ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ» (МГТУ ГА)**

**Кафедра технической механики
и инженерной графики**

В.В. Пермякова

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ДИНАМИКА

ПОСОБИЕ
по выполнению контрольных
домашних заданий

*для студентов II курса
направления 25.03.01
очной формы обучения*

Москва - 2015

ББК 531
П27

Рецензент канд. техн. наук, доц. В.К. Харина

Пермякова В.В.

П27 Теоретическая механика. Динамика: пособие по выполнению контрольных домашних заданий. - М.: МГТУ ГА, 2015. - 16 с.

Данное пособие издается в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Теоретическая механика» по учебному плану для студентов II курса направления 25.03.01 очной формы обучения.

Рассмотрено и одобрено на заседаниях кафедры 15.09.2014 г. и методического совета 02.12.2014 г.

Подписано в печать 29.01.2015 г.

Печать офсетная	Формат 60х84/16	0,72 уч.-изд. л.
0,93 усл.печ.л.	Заказ № 1949/	Тираж 130 экз.

Московский государственный технический университет ГА
125993 Москва, Кронштадтский бульвар, д.20
Редакционно-издательский отдел
125493 Москва, ул. Пулковская, д.6а

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие соответствует содержанию дисциплины «Теоретическая механика» Федерального государственного образовательного стандарта ВПО по направлению подготовки 25.03.01 – Техническая эксплуатация летательных аппаратов и двигателей, квалификация (степень) - бакалавр.

Пособие содержит по 30 вариантов заданий и типовые задачи по темам статики твердого тела. В конце пособия приведены ответы по всем заданиям. Вариант задания выдается преподавателем и соответствует сумме трех последних цифр шифра зачетной книжки студента.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ (РАСЧЕТНО – ГРАФИЧЕСКИХ) РАБОТ

1. Контрольные (расчетно-графические) работы выполняются на стандартных листах писчей бумаги формата А4 с одной стороны.
2. Титульный лист оформляется по приведенному образцу.
3. Каждый рабочий лист должен иметь рамку, линии которой отстоят от края листа слева на 20 мм; справа, сверху и снизу – на 5 мм.
4. Все расчеты снабжаются пояснениями и выполняются только ручкой. Графическая часть задания выполняется в масштабе с использованием чертежных инструментов.
5. При решении каждого задания необходимо указать его вариант, записать полное условие с исходными данными. Расчет должен сопровождаться кратким пояснением, точность расчета 0,01.
6. Если решение задачи размещено на нескольких листах, то все листы задачи должны быть сброшюрованы (скреплены степлером между собой).
7. Допускается по разрешению преподавателя брошюрование нескольких задач по разделам курса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. В 2-х т. – С.-Пб.: Лань, 2009.
2. Диевский В.А. Теоретическая механика: Учебное пособие. - 3-е изд., испр.- С.-Пб.: Лань, 2009.
3. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: Учебник для втузов. - М.: Высшая школа, 2005.

ЗАДАНИЕ

МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

ЗАДАНИЕ 1

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Для приведенных на схемах 1-30 механических систем определить собственную частоту колебаний. Механические системы, показанные на схемах в положении равновесия, могут совершать свободные колебания, вращаясь вокруг горизонтальной оси z, проходящей через неподвижную точку ***O***. Системы состоят из жестко скрепленных друг с другом тел: тонких однородных стержней ***1*** и ***2*** или однородной пластины ***3*** и точечных грузов ***4***. Масса 1 м длины стержней равна 25 кг, масса 1 м^2 площади пластины – 50 кг, масса точечного груза – 20 кг. Упругие элементы имеют коэффициент жесткости с = 10 кН/м. Размеры частей системы указаны в метрах.

