

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА**

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ  
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ» (МГТУ ГА)**

---

**Кафедра технической механики и инженерной графики  
С.П. Борисов, Т.Н. Хромых**

## **СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ**

### **ПОСОБИЕ**

**по проведению практических занятий**

*для студентов II курса  
направления 25.03.01  
всех форм обучения*

**Москва - 2015**

ББК 605

Б82

Рецензент д-р техн. наук Ю.В. Петров

Борисов С.П., Хромых Т.Н.

Б82           Сопrotивление материалов: пособие по проведению практических занятий. - М.: МГТУ ГА, 2015. - 16 с.

Данное пособие издается в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Сопrotивление материалов» по Учебному плану для студентов II курса направления 25.03.01 всех форм обучения.

Рассмотрено и одобрено на заседаниях кафедры 28.04.2015 г. и методического совета 12.05.2015 г.

## 1 Введение

Пособие предназначено для студентов при их самостоятельной подготовке к практическим занятиям и при выполнении контрольных домашних заданий по курсу «Соппротивление материалов» в соответствии с учебной программой курса. В пособии рассмотрены методики построения эпюр внутренних силовых факторов при растяжении-сжатии, кручении и поперечном изгибе. Определение внутренних силовых факторов является необходимым элементом расчетов на прочность и жесткость. В зависимости от того, сколько и какие внутренние силовые факторы возникают в поперечном сечении, квалифицируют и виды нагружения.

## 2 Алгоритм определения внутренних силовых факторов

Эпюрой внутреннего силового фактора называют график, изображающий закон изменения рассматриваемого силового фактора по длине стержня. Для построения эпюр внутренних силовых факторов необходимо:

1. Определить все внешние силовые факторы, действующие на рассматриваемый стержень, включая реакции связей.
2. Выбрать расчетную схему обычно в виде осевой линии стержня, на которую перенести все силы.
3. Разбить расчетную схему на участки. Границами участков являются места приложения сосредоточенных сил и моментов или изменения закона распределения нагрузок, заданных интенсивностью  $q$ .
4. Для каждого участка методом сечений определить внутренние силовые факторы, записав математически законы изменения силовых факторов по длине участка.
5. Выбрать оси отсчета в виде линий, параллельных оси стержня. По математическим выражениям для законов изменения внутренних силовых факторов с учетом специально вводимых правил знаков построить графики, изображающие изменение внутренних силовых факторов по длине стержня, т.е. эпюры.

Напомним метод сечения. Для определения внутренних силовых факторов этим методом необходимо:

1. **Рассечь** стержень в рассматриваемом сечении на две части.....(Р).
2. Одну из частей (любую) **отбросить**.....(О).
3. **Заменить** действие отброшенной части на оставшуюся внутренними силовыми факторами.....(З).
4. Составить условия равновесия рассматриваемой части стержня (**уравновесить**).....(У).

Записанный алгоритм для запоминания можно сформулировать как правило **РОЗУ** по первым буквам слов, обозначающих необходимые действия.

Рассмотрим примеры построения эпюр внутренних силовых факторов при растяжении-сжатии, кручении и изгибе.

### 3 Построение эпюр внутренних силовых факторов

#### 3.1 Построение эпюр продольных сил

##### Пример

Для заданного стержня построить эпюру продольных сил (рис. 1а).

Решение.

1. В соответствии с общим алгоритмом прежде всего определяем все внешние силовые факторы, действующие на рассматриваемый стержень (рис. 1а).

Активные силы заданы. Определим реакции связей. В рассматриваемом примере связью является заделка. В заделке при плоской системе сил в общем случае возникают три реакции – две силы и момент. Однако, в данном примере активные силы приложены на оси стержня и действуют вдоль оси, представляющей прямую линию. равнодействующая активных сил направлена вдоль этой прямой и может быть уравновешена силой, действующей также вдоль этой прямой. Таким образом, возникает только одна реакция, направленная вдоль оси стержня. Выбираем систему координат  $YOZ$ , изображаем реакцию связи  $R_A^Z$ , и так как направление ее неизвестно, предварительно направляем ее слева направо. Величину и истинное направление реакции  $R_A^Z$  определяем из уравнения статики (рис. 1а):

$$\Sigma F_Z = 0; R_A^Z - P_3 - P_2 + P_1 = R_A^Z - 7 - 3 + 5 = 0; R_A^Z = 5 \text{ кН.}$$

Если при решении уравнения результат получают со знаком «минус», то направление реакции  $R_A^Z$  изменяют на обратное (влево от т. А).

2. Так как в рассматриваемом примере все силы приложены на оси и действуют вдоль нее, то уточнять расчетную схему не следует.

3. Разбиваем стержни на участки, проводя вертикальные линии через точки приложения сосредоточенных сил. Получаем три участка  $AB$ ,  $BC$  и  $CD$ .

4. На каждом участке методом сечений определяем внутренние силовые факторы.

