$\vdots$
1…0	$\alpha(1,\ldots,0)$
1…1	$\alpha(1,\ldots,1)$

Пример 1.9. Пусть $\alpha(P, Q) = P \to \neg Q \wedge P$, тогда таблица для $\alpha(P, Q)$ имеет вид:

P	Q	$\neg Q$	$\neg Q \wedge P$	$P \to \neg Q \wedge P$
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0

Как уже неоднократно подчеркивалось, в логике высказываний прежде всего интересуют логические (истинностные) значения формул. В зависимости от возможных значений формулы в логике высказываний классифицируются следующим образом:

1. Формула $\alpha(P_1,\ldots,P_n)$ называется опровержимой формулой, если существует такой набор значений переменных $P_1=c_1,\ldots,P_n=c_n$, $(c_i=0\,\text{или}\,1)$, на котором формула α принимает ложное значение, т.е. $\alpha(c_1,\ldots,c_n)=0$.

Пример 1.10. Формула $\alpha(P)=P$ опровержима, т.к. при $P=0$, $\alpha(P)=\alpha(0)=0$. Формула $P\vee Q$ также опровержима, т.к. при $P=Q=0$, $0\vee 0=0$.

2. Формула, не являющаяся опровержимой, называется неопровержимой формулой. Для неопровержимой формулы нельзя подобрать таких значений переменных, для которых формула была бы ложной, значит, неопровержимая формула для всех значений переменных принимает истинное значение. Поэтому неопровержимая формула также называется тождественно истинной формулой или тавтологией. Итак, *тавтология – это тождественно истинная формула, т.е. формула, всегда принимающая значение истины (т.е. 1).*

Пример 1.11. $\alpha(P)=P\vee\neg P$ - тавтология, так как $\alpha(0)=0\vee\neg 0=0\vee 1=1$, $\alpha(1)=1\vee\neg 1=1\vee 0=1$. Пусть $\alpha(P,Q)=P\to(Q\to P)$. Построим таблицу для α:

P	Q	$Q\to P$	$P\to(Q\to P)$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

Таким образом, α всегда принимает 1, т.е. является тавтологией.

3. Формула $\alpha(P_1,\ldots,P_n)$ называется выполнимой, если существует такой набор значений переменных $P_1=c_1,\ldots,P_n=c_n$, где $c_i=0$ или 1, что соответствующее значение формулы $\alpha(c_1,\ldots,c_n)$ есть 1 (истина), т.е. $\alpha(c_1,\ldots,c_n)=1$. Иными словами, если формула хотя бы один раз принимает значение истина (1), то она выполнима.

Пример 1.12. Формула «P», выполнима, т.к. при $P=1$, $\alpha(P)=P$ также равно 1. Формула «$P\to\neg Q$», выполнима, т.к. при $P=0,\cdots Q=1,\cdots\alpha(P,Q)\;=\alpha(0,1)=(0\to\neg 1)=1$.

4. Формула, не являющаяся выполнимой, называется невыполнимой. Для невыполнимой формулы не существует набора значений переменных, для которого формула была бы истинной, таким образом, невыполнимая формула на всех наборах значений переменных принимает значение ложь, т.е. 0.

Пример 1.13. Формула $\alpha=P\wedge\neg P$ невыполнима, т.к. при $P=0$ $\alpha(0)=0\wedge\neg 0=0\wedge 1=0$, а при $P=1,\alpha(1)=1\wedge\neg 1=1\wedge 0=0$.

Для любой формулы $\alpha(P_1,\ldots,P_n)$ можно в принципе выяснить, является ли эта формула выполнимой, опровержимой, тавтологией и т.д. Для этого достаточно построить таблицу истинности для этой формулы и посмотреть столбец значений этой формулы. Если в этом столбце хотя бы один раз встречается 1, то формула выполнима, если 1 не встречается ни разу, т.е. столбец значений состоит из одних нулей, то формула, очевидно, невыполнима, или тождественно ложна. Если в столбце значений хотя бы один раз встречается значение 0, то формула опровержима, в противном случае, столбец значений состоит из одних единиц (1) и, значит, формула тождественно истинна, т.е. является тавтологией.

Пример 1.14. $\alpha(P,Q,R)=\neg P\to Q\vee R\to Q\wedge P$

P	Q	R	$\neg P$	$Q\vee R$	$Q\wedge P$	$\neg P\to Q\vee R$	α
0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	0	1	0
0	1	0	1	1	0	1	0
0	1	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1

Так как в столбце значений формулы α (в последнем столбце) встречаются и 0, и 1, то формула опровержима и выполнима, формула, конечно, не тавтология (не тождественно истинная).

Введем теперь важное понятие равносильности формул логики высказываний.

Формулы $\alpha(P_1,\ldots,P_n)$ и $\beta(P_1,\ldots P_n)$ языка Z_0 называются равносильными, если для любого набора значений переменных: $P_1=c_1,\ldots,P_n=c_n$, где $c_i=0$ или $c_i=1$, соответствующие значения формул α и β равны, т.е.

$$\alpha(c_1,c_2,\ldots,c_n)=\beta(c_1,c_2,\ldots,c_n).$$

Пример 1.15. Пусть $\alpha(P,Q)=\neg(P\vee Q)$ и $\beta(P,Q)=\neg P\wedge\neg Q$, тогда формулы α и β равносильны. В самом деле, составим таблицу истинности для обеих формул:

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P\vee Q$	$\neg(P\vee Q)$	$\neg P\wedge\neg Q$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0

Поскольку столбцы значений формулы α и β совпадают, то формулы равносильны.

Факт равносильности формул α и β записывается как

$$\alpha \mid=\mid \beta.$$

Заметим, что запись $\alpha \mid=\mid \beta$ не являются формулой языка Z_0, т.к. символ $\mid=\mid$ вообще не входит в алфавит языка Z_0! Отношение равносильности есть отношение между формулами языка Z_0. Высказывание вида $\alpha \mid=\mid \beta$ есть утверждение о связи формул α и β, т.е. является *метавысказыванием*.

Однако из двух данных формул α, β можно образовать новую формулу $\alpha \leftrightarrow \beta$, которая, конечно, является элементом языка Z_0.

Теорема 1.1. Формулы α и β равносильны тогда и только тогда, когда формула $\alpha \leftrightarrow \beta$ - тавтология.

Доказательство. Пусть $\alpha(P_1,\ldots,P_n)$ и $\beta(P_1,\ldots,P_n)$ - равносильны. Выберем произвольный набор значений переменных $P_1 = c_1,\ldots,P_n = c_n$, где $c_i = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$. В силу равносильности формул α и β имеем

$$\alpha(c_1,\ldots,c_n) = \beta(c_1,\ldots,c_n).$$

Рассмотрим теперь формулу $\alpha \leftrightarrow \beta$. На наборе $c_1,c_2,\ldots,c_n$ значений переменных $P_1,\ldots P_n$ она примет значение 1 обязательно, т.к. если $\alpha(c_1,\ldots,c_n) = 0 = \beta(c_1,\ldots,c_n)$, то $(\alpha \leftrightarrow \beta) = (0 \leftrightarrow 0) = 1$, точно так же, если $\alpha(c_1,\ldots,c_n) = 1 = \beta(c_1,\ldots,c_n)$, то $(\alpha \leftrightarrow \beta) = (1 \leftrightarrow 1) = 1$. В силу произвольности выбора $c_1,\ldots,c_n$ $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ принимают значение 1 на всех наборах значений переменных, т.е. $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ - тавтология.

Обратно. Пусть $\alpha \leftrightarrow \beta$ - тавтология. По таблице истинности для эквиваленции $\leftrightarrow$:

α	β	$\alpha \leftrightarrow \beta$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

видно, что $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ может принимать значение 1 лишь в тех случаях, когда обе формулы α и β принимают одинаковые значения, т.е. α и β должны быть равносильны.

Таким образом, равносильность формул α,β можно установить либо проверкой совпадения значений α и β, либо проверкой тавтологичности формулы $\alpha \leftrightarrow \beta$.

Тавтологии часто называют логическими законами (законами логики высказываний). Соответствующие этим тавтологиям равносильности позволяют осуществлять равносильные преобразования формул логики высказываний, в частности преобразования, существенно упрощающие эти формулу, аналогично тому, как это делается в алгебре.

Теорема 1.2. Имеет место следующие равносильности (и соответствующие им тавтологии):

	Равносильности		Тавтологии
1)	$\alpha \models\mid \alpha$	1)	$\alpha \leftrightarrow \alpha$
2)	$\alpha \vee \beta \models\mid \beta \vee \alpha$	2)	$\alpha \vee \beta \leftrightarrow \beta \vee \alpha$
3)	$(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \models\mid \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$	3)	$(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \leftrightarrow \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$
4)	$\alpha \wedge \beta \models\mid \beta \wedge \alpha$	4)	$\alpha \wedge \beta \leftrightarrow \beta \wedge \alpha$
5)	$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \models\mid \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$	5)	$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \leftrightarrow \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$

6)	$(\alpha\vee\beta)\wedge\gamma \mathrel{\models\!\!\!\mid} (\alpha\wedge\gamma)\vee(\beta\wedge\gamma)$	6)	$(\alpha\vee\beta)\wedge\gamma \leftrightarrow (\alpha\wedge\gamma)\vee(\beta\wedge\gamma)$
7)	$(\alpha\wedge\beta)\vee\gamma \mathrel{\models\!\!\!\mid} (\alpha\vee\gamma)\wedge(\beta\vee\gamma)$	7)	$(\alpha\wedge\beta)\vee\gamma \leftrightarrow (\alpha\vee\gamma)\wedge(\beta\vee\gamma)$
8)	$\neg(\alpha\vee\beta) \mathrel{\models\!\!\!\mid} \neg\alpha\wedge\neg\beta$	8)	$\neg(\alpha\vee\beta) \leftrightarrow (\neg\alpha\wedge\neg\beta)$
9)	$\neg(\alpha\wedge\beta) \mathrel{\models\!\!\!\mid} \neg\alpha\vee\neg\beta$	9)	$\neg(\alpha\wedge\beta) \leftrightarrow (\neg\alpha\vee\neg\beta)$
10)	$\alpha\vee\alpha \mathrel{\models\!\!\!\mid} \alpha$	10)	$\alpha\vee\alpha \leftrightarrow \alpha$
11)	$\alpha\wedge\alpha \mathrel{\models\!\!\!\mid} \alpha$	11)	$\alpha\wedge\alpha \leftrightarrow \alpha$
12)	$\alpha\wedge(\alpha\vee\beta) \mathrel{\models\!\!\!\mid} \alpha$	12)	$\alpha\wedge(\alpha\vee\beta) \leftrightarrow \alpha$
13)	$\alpha\vee(\alpha\wedge\beta) \mathrel{\models\!\!\!\mid} \alpha$	13)	$\alpha\vee(\alpha\wedge\beta) \leftrightarrow \alpha$
14)	$\alpha\wedge(\beta\vee\neg\beta) \mathrel{\models\!\!\!\mid} \alpha$	14)	$\alpha\wedge(\beta\vee\neg\beta) \leftrightarrow \alpha$
15)	$\alpha\vee(\beta\wedge\neg\beta) \mathrel{\models\!\!\!\mid} \alpha$	15)	$\alpha\vee(\beta\wedge\neg\beta) \leftrightarrow \alpha$
16)	$\neg\neg\alpha \mathrel{\models\!\!\!\mid} \alpha$	16)	$\neg\neg\alpha \leftrightarrow \alpha$

Доказательство всех этих равносильностей тривиально и производится простым выписыванием таблиц истинности для левых и правых частей равносильностей.

Докажем, например, равносильность 7):

α	β	γ	$\alpha\wedge\beta$	$\alpha\vee\gamma$	$\beta\vee\gamma$	$(\alpha\wedge\beta)\vee\gamma$	$(\alpha\vee\gamma)\wedge(\beta\vee\gamma)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Так как значение левой и правой частей эквивалентности (два последних столбца) совпадают, то они равносильны.

Замечание. Во всех равносильностях: 1) – 16) символы α,β,γ обозначают произвольные формулы языка Z_0. Таким образом, символы α,β,γ - метапеременные. Чтобы получить какую-либо конкретную равносильность, нужно вместо символов α,β,γ подставить конкретные формулы языка Z_0.

Пример 1.16. В схеме равносильности 8): пусть $\alpha = P\vee Q$, $\beta = \neg Q\to R$, тогда получим равносильность

$$\neg((P\vee Q)\vee(\neg Q\to R)) \mathrel{\models\!\!\!\mid} \neg(P\vee Q)\wedge\neg(\neg Q\to R).$$

Теорема 1.3. Отношение равносильности на множестве формул языка Z_0 обладает следующими свойствами:

1) $\alpha \mathrel{\models\!\!\!\mid} \alpha$ (рефлексивность), т.е. каждая формула равносильна самой себе;

2) если $\alpha \mathrel{\models\!\!\!\mid} \beta$, то $\beta \mathrel{\models\!\!\!\mid} \alpha$ (симметричность). В самом деле, если $\alpha \mathrel{\models\!\!\!\mid} \beta$, то α и β принимают одинаковые значения для всех значений переменных. Следовательно, и β, и α также принимают одинаковые значения для всех значений переменных;

3) если $\alpha \mathrel{\models\!\!\!\mid} \beta$ и $\beta \mathrel{\models\!\!\!\mid} \gamma$, то $\alpha \mathrel{\models\!\!\!\mid} \gamma$ (транзитивность). Пусть $c_1,\ldots,c_n$ - произвольный набор значений для переменных, входящих в формулы α,β,γ. Так как

$\alpha \models\mid \beta$, то $\alpha(c_1,\ldots,c_n)=\beta(c_1,\ldots,c_n)$, с другой стороны, из $\beta \models\mid \gamma$ следует, что $\beta(c_1,\ldots,c_n)=\gamma(c_1,\ldots,c_n)$, но тогда и $\alpha(c_1,\ldots,c_n)=\gamma(c_1,\ldots,c_n)$, т.е. $\alpha \models\mid \gamma$.