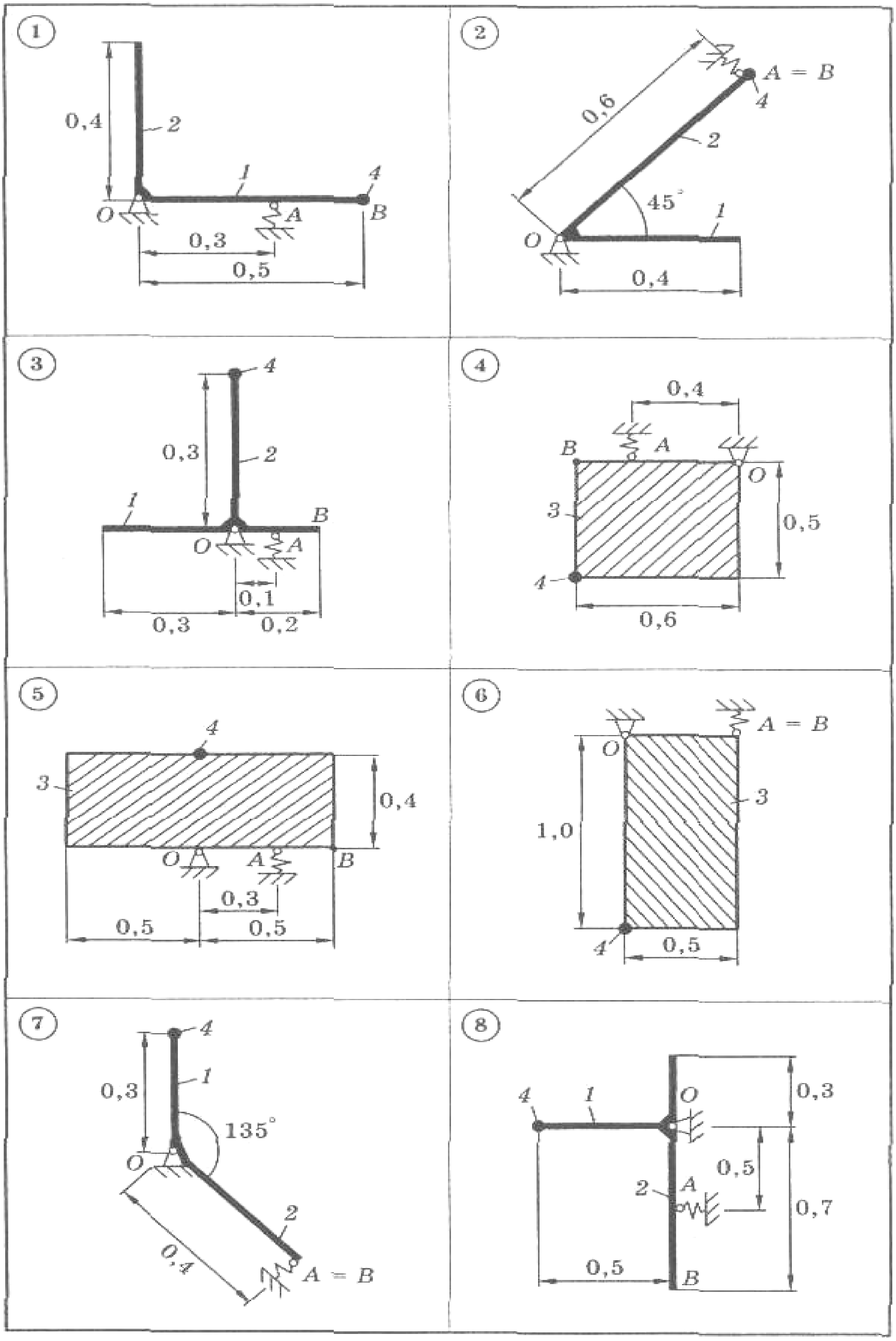
ЗАДАНИЕ 2

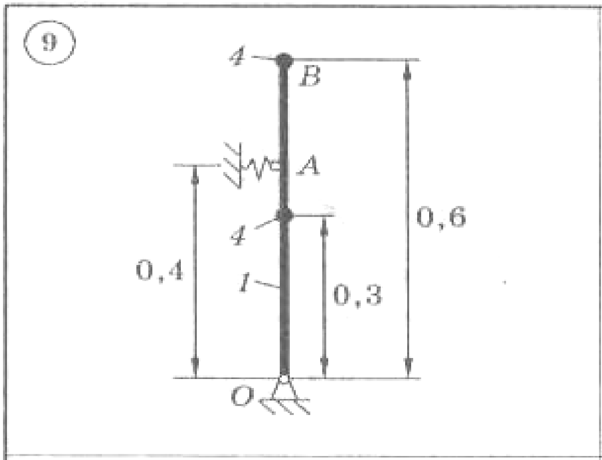
ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

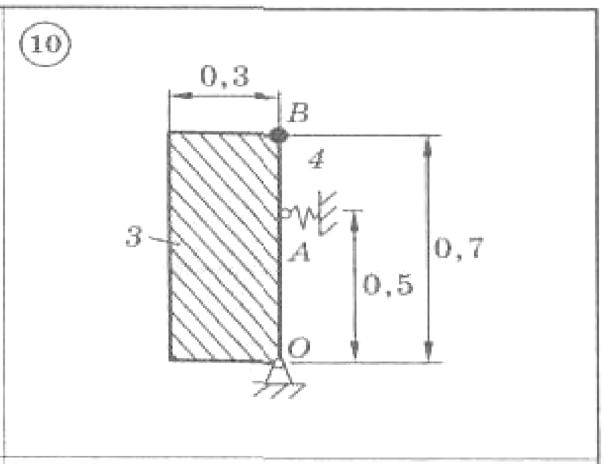
Механические системы на схемах 1-30 снабжаются невысоким вязким демпфером, который устанавливается в точке ***B*** параллельно оси упругого элемента, и создает силу сопротивления. пропорциональную скорости точки ***B***: $\overline{R} = -b\overline{\upsilon}_B$, где b = 20 Н·с/м – коэффициент сопротивления.