Рассмотрим участок  $AB$ . Рассечем стержень на две части поперечным сечением на расстоянии  $z$  от начала координат (от т. А) и правую часть отбросим (рис. 1б). Абсцисса  $z$  в пределах участка  $AB$  изменяется от 0 до 1 м, т.е.  $0 \leq z \leq 1$ . На рассматриваемую часть стержня действует только внешняя сила  $R_A^Z$ , направленная вдоль оси стержня. Эта сила может быть уравновешена силой, также действующей вдоль оси стержня, т.е. продольной силой  $N$ . Прикладываем в рассматриваемом сечении продольную силу  $N$ . Так как направление силы  $N$  неизвестно (от сечения или на сечение), то направляем ее вдоль оси произвольно, например, от сечения. Записываем уравнение статики (составляем условие равновесия) для рассматриваемой части стержня:

$$\Sigma F_Z = 0; R_A^Z + N = 5 + N = 0; N = -5 \text{ кН.}$$

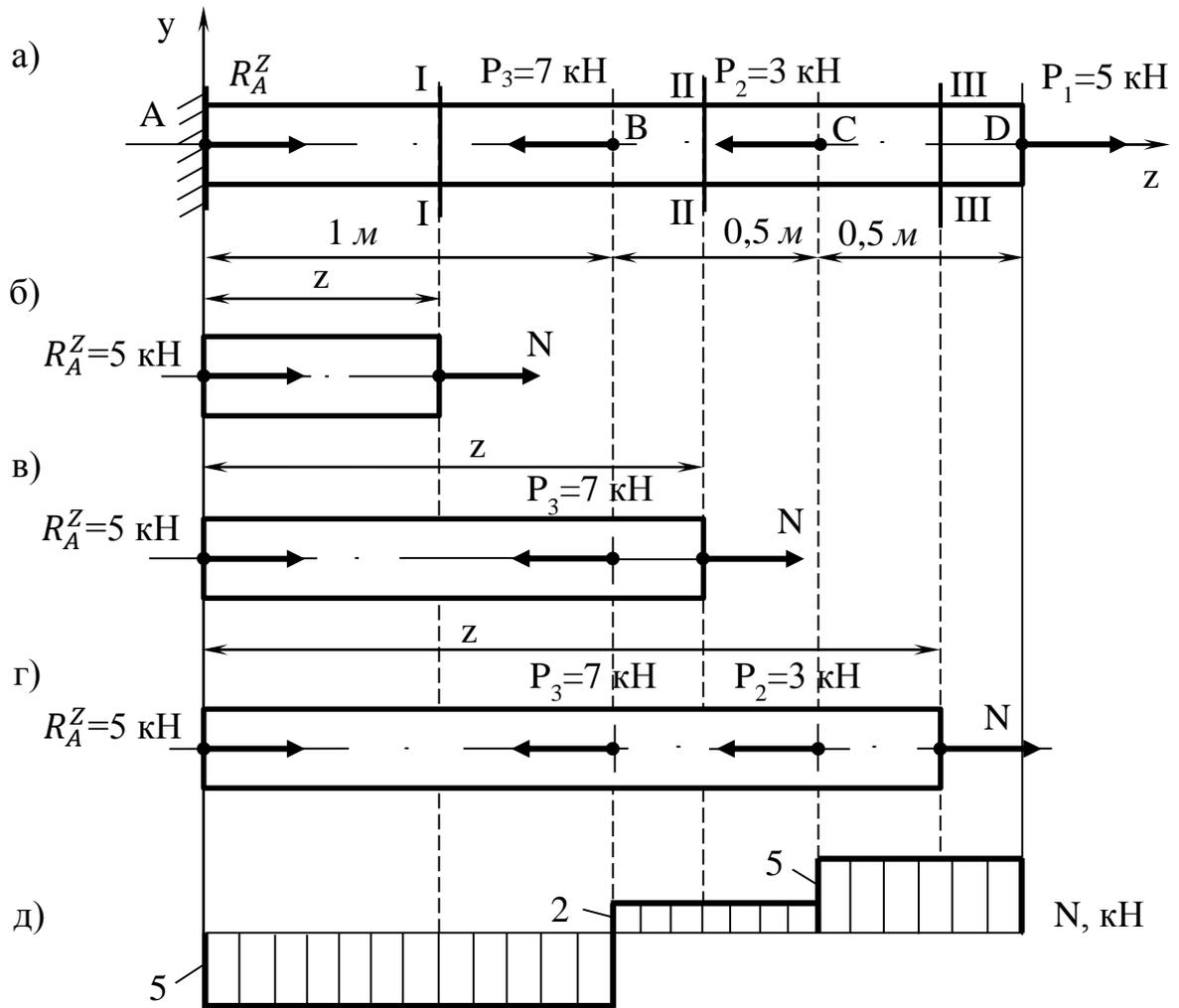


Рис. 1

Знак «минус» означает, что сила  $N$  должна действовать на сечение. Так как сила  $N$  не зависит от абсциссы  $z$ , то продольная сила по длине участка  $AB$  не изменяется.