Эти свойства показывают, что равносильность во многих смыслах подобна равенству.

Теорема 1.4. Имеют место следующие равносильности:

1) $\alpha \to \beta \models\mid \neg\alpha \vee \beta$ - (устранимость импликации);

2) $\alpha \wedge \beta \models\mid \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$ - (устранимость конъюнкции);

3) $\alpha \vee \beta \models\mid \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$ - (устранимость дизъюнкции).

Докажем, например 2): $\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \models\mid \neg\neg\alpha \wedge \neg\neg\beta$ по равносильности 8. Далее, так как $\neg\neg\alpha \models\mid \alpha$ и $\neg\neg\beta \models\mid \beta$ в силу равносильности 16, получим: $\neg\neg\alpha \wedge \neg\neg\beta \models\mid \alpha \wedge \beta$, откуда по транзитивности $\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \models\mid \alpha \wedge \beta$ и по симметричности $\alpha \wedge \beta \models\mid \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$. Аналогично доказывается 3). Свойство 1) можно доказать с помощью таблицы истинности.

Последним важным понятием логики высказываний, которое изучается в математической логике, является понятие логического следствия.

Будем говорить, что формула β является логическим следствием формул $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ и запишем это: $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \models \beta$, если для всех значений переменных, на которых формулы $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ истинны, будет обязательно истинной и формула β. Короче, формула β истинна всякий раз, когда истинны все формулы: $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$.

Формулы $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ называются посылками, а формула β заключением (следствием).

Факт логического следствия формулы β из формул $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ записывается

$$\frac{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}{\beta}.$$

Пример 1.17. Докажем, что $P, P \to Q \models Q$. Составим таблицу истинности всех формул:

P	Q	P	$P \to Q$	Q
0	0	0	1	0
0	1	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

Нужно убедиться, что всегда, когда $P, P \to Q$ истинны, будет истинной и Q. Значения переменных, при которых P и $P \to Q$ истины, составляют последнюю строку, и в этой строке $Q=1$, что и требовалось доказать.

Пример 1.18. Докажем, что $P \to Q$, $Q \to R \models P \to R$. Снова строим таблицу истинности для всех формул.

	P	Q	R	$P \to Q$	$Q \to R$	$P \to R$
*	0	0	0	1	1	1
*	0	0	1	1	1	1
	0	1	0	1	0	1

*	0	1	1	1	1	1
	1	0	0	0	1	0
	1	0	1	0	1	1
	1	1	0	1	0	0
*	1	1	1	1	1	1

Строки значений переменных, при которых $P \to Q$ и $Q \to R$ одновременно истинны, отмечены звездочками. Для этих значений переменных формула $P \to R$ также истинна.

Теорема 1.5. Формула β является логическим следствием формул $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, т.е. $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \models \beta$ тогда и только тогда, когда формула $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \to \beta$ - тавтология.

Доказательство. Пусть $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \models \beta$ и $c_1,\ldots,c_n$ произвольный набор значений переменных $P_1,\ldots,P_n$, входящих в эти формулы. Если в наборе $c_1,\ldots,c_n$ хотя бы одна из формул $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ будет ложной, то по свойству конъюнкции формула $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n$ на этом наборе также будет ложной и в силу свойства импликации $((0 \to 1) = 1)$ формула $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \to \beta$ будет истинной на этом наборе. Если же все формулы $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ - истинны в наборе $c_1,\ldots,c_n$, то по определению логического следствия формула β также будет истинной на этом наборе значений переменных. Так как конъюнкция истинных формул истинна, то значит формулы $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n$ и β истинны, а тогда и $(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \to \beta$ будет истинна, т.к. $(1 \to 1) = 1$.

Таким образом, формула $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \to \beta$ всегда истинна, т.е. является тавтологией.

Обратно, если $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \to \beta$ - тавтология и все формулы $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ - истинны для некоторого набора значений переменных, то β также должно быть истинным на этом наборе, ибо в противном случае получили бы, что $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n = 1$, и $\beta = 0$, но $(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \to \beta = (1 \to 0) = 1$, что противоречит свойствам импликации, т.к. $(1 \to 0) = 0$. Отношение логического следствия является формальным уточнением обычного понятия следствия одного высказывания из других. Законы логического следствия являются законами правильных рассуждений, т.е. являются законами логики.

Укажем на некоторые свойства отношения следствия.

Теорема 1.6. Отношение логического следствия обладает следующими свойствами:

1) $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n \models \alpha_i$ для любого i, $1 \le i \le n$;

2) если $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \models \beta_1$; $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \models \beta_2,\ldots$; $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n \models \beta_m$ и $\beta_1,\ldots,\beta_m \models \gamma$, то $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n \models \gamma$;

3) $\alpha, \alpha \to \beta \models \beta$;

4) если $\alpha \models \beta$, то $\neg\beta \models \neg\alpha$;

5) $\alpha, \beta \models \alpha \wedge \beta$;

6) $\alpha \models \alpha \vee \beta$;

7) если $\alpha \models \gamma$, $\beta \models \gamma$, то $\alpha \vee \beta \models \gamma$;

8) $\alpha, \neg\alpha \models \beta$ для любого β;

9) $\alpha \to \beta$, $\neg\beta \models \alpha$.

Доказательства этих утверждений вполне элементарны. Докажем, например, свойство 2).

Пусть задан такой набор значений переменных, при котором все формулы $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ становятся истинными. Так как по условию формулы $\beta_1,\ldots,\beta_m$ следуют из формул $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, то, следовательно, все формулы $\beta_1,\ldots,\beta_m$ на этом наборе значений переменных будут истинными, но тогда и формула γ будет истинной на этом наборе, т.к. она является логическим следствием формул $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$.

Теорема 1.7. Формула β является логическим следствием формул $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ тогда и только тогда, когда из условия ложности формулы β на каком-нибудь наборе значений переменных следует, что хотя бы одна из формул $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ ложна на этом наборе.

Доказательство. Если $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n \models \beta$ и β - ложна, то обязательно ложна хотя бы одна из формул $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$, т.к. в противном случае все они были бы истинными на заданном наборе значений переменных, а тогда и формула β должна была бы быть истинной, что противоречит условию. Обратно, если ложность β влечет ложность хотя бы одной из формул $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$, то β является логическим следствием $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, т.к. в случае, когда все $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ истинны, необходимо, чтобы истинной была и формула β.

Как уже указывалось, стандартный способ доказывать логическое следствие одной формулы и совокупности других состоит в использовании таблиц истинности.

Другой метод состоит в доказательстве невозможности подобрать такие значения переменных, чтобы все посылки были бы истинными, а заключение ложным.

Пример 1.19. Пусть нам нужно доказать правильность следующей схемы вывода: $\overline{\alpha} \to \beta, \overline{\beta} \vee \overline{\gamma}, \gamma \models \alpha$. Предположим “противное”, т.е. схема вывода неверна. Тогда должен существовать такой набор значений переменных, что формула α - ложна, а формулы: $\overline{\alpha} \to \beta, \overline{\beta} \vee \overline{\gamma}, \gamma$ - истинны. Если α - ложна, то $\overline{\alpha}$ - истинна и для истинности $\overline{\alpha} \to \beta$ необходимо, чтобы β была истинной. Тогда $\overline{\beta}$ - ложна, а из предположения истинности γ следует, что $\overline{\gamma}$ - ложна, а значит, $\overline{\beta} \vee \overline{\gamma}$ - ложна, что противоречит предположению о ее истинности.

1.4. Контрольные вопросы

1. Высказывания. Простые и сложные высказывания. Истинностные значения. Примеры.
2. Логические связки. Таблицы истинности. Примеры.

3. Язык логики высказываний. Формулы логики высказываний. Построение формул. Конструкция формул. Примеры.
4. Виды формул логики высказываний: опровержимая, неопровержимая, выполнимая, невыполнимая. Примеры.
5. Равносильность формул логики высказываний. Основные равносильности, тавтологии. Примеры.
6. Логическое следствие. Посылка. Заключение. Основные свойства. Примеры.

2. ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ

2.1. Объектные формы (термы) логики предикатов.

Кроме имен и высказываний в языке, описывающем некоторый универсум U, есть класс выражений, который, в некотором смысле, служит «заготовками» для имен и высказываний. Эти выражения называются формами. В отличие от имен и высказываний, которые в данном контексте имеют фиксированные значения, формы такого значения не имеют, но они потенциально могут обладать различными значениями в зависимости от присвоенных значений некоторым буквам, входящим в выражение формы. Эти буквы называются переменными формы. Различают два класса форм: объектные формы и высказывательные формы.

Объектные формы при задании значений переменных становятся именами (константами), т.е. обозначают фиксированные объекты; высказывательные формы становятся высказываниями и, следовательно, также имеют определенное, теперь уже истинностное значение.

Рассмотрим сначала объектные формы. Простым примером такой формы может служить выражение «$2+x$». Это выражение содержит три символа (буквы): два из них имеют фиксированные значения («2», «+») и буква «x», которая объявляется переменной. Сама по себе форма конкретного значения не имеет, однако, если присвоить переменной x значение 3, это будет записываться как $x:=3$, то форма получит значение 5. Вместо того, чтобы говорить о присвоении, иногда говорят о подстановке значения переменной в форму. Подставляется, конечно, не само значение (в данном случае – число), а его имя: напомним, что форма – это просто запись из букв. Если действительно выполнить такую подстановку, то форма превратиться в некоторое имя, имя своего значения. Для данного примера получим имя (составное) «$2+3$», значение которое есть число 5. Форма, принимающая в качестве значений числа, называется числовой.

Если форма содержит n- переменных, то она называется n- местной.

Пример 2.1.. «$x+y$» - двухместная форма; «x,y» - переменные, «+» - константа (операция сложения); $\sin(x+y+z)$ - трехместная форма; x,y,z - переменные, «$\sin$», «+» - константы.

2.2. Высказывательные формы логики предикатов.

Перейдем теперь к высказывательным формам. Высказывательные формы отличаются от объектных лишь тем, что они принимают в качестве значений истинностные значения (истина и ложь). Высказывательные формы называют также предикатами. Если в высказывательную форму подставить конкретные значения, то форма становится высказыванием, его истинностное значение и есть значение формы для указанных значений переменных.

Пример 2.2. Выражение «$x \ge 0$» - есть высказывательная форма от одной переменной x. Если $x := 1$, то форма превратится в истинное высказывание «$1 \ge 0$», если же $x := -1$, то форма превратится в ложное высказывание «$-1 \ge 0$».

Пример 2.3. Выражение «$x^2 + y^2 = 1$» есть высказывательная форма от двух переменных (двухместный предикат).

Подчеркнем, что переменные формы должны указываться явно, обычно, если форма α зависит от n- переменных, то пишут $\alpha(x_1, \ldots, x_n)$. Если данное выражение рассматривается как форма, т.е. некоторые входящие в него символы объявляются переменными, то, во-первых, устанавливаются значения имен (констант), водящих в выражение, во-вторых, каждой переменной приписывается некоторое множество объектов универсума – область значений этой переменной. Если при задании переменным некоторых значений из указанных областей форма принимает какое-нибудь значение, то говорят, что форма определена для этих значений переменных, а сами значения называются допустимыми, в противном случае говорят, что форма не определена для этих значений переменных. Совокупность всех допустимых значений переменных называется областью допустимых значений. Форма называется всюду определенной, если она определена при всех возможных значениях переменных, и нигде не определенной, если она не определена ни при каких значения переменных.

Пример 2.4. Рассмотрим выражение «$\frac{1}{x}$», в котором буква x - переменная. В качестве области значений для переменной x берется множество всех вещественных чисел. Однако определена эта форма лишь для ненулевых значений переменных, т.е. областью допустимых значений будет множество $R \setminus \{0\}$. Возьмем ту же форму, но в качестве области значений возьмем множество R^+ всех положительных вещественных чисел. В этом случае форма «$\frac{1}{x}$» будет, очевидно, всюду определенной. Наконец, для переменной x этой формы в качестве области значений принимаем множество, состоящее из одного нуля, т.е. $\{0\}$. Тогда форма будет нигде не определенной.

2.3 Равносильность высказывательных форм логики предикатов.

Введем понятие равносильности форм. Две формы в одном и том же языке и над одним и тем же универсумом называются равносильными (эквивалентными), если для любого набора значений переменных, водящих в эти формы, они либо одновременно не определены, либо принимают одинаковые значения. Для обозначения эквивалентности используют символы: $\approx, \equiv, \cong$, а иногда и просто знак равенства «=».

Пример 2.5. Формы $(x^2 - 1)$ и $(x-1)(x+1)$ над множеством вещественных чисел R - равносильны. Формы $\sqrt{x^2}$ и x не равносильны, т.к., например, для $x := -2$ $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 \neq -2$. Формы tgx и $\frac{\sin x}{\cos x}$ равносильны по определению. Формы $\frac{1-x^2}{1-x}$ и $1+x$ не равносильны над множеством вещественных чисел R, т.к., например, для $x = 1$ первая форма не определена, вторая – определена.

Пример 2.6. Формы $[x-3>0]$ и $[x>3]$ равносильны, так что можно записать $(x-3>0) \equiv (x>3)$.

Пример 2.7. $[\sin x = 2] \equiv [x^2 < 0]$, $[x^2 \geq 0] \equiv [x = x]$, но $[x>0]$ $\neq$ $[x^2 > 0]$, т.е. формы «$x>0$» и «$x^2 > 0$» - неравносильны, так, например, при $x = -1$ получим «$-1 > 0$» - ложное высказывание, тогда как «$(-1)^2 > 0$» - истинное высказывание.

Так же как над высказываниями, над высказывательными формами, т.е. предикатами, можно производить логические операции, задаваемыми связками $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$. Высказывания сами можно считать формами, в которых нет переменных. Каждая логическая операция, будучи примененная к формам, снова даст форму (в частности, высказывание).

Пример 2.8. Пусть $(x>0)$ и $(y<x)$ - формы. Тогда можно образовать формы $(x>0) \wedge (y<x); \neg(x>0) \rightarrow (y<x) \vee (x>0)$ и т.д.