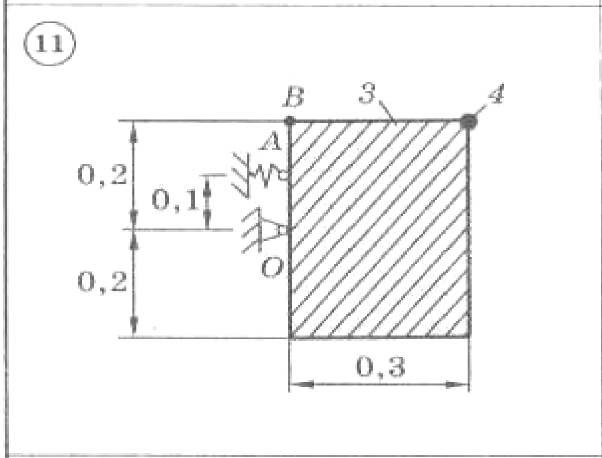
Кроме того, на систему начинает действовать вынуждающая сила $F = F_0 \sin pt$, где $F_0 = 60$ Н, $p = 25$ с$^{-1}$ – амплитуда и частота вынуждающей силы. Вынуждающая сила приложена в точке ***B*** и действует параллельно оси упругого элемента. (Если точка ***B*** совпадает с точкой ***A***, на схемах указывается ***B = A***.)