5. Выбираем ось отсчета в виде линии, параллельной оси стержня. При построении эпюры продольных сил принимают следующее правило знаков:

Продольную силу  $N$  считают положительной, если имеет место растяжение ( $N$  направлена от сечения) и отрицательной, если сжатие ( $N$  направлена на сечение).

При горизонтальном расположении оси отсчета положительные значения продольной силы откладывают вверх, отрицательные – вниз. Так как на участке  $AB$  сила  $N$  действует на сечение, т.е. имеет место сжатие, то график изменения  $N$  на участке  $AB$  представляет собой прямую, параллельную оси отсчета в отрицательной области значений (рис. 1д).

Рассмотрим участок  $BC$  (рис. 1в, сеч. II-II). Абсцисса  $z$  при начале координат в т.  $A$  будет изменяться от  $1 \text{ м}$  до  $1,5 \text{ м}$ . Рассуждая так же, как и в предыдущем

случае, убеждаемся, что в сечении II-II действует только продольная сила  $N$ . Записываем уравнение статики для рассматриваемой части стержня:

$$\Sigma F_Z = 0; R_A^Z - P_3 + N = 5 - 7 + N = 0; N = 7 - 5 = 2 \text{ кН.}$$

Эпюра продольной силы на участке  $BC$  представляет собой прямую, параллельную оси отсчета в положительной области значений (рис. 1д).

Аналогично можно найти продольную силу и на участке  $CD$ .

Из эпюры продольных сил следует (рис. 1д), что в точках  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  значения продольной силы изменились скачком на величину сосредоточенных сил в этих точках. Эта закономерность справедлива при действии любой сосредоточенной силы и значительно облегчает построение эпюр продольных сил для стержней, нагруженных сосредоточенными силами.

Так, для рассмотренного примера можно было бы поступить следующим образом.

Рассмотрим стержень, начиная с т.  $A$  (слева направо). В т.  $A$  в соответствии с отмеченной закономерностью должен быть скачок на величину  $R_A^Z$ . Сила  $R_A^Z$  в сечении I-I (рис. 1а) может быть уравновешена внутренней силой  $N$ , равной по модулю  $R_A^Z$  и направленной на сечение, т.е. имеет место сжатие и ординату откладываем вниз от оси отсчета (скачок направлен вниз). Если выбрать другое сечение в пределах участка  $AB$ , то результат не изменится. Таким образом, на участке  $AB$  имеем:

$$N_{AB} = - |R_A^Z| = - 5 \text{ кН.}$$

График представляет собой прямую, параллельную оси отсчета.

В т.  $B$  должен быть скачок на величину силы  $P_3$ . Так как сила  $P_3$  направлена в сторону, противоположную силе  $R_A^Z$ , то скачок направлен вверх и продольная сила на участке  $BC$  равна:

$$N_{BC} = N_{AB} + 7 = -5 + 7 = 2 \text{ кН.}$$

Учитывая скачок в т.  $C$ , для участка  $CD$  получаем:

$$N_{CD} = N_{BC} + 3 = 2 + 3 = 5 \text{ кН.}$$

Если учесть скачок в точке  $D$  от силы  $P_1$ , то находим:

$$N_{CD} - P_1 = 5 - 5 = 0,$$

что и должно быть, т.к.  $\Sigma F_Z = 0$ .

В заключении отметим основные закономерности:

1. В поперечных сечениях прямого стержня, нагруженного силами, приложенными на оси стержня и направленными вдоль оси, возникает только один внутренний силовой фактор – продольная сила  $N$ , т.е. имеет место растяжение или сжатие.

2. В сечениях, где приложены сосредоточенные силы, действующие вдоль оси стержня, на эпюре продольных сил имеет место скачок на величину этих сил.

3. Форма и размеры поперечных сечений не влияют на величину продольных сил.

#### 4. Правило нахождения продольной силы для прямых стержней:

Продольная сила в рассматриваемом сечении равна алгебраической сумме проекций на продольную ось всех сил, действующих на рассматриваемую часть стержня. Проекцию любой силы берут со знаком «плюс», если соответствующая ей внутренняя продольная сила направлена от сечения, и «минус» - если на сечение.

Замечание: Это правило справедливо для любой системы внешних сил. В случае криволинейных стержней силы проектируют на ось, перпендикулярную рассматриваемому сечению.

### **3.2 Построение эпюр крутящих моментов**

#### Пример

Для стержня, находящегося в состоянии статического равновесия и нагруженного парами сил, плоскости действия которых перпендикулярны к оси стержня, определить уравнивающий момент  $M_{\Sigma}$  и построить эпюру крутящих моментов.

Решение.

1. На рис. 2а пары сил заданы круговой стрелкой. Направление уравнивающего момента  $M_{\Sigma}$  неизвестно и должно быть определено из условия равновесия стержня. Так как форма и размеры поперечного сечения стержня не влияют на вид эпюр внутренних силовых факторов, то на расчетной схеме прямой стержень можно изобразить прямой линией, проходящей через центры тяжести сечений. В этом случае изображение момента пары сил круговой стрелкой может вызвать трудности в определении направления момента. На рис. 2б стержень изображен прямой линией, а пары сил линиями, перпендикулярными к оси стержня и изображающими плоскости действия пар. Кружки обозначают силы, составляющие пару. Кружки с точкой соответствуют силе, направленной в сторону смотрящего на рисунок (на нас), кружок с крестиком – в другую сторону (от нас).