Если $P(x, y, \ldots, z)$, $Q(x, y, \ldots, z)$ - формы, то форма $P(x, y, \ldots, z) \wedge Q(x, y, \ldots, z)$ называется конъюнкцией форм P и Q. Это, конечно, высказывательная форма. Ее значения определяются последовательно: сначала для заданных значений переменных $x, y, \ldots, z$ находятся истинностные значения форм P и Q, а затем с помощью таблицы истинности для $\wedge$ - конъюнкции находятся значения: $P \wedge Q$. Точно так же находятся значения форм $P(x, y, \ldots, z) \vee Q(x, y, \ldots, z)$, $P(x, \ldots, z) \rightarrow Q(x, \ldots, z)$ и т.д.

2.4. Кванторы. Свободные и связанные переменные форм логики предикатов.

Многие математические утверждения начинаются со слов: «Для всех …», либо «Существует …». Предложения первого типа утверждают, что некоторое свойство выполняется для всех объектов некоторой области. Предложения второго типа утверждают существование некоторого объекта, удовлетворяющего некоторым условиям.

Пример 2.9. «Для всех x, $|\sin x| \leq 1$». «Существует x, такое, что $\sin x = 0$».

Если $P(x)$ - предложение, что-либо утверждающее об объекте x, т.е. высказывательная форма с переменной, то можно образовать высказывание: «Для любого x, $P(x)$». Точно так же можно образовать высказывание: «Существует

x такое, что $P(x)$». В логике эта ситуация символически изображается с помощью кванторов: «$\forall$» и «$\exists$». Выражение «$\forall x$» называется префиксом и читается: «для любого x», аналогично, образуется префикс «$\exists x$», который читается: «существует x такой, что …». С помощью кванторов вышеприведенные схемы высказываний изобразятся так: $\forall x\, P(x)$ и $\exists x\, P(x)$. Операцию образования из формы $P(x)$ форм (высказываний): $\forall x\, P(x)$ и $\exists x\, P(x)$ называют навешиванием кванторов. Истинностные значения полученных форм зависят от всех возможных значений формы $P(x)$. Высказывание $\forall x\, P(x)$ будет истинным, если для любого значения переменной x из области значений этой переменной форма $P(x)$ будет истинной для этого значения. Высказывание $\exists x\, P(x)$ будет истинным, если найдется хотя бы одно значение x такое, что $P(x)$ будет истинным при этом значении.

Пример 2.10. Пусть $(x+y=1)$ - двухместная высказывательная форма. Выражение $\forall x(x+y=1)$ есть форма с одной (свободной) переменной y, переменная x связана квантором. Если $y:=3$, то форма перейдет в высказывание $\forall x(x+3=1)$, которое, очевидно, ложно, т.к. утверждает, что сумма любого числа с числом 3 есть 1. Если навесить квантор существования, то получим форму $\exists x(x+y=1)$ с той же переменной y. Если $y:=3$, то получим истинное высказывание $\exists x(x+3=1)$, утверждающее существование корня уравнения $x+3=1$. Переменная x в этой форме связанная (несвободна) в том смысле, что вместо нее нельзя подставлять никаких значений переменной. Если в выражение $\forall x(x+y=1)$ вместо x подставить 3, то получится выражение $\forall 3(3+y=1)$, которое бессмысленно.

Если форма имеет несколько переменных, скажем x, y, то можно образовать различные префиксы $\forall x \forall y$, $\exists y \forall x$, $\forall x \exists y$, $\exists x \exists y$ и т.п. и присоединить их к форме $P(x, y)$. Соответственно, получаются различные высказывания: $\forall x \forall y\, P(x, y)$, $\exists y \forall x\, P(x, y)$, $\forall x \exists y\, P(x, y)$ и т.д. Для случая трех переменных можно образовать еще больше различных видов префиксов и соответствующих схем высказываний.

Пример 2.11. Пусть $\left(y = x^2\right)$ - двухместная форма. Тогда $\forall x \exists y\left(y = x^2\right)$ - высказывание (истинное), а $\forall y \exists x\left(y = x^2\right)$ - ложное (над множеством вещественных чисел) высказывание.

2.5. Язык логики предикатов

Алфавит языка логики предикатов (ЯЛП) Z_1 состоит из пяти групп символов:

1) множества $V = \{x, y, \ldots, x_1, y_1, \ldots\}$ - индивидуальных (предметных) переменных;
2) множества $\Re = \{P, Q, R, \ldots, P_1, Q_1, R_1, \ldots\}$ - предикатных символов;
3) логических связок - $\{\vee, \wedge, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow\}$;

4) двух кванторов - $\{\forall, \exists\}$;

5) скобок - $\{(,)\}$.

Элементы языка Z_1 называются *формулами логики предикатов*. Формулы определяются рекурсивно. Сначала определяются элементарные формулы. Элементарные формулы – это выражение вида $T(\xi_1,\ldots,\xi_n)$, где T - предикатный символ, а $\xi_1,\ldots\xi_n$ - предметные переменные.

Например: $P(x,y,z)$; $P(y,x,z)$; $Q(x,x,z)$; $R(y,y,y)$ $R(x)$, $Q(x,y)$ и т.д. - элементарные формулы.

Элементарные формулы образует базовые множества при рекурсивном определении формул.

Таким образом (правила построения формул):

1) каждая элементарная формула есть формула;

2) если α, β - формулы, то будут формулами и выражения: $\exists t\alpha$, $\forall t\alpha$, $\neg\alpha$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \to \beta)$, $(\alpha \leftrightarrow \beta)$, где t - предметная переменная.

Пример 2.12. $\exists y(\neg P(x) \vee R(x,y))$ - формула.

Для того, чтобы доказать, что данное выражение является формулой, нужно задать его конструкцию.

Конструкция формулы – это такая последовательность формул, начинающаяся с элементарной формулы и кончающаяся заданной формулой, в которой все промежуточные формулы получаются из предыдущих по правилам 1) и 2) построения формул.

Рассмотрим конструкцию формулы $\exists y(\neg P(x) \vee R(x,y))$:

1. $P(x)$ - элементарная формула.
2. $R(x,y)$ - элементарная формула.
3. $\neg P(x)$ - формула в силу правила 2), примененная к п.1.
4. $(\neg P(x) \vee R(x,y))$ - формула в силу правила 2), примененная к п3, п.2.
5. $\exists y(\neg P(x) \vee R(x,y))$ - формула в силу правила 2), примененная к п.4.

Свободные и связанные вхождения переменных:

1. Все вхождения переменных в элементарную формулу свободны. Например, $R(x,z,x)$ - элементарная формула. Оба вхождения переменной x, как и вхождение переменной z свободны.

2. Все вхождения переменных в формулах α, β сохраняют свой тип при соответствующих выражениях в формулы

$$\neg\alpha,\ (\alpha \vee \beta),\ (\alpha \wedge \beta),\ (\alpha \to \beta),\ (\alpha \leftrightarrow \beta).$$

3. Если ξ - переменная, имеющая свободные вхождения, т.е. $\alpha = \alpha(\xi)$ в формулу α, то все соответствующие вхождения этой переменной в формулу $\exists\xi\alpha(\xi)$ становится связанными. При этом говорят, что переменная ξ связывается квантором $\exists$ в формуле $\exists\xi\alpha(\xi)$, а исходная формула $\alpha(\xi)$ называется областью действия квантора. Эти же определения справедливы и для формулы $\forall\xi\alpha(\xi)$.

Пример 2.13. Рассмотрим формулу $(\forall y\, R(x,y) \to (\exists x\, P(x) \vee Q(y)))$. Конструкцией этой формулы будет последовательность (формул):

1. $R(x,y)$
2. $P(x)$
3. $Q(y)$
4. $\forall y R(x,y)$
5. $\exists x\, P(x)$
6. $(\exists x\, P(x) \vee Q(y))$
7. $(\forall y\, R(x,y) \to (\exists x\, P(x) \vee Q(y)))$.

Все вхождения переменных в первые три формулы свободны, т.к. формулы эти - элементарны. Первое и второе вхождения y в формулу 4 - связанные, а вхождение (единственное) переменной x в эту формулу – свободно. Вхождения x в формулу 6 – связанные, а вхождения y - свободны. Наконец, первые два вхождения y связаны квантором $\forall$, два вхождения x связаны квантором $\exists$, а последнее вхождение переменной y - свободное. Так же как и в логике высказываний, для упрощения формул пользуются соглашениями о порядке выполнения логических операций. Порядок этот задается последовательностью $\forall, \exists, \neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$. Таким образом, формула $((\exists x P(x) \vee \forall y Q(x,y)) \to (R(x,y,z) \vee P(x)))$ может быть упрощена до выражения $\exists x P(x) \vee \forall y Q(x,y) \to R(x,y,z) \vee P(x)$, т.е. можно опустить все скобки. С другой стороны, в выражении $\neg\exists x((P(x) \to Q(y)) \wedge (R(x,y) \vee \neg P(x)))$ вообще нельзя опустить ни одной пары скобок.

2.6. Модели и интерпретации формул логики предикатов

Моделью называется пара $\mathbf{M} = \langle M; \Re \rangle$, где M - некоторое множество – универсум (носитель) модели, а $\Re = \{R, P, Q, \ldots\}$ - набор имен некоторых предикатов, заданных на M. Одноместные предикаты обычно называются *свойствами*, а многоместные предикаты *отношениями*.

Пример. 2.14.

1.$\langle R; <, = \rangle$ - модель, в которой R - множество вещественных чисел, а $<, =$ - два двухместных предиката: $[x < y] = (x \text{ меньше } y)$, $[x = y] = (x \text{ равно } y)$.

2.$\langle \mathbf{Z}, D \rangle$, где $\mathbf{Z}$ - множество целых чисел, а D - двухместный предикат: $D(x,y) = [x \text{ делится на } y]$.

Набор имен предикатов модели называется *сигнатурой модели*. Если в формуле α логики предикатов в качестве предикатных символов использовались лишь символы из сигнатуры $\Re$, то говорят, что α есть формула сигнатуры $\Re$.

Пусть $\mathbf{M} = \langle M; \Re \rangle$ - модель сигнатуры $\Re$ и α - формула этой сигнатуры. Выпишем в каком-нибудь порядке все переменные, имеющие свободные вхождения в формулу α, такие переменные будем называть свободными. Если $\xi_1, \ldots, \xi_n$ - список свободных переменных формулы α, то в этом случае будем писать $\alpha(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ - запись, которая указывает зависимость формулы α от ее свободных переменных. Если для формулы $\alpha(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ каждый предикатный символ рассматривать как имя некоторого фиксированного предиката модели **M**, а в качестве возможных значений всех переменных этой формулы считать множество M, то формула α будет представлять собой некоторую высказывательную форму в этой модели **M**. Говорят, что эта высказывательная форма $\alpha_{\mathbf{M}}$ получена интерпретацией формулы α в модели **M**. Число свободных переменных формулы $\alpha_{\mathbf{M}}$ будет равно местности формы, т.е. для формулы $\alpha(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ - форма $\alpha_{\mathbf{M}}(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ зависит от n - переменных. Так как $\alpha_{\mathbf{M}}(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ высказывательныная форма, то она превращается в высказывание о модели **M**, если вместо свободных переменных подставить имена каких-либо объектов из множества M, то получится высказывание истинное или ложное.

Пусть $c_1,c_2,\ldots,c_n$ - имена объектов множества M. При подстановке их вместо переменных $\xi_1,\ldots,\xi_n$ в форму $\alpha_{\mathbf{M}}(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ получим высказывание $\alpha_{\mathbf{M}}(c_1,\ldots,c_n)$. Если это высказывание истинно, то пишут $\mathbf{M} \models \alpha(c_1,\ldots,c_n)$ и говорят, что формула $\alpha(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ выполняется в модели **M** при значениях переменных: $\xi_1 := c_1,\ldots,\xi_n := c_1 \ldots \xi_n := c_n$; в противном случае пишут $\mathbf{M} \not\models \alpha(c_1,\ldots,c_n)$. Если в формуле α вообще нет свободных переменных, то она интерпретируется в данной модели **M** как высказывание об этой модели.

Пример 2.15. Пусть $\mathbf{M} = \langle M;P,Q \rangle$ - модель, в которой M - множество прямых заданной плоскости, а P,Q - два двухместных предиката, таких, что $P(x,y) = [\text{прямые } x \text{ и } y \text{ пересекаются}]$, а $Q(x,y) = [\text{прямые } x, y \text{ - перпендикулярны}]$. Рассмотрим формулу

$$\alpha = \forall x \forall y (Q(x,y) \to P(x,y)) \wedge \exists x \exists y (P(x,y) \wedge \neg Q(x,y)).$$

Эта формула не имеет свободных переменных и, значит, представляет собой при интерпретации некоторое высказывание. Первый член конъюнкции – это высказывание $\forall x \forall y (Q(x,y) \to P(x,y))$, которое при интерпретации читается как: «для любых прямых x и y из того, что они перпендикулярны, следует, что они пересекаются», или короче, «любые две перпендикулярные прямые пересекаются». Это, конечно, истинное высказывание. Второй член конъюнкции $\exists x \exists y (P(x,y) \wedge \neg Q(x,y))$ проинтерпретируется как высказывание «существуют пересекающиеся, но не перпендикулярные прямые», которое также истинно. Таким образом, $m \models \alpha$ или $\mathbf{M} \models \alpha(c_1,\ldots,c_n)$. В общем случае, если α содержит свободные переменные, то истинность или ложность α в модели **M** будет зависеть от значений этих свободных переменных. Поэтому при интерпретации такой формулы нужно уметь вычислить ее истинностные значения при любых значениях переменных. В том случае, когда модель m или М конечна, т.е. множество M состоит из конечного числа элементов, можно явно построить таблицу истинности заданной формулы.