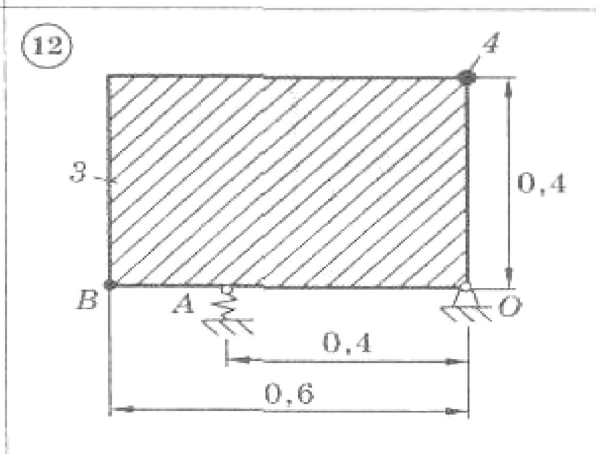
Требуется определить амплитуду чисто вынужденных колебаний системы.

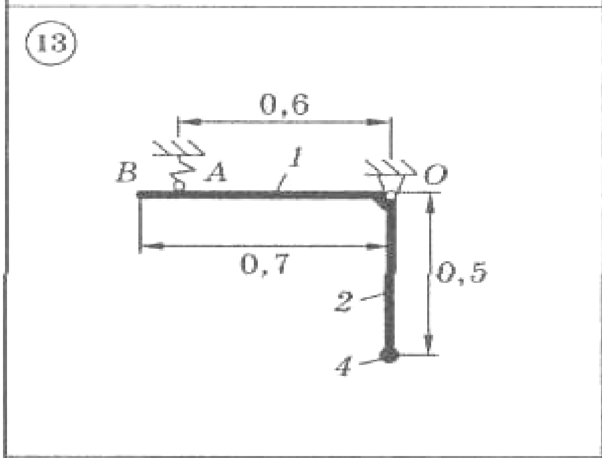

1
0,4
2
1
4
O
A
B
0,3
0,5
2
0,6
A = B
4
2
45°
1
O
0,4
3
4
0,3
2
1
B
O
A
0,1
0,3
0,2
4
0,4
B
A
O
3
0,5
4
0,6
5
4
3
0,4
O
A
B
0,3
0,5
0,5
6
A = B
O
3
1,0
4
0,5
7
4
0,3
1
135°
O
2
0,4
A = B
8
4
1
O
0,3
0,5
A
2
0,7
0,5
B