Определим уравнивающий момент  $M_{\Sigma}$ . Выберем систему координат с началом в т. А, направив ось  $z$  слева направо. Предположим, что момент  $M_{\Sigma}$  действует против часовой стрелки, если смотреть со стороны положительного направления оси  $z$  (рис. 2б). Для равновесия плоской системы пар (или пар, лежащих в параллельных плоскостях) необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма моментов этих пар была равна нулю. Используя правило знаков, введенное в теоретической механике, получаем:

$$\Sigma M_z = -M_1 + M_2 + M_{\Sigma} - M_3 = -5 + 8 + M_{\Sigma} - 6 = 0; M_{\Sigma} = 3 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Так как значение  $M_{\Sigma}$  получено со знаком плюс, направление уравнивающего момента выбрано правильно.

2. Проводя вертикальные линии через точки приложения сосредоточенных моментов, разбиваем стержень на участки.

3. Определим внутренние силовые факторы на каждом участке. Рассмотрим участок  $AB$ . Рассечем стержень поперечным сечением в пределах участка  $AB$  на две части и правую часть отбросим (рис. 2в). Пара сил с моментом  $M_1 = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}$ , действующая на рассматриваемую часть стержня, может быть уравновешена только парой, лежащей в параллельной плоскости. Следовательно, в поперечном сечении может возникнуть только один внутренний силовой фактор – крутящий момент  $M_K$ . Выбирая произвольно направление внутреннего крутящего момента  $M_K$  (в нашем примере против хода часовой стрелки, если смотреть на стержень со стороны положительного направления оси  $z$ ), из условия равновесия плоской системы пар получаем:

$$\Sigma M_Z = -M_1 + M_K = -5 + M_K = 0; M_K = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Так как момент  $M_K$  получен со знаком «плюс», то его направление выбрано верно.