Пример 2.16. Пусть $\langle M; P, Q\rangle$, где $M = \{a, b, c\}$, а P, Q - два предиката, заданные таблично:

P:

x	$P(x)$
a	0
b	1
c	0

Q:

$x \backslash y$	a	b	c
a	1	0	1
b	1	1	1
c	0	1	1

Рассмотрим формулу:

$$\alpha = \exists y P(y) \to \forall x (Q(y, x) \to \neg P(x)).$$

В этой формуле третье вхождение в формулу переменной y - свободно. Так что $\alpha = \alpha(y)$. Поэтому проинтерпретировать эту формулу, значит, найти значения истинности $\alpha(a), \alpha(b)$ $\alpha(c)$ или построить таблицу:

y	$\alpha(y)$
a	$\alpha(a)$
b	$\alpha(b)$
c	$\alpha(c)$

Для этого выпишем конструкцию формулы α:

1. $P(y)$
2. $Q(y, x)$
3. $P(x)$
4. $\neg P(x)$
5. $Q(y, x) \to \neg P(x) \quad (= \beta(y, x))$
6. $\exists y P(y)$
7. $\forall x (Q(y, x) \to \neg P(x)) \quad (= \gamma(y) = \forall x \beta(y, x))$
8. $\alpha = \exists y P(y) \to \forall x (Q(y, x) \to \neg P(x)) \quad (= \exists y P(y) \to \gamma(y))$.

Теперь для каждого шага этой конструкции строится своя таблица истинности:

1. $P(y)$:

y	$P(y)$
a	0
b	1
c	0

по определению P.

2. $Q(y, x)$:

x \ y	a	b	c
a	1	0	1
b	1	1	1
c	0	1	1

по определению Q.

3. $P(x)$:

$P(x)$:

x	$P(x)$
a	0
b	1
c	0

4. $\neg P(x)$:

$\neg P(x)$:

x	$\neg P(x)$
a	1
b	0
c	1

5. $\beta(y,x) = Q(y,x) \to \neg P(x)$:

$\beta(y,x) = Q(y,x) \to \neg P(x)$:

x \ y	a	b	c
a	1	1	1
b	1	0	1
c	1	0	1

6. $\exists y P(y) = 1$, т.к. при $y = b$, $P(b) = 1$

7. $\forall x \beta(y,x) = \gamma(y)$

$\gamma(y)$:

y	$\gamma(y)$
a	1
b	0
c	0

8. $\alpha(y) = (\exists y P(y)) \to \gamma(y)$, т.к.

$\exists y P(y) = 1$, то $\alpha(y) \models\mid \gamma(y)$, т.е.

y	$\alpha(y)$
a	1
b	0
c	0

Исходя из понятия интерпретации формулы α в данной модели **M**, можно дать классификацию формул (во многом аналогичную той, что была дана для формул логики высказываний).

2.7. Выполнимые и невыполнимые формулы

Формула $\alpha(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ называется выполнимой в модели $\mathbf{M} = \langle M, \mathfrak{R} \rangle$, если найдется такой набор значений свободных переменных $\xi_1 = c_1, \ldots, \xi_n = c_n$, где c_i элементы из *M*, что $\mathbf{M} \models \alpha(c_1, \ldots, c_n)$.

Пример 2.17. Формула $\alpha(y)$ из предыдущего примера выполнима в модели $\mathbf{M} = \langle M; P, Q \rangle$ этого примера, т.к. при $y = a$, $a \in M$ $\alpha(a) = 1$, т.е. $\mathbf{M} \models \alpha(a)$. В противном случае формула $\alpha(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ называется невыполнимой в этой модели m (или M). Например, если $\alpha(y)$ формула из предыдущего примера, то $\alpha(y) \wedge \neg \alpha(y)$ - невыполнимая в модели $\mathbf{M} = \langle M; P, Q \rangle$ формула.

Формула $\alpha(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ называется выполнимой, если существует модель m (или М), в которой она будет выполнимой. В силу этого определения формула $\alpha(y)$ выполнима, т.к. она выполнима в модели $\mathbf{M} = \langle M; P, Q\rangle$.

Формула $\alpha(\xi_1,\ldots,\xi_n)$, не выполнимая ни в одной модели, называется невыполнимой в логике предикатов.

Пример 2.18. Формула $\alpha = P(x) \wedge \neg P(x)$, очевидно, невыполнима в логике предикатов, т.к. в какой бы модели m (или М) она не рассматривалась, и какое бы значение не выбиралось для переменной x, формула $\alpha(x)$ истинной быть не может, т.к., если $P(a)=1$, то $\neg P(a)=0$ и $P(a)\wedge\neg P(a)=0$, точно так же, если $P(a)=0$, то $\neg P(a)=1$ и $P(a)\wedge\neg P(a)=0$.

Формула $\alpha(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ называется тождественно истинной в модели **M**, если для любого набора значений свободных переменных $\xi_1 = c_1,\ldots,\xi_n = c_n$, где $c_1, c_2,\ldots,c_n$ берутся из носителя модели **M**, формула α будет истинной для этого набора значений переменных, т.е. $\alpha_m(c_1,\ldots,c_n)=1$:

$$\mathbf{M} \models \alpha(c_1,\ldots,c_n).$$

По самому смыслу определения ясно, что $\alpha(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ тождественно истинна в **M**, если в **M** выполнена формула $\forall\xi_1\forall\xi_2\ldots\forall\xi_n\alpha(\xi_1,\ldots,\xi_n)$. Формула $\alpha(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ называется *тавтологией или тождественно истинной*, если эта формула тождественно истинна в каждой модели.

Пример 2.19. $P(x)\wedge\neg P(x)\to\exists x\forall y R(x,y,z)$ - тавтология, т.к. $P(x)\wedge\neg P(x)$ невыполнима ни в одной модели, т.е. тождественно ложна, а в силу свойства импликации вся формула будет автоматически тождественно истинной.

Другим примером тавтологии является формула $P(x)\vee\neg P(x)$, которая, очевидно, тождественно истинна в каждой модели.

2.8. Равносильные формулы логики предикатов.

Пусть $\alpha(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ и $\beta(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ - две формулы со свободными переменными $\xi_1,\ldots,\xi_n$. Формулы α, β называются равносильными в модели m (или М), если для любого набора значений переменных $\xi_1 = c_1,\ldots,\xi_n = c_n$; $c_i \in \mathrm{M}, i = 1,\ldots,n$ $\alpha_m(c_1,\ldots,c_n) = \beta_m(c_1,\ldots,c_n)$, т.е. их значения истинности совпадают для любого набора значений переменных.

Иными словами, $\mathbf{M} \models \alpha(c_1,\ldots,c_n)$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{M} \models \beta(c_1,\ldots,c_n)$. Если α и β равносильны в **M**, то пишут

$$\alpha \underset{\mathbf{M}}{\models\!\mid} \beta.$$

Формулы α и β называются равносильными в логике предикатов, если они равносильны в любой модели. Это записывается как $\alpha \models\!\mid \beta$, т.е.

$$\alpha \models\!\mid \beta \Leftrightarrow \forall\mathbf{M} \quad \alpha \underset{\mathbf{M}}{\models\!\mid} \beta.$$

Приведем основные равносильности в логике предикатов:

1) $\exists x(\alpha(x) \vee \beta(x)) \models\mid \exists x\alpha(x) \vee \exists x\beta(x)$,

2) $\forall x(\alpha(x) \wedge \beta(x)) \models\mid \forall x\alpha(x) \wedge \forall x\beta(x)$,

3) $\forall x \forall y\, \alpha(x, y) \models\mid \forall y \forall x\, \alpha(x, y)$,

4) $\exists x \exists y\, \alpha(x, y) \models\mid \exists y \exists x\, \alpha(x, y)$,

$$\left.\begin{array}{l} 5)\ \neg \forall x\, \alpha(x) \models\mid \exists x \neg \alpha(x), \\ 6)\ \neg \exists x\, \alpha(x) \models\mid \forall x \neg \alpha(x). \end{array}\right\} \text{ Законы Де-Моргана}$$

Кроме того, в логике предикатов есть ряд тавтологий:

1) $\forall x\, \alpha(x) \to \alpha(y)$,

2) $\alpha(y) \to \exists x\, \alpha(x)$,

3) $\exists x\, \forall y\, \alpha(x, y) \to \forall y\, \exists x\, \alpha(x, y)$.

Так же как и в логике высказываний, справедливо предложение: формулы α и β равносильны в логике предикатов тогда и только тогда, когда $\alpha \leftrightarrow \beta$ - тавтология. Имея указанные равносильности и тавтологии, можно выполнять логические преобразования формул. Так, можно сформулировать правило построения формального отрицания формул с кванторами.

Пусть $K_1\xi_1 K_2\xi_2 \ldots K_n\xi_n\ \alpha(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ - формула с кванторами $K_1, K_2, \ldots, K_n$, где $K_i\xi_i$ есть либо $\forall \xi_i$, либо $\exists \xi_i$. Обозначим через $>|_i$ квантор, двойственный к K_i, т.е.

$$>|_i = \begin{cases} \forall & \text{если } K_i = \exists \\ \exists & \text{если } K_i = \forall \end{cases}.$$

Тогда правило формального отрицания можно записать так:

$$\neg K_1\xi_1 \ldots K_n\xi_n\, \alpha(\xi_1, \ldots, \xi_n) \models\mid >|_{1_1}\ \xi_{1_1} \ldots >|_{n_1}\ \xi_{n_1} \neg \alpha(\xi_1, \ldots, \xi_n)$$

Пример 2.20. Рассмотрим формулу $\alpha = \forall x \exists y \forall z\, P(x, y, z)$. Ее отрицание $\neg\alpha$ будет:

$$\neg \forall x \exists y \forall z\, P(x, y, z) \models\mid \exists x \forall y \exists z \neg P(x, y, z)$$

2.9. Контрольные вопросы

1. Понятие формы. Переменные формы. Понятие “n-местности” форм.
2. Объектные формы в логике предикатов. Переменные. Примеры.
3. Высказывательные формы в логике предикатов. Предикаты. Переменные. Примеры.
4. Равносильность высказывательных форм. Примеры.
5. Кванторы. Типы кванторов. Навешивание кванторов. Примеры.
6. Свободные и связанные переменные форм логики предикатов. Примеры.
7. Язык логики предикатов. Алфавит. Формула логики предикатов. Определение, состав формулы логики предикатов. Конструкция формулы логики предикатов. Примеры.
8. Модель. Сигнатура. Интерпретация формул логики предикатов. Одноместные и многоместные предикаты. Свойства, отношения. Примеры.

9. Выполнимые и невыполнимые формулы логики предикатов. Примеры.
10. Равносильные формулы логики предикатов. Основные равносильности в логике предикатов. Примеры.

3. Булевы функции

3.1. Булевы (двоичные) функции и их табличное представление.

Пусть $B=\{0,1\}$ - двухэлементное множество.

Булевой функцией n переменных называется отображение

$$f:B^n \to B,$$

где B^n - декартова степень множества B, т.е. $B^n = \underbrace{B\times\ldots\times B}_{n}$.

Элементами множества B^n служат всевозможные двоичные наборы (кортежи): $x=(x_1,\ldots,x_n)$ длины n, каждая компонента которых x_i принимает значения: 0 или 1:

$$B^n=\{x=(x_1,\ldots,x_n)\mid x_i\in B \text{ для всех } 1\le i\le n\}.$$

Обычно булева функция записывается в виде $y=f(x_1,\ldots,x_n)$ (по аналогии, как и в математическом анализе, в виде $y=f(x)$).

Для булевых функций, как и для любых функций, существуют различные способы их задания. Будем в основном рассматривать два способа задания булевых функций: табличный и аналитический (алгебраический). При табличном способе явным образом указывают значение функции f для каждого конкретного двоичного набора x. Это указание реализуется с помощью таблицы следующего вида:

№	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$f(x_1,\ldots,x_n)$
0	0	0	$\ldots$	0	$f(0,0,\ldots,0)$
1	0	0	$\ldots$	1	$f(0,0,\ldots,1)$
$\vdots$			$\vdots$		$\vdots$
	c_1	c_2	$\cdots$	c_n	$f(c_1,c_2,\ldots,c_n)$
$\vdots$			$\vdots$		$\vdots$
2^n-1	1	1	$\ldots$	1	$f(1,1,\ldots,1)$

Так как всего существует 2^n двоичных наборов длины n, т.е. $|B^n|=2^n$, то и число строк в указанной выше таблице будет также 2^n. Правый столбец в этой таблице есть столбец значений функции f на наборах, указанных слева. Такая функция называется таблицей истинности.

Пример 3.1. Пусть $n=2$, тогда $B^2=\{(0,0);(0,1):(1,0),(1,1)\}$. Рассмотрим функцию двух переменных $y=f(x_1,x_2)$, заданную следующей таблицей:

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Тогда, например, $f(0,1)=0$, $f(1,0)=1$ и т.д.

Рассмотрим простейшие булевы функции от одного и двух переменных. Этим функциям припишем стандартные обозначения и наименования.

Рассмотрим сначала функции одной переменной ($n=1$):

1. $f_0(x)\equiv 0$ для всех $x\in \mathrm{B}$. Таким образом, это есть просто постоянная функция: константа, тождественно равная 0.

2. Аналогичным образом можно определить функцию $f_1(x)$ - константу, равную 1 для всех $x\in \mathrm{B}$, $f_1(x)\equiv 1$. Эта функция обозначается 1.

3. $f_3(x)\equiv x$ для всех $x\in \mathrm{B}$. Таким образом, $f_3(0)=0$ и $f_3(1)=1$. Эта функция называется тождественной функцией и обозначается просто переменной x.

4. Следующая функция $f_4(x)$ определяется равенствами $f_4(0)=1$ и $f_4(1)=0$.

x	$f_4(x)$
0	1
1	0

Эта функция называется функцией «НЕ» (или инверсией, или отрицанием). Обозначается она как переменная с чертой (или штрихом) наверху:

$$f_4(x)=\bar{x}\,.$$

Другие обозначения: x' или $\neg x$.

Этими четырьмя функциями исчерпывается весь класс функций одной переменной.