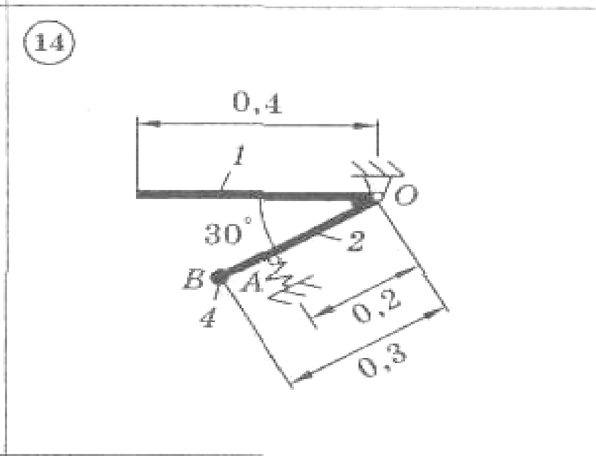

9
4
B
A
4
0,6
0,4
1
0,3
O

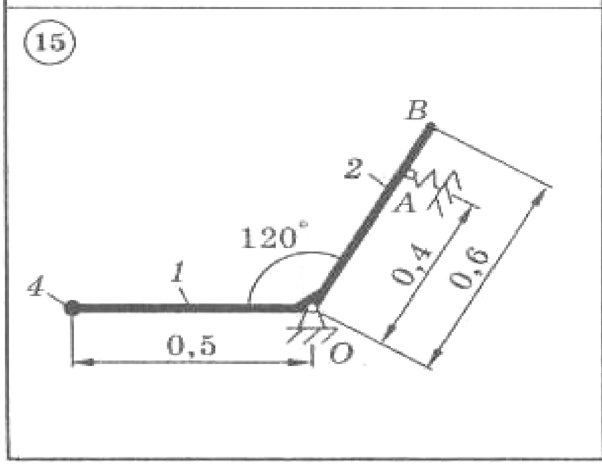

10
0,3
B
4
3
A
0,7
0,5
O

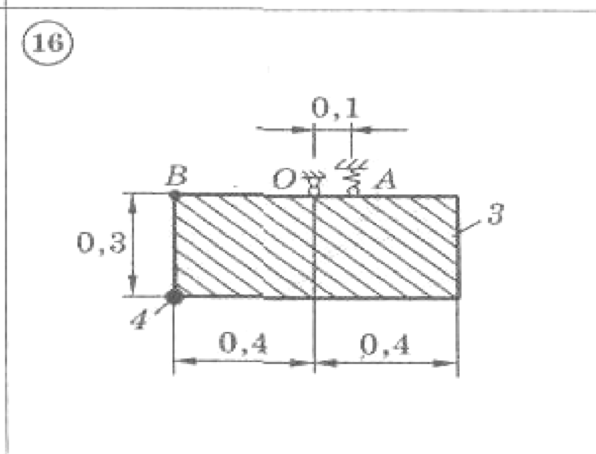

11
B
3
4
A
0,2
0,1
0,2
O
0,3

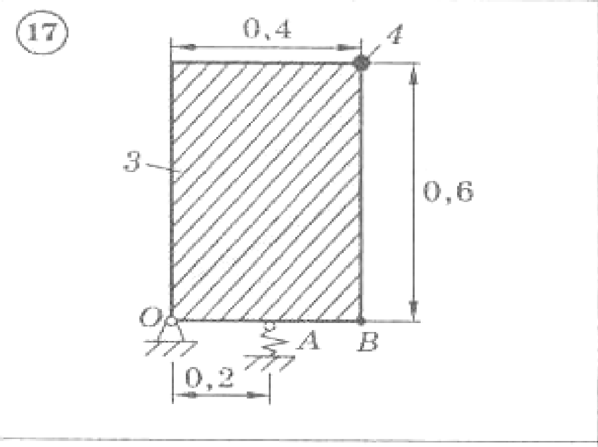

12
4
3
0,4
B
A
O
0,4
0,6

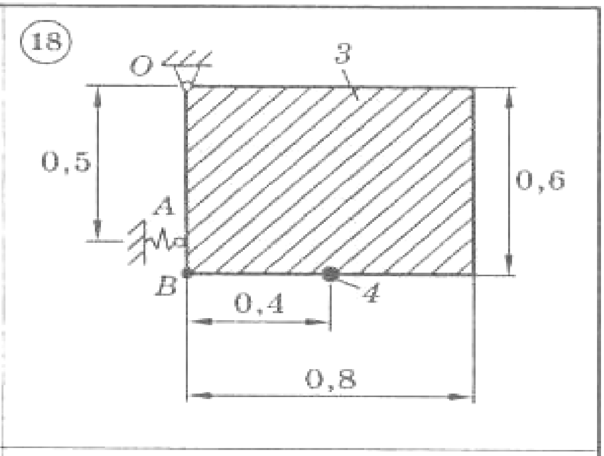

13
0,6
B
A
1
O
0,7
0,5
2
4

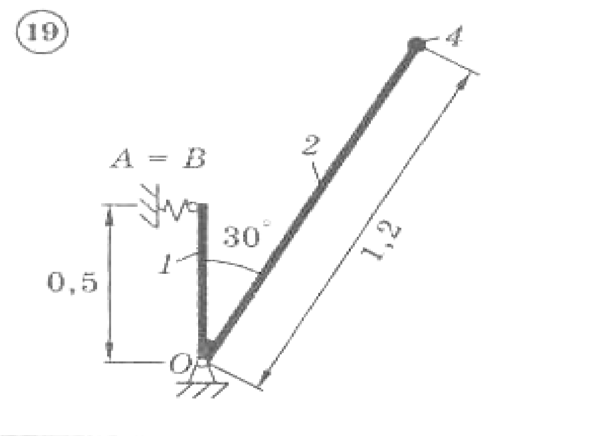

14
0,4
1
O
30°
2
B
A
4
0,2
0,3

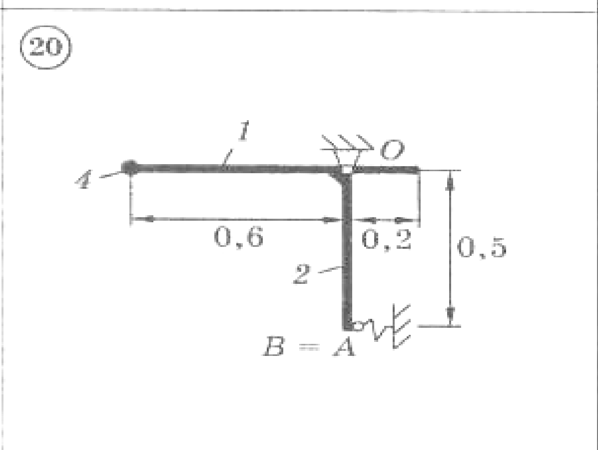

15
B
2
A
120°
4
1
0,4
0,6
0,5
O

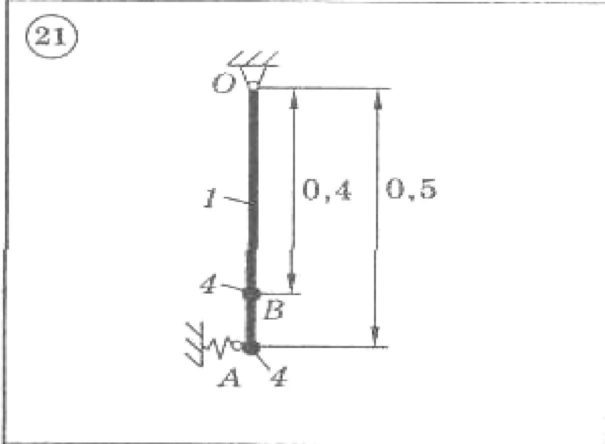

16
0,1
B
O
A
3
0,3
4
0,4
0,4

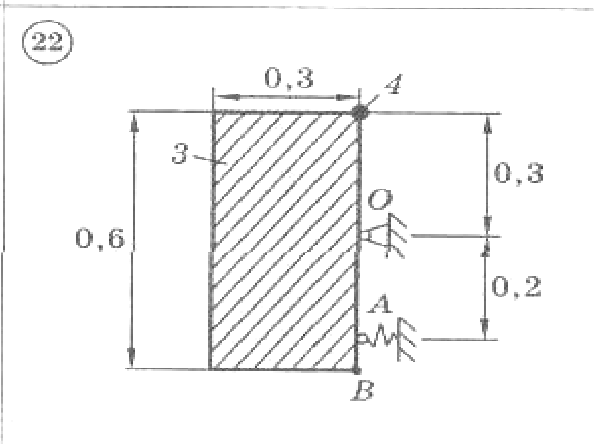

17
0,4
4
3
0,6
O
A
B
0,2

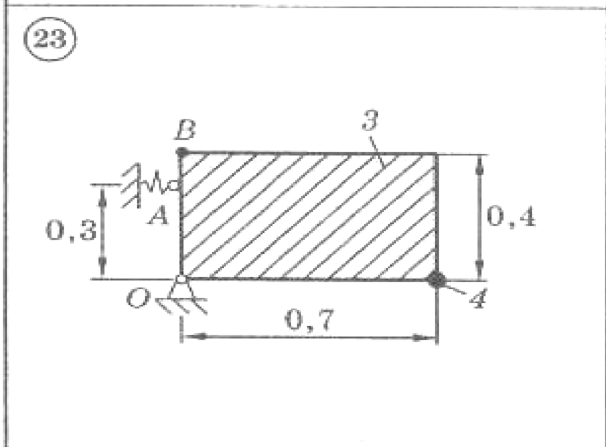

18
O
3
0,5
A
0,6
B
0,4
4
0,8

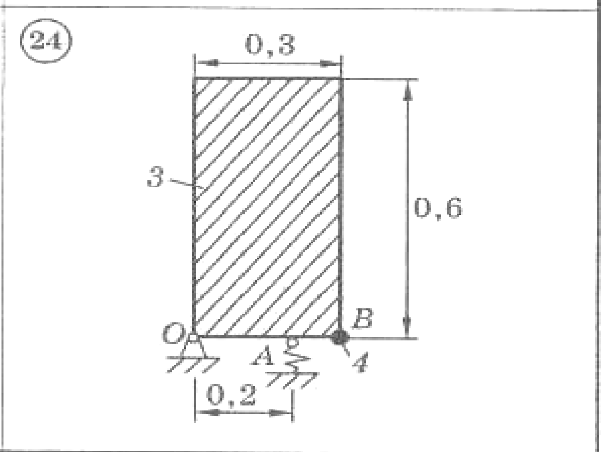

19
4
2
A = B