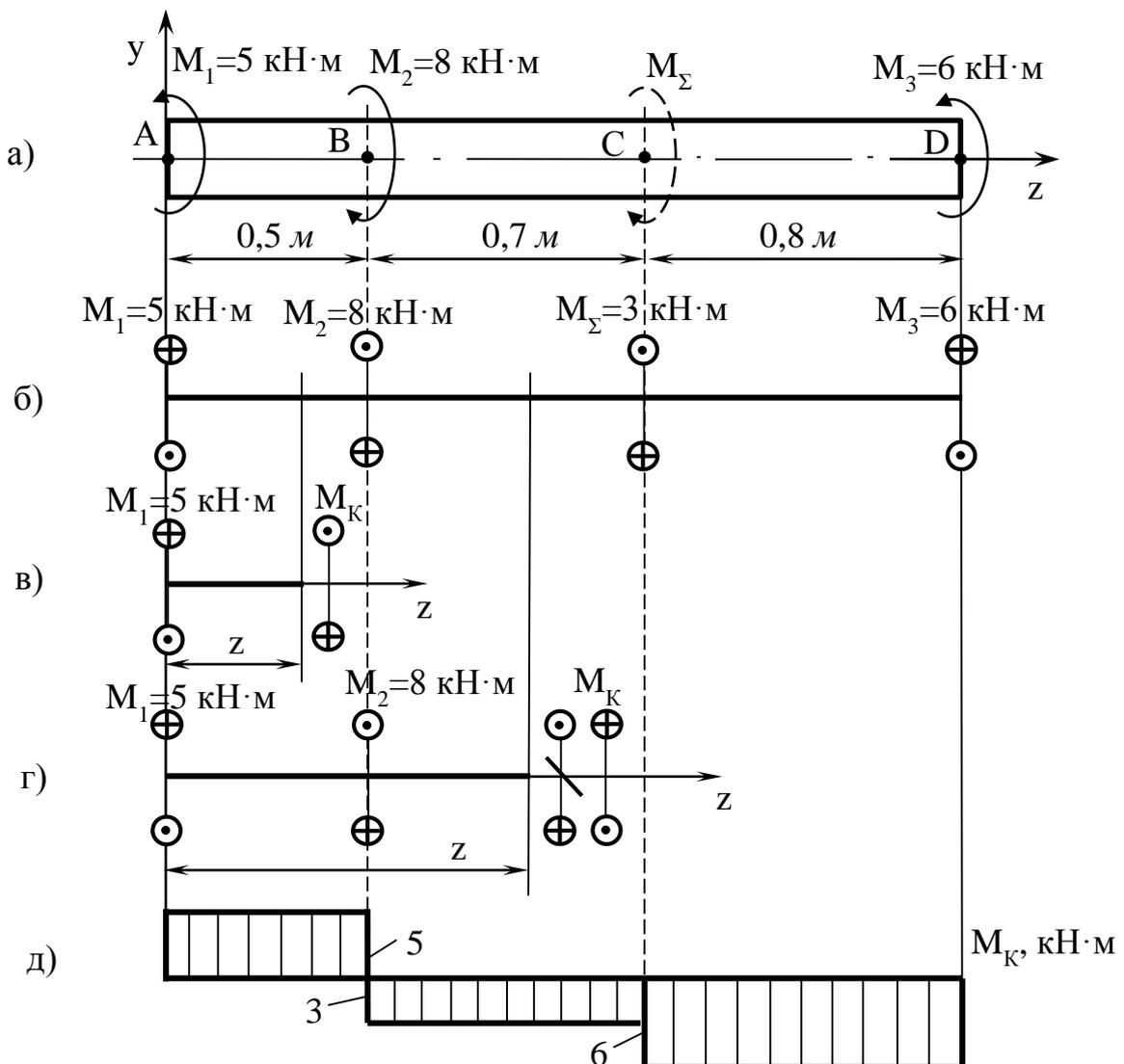


Рис. 2

При построении эпюры крутящих моментов принимают следующее правило знаков:

Внутренний крутящий момент  $M_K$  считают положительным, если, смотря на сечение, видят этот момент действующим против хода часовой стрелки.

В нашем случае внутренний крутящий момент на участке  $AB$  действует против хода часовой стрелки (если смотреть на сечение), от абсциссы  $z$  не зависит, и, следовательно, эпюра крутящих моментов на участке  $AB$  представляет собой прямую, параллельную оси отсчета в положительной области.

Проводя сечение в пределах участка  $BC$  и записывая уравнение статики (рис. 2г), получаем:

$$\Sigma M_Z = -M_1 + M_2 + M_K = -5 + 8 + M_K = 0; M_K = -3 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Знак «минус» означает, что направление внутреннего крутящего момента выбрано неверно и его следует изменить на обратное – по ходу часовой стрелки (рис. 2г). Эпюра крутящих моментов представляет собой прямую, параллельную оси отсчета, в отрицательной области значений. Обратим внимание, что знак внутреннего крутящего момента при построении эпюры определяем не по результатам решения уравнения статики, а пользуясь введенным правилом знаков. Заметим также, что в сечении, проходящем через точку  $B$ , где приложена пара с моментом  $M_2$ , на эпюре крутящих моментов имеет место скачок на величину этого момента. Пользуясь этим правилом, достраиваем эпюру крутящих моментов на участке  $CD$  (рис. 2д).

Установленные в этом примере закономерности справедливы и в общем случае:

1. В поперечных сечениях прямого стержня, нагруженного парами сил, плоскости действия которых перпендикулярны оси стержня, возникает только один внутренний силовой фактор – крутящий момент, т.е. имеет место кручение.

2. В сечениях, где приложены сосредоточенные пары, на эпюре крутящих моментов имеет место скачок на величину моментов этих пар.

3. Внутренний крутящий момент в рассматриваемом сечении равен алгебраической сумме моментов относительно продольной оси от всех нагрузок, действующих на рассматриваемую часть стержня. Момент берут со знаком «плюс», если, смотря на сечение, соответствующий ему внутренний момент действует против хода часовой стрелки, и со знаком «минус» - если по ходу часовой стрелки.

### 3.3 Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов

#### Пример

Для заданного стержня построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

Решение.

1. Рассмотрим стержень, нагруженный силами, лежащими в одной плоскости (рис. 3а). Эту плоскость называют силовой. Предположим, что силовая плоскость совпадает с плоскостью, проходящей через ось стержня и одну из главных центральных осей сечения, т.е. является главной плоскостью. Понятие о главных центральных осях вводится при рассмотрении геометрических характеристик сечения. Данное предположение необходимо, чтобы правильно определить вид нагружения, и в дальнейшем специально оговариваться не будет.

Выберем расчетную схему в виде оси стержня, на которую перенесем все действующие внешние силовые факторы (рис. 3б).

Найдем равнодействующую нагрузки, распределенной на участке *CB* (на рис. 3б изображена пунктиром):

$$P_1 = 40 \cdot 2 = 80 \text{ кН.}$$

Напомним, что равнодействующую параллельных сил прикладывают в центре тяжести участка, на котором действует распределенная нагрузка. В нашем примере – по середине участка *CB*.