Теперь рассмотрим некоторые функции двух переменных ($n=2$):

5. Конъюнкция (логическое произведение): $f_5(x_1,x_2)=x_1\cdot x_2$. Другие обозначения для этой функции: $x_1\wedge x_2$ или x_1 & x_2.

Таблица функции имеет вид:

x_1	x_2	$x_1\cdot x_2$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Эта функция называется функцией «И»

6. Дизъюнкция (логическая сумма): $f_6(x_1,x_2)=x_1\vee x_2$ (другое обозначение x_1+x_2).

x_1	x_2	$x_1\vee x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Эта функция называется функцией «ИЛИ»

7. Сложение по модулю 2: $f_7(x_1,x_2)=x_1 \oplus x_2$

x_1	x_2	$x_1 \oplus x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

8. Штрих Шеффера: $f_8(x_1,x_2)=x_1 \mid x_2$

x_1	x_2	$x_1 \mid x_2$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

9. Стрелка Пирса: $f_9(x_1,x_2)=x_1 \downarrow x_2$

x_1	x_2	$x_1 \downarrow x_2$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Компактно все эти функции и ряд других можно изобразить в виде одной общей таблицы:

x_1	x_2	$x_1 \cdot x_2$	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \oplus x_2$	$x_1 \mid x_2$	$x_1 \downarrow x_2$	$x_1 \to x_2$	$x_1 \sim x_2$
0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	1	1

3.2. Сложные булевы функции. Формульное представление булевых функций.

Другим важнейшим способом задания булевых функций является аналитический (формульный) способ, при котором функция задается в виде некоторого логического выражения, построенного из переменных и некоторых символов основных функций, называемых базисными. Эти базисные функции берутся обычно из десяти вышеприведенных логических функций. Для разных целей выбирают разные базисы. Обычно используется стандартный базис B, состоящий из пяти функций $\{0,1,-,\cdot,\vee\}$. С помощью этого базиса можно дать понятие логического (булева) выражения или, как еще говорят, формулы в этом базисе.

Пусть $B=\{0,1,-,\cdot,\vee\}$ - базис, $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ - список переменных. Тогда логическим выражением в этом базисе называется последовательность символов из алфавита $B \cup X$, построенная с помощью следующих индуктивных правил:

1) константы $0,1$ и каждая переменная x_i - есть логические выражения;

2) если α_1 и α_2 - (уже построенные) выражения (формулы), то $\overline{\alpha}_1$, $(\alpha_1 \cdot \alpha_2)$, $(\alpha_1 \vee \alpha_2)$ - также будут логическими выражениями (формулами);

3) других формул нет.

Согласно этим правилам каждое логическое выражение строится последовательно, начиная с констант $0{,}1$ и переменных x_i, и с применением правила 2), т.е. с помощью одной из операций: $-,\cdot,\vee$, примененной к двум выражениям, построенным на предыдущих шагах. При этом расстановка скобок показывает, в каком порядке строилось данное выражение.

Пример 3.2. Покажем, что $\left((0\vee\bar{x}_1)\vee\left(\overline{x_2\cdot 1}\right)\right)$ - логическое выражение. Действительно, $x_1, x_2, 0{,}1$ - логические выражения в силу правила 1). Тогда, последовательно применяя правило 2), будем получать формулы:

$$\bar{x}_1, (0\vee\bar{x}_1), (x_2\cdot 1), \left(\overline{x_2\cdot 1}\right), \left((0\vee\bar{x}_1)\vee\left(\overline{x_2\cdot 1}\right)\right).$$

Пример 3.3. Запись: $\bar{x}_1\vee\vee x_2$ - не является логическим выражением.

Если α - логическое выражение, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - переменные, входящие в это логическое выражение, то этот факт записывают обычно следующим образом:

$$\alpha=\alpha(x_1,\ldots,x_n).$$

Каждое такое выражение с n переменными задает некоторую булеву функцию f_α от n переменных. При этом значения функции f_α определятся через значения логического выражения α при заданных значениях переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Для того чтобы найти значение логического выражения $\alpha(x)$ для заданных значений переменных $x_1=c_1,\ldots,x_n=c_n$, где $c_i=0$ или $c_i=1$, нужно подставить эти значения в логическое выражение вместо переменных, и, используя таблицы для базисных функций (таблицы истинности), последовательно вычислить значение всего выражения.

Пример 3.4. Найдем значение выражения $\alpha(x_1,x_2)=(0\vee\bar{x}_1)\vee\left(\overline{x_2\cdot 1}\right)$ для заданных значений переменных $x_1=1$, $x_2=0$. Получим последовательно $\bar{x}_1=\bar{1}=0$, $0\vee\bar{x}_1=0\vee 0=0$, $x_2\cdot 1=0\cdot 1=0$, $\overline{x_2\cdot 1}=\bar{0}=1$, $(0\vee\bar{x}_1)\vee\left(\overline{x_2\cdot 1}\right)=0\vee 1=1$. Итак, $\alpha(1,0)=1$.

Было вычислено значение этого выражения для одного набора значений переменных: $x_1=1$, $x_2=0$. Для того, чтобы найти значения выражения для всех наборов переменных, удобно пользоваться табличной записью вычислений (таблицей истинностью):

x_1	x_2	$\bar{x}_1$	$0\vee\bar{x}_1$	$x_2\cdot 1$	$\overline{x_2\cdot 1}$	$\alpha=(0\vee\bar{x}_1)\vee\left(\overline{x_2\cdot 1}\right)$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0

Умея находить значение логического выражения α для заданных значений переменных, можно определить функцию, задаваемую этим выражением, следующим образом:

$$f_\alpha(\boldsymbol{c})=f_\alpha(c_1,c_2,\ldots,c_n)=\alpha(c_1,\ldots,c_n)$$

Следует заметить, однако, что одну и ту же функцию можно задать различными логическими выражениями. Так, выражение $\alpha(x_1, x_2) = (0 \vee \bar{x}_1) \vee \left(\overline{x_2 \cdot 1}\right)$ из последнего примера 3.4 задает функцию f_α с таблицей:

x_1	x_2	$f_\alpha(x_1, x_2)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Эту же функцию можно представить, например, выражением $\beta(x_1, x_2) = \overline{x_1 \cdot (x_2 \vee 0)}$, что легко увидеть в таблице:

x_1	x_2	$x_2 \vee 0$	$x_1 \cdot (x_1 \vee 0)$	$\beta(x_1, x_2)$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	0

3.3. Равносильные представления булевых функций.

Выражения, задающие одну и ту же функцию, будем называть эквивалентными. Это приводит к следующему определению: два булевых выражения $\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ и $\beta(x_1, \ldots, x_n)$ называют эквивалентными (равносильными), если они принимают одинаковые значения для всех возможных значений переменных:

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow \forall x_1, x_2, \ldots, x_n \quad \alpha(x_1, \ldots, x_n) = \beta(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Для того, чтобы выяснить, будут ли два заданных булевых выражения $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ эквивалентными, достаточно составить таблицу значений для α и β, и, затем, сравнить их:

x_1	$\cdots$	x_n	$\alpha(x)$	$\beta(x)$
0	…	0	$\alpha(0)$	$\beta(0)$
	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
c_1	$\cdots$	c_n	$\alpha(c)$	$\beta(c)$
	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
1	…	1	$\alpha(1)$	$\beta(1)$

Такая таблица имеет 2^n строк. Если столбцы значений для α и β совпадают, то, очевидно, что α и β - равносильные выражения.

Пример 3.5. Пусть $\alpha(x_1, x_2) = \overline{x_1 \cdot x_2}$ и $\beta(x_1, x_2) = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$. Покажем, что эти выражения равносильны. Для этого составим таблицу значений этих выражений:

x_1	x_2	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$x_1 \cdot x_2$	$\alpha = \overline{x_1 \cdot x_2}$	$\beta = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0

Поскольку столбцы, соответствующие выражениям α и β, совпадают, то эти выражения эквивалентны.

Этим способом могут быть установлены следующие основные эквивалентности логических выражений:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha \\ 1`)\ \alpha\vee\beta=\beta\vee\alpha \end{array}\right\}\ \text{свойства коммутативности,}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2)\ (\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma) \\ 2`)\ (\alpha\vee\beta)\vee\gamma=\alpha\vee(\beta\vee\gamma) \end{array}\right\}\ \text{свойства ассоциативности,}$$

$$\left.\begin{array}{l} 3)\ \alpha\cdot\alpha=\alpha \\ 3`)\ \alpha\vee\alpha=\alpha \end{array}\right\}\ \text{свойства идемпотентности,}$$

$$\left.\begin{array}{l} 4)\ (\alpha\vee\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot\gamma\vee\beta\cdot\gamma \\ 4`)\ (\alpha\cdot\beta)\vee\gamma=(\alpha\vee\gamma)\cdot(\beta\vee\gamma) \end{array}\right\}\ \text{свойства дистрибутивности,}$$

$$\left.\begin{array}{l} 5)\ \overline{\alpha\cdot\beta}=\overline{\alpha}\vee\overline{\beta} \\ 5`)\ \overline{\alpha\vee\beta}=\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta} \end{array}\right\}\ \text{законы Де-Моргана,}$$

$$6)\ \overline{\overline{\alpha}}=\alpha \qquad \text{закон двойного отрицания,}$$

$$\left.\begin{array}{l} 7)\ \alpha\cdot 0=0 \\ 7`)\ \alpha\vee 0=\alpha \\ 8)\ \alpha\cdot 1=\alpha \\ 8`)\ \alpha\vee 1=1 \end{array}\right\}\ \text{законы действия констант,}$$

$$9)\ \alpha\cdot\overline{\alpha}=0 \qquad \text{закон противоречия,}$$

$$9`)\ \alpha\vee\overline{\alpha}=1 \qquad \text{закон исключенного третьего.}$$

В этих равносильностях α,β,γ - произвольные логические выражения в базисе $B=\{0,1,-,\cdot,\vee\}$. Указанные выше эквивалентности позволяют осуществлять равносильные преобразования логических выражений аналогично тому, как это делается в обычной алгебре, и, в частности, доказывать новые эквивалентности.

Покажем, как с помощью равносильных преобразований получаются следующие важные эквивалентности:

$$\left.\begin{array}{l} 10)\ \alpha\vee\alpha\cdot\beta=\alpha \\ 11)\ \alpha(\alpha\vee\beta)=\alpha \end{array}\right\}\ \text{правила поглощения,}$$

$$12)\ \alpha\cdot\beta\vee\alpha\cdot\overline{\beta}=\alpha \qquad \text{правило склеивания,}$$

$$13)\ \alpha\cdot\beta\vee\overline{\alpha}=\overline{\alpha}\vee\beta \qquad \text{правило вычеркивания.}$$

Доказательства этих правил (10), 11), 12), 13))получаются последовательным применением основных эквивалентностей:

$$10)\ \alpha\vee\alpha\cdot\beta\overset{(8)}{=}\alpha\cdot 1\vee\alpha\cdot\beta\overset{(4)}{=}\alpha\cdot(1\vee\beta)\overset{(8`)}{=}\alpha\cdot 1\overset{(8)}{=}\alpha\,,$$

$$11)\ \alpha\cdot(\alpha\vee\beta)=\alpha\cdot\alpha\vee\alpha\cdot\beta=\alpha\vee\alpha\beta\overset{(10)}{=}\alpha\,,$$

$$12)\ \alpha\beta\vee\alpha\overline{\beta}=\alpha(\beta\vee\overline{\beta})\overset{(9`)}{=}\alpha\cdot 1=\alpha\,,$$

$$13)\ \alpha\beta\vee\overline{\alpha}=\alpha\beta\vee(\overline{\alpha}\vee\overline{\alpha}\beta)=(\alpha\beta\vee\overline{\alpha}\beta)\vee\overline{\alpha}=\beta\vee\overline{\alpha}=\overline{\alpha}\vee\beta$$

К другим важным эквивалентностям относятся эквивалентности, выражающие одни логические функции через другие. Так, например, можно убедиться в справедливости нижеследующих эквивалентностей, используя таблицы истинности логических функций:

14) $x_1 \vee x_2 = \left(\overline{\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2}\right)$,
15) $x_1 \cdot x_2 = \left(\overline{\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2}\right)$,
16) $x_1 \oplus x_2 = \left(x_1 \cdot \bar{x}_2\right) \vee \left(\bar{x}_1 \cdot x_2\right)$,
17) $x_1 \mid x_2 = \left(\overline{x_1 \cdot x_2}\right)$,
18) $x_1 \downarrow x_2 = \left(\overline{x_1 \vee x_2}\right)$.

Эти равенства показывают, что дизъюнкция «$\vee$» выражается через конъюнкцию «$\wedge$» и отрицание «$\neg, -$». Аналогичным образом и конъюнкция выражается через дизъюнкцию и отрицание. Кроме того, функции: $\oplus$ - сложение по модулю 2, $\mid$ - штрих Шеффера, $\downarrow$ - стрелка Пирса выражаются через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание.

Более неожиданным является тот факт, что каждая из функций выражается через штрих Шеффера:

19) $\bar{x} = x \mid x$,
20) $x_1 \vee x_2 = \left(x_1 \mid x_1\right) \mid \left(x_2 \mid x_2\right)$,
21) $x_1 \cdot x_2 = \left(x_1 \mid x_2\right) \mid \left(x_1 \mid x_2\right)$.

Аналогичное утверждение справедливо и для стрелки Пирса:

22) $\bar{x} = x \downarrow x$,
23) $x_1 \cdot x_2 = \left(x_1 \downarrow x_1\right) \downarrow \left(x_2 \downarrow x_2\right)$,
24) $x_1 \vee x_2 = \left(x_1 \downarrow x_2\right) \downarrow \left(x_1 \downarrow x_2\right)$.

3.4. Системы функций алгебры логики. Аналитическое представление. Нормальные формы. Полнота системы.