30°
1,2
1
0,5
O


20
1
O
4
0,6
0,2
0,5
2
B = A

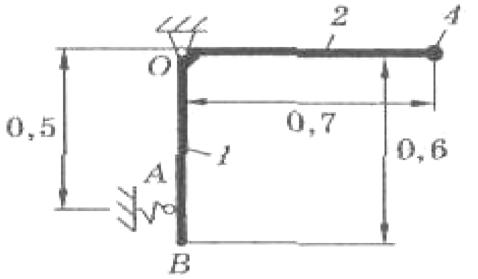

21
O
1
0,4
0,5
4
B
A
4


22
0,3
4
3
0,3
O
0,6
0,2
A
B

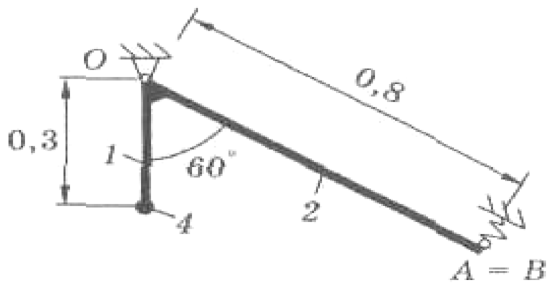

23
B
3
A
0,3
0,4
O
4
0,7


24
0,3
3
0,6
O
B
A
4
0,2

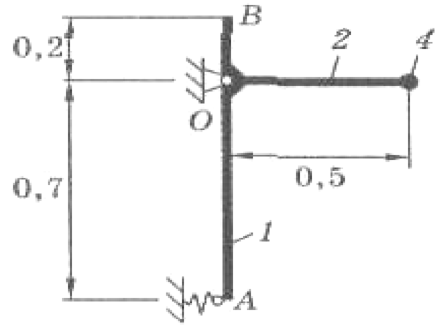
25



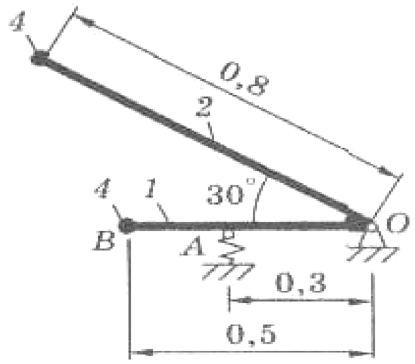
26



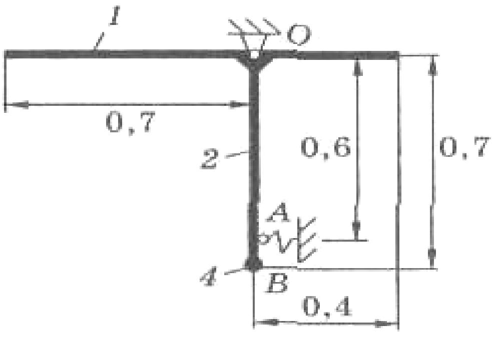
27



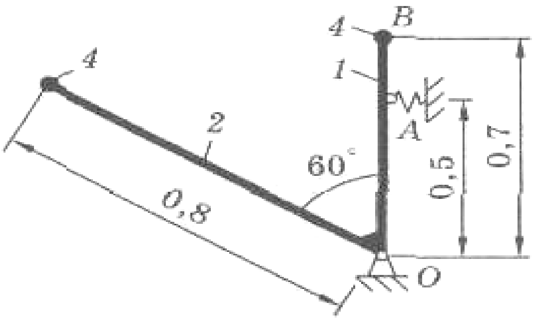
28



29



30



ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

ЗАДАЧА 1

Рама ***AOB*** может вращаться в вертикальной плоскости вокруг оси z, проходящей через неподвижный шарнир ***O***. Размеры и массы ригеля и стойки рамы соответственно равны $l_1 = 1$ м, $l_2 = 2$ м, $m_1 = 30$ кг, $m_2 = 40$ кг. Рама удерживается в положении равновесия (рис. 22) упругой невесомой пружиной с коэффициентом жесткости $c = 2{,}5$ кН/м.