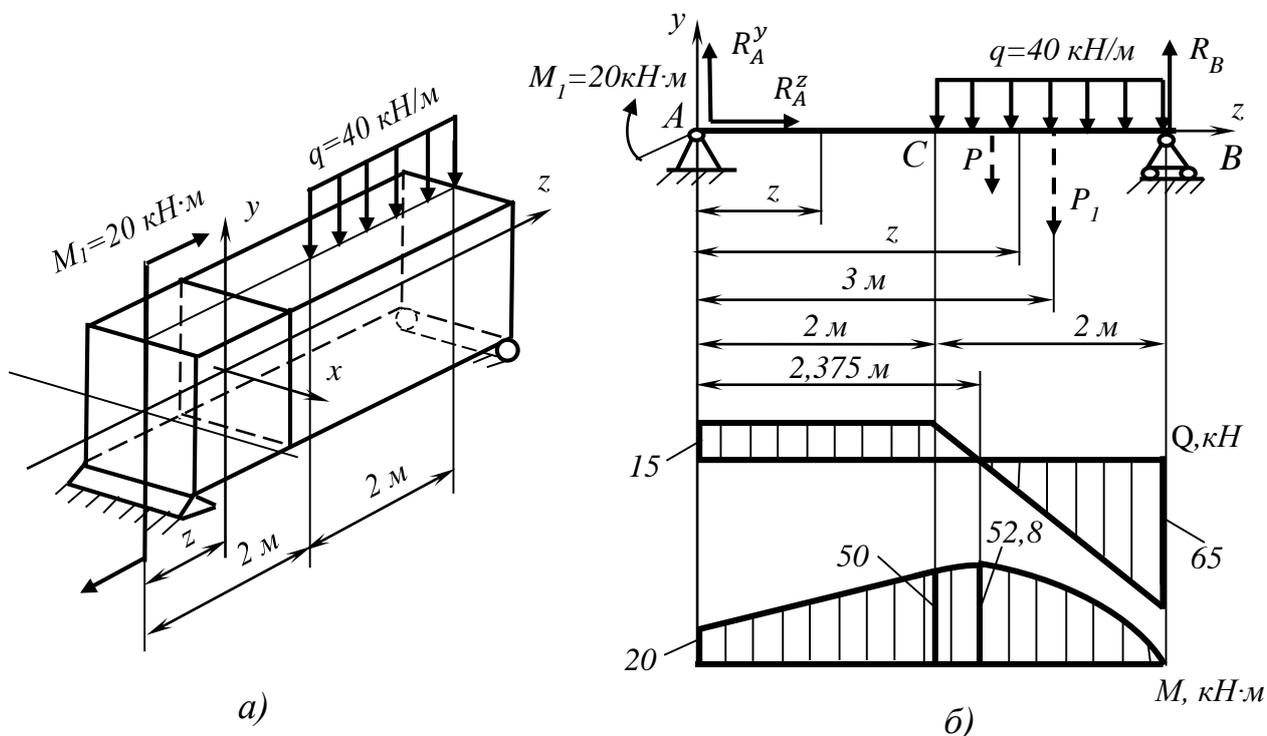


Рис. 3

В соответствии с видом связей изображаем реакции, выбираем систему координат и составляем уравнения статики, из которых определяем величину и направление реакций связей:

$$\Sigma M_A = -M_1 - P_1 \cdot 3 + R_B \cdot 4 = -20 - 80 \cdot 3 + R_B \cdot 4 = 0; R_B = \frac{260}{4} = 65 \text{ кН.}$$

$$\Sigma M_B = -M_1 - R_A^Y \cdot 4 + P_1 \cdot 1 = -20 - R_A^Y \cdot 4 + 80 \cdot 1 = 0; R_A^Y = \frac{60}{4} = 15 \text{ кН.}$$

$$\Sigma F_Z = R_A^Z = 0; R_B^Z = 0.$$

Для проверки правильности полученных значений реакций можно использовать условие равенства нулю суммы проекций всех сил на вертикальную ось и условие равенства нулю суммы моментов всех силовых факторов относительно любой точки, отличной от точек  $A$  и  $B$ , например, относительно точки  $C$ .

$$\text{Получаем: } \Sigma F_Y = R_A^Y - P_1 + R_B = 15 - 80 + 65 = 0;$$

$$\Sigma M_C = -M_1 - R_A^Y \cdot 2 + P_1 \cdot 1 + R_B \cdot 2 = -20 - 15 \cdot 2 - 80 \cdot 1 + 65 \cdot 2 = 0.$$

2. Разбиваем стержень на участки. В рассматриваемом примере два участка  $AC$  и  $CB$ .

3. На каждом участке методом сечений определяем внутренние силовые факторы.

Рассмотрим участок  $AC$ . Рассечем стержень на две части сечением на расстоянии  $z$  от начала координат (от т.  $A$ ) и правую часть мысленно отбросим. Вся нагрузка расположена в плоскости  $yz$  (рис. 3), причем силы параллельны оси  $y$  (учтено, что  $R_A^Z = 0$ ), поэтому при составлении условий равновесия отсеченной части внешние силовые факторы не дают проекции на оси  $z$  и  $x$  (на рисунке не показана) и не создают моменты относительно осей  $y$  и  $z$  (рис. 3а). Следовательно, в любом сечении стержня равны нулю четыре внутренних силовых фактора:

$$N = Q_x = M_y = M_z = 0.$$

Отличными от нуля остаются только поперечная сила  $Q_y$  и изгибающий момент  $M_x$ . Эти внутренние силовые факторы лежат в силовой плоскости (в плоскости  $yz$ ). Их часто обозначают без индекса осей.

Таким образом, в рассматриваемом примере в любом поперечном сечении стержня могут возникать только два внутренних силовых фактора – поперечная сила  $Q_y$  и изгибающий момент  $M_x$ , т.е. имеет место поперечный изгиб.