Ранее было введено понятие логического выражения в стандартном базисе $B = \{0,1,-,\cdot,\vee\}$. Выражения в этом базисе задавали логические функции (функции алгебры логики). При этом функции константы 0 и 1 можно было выразить через функции $\cdot, -, \vee$: $0 = x \cdot \bar{x}$, $1 = x \vee \bar{x}$. Поэтому класс функций, представимых логическими выражениями, не уменьшится, если ограничиться лишь базисом $B_0 = \{-,\ \cdot,\ \vee\}$, не содержащим констант $0\, и\, 1$, т.к. константы представимы в этом базисе. Далее, так как конъюнкция выражается через отрицание и дизъюнкцию:

$$x_1 \cdot x_2 = \overline{\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2}\ ,$$

то можно ограничиться еще меньшим базисом $B_{1.} = \{-,\vee\}$. Точно так же, поскольку:

$$x_1 \vee x_2 = \overline{\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2}\ ,$$

можно ограничиться базисом $B_2 = \{-,\cdot\}$. Все эти базисы эквивалентны в том смысле, что каждая функция, представимая в одном базисе некоторым логическим выражением, будет представима также некоторым логическим выражением в другом базисе.

Пример 3.6. Пусть $\alpha(x_1, x_{2>} x_3) = (x_1 \cdot 1) \vee \left(\overline{x_2 \cdot x_3}\right) \vee (\bar{x}_2 \vee 0)$ - выражение в базисе $B = \{0, 1, -, \vee, \cdot\}$. Тогда, учитывая логические эквивалентности, его можно привести к логическому выражению:

$$\beta(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \overline{x_2 \cdot x_3}$$

в базисе $B_0 = \{-, \vee, \cdot\}$. Выражая конъюнкцию через дизъюнкцию и отрицание, получим равносильное выражение:

$$\gamma(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3$$

в базисе $B_1 = \{\vee, -\}$. Наконец, выражая дизъюнкцию через конъюнкцию и отрицание, получим равносильное выражение:

$$\delta(x_1, x_2, x_3) = \overline{\bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3}$$

в базисе $B_2 = \{\cdot, -\}$.

Выше было показано, что каждая из функций: $\vee$, $-$, $\cdot$ выражается через штрих Шеффера $|$ и точно так же через стрелку Пирса $\downarrow$. Сами эти функции, т.е. $|$ и $\downarrow$ выражаются через $\vee, -, \cdot$, и, значит, базис $B_0 = \{\vee, \cdot, -\}$ и базисы $B_| = \{|\}$, $B_\downarrow = \{\downarrow\}$, состоящие всего из одной функции, эквивалентны.

Пример 3.7. Пусть $\alpha(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \vee x_2 \cdot \bar{x}_3$ - выражение в базисе $B_0 = \{-, \vee, \cdot\}$. Найдем равносильное ему выражение, т.е. представляющее ту же самую логическую функцию в базисе $B_| = \{|\}$. Так как $\bar{x}_1 = x_1 | x_1$; $\bar{x}_3 = x_3 | x_3$ и $x \cdot y = (x | y) | (x | y)$, исходя из свойств функции штрих Шеффера, то последовательно получаем:

$$x_2 \cdot \bar{x}_3 = (x_2 | \bar{x}_3) | (x_2 | \bar{x}_3) = (x_2 | (x_3 | x_3)) | (x_2 | (x_3 | x_3))$$

и т.к. $x \vee y = (x | x) | (y | y)$, то

$$\bar{x}_1 \vee (x_2 \cdot \bar{x}_3) = (\bar{x}_1 | \bar{x}_1) | ((x_2 \cdot \bar{x}_3) | (x_2 \cdot \bar{x}_3)) =$$

$$= ((x_1 | x_1) | (x_1 | x_1)) | ((((x_2 | (x_3 | x_3)) | (x_2 | (x_3 | x_3))) | (((x_2 | (x_3 | x_3)) | (x_2 | (x_3 | x_3))))).$$

Пример 3.8. Пусть $\beta(x_1, x_2) = ((x_1 \downarrow x_2) \downarrow x_3) \downarrow x_2$ - выражение в базисе $B_\downarrow \{\downarrow\}$. Найдем эквивалентное ему выражение в базисе $B_0 = \{-, \cdot, \vee\}$. Так как $x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 \vee x_2}$, то последовательно преобразуя исходное выражение, получим $((x_1 \downarrow x_2) \downarrow x_3) \downarrow x_2 = \overline{\left(\overline{\left(\overline{x_1 \vee x_2}\right) \vee x_3}\right) \vee x_2}$ - выражение в базисе B_0.

Далее будем работать с логическими выражениями в базисе $B_0 = \{-, \cdot, \vee\}$. Для этого базиса покажем, что каждое логическое выражение в этом базисе можно привести к очень простому виду, называемому нормальной дизъюнктивной формой. Для определения понятия «дизъюнктивная форма», введем удобное обозначение. Будем писать x^1 вместо x, и x^0 вместо $\bar{x}$. Таким образом, для $a \in \mathrm{B} = \{0, 1\}$:

$$x^a = \begin{cases} x, & \text{если } a = 1 \\ \bar{x}, & \text{если } a = 0 \end{cases}.$$

Выражение $x_1^{a_1}\ldots x_k^{a_k}$, являющееся конъюнкцией (произведением) переменных x_i или их отрицаний, назовем *элементарной конъюнкцией* (или одночленом).

Пример 3.9. $x_1^1x_2^0 = x_1\bar{x}_2$, $x_2^0x_1x_8^0 = \bar{x}_2x_1\bar{x}_8$, $x_1^0x_5^0 = \bar{x}_1\cdot\bar{x}_5$.

При этом можно считать, что все переменные в элементарной конъюнкции различны, т.к. $x\cdot x = x$, $\bar{x}\cdot\bar{x} = \bar{x}$ и $x\cdot\bar{x} = 0$, а $0\cdot y = 0$. Поэтому, например, конъюнкция: $x_1\bar{x}_2x_1\bar{x}_2x_1 = x_1\bar{x}_2$, а конъюнкция: $x_1x_2x_1x_3\bar{x}_2 = x_1x_2\bar{x}_2x_3 = x_1\cdot 0\cdot x_3 = 0$.

Выражение вида $K_1\vee K_2\vee\ldots\vee K_S$, где K_i - элементарная конъюнкция для всех $1\le i\le S$, называется *дизъюнктивной формой (логическим многочленом*).

Пример 3.10. $x_1\vee\bar{x}_1x_3$, $x_3\vee x_2$, $\bar{x}_1x_4x_2\vee x_5\bar{x}_1$ - дизъюнктивные формы.

Если все конъюнкции в выражении $\alpha = K_1\vee\ldots\vee K_S$ попарно различны и ни одна конъюнкция не содержит повторяющихся переменных, то выражение α называется *нормальной дизъюнктивной формой*.

Так как $K\vee 0 = K\vee K = K$, то, удаляя из дизъюнктивной формы $\alpha = K_1\vee\ldots\vee K_S$ конъюнкции, содержащие переменные и их отрицания, и удаляя лишние, т.е. совпадающие с остальными конъюнкциями, можно каждую дизъюнктивную форму привести к нормальному виду.

Пример 3.11. Пусть $\alpha = x_1x_2\bar{x}_3\vee x_1x_2\bar{x}_1\vee\bar{x}_1x_3\vee x_1x_2\bar{x}_3$ - дизъюнктивная форма. Удаляя $x_1x_2\bar{x}_1 = 0$ и последний одночлен $x_1x_2\bar{x}_3$, равный первому, получим нормальную форму: $\alpha = x_1x_2\bar{x}_3\vee\bar{x}_1x_3$.

Каждое логическое выражение в базисе $B_0 = \{-,\vee,\cdot\}$ можно равносильными преобразованиями привести к нормальной дизъюнктивной форме. Этот факт доказывается, исходя из общих соображений, а сейчас проиллюстрируем его на примере.

Пример 3.12. Пусть $\alpha(x_1,x_2,x_3) = \left(\overline{\overline{(x_1\vee x_2)}\vee\overline{(x_3\vee\bar{x}_1)}}\right)\cdot x_1$. Приведем это выражение к нормальной дизъюнктивной форме:

$$\alpha = \left(\overline{\overline{(x_1\vee x_2)}\vee\overline{(x_3\vee\bar{x}_1)}}\right)\cdot x_1 = \left(\overline{\overline{x_1\vee x_2}}\right)\cdot\left(\overline{\overline{x_3\vee\bar{x}_1}}\right)\cdot x_1 =$$
$$= (x_1\vee x_2)\cdot(x_3\vee\bar{x}_1)\cdot x_1 = (x_1\vee x_2)\cdot(x_3\cdot x_1\vee\bar{x}_1\cdot x_1) =$$
$$= (x_1\vee x_2)(x_3\cdot x_1\vee 0) = (x_1\vee x_2)(x_1\cdot x_3) = x_1\cdot x_1x_3\vee x_2x_1x_3 =$$
$$= x_1x_3\vee x_1x_2x_3 = x_1x_3.$$

До сих пор все введенные булевы функции удалось представить логическим выражением в базисе $B_0 = \{-,\ \cdot,\ \vee\}$. Однако, нет заранее уверенности, что любую булеву функцию можно представить в виде логического выражения в этом базисе.

Далее покажем, что на самом деле любую булеву функцию $f(x_1,\ldots,x_n)$ от n переменных можно представить некоторой нормальной дизъюнктивной формой специального вида.

Для того, чтобы доказать это утверждение, введем дополнительные понятия и обозначения. Пусть $y = f(x) = f(x_1,\ldots,x_n)$ - булева функция от n переменных. Точка $a \in B^n$ называется единичной точкой функции f, если $f(a)=1$, т.е. на этом наборе: $a=(a_1,\dots,a_n)$ функция принимает значение 1. Совокупность всех единичных точек называется *носителем функции* f и обозначается $\sup f$:

$$\sup f=\{a \in \mathrm{B}^n \mid f(a)=1\}.$$

Пример 3.13. Пусть функция $f(x_1,x_2,x_3)$ представлена таблицей

	x_1	x_2	x_3	f
	0	0	0	0
*	0	0	1	1
	0	1	0	0
*	0	1	1	1
	1	0	0	0
	1	0	1	0
*	1	1	0	1
	1	1	1	0

Тогда ее носитель содержит три точки (набора), обозначенные звездочкой:

$$\sup f=\{(0,0,1);(0,1,1);(1,1,0)\}.$$

Пусть теперь $a \in \mathrm{B}^n$ - какой-нибудь двоичный набор длины n,

$$a=(a_1,a_2,\dots,a_n), \quad a_i=\begin{cases}0\\1\end{cases}.$$

Элементарной конъюнкцией, соответствующей этому набору, называется конъюнкция, обозначаемая $K_a=x^a$ и определяемая равенством:

$$K_a(x)=x^a=(x_1,\dots,x_n)^{(a_1,\dots,a_n)}=x_1^{a_1}\cdot x_2^{a_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{a_n}$$

Пример 3.14. Пусть $n=3$, $a_1=(1,0,1)$, $a_2=(0,1,0)$, $a_3=(0,0,1)$ тогда

$$K_{a_1}=x^{a_1}=x_1^1x_2^0x_3^1=x_1\bar{x}_2x_3,$$

$$K_{a_2}=x^{a_2}=x_1^0x_2^1x_3^0=\bar{x}_1x_2\bar{x}_3,\quad K_{a_3}=x^{a_3}=x_1^0x_2^0x_3^1=\bar{x}_1\bar{x}_2x_3.$$

Элементарная конъюнкция $K_a(x)=x^a$, соответствующая точке a, обладает важным свойством:

$$K_a(c)=\begin{cases}1, & \text{если } c=a\\0, & \text{если } c\neq a\end{cases}.$$

Таким образом, $K_a(x)$ принимает значение 1 точно на одном наборе значений переменных x, а именно при $x=a$, т.е. $x_1=a_1,\dots,x_n=a_n$. На всех других наборах значений переменных $K_a(x)$ принимает значение 0. Докажем это утверждение.

По определению

$$K_a(x)=x_1^{a_1}\dots x_n^{a_n},$$

где

$$x_i^{a_i}=\begin{cases}x_i, & \text{если } a_i=1\\\bar{x}_i, & \text{если } a_i=0\end{cases}.$$

Конъюнкция $x_1^{a_1}\ldots x_n^{a_n}$ может быть равна 1 тогда и только тогда, когда каждый ее член $x_i^{a_i}$ принимает значение 1. Но $x_i^{a_i}=1$ тогда и только тогда, когда $x_i=a_i$, т.к. $1^1=1$, $0^0=\overline{0}=1$, но $1^0=\overline{1}=0$ и $0^1=0$. Тем самым утверждение доказано.

Пример 3.15. Пусть $n=3$, $a=(0,1,0)$, тогда $K_a=x_1^0x_2^1x_3^0=\overline{x}_1x_2\overline{x}_3$. Ясно, что при $x=a$, $\overline{x}_1x_2\overline{x}_3=\overline{0}\cdot 1\cdot\overline{0}=1\cdot 1\cdot 1=1$. Если же $x\neq a$, например, $x=(1,1,0)$, то $\overline{x}_1x_2\overline{x}_3=\overline{1}\cdot 1\cdot\overline{0}=0\cdot 1\cdot 1=0$.

Пусть теперь $f(x)=f(x_1,\ldots,x_n)$ - булева функция от n переменных, $\sup f=\{a_1,\ldots,a_m\}$ - ее носитель, т.е. совокупность всех единичных точек этой функции. Образуем для каждой такой единичной точки a_i соответствующую элементарную конъюнкцию $K_{a_i}=x^{a_i}$ и образуем из этих конъюнкций дизъюнкцию:

$$\alpha_f(x)=K_{a_1}\vee K_{a_2}\vee\ldots\vee K_{a_m}=x^{a_1}\vee\ldots\vee x^{a_m}.$$

Полученное выражение будет, конечно, дизъюнктивной формой, т.к. конъюнкции, соответствующие различным точкам a_i, различны.