Из метода сечений следуют следующие правила определения внутренних силовых факторов при поперечном изгибе:

Поперечная сила  $Q$  в рассматриваемом сечении равна алгебраической сумме проекций на поперечную ось (ось  $y$ ) всех сил, действующих на рассматриваемую часть стержня.

Изгибающий момент в рассматриваемом сечении равен алгебраической сумме моментов относительно рассматриваемого сечения (относительно оси  $x$ , перпендикулярной плоскости чертежа на рис. 3б) от всех силовых факторов, действующих на рассматриваемую часть стержня.

Правила знаков для поперечной силы  $Q$  и изгибающего момента  $M$  удобно пояснить графически (рис. 4).

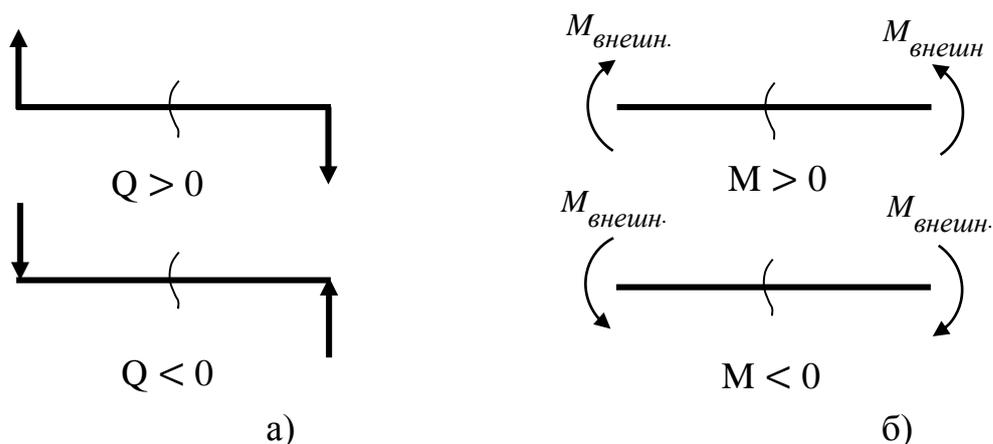


Рис. 4

Если внешняя сила расположена слева от сечения и направлена вверх (отбрасывают правую часть стержня), то поперечную силу в сечении считают положительной, если сила направлена вниз – отрицательной (рис. 4а). Для сил, расположенных справа от сечения, правило знаков обратное.

Для изгибающих моментов правило знаков следующее:

Если момент от внешнего силового фактора (от сосредоточенной силы, от распределенной нагрузки, от сосредоточенного момента), действующего на левую часть стержня, направлен по ходу часовой стрелки, то внутренний изгибающий момент в сечении считают положительным, если против хода часовой стрелки – отрицательным (рис. 4б). Для моментов, расположенных справа от сечения, правило знаков обратное.

При использовании приведенных правил знаки поперечных сил и изгибающих моментов не зависят от того, какую часть стержня отбрасывают.

Запишем аналитические выражения для поперечной силы и изгибающего момента на участке  $AC$ , пользуясь сформулированными выше правилами. Рассмотрим сечение в пределах участка  $AC$  на расстоянии  $z$  от начала координат (от т.  $A$ ). Правую часть отбрасываем. Абсцисса сечения  $z$  изменяется в пределах  $0 \leq z \leq 2$  м. Для поперечной силы получаем:

$$Q = R_A^Y = 15 \text{ кН}.$$

Знак «плюс», т.к. была отброшена правая часть стержня и реакция  $R_A^Y$  направлена вверх (рис. 4).

Изгибающий момент будет равен:

$$M = M_1 + R_A^Y \cdot z = 20 + 15 \cdot z \text{ (кН}\cdot\text{м)}.$$

Знаки выбраны в соответствии с рис. 4.

Изгибающий момент на участке  $AC$  изменяется по линейному закону. График – прямая линия. Для ее построения достаточно найти две точки. Получаем:

$$M_{z=0} = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_{z=2} = 20 + 15 \cdot 2 = 50 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Выбираем ось отсчета и строим эпюры. Положительные значения внутренних силовых факторов откладываем от оси сечения вверх. Отрицательные – вниз (рис. 3б).

Рассмотрим участок *CB*. Проведем сечение в пределах этого участка (рис. 3б). Абсцисса  $z$  на этом участке изменяется в пределах  $2 \leq z \leq 4$  м. Так как участок стержня длиной  $z$  включает часть распределенной нагрузки, то заменяем эту нагрузку ее равнодействующей  $P_q = q(z - 2)$ . Равнодействующую  $P_q$  помещаем в центр тяжести учитываемой распределенной нагрузки, т.е. по середине отрезка  $(z - 2)$ .