Покажем, что α_f задает исходную функцию f. Пусть c - любой набор значений переменных x, т.е. $x=c\in\mathrm{B}^n$. Если c - единичная точка функции f, т.е. $f(c)=1$, то $c\in\sup f$ и, значит, c совпадает с одним из $a_i, 1\le i\le m$. Пусть $c=a_j$ для некоторого j. Тогда по доказанному выше соответствующая конъюнкция $K_{a_j}(x)$ на этом наборе будет равна 1, т.е. $K_{a_j}(c)=1$, а т.к. дизъюнкция равна 1, если хотя бы один ее член равен 1, то и вся дизъюнкция α_f на этом наборе будет принимать значение равное 1:

$$c\in\sup f\Rightarrow\alpha(c)=K_{a_j}(c)=1.$$

Пусть теперь $f(c)=0$, тогда $c\notin\sup f$, и, значит, $c\neq a_j$ для всех $1\le j\le m$. Но тогда каждая конъюнкция на этом наборе равна 0, $K_{a_j}(c)=c^{a_j}=0$, для всех $1\le j\le m$. Так как все члены дизъюнкции α_f равны 0 на наборе c, то и сама дизъюнкция α_f равна 0 на этом же наборе:

$$c\notin\sup f\Rightarrow f(c)=0=\alpha_f(c).$$

Итак, для любого $c\in\mathrm{B}^n$

$$f(c)=\alpha(c).$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3.1. - Теорема о полноте базиса B_0. Каждая булева функция $f\neq 0$, от n переменных, представима в нормальной дизъюнктивной форме $\alpha_f(x)$:

$$f(x)=\alpha_f(x)=\bigvee_{a\in\sup f}x^a=\bigvee_{f(a_1,\ldots,a_n)=1}x_1^{a_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{a_n}.$$

Пример 3.16. Пусть $n=3$. Введем мажоритарную функцию (функцию голосования по большинству):

x_1	x_2	x_3	$maj(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Ее носитель $\sup maj$ состоит из четырех точек:

$$a_1 = (0,1,1);\ a_2 = (1,0,1);\ a_3 = (1,1,0);\ a_4 = (1,1,1).$$

Ясно, что $K_{a_1} = x_1^0 x_2^1 x_3^1 = \bar{x}_1 x_2 x_3$; $K_{a_2} = x_1^1 x_2^0 x_3^1 = x_1 \bar{x}_2 x_3$; $K_{a_3} = x_1^1 x_2^1 x_3^0 = x_1 x_2 \bar{x}_3$; $K_{a_4} = x_1^1 x_2^1 x_3^1 = x_1 x_2 x_3$. Тогда функция f задается следующим выражением:

$$\alpha_f = K_{a_1} \vee K_{a_2} \vee K_{a_3} \vee K_{a_4} = \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3 .$$

Учитывая доказанную теорему, говорят, что базис $B_0 = \{\cdot, -, \vee\}$ полный, т.к. выражения в этом базисе описывают все булевы функции. Из доказанной теоремы и из того, что базис B_0 эквивалентен базисам $B_1 = \{\vee, -\}$, $B_2 = \{\cdot, -\}$, $B_| = \{|\}$, $B_\downarrow = \{\downarrow\}$, следует, что все эти базисы также полные, т.е. каждая булева функция представима в виде логического выражения в любом из этих базисов.

Форма α_f, которая строится по доказанной теореме, называется *совершенной нормальной дизъюнктивной формой.* Она обладает тем свойством, что каждая элементарная конъюнкция, входящая в нее, содержит все n переменных, причем, каждая переменная входит в конъюнкцию в точности один раз либо сама, либо с отрицанием.

Следствие. Каждое выражение в базисе $B_0 = \{-, \cdot, \vee\}$ можно привести к совершенной нормальной дизъюнктивной форме.

Доказательство. Если β - произвольное выражение в базисе B_0, то оно задает некоторую функцию f_β. Согласно теореме о полноте B_0 для этой функции существует совершенная нормальная дизъюнктивная форма α_f. Поэтому получаем:

$$\beta(x) = f_\beta(x) = \alpha_f(x) \text{ для всех } x \in \mathrm{B}^n .$$

Таким образом, формы β и α_f эквивалентны. Следствие тем самым доказано.

Все рассмотренные до сих пор базисы были полными. Проведем теперь пример неполного базиса. Пусть $B_5 = \{\vee, \cdot\}$, т.е. базис, состоящий из дизъюнкции и конъюнкции, но не содержащий отрицания. Докажем, что этот базис не полон, т.е. не любую функцию можно представить в этом базисе. Чтобы доказать это, сформулируем важное свойство выражений в этом базисе.

Каждое выражение $\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ в базисе $\{\vee, \cdot\}$ принимает значение 1 на наборе $1 = (1,1,\ldots,1)$, т.е.

$$\alpha(1,1,\ldots,1) = 1 .$$

Доказательство. Так как выражение α строится из переменных и с использованием только знаков операций: $\cdot, \vee$, а обе эти операции обладают свойством сохранения 1, т.е. $1 \vee 1 = 1$ и $1 \cdot 1 = 1$, то и все выражения $\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ также принимает значение 1 при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$.

Пример 3.17. $\alpha(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2) \cdot (x_3 \vee x_1 x_2)$ - выражение в базисе $B_5 = \{\vee, \cdot\}$. Ясно, что $\alpha(1,1,1) = (1 \vee 1) \cdot (1 \vee 1 \cdot 1) = 1 \cdot (1 \vee 1) = 1 \cdot 1 = 1$. Из сформулированного свойства выражений в базисе B_5 следует его неполнота, т.к. например, функция отрицания $\bar{x}$ не сохраняет 1, ибо $\bar{1} = 0 \neq 1$, а значит, эта функция не может быть представлена выражением в этом базисе.

Аналитическое представление функций алгебры логики

Как указывалось ранее, имеется два способа задания логических функций: табличный и аналитический. При табличном способе каждому набору значений переменных в таблице истинности указывается значение самой логической функции. Этот способ нагляден и может быть применен для записи функций от любого количества переменных. Однако при анализе свойств функций алгебры логики такая запись не является компактной. Проще выглядит аналитическая запись в виде формул.

Рассмотрим фиксированный набор переменных $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, на котором задана функция алгебры логики. Так как любая переменная $x_i \in \{0,1\}$, то набор значений переменных фактически представляет собой некоторое двоичное число. Предположим, что номером набора будет произвольное двоичное число *i*, получаемое следующим образом:

$$i = 2^{n-1} x_1 + 2^{n-2} x_2 + \ldots + x_n .$$

Пусть имеется функция $\Phi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$\Phi_i = \begin{cases} 0, \text{ если номер набора равен } i, \\ 1, \text{ если номер набора не равен } i. \end{cases}$$

Функция Φ_i называют *термом*.

Дизъюнктивный терм (макстерм) – терм, связывающий все переменные, представленные в прямой или инверсной форме, знаком дизъюнкции (иногда в литературе используется термин «конституэнта нуля»).

Пример 3.18. $\Phi_8 = \bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4$; $\Phi_1 = x_1 \vee \bar{x}_2$.

Конъюнктивный терм (минтерм) – терм, связывающий все переменные, представленные в прямой или инверсной форме, знаком конъюнкции (иногда в литературе используется термин «конституэнта единицы»).

Пусть имеется функция $F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$F_i = \begin{cases} 1, \text{ если номер набора равен } i, \\ 0, \text{ если номер набора не равен } i. \end{cases}$$

Пример 3.19. $F_{15} = x_1x_2x_3x_4$; $F_0 = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$.

Ранг терма r определяется количеством переменных, входящих в данный терм.

Пример 3.20. Для минтерма $F_{10} = \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4\bar{x}_5 = \bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3 \wedge x_4 \wedge \bar{x}_5$ ранг $r = 5$, для макстерма $\Phi_5 = \bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 = \bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3$ ранг $r = 3$.

На основании вышесказанного сформулируем ряд теорем и положений (без доказательств).

Теорема 3.2. Любая таблично заданная функция алгебры логики (ФАЛ) может быть представлена аналитически в виде:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_1 + F_2 + \ldots + F_k = F_1 \vee F_2 \vee \ldots \vee F_k = \bigvee_1 F_i \ , \qquad (3.1)$$

где k – количество двоичных наборов (где F =1), i – номера наборов, на которых функция (f) равна 1; $+ \text{ или } \vee$ - знаки, обозначающие операцию дизъюнкции, $\bigvee_1$ - знак дизъюнкции, объединяющий все термы F_i, равные единице. Запись (3.1) называется *объединением термов (минтермов)*.

Нормальная дизъюнктивная форма (НДФ) – объединение термов, включающее минтермы переменного ранга.

Количество всех термов, входящих в запись (3.1), равно количеству “единичных строк” таблицы истинности (количеству «единичных значений» ФАЛ).

Теорема 3.3. Любая таблично заданная функция алгебры логики (ФАЛ) может быть представлена аналитически в виде:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Phi_1 \,\&\, \Phi_2 \,\&\ldots\&\, \Phi_k = \Phi_1 \wedge \Phi_2 \wedge \ldots \wedge \Phi_k = \bigwedge_0 \Phi_i \ , \qquad (3.2)$$

где k – количество двоичных наборов (где Φ =0), i – номера наборов, на которых функция (f) равна 0; $\& \text{ или } \wedge$ - знаки, обозначающие операцию конъюнкции, $\bigwedge_0$ - знак конъюнкции, объединяющий (связывающий) все термы Φ_i, равные нулю. Запись (3.2) называется *объединением (соединением) термов (макстермов)*.

Нормальная конъюнктивная форма (НКФ) – объединение термов, включающее макстермы переменного ранга.

Количество всех термов, входящих в запись (3.2), равно количеству “нулевых строк” таблицы истинности (количеству «нулевых значений» ФАЛ).

Нормальные (дизъюнктивная и конъюнктивная) формы не дают однозначного представления функции алгебры логики. Подобное представление возможно только при рассмотрении и использовании *совершенных нормальных форм*.

Введем обозначения: $x^1 = x$, $x^0 = \bar{x}$. Тогда в общем виде переменная может быть задана (как ранее утверждалось) в виде некоторой функции:

$$x^a = \begin{cases} x, & \text{если } a = 1 \\ \bar{x}, & \text{если } a = 0 \end{cases},$$

при этом

$$x^a = ax + \bar{x}\bar{a},$$

где a - двоичная переменная, $a \in \mathrm{B} = \{0,1\}$.

Рассмотрим конъюнкцию вида $x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}$, где $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ - двоичный набор; число таких наборов равно 2^n, т.е.

000……….0000
000……….0001
000……….0010
………………..
111……….1110
111……….1111 .

Если задать всем a_i значения 0 и 1, то получим, например, дизъюнкцию вида:

$$\bigvee_1 x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_m} = x_1^0 x_2^0 \dots x_n^0 \vee x_1^0 x_2^0 \dots x_n^1 \vee \dots\dots\dots \vee x_1^1 x_2^1 \dots x_n^0 \vee x_1^1 x_2^1 \dots x_n^1,$$

где $\bigvee_1$ – символ обобщенной дизъюнкции по единичным строкам.

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 3.4. Любая ФАЛ может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) &= \bigvee_{a_1,\dots,a_n} x_1^{a_1} \wedge x_2^{a_2} \wedge \dots \wedge x_m^{a_m} \wedge f(a_1, a_2, \dots, a_m, x_{m+1}, \dots, x_n) = \\ &= \bigvee_{a_1,\dots,a_n} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_m^{a_m} \bullet f(a_1, a_2, \dots, a_m, x_{m+1}, \dots, x_n) \end{aligned}, \quad (3.3)$$

где $m \le n$, а дизъюнкция берётся по всем возможным (2^m) наборам значений переменных $x_1, x_2, \dots, x_m$.

Равенство (3.3) называется *разложением функции алгебры логики (булевой функции) по m переменным* $x_1, x_2, \dots, x_m$.

Пример 3.21. При *n=4, m=2* разложение (3.3) имеет вид:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot f(0,0,x_3,x_4) \vee \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot f(0,1,x_3,x_4) \vee \\ \vee x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot f(1,0,x_3,x_4) \vee x_1 \cdot x_2 \cdot f(1,1,x_3,x_4) \end{aligned}.$$

При *m=1* из (3.3) получаем разложение логической функции по одной переменной:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bar{x}_1 \cdot f(0, x_2, \dots, x_n) \vee x_1 \cdot f(1, x_2, \dots, x_n). \quad (3.4)$$

При *m=n* из (3.3) получаем разложение логической функции по всем *n* переменным (*m=n*):

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \bigvee_{\{(\sigma_1 \dots, \sigma_n) \mid f(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = 1\}} x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge \dots \wedge x_n^{\sigma_n} = \\ &= \bigvee_{\{(\sigma_1 \dots, \sigma_n) \mid f(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = 1\}} x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\sigma_n} \end{aligned}, \quad (3.5)$$

где дизъюнкция берётся по всем наборам $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, на которых логическая функция $f(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = 1$.

Разложение (3.5) называется *совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ)* логической функции $f(x_1, \dots, x_n)$. СДНФ функции f содержит ровно столько конъюнкций, сколько единиц в таблице истинности функции f;

каждой «единице» функции на наборе $(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$ соответствует конъюнкция (элементарная конъюнкция) всех переменных, в которой x_i взято с отрицанием, если $\sigma_i = 0$, и без отрицания, если $\sigma_i = 1$. Отсюда, существует взаимно однозначное соответствие между таблицей истинности логической функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ и её СДНФ.

Вывод. Всякая логическая функция (функция алгебры логики, булева или переключательная функция), кроме «*константы 0*», имеет *единственную СДНФ*. Процесс (правило) получения (построения) СДНФ – запись функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ по «единицам».

Формулы, содержащие, кроме переменных (и, разумеется, скобок), только знаки функций дизъюнкции, конъюнкции и отрицания, называются *булевыми формулами*. Всякая логическая функция может быть представлена булевой формулой, т.е. как суперпозиция конъюнкции, дизъюнкции и отрицания.