Для поперечной силы получаем:

$$Q = R_A^Y - P_q = R_A^Y - q(z - 2) = 15 - 40 \cdot (z - 2).$$

Изгибающий момент равен:

$$\underline{M} = M_1 + R_A^Y \cdot z - P_q \cdot \frac{(z-2)}{2} = 20 + 15z - 40 \cdot (z - 2) \cdot \frac{(z-2)}{2} = 20 + 15z - 20(z - 2)^2.$$

Поперечная сила изменяется по линейному закону. Вычисляем ее значения в начале и в конце участка:

$$Q_{z=2} = 15 \text{ кН}; \quad Q_{z=4} = 15 - 40 \cdot (z - 2) = 15 - 40 \cdot (4 - 2) = -65 \text{ кН}.$$

По полученным значениям строим эпюру поперечных сил.

Изгибающий момент изменяется по закону квадратной параболы. Определяем значения изгибающего момента в начале и в конце участка:

$$M_{z=2} = 20 + 15 \cdot 2 = 50 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_{z=4} = 20 + 15 \cdot 4 - 20 \cdot (4 - 2)^2 = 0.$$

Для определения абсциссы точки экстремума вычисляем первую производную от функции, характеризующей закон изменения изгибающего момента на участке *CB*, и приравниваем ее к нулю:

$$\frac{dM}{dz} = 15 - 40 \cdot (z - 2) = 0; \quad z = 2,375 \text{ м}.$$

Вычисляем изгибающий момент в точке экстремума и строим эпюру изгибающих моментов:

$$M_{z=2,375} = 20 + 15 \cdot 2,375 - 20 \cdot (2,375 - 2)^2 = 52,8 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Для контроля правильности построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов используем дифференциальные зависимости:

$$\frac{dQ}{dz} = q \quad (1), \quad \frac{dM}{dz} = Q \quad (2).$$

Рассмотрим эпюру поперечных сил. На участке *AC* распределенная нагрузка отсутствует, т.е.  $q = 0$ , поэтому тангенс угла наклона касательной к графику поперечной силы, равный первой производной от поперечной силы, согласно формуле (1) должен быть равен нулю. Следовательно, касательная и весь график должны быть параллельны оси отсчета, что и имеет место. На участке *CB* тангенс угла наклона касательной к графику поперечной силы отрицателен и постоянен в пределах этого участка. Согласно формуле (1) и интенсивность распределенной нагрузки  $q$  должна быть отрицательной (направленной вниз) и по длине участка не изменяться, что и соответствует расчетной схеме.

Рассмотрим эпюру изгибающих моментов. На участке  $AC$  тангенс угла наклона касательной к графику изгибающего момента положителен и постоянен в пределах участка. Следовательно, согласно зависимости (2) должна быть положительна и постоянна поперечная сила на этом участке, что соответствует эпюре поперечных сил. На участке  $CB$  тангенс угла наклона касательной к графику изгибающего момента уменьшает свое положительное значение до нуля (в точке максимума), а затем становится отрицательным, изменяясь в пределах участка. Следовательно, и поперечная сила должна изменять свое положительное значение до нуля, а затем становится отрицательной, изменяясь в пределах участка. Именно такой характер изменения поперечной силы и имеет место.

Обратим внимание, что в соответствии с формулой (2) первая производная от изгибающего момента равна поперечной силе и, следовательно, в сечениях, где поперечная сила равна нулю, на эпюре изгибающих моментов имеет место экстремум. Поэтому при построении эпюры изгибающих моментов исследование на экстремум можно не проводить (не вычислять первую производную, приравнивая ее нулю и т.д.), а определять абсциссы сечений, где имеет место экстремум, приравнивая поперечную силу нулю.

В заключении отметим общие закономерности при построении эпюр поперечных сил и изгибающих моментов:

1. Если прямой стержень нагружен силами и парами сил, лежащими в главной плоскости, причем сосредоточенные и распределенные силы перпендикулярны к оси стержня, то имеет место поперечный изгиб, т.е. в поперечных сечениях возникают только два внутренних силовых фактора – поперечная сила  $Q$  и изгибающий момент  $M$ ;
2. В сечениях, где приложены сосредоточенные силы, перпендикулярные к оси стержня, на эпюре поперечных сил имеет место скачок на величину этих сил.
3. В сечениях, где приложены сосредоточенные моменты, на эпюре изгибающих моментов имеет место скачок на величину этих моментов.
4. В сечениях, где поперечная сила равна нулю, на эпюре изгибающих моментов имеет место экстремум, т.е. изгибающий момент достигает максимума или минимума.

## Содержание

1	Введение .....	3
2	Алгоритм определения внутренних силовых факторов.....	4
3	Построение эпюр внутренних силовых факторов	
3.1	Построение эпюр продольных сил.....	4
3.2	Построение эпюр крутящих моментов.....	7
3.3	Построение эпюр продольной силы и изгибающих моментов.....	10

---

Подписано в печать 18.05.2015 г.

Печать офсетная  
0,93 усл.печ.л.

Формат 60x84/16  
Заказ № 2020/

0,67 уч.-изд. л.  
Тираж 100 экз.

---

Московский государственный технический университет ГА  
*125993 Москва, Кронштадтский бульвар, д.20*  
Редакционно-издательский отдел  
*125493 Москва, ул. Пулковская, д.6а*