Далее, по определенной аналогии с понятием «СДНФ», введем понятие *совершенная конъюнктивная нормальная форма*.

Имеем:

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \bigwedge_{\{(\sigma_1\ldots,\sigma_n)\,|\,f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)=0\}} x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n} , \qquad (3.6)$$

где конъюнкция берётся по всем наборам $(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$, на которых логическая функция $f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)=0$.

Разложение (3.6) называется *совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ)* логической функции $f(x_1,\ldots,x_n)$. СКНФ функции *f* содержит ровно столько дизъюнкций, сколько нулей в таблице истинности функции *f*; каждому «нулю» функции на наборе $(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$ соответствует дизъюнкция (элементарная дизъюнкция) всех переменных, в которой x_i взято с отрицанием, если $\sigma_i = 1$, и без отрицания, если $\sigma_i = 0$. Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между таблицей истинности логической функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ и её СКНФ.

Вывод. Всякая логическая функция (функция алгебры логики, булева или переключательная функция), кроме «*константы 1*», имеет *единственную СКНФ*. Процесс (правило) получения (построения) СКНФ – запись функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ по «нулям».

Совершенная нормальная форма (СДНФ и СКНФ) отличается от нормальной формы (НФ) тем, что содержит термы максимального ранга и дает однозначное представление логической функции. В СДНФ – минтермы, в СКНФ - макстермы.

3.5. Основные классы булевых функций

Рассмотрим основные классы булевых функций.

1. *Класс* T_0 *- класс функций, сохраняющих* 0*:*

$$f(x_1,\ldots,x_n)\in T_0 \Leftrightarrow f(0,0,\ldots,0)=0.$$

Этот класс содержит все функции, принимающие значение 0 на нулевом наборе.

Пример 3.22. Функции: $x_1\cdot x_2; x_1\vee x_2; x_1\oplus x_2$, очевидно, принадлежат классу T_0. Функции: $\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2; x_1\to x_2; x_1 \mid x_2$ не принадлежат этому классу, т.к. $\bar{0}\cdot\bar{0}=1\cdot 1=1\neq 0, (0\to 0)=1, (0\mid 0)=1$.

2. *Класс* T_1 - *класс функций, сохраняющих* 1.

$$f(x_1,\ldots,x_n)\in T_1 \Leftrightarrow f(1,1,\ldots,1)=1.$$

Этот класс содержит все те функции (и только те), которые принимают значение 1 на единичном наборе.

Пример 3.23. Функции: $x_1\cdot x_2, x_1\vee x_2, x_1\vee\bar{x}_2, x_1\sim x_2\in T_1$, но функции: $x_1\oplus x_2, x_1\downarrow x_2\notin T_1$, т.к. $1\oplus 1=0, 1\downarrow 1=0$.

3. *Класс* S - *самодвойственных функций*. Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)$ - булева функция. Двойственной к этой функции называется функция

$$f^*(x_1,\ldots,x_n)=\overline{f(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_n)}.$$

Пример 3.24. Пусть $f(x_1,x_2,x_3)=x_1\vee x_2\bar{x}_3$. Тогда

$$f^*(x_1,x_2,x_3)=\overline{\bar{x}_1\vee(\bar{x}_2\cdot\bar{\bar{x}}_3)}=\bar{\bar{x}}_1\cdot\left(\overline{\bar{x}_2\cdot x_3}\right)=$$
$$=x_1\cdot(\bar{\bar{x}}_2\vee\bar{x}_3)=x_1\cdot(x_2\vee\bar{x}_3)=x_1x_2\vee x_1\bar{x}_3.$$

Если функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ задана выражением α в базисе $B=\{0,1,\vee,-,\bullet\}$, то для получения выражения α^*, представляющего двойственную функцию, достаточно заменить всюду в этом выражении «0» на «1», «1» на «0», «$\vee$» на «$\bullet$» и «$\bullet$» на «$\vee$».

Пример 3.25. Для функции из предыдущего примера получаем сразу:

$$f^*(x_1,x_2,x_3)=x_1\vee x_2\bar{x}_3=x_1(x_2\vee\bar{x}_3)=x_1x_2\vee x_1\bar{x}_3.$$

Функция f называется самодвойственной, если

$$f(x_1,\ldots,x_n)=f^*(x_1,\ldots,x_n),$$

т.е. функция совпадает с двойственной к ней функцией.

Пример 3.26. Пусть $f=x_1x_2\vee x_1x_3\vee x_2x_3$. Тогда

$$f^*=(x_1\vee x_2)\cdot(x_1\vee x_3)\cdot(x_2\vee x_3)=(x_1\vee x_2x_3)(x_2\vee x_3)=$$
$$=x_1x_2\vee x_2x_3\vee x_1x_3=f$$

Таким образом, f - самодвойственная функция.

4. *Класс* M - *монотонных функций.* Будем считать, что набор a предшествует набору c и писать $a\le c$, если $a_i\le c_i$ для всех $1\le i\le n$. При этом конечно, считается, что $0<1$. Например, $(0,1,0)\le(1,1,0)$, но $(1,0,1)\ge(0,1,1)$.

Функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ называется монотонной, если из $a\le c$ следует, что $f(a)\le f(c)$.

Пример 3.27. Функции: x, $x_1\cdot x_2$, $x_1\vee x_2\in M$, но функции: $x_1\oplus x_2$, $x_1\downarrow x_2\notin M$, т.к. $(0,1)\le(1,1)$, но $0\oplus 1=1$, а $(1\oplus 1)=0$, $(0,0)\le(1,1)$, но $0\downarrow 0=1$, а $1\downarrow 1=0$.

Каждая монотонная функция f может быть представлена выражением в базисе $B_5 = \{\vee, \cdot\}$

Верно и обратное. Каждое выражение из этого базиса задает монотонную функцию.

Пример 3.28. Функции $x_1 \vee x_2 x_3$, $x_1 x_2 \vee x_3$, $x_1 x_2 x_3$ - монотонны.

5. *Класс* L *- линейных функций.* Этот класс состоит из линейных функций $f(x_1, \ldots, x_n)$, имеющих вид

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus \ldots \oplus a_n x_n,$$

где $\oplus$ - сложение по модулю 2, а коэффициенты a_i - двоичные числа, $a_i = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$.

Если $a_i = 0$, то член $a_i x_i$ можно просто не выписывать, т.к. $0 \cdot x = 0$ и $y \oplus 0 = y$. Если же $a_i = 1$, можно вместо $a_i x_i$, т.е. $1 \cdot x_i$, писать просто x_i.

Пример 3.29. $\bar{x} = 1 \oplus x$, $x_1 \oplus x_2$, $1 \oplus x_3 \oplus x_7$, $x_1 \oplus x_3 \oplus x_5$ - линейные функции. Функция $x_1 \cdot x_2$ - нелинейная функций.

3.6. Полнота базисов булевых функций

Рассмотрим ряд положений, играющих важную роль в алгебре логики, логическом анализе.

Теорема 3.5. - Теорема (полином) И.И. Жегалкина. Любая булева функция может быть представлена полиномом (многочленом) вида:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus \ldots \oplus a_n x_n \oplus a_{n+1} x_1 x_2 \oplus a_{n+2} x_1 x_3 \oplus \ldots \oplus a_{n+m} x_1 x_2 \ldots x_n,$$

где $\oplus$ - сложение по модулю 2, а коэффициенты a_i - двоичные числа, $a_i = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$.

Теорема И.И.Жегалкина дает возможность представить любую логическую функцию (булеву функцию) или функцию алгебры логики в виде полиномов разной степени.

Рассмотренные ранее (пункт 3.5) основные классы булевых функций (функций алгебры логики) обладают замечательным свойством: любая логическая функция, полученная с помощью операции суперпозиции и подстановки из функций одного класса обязательно будет принадлежать этому же классу.

Базисом называется полная система булевых функций (БФ) или функций алгебры логики (ФАЛ), с помощью которой любая ФАЛ (БФ) может быть представлена суперпозицией исходных логических функций.

На основе приведенных и рассмотренных выше понятий (пункты 3.4 и 3.5) можно сформулировать основную теорему о полноте набора булевых функций.

Пусть $B = \{f_1^{n_1}, f_2^{n_2}, \ldots, f_k^{n_k}\}$ - набор булевых функций, выбираемых в качестве базисных. Верхний индекс n_j в обозначении $f_j^{n_j}$ равен числу переменных, от которых зависит функция. С помощью переменных и символов $f_j^{n_j}$ можно строить логические выражения в базисе B.

Аналогично, как и для всех базисов, рассмотренных выше, можно определить понятие логического выражения индуктивно следующим образом:

1. Каждая переменная x_i, $i = 1, 2, \ldots$ - есть логическое выражение.

2. Если $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ - уже построенные логические выражения, то $f_1^{n_1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_1})$; $f_2^{n_2}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_2})$, …, $f_k^{n_k}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_k})$ - также логические выражения.

3. Других выражений нет.

Если исходные функции $f_j^{n_j}$ заданы, например, таблицей истинности, то каждое выражение α в базисе B будет задавать некоторую булеву функцию. Основной вопрос состоит в следующем: Имея заданный базис B, можно ли для любой функции f найти логическое выражение, задающее эту функцию. Если ответ на этот вопрос утвердительный, то такой базис называтеся полным. Теорема о полноте позволяет решить в принципе этот вопрос для любого конечного базиса B.

Теорема 3.6. - Теорема Поста о полноте (Теорема Поста – С.В. Яблонского).

Для того, чтобы базис B (система ФАЛ) был полным, необходимо и достаточно, чтобы он содержал:

1) хотя бы одну функцию, не сохраняющую 0, т.е. $\exists f \in B, f \notin T_0$;

2) хотя бы одну функцию, не сохраняющую 1, т.е. $\exists f \in B, f \notin T_1$;

3) хотя бы одну несамодвойственную функцию: $\exists f \in B, f \notin S$;

4) хотя бы одну немонотонную функцию: $\exists f \in B, f \notin \mathrm{M}$;

5) хотя бы одну нелинейную функцию: $\exists f \in B, f \notin L$.

Итак, кратко, с помощью логической символики теорему о полноте можно записать следующим образом.

Пусть имеем базис - B. Тогда:

$$\text{Базис } B \text{ - полный } \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 \in B,\ f_1 \notin T_0,\ f_2 \notin T_1,\ f_3 \notin S,\ f_4 \notin \mathrm{M},\ f_5 \notin L.$$

Замечание. Конечно, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 - не обязательно должны быть различными функциями. Ранее было показано, что базис $B_{\downarrow} = \{\downarrow\}$ - полный, т.е.

$$\downarrow \notin T_0 \cup T_1 \cup \mathrm{M} \cup L \cup S,$$

где $\cup$ - символ объединения множеств, а $T_0, T_1, \mathrm{M}, L, S$ - соответствующие множества (классы) логических функций (БФ, ФАЛ).

Базис минимальный, если удаление хотя бы одной функции превращает систему БФ (ФАЛ) в неполную систему логических функций.

3.7. Контрольные вопросы

1. Булевы функции (БФ). Определение. Таблицы истинности. Примеры.
2. Виды булевых функций: одной и двух переменных. Примеры.
3. Простые и сложные булевы функции. Способы задания булевых функций: табличный и аналитический (формульное представление БФ). Примеры.

4. Булевы функции *n* переменных. Примеры.
5. Равносильные представления булевых функций. Основные эквивалентности логических выражений. Примеры.
6. Логические функции. Функции алгебры логики. Логические выражения. Примеры.
7. Понятие «базис». Разные базисы. Примеры.
8. Конъюнктивная и дизъюнктивная формы. Примеры.
9. Логическая функция. Булева функция. Носитель функции. Примеры.
10. Элементарная конъюнкция. Элементарная дизъюнкция. Примеры.
11. Базис. Полнота базиса. Определение.
12. Нормальные формы: дизъюнктивная и конъюнктивная. Примеры.
13. Термы. Определение. Дизъюнктивный и конъюнктивный термы. Макстерм и минтерм. Примеры.
14. Конституэнта нуля и конституэнта единицы. Примеры.
15. Ранг терма. Определение. Примеры.
16. Совершенные нормальные формы: дизъюнктивная и конъюнктивная. Описание процесса получения этих форм. Примеры.
17. Другие типы нормальных форм: сокращенная, тупиковая, минимальная, Примеры.
18. Основные классы булевых функций. Определение, запись. Примеры.
19. Полнота базисов булевых функций. Полином И.И. Жегалкина. Теорема Поста - С.В. Яблонского о полноте. Определения. Примеры.
20. Базис. Минимальный базис. Примеры.

Литература

1. Андерсон Джеймс А. Дискретная математика и комбинаторика: Пер. с англ. – М.: ИД “Вильямс”, 2003. – 960 с.

2. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов: Учебник для вузов.- СПб.: Питер, 2009.- 384 с.

3. Кузнецов О.П. Дискретная математика для инженеров.- СПб.-М.-Краснодар: Лань, 2005. – 420 с.

4. Васильев В.И., Касимов Ю.Ф. Дискретная математика. Часть 1. Основы математического языка и логики: Учебное пособие. - М.: МГТУ ГА, 1995. – 108 с.

5. Васильев В.И., Касимов Ю.Ф. Дискретная математика. Часть 2. Элементы теории множеств. Бинарные отношения и их свойства: Учебное пособие. - М.: МГТУ ГА, 1995. – 228 с.

6. Васильев В.И., Касимов Ю.Ф. Дискретная математика. Часть 3. Алгебраические системы: Учебное пособие. - М.: МГТУ ГА, 1995. – 128 с.

7. Самохин А.В. Математическая логика и теория алгоритмов: Учебное пособие. - М.: МГТУ ГА, 2003. – 236 с.

8.Верещагин Н.К., Шень А. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 1. Начала теории множеств. - М.: МЦНМО, 1999. - 128 с.

9. Верещагин Н.К., Шень А. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 2. Языки и исчисления. - М.: МЦНМО, 2000. – 288 с.

ISBN 978-5-86311-989-2

9 785863 119892