Начальные условия (при t = 0): $\varphi_0 = 0$, $\dot{\varphi}_0 = 0{,}24$ рад/с, где φ - угол отклонения рамы от положения равновесия.

В точке ***B*** к раме прикреплен невесомый вязкий демпфер, сила сопротивления которого зависит от скорости точки ***B***: $\overline{R} = -b\overline{\upsilon}_B$, где $b = 190$ Н·с/м – коэффициент сопротивления.

В точке ***A*** приложена вынуждающая сила $F = F_0 \sin pt$, где F_0 и p – амплитуда и частота вынуждающей силы: $F_0 = 50$ Н, $p = 8$ с$^{-1}$.

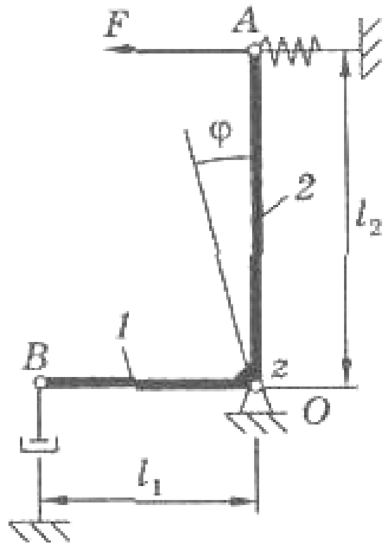


Рис. 22

Требуется найти:

1) уравнение свободных колебаний ($b = 0$, $F = 0$);

2) уравнение затухающих колебаний ($F = 0$), а также декремент колебаний (изменение амплитуды за один период колебаний);

3) уравнение чисто вынужденных колебаний с учетом и без учета сопротивления.

Решение.

1. Исследование малых свободных колебаний ($b = 0$, $F = 0$).

За обобщенную координату принимаем угол поворота рамы $q = \varphi$, тогда обобщенная скорость $\dot{q} = \dot{\varphi} = \omega$ - угловая скорость рамы.

Дифференциальное уравнение малых свободных колебаний для механической системы с одной степенью свободы, как известно, имеет вид $\ddot{q} + k^2 q = 0$, где $k^2 = \dfrac{c_{11}}{a_{11}}$, k – собственная частота колебаний, a_{11} и c_{11} – обобщенные коэффициенты инерции и жесткости.

Для определения коэффициентов a_{11} и c_{11} следует представить кинетическую Т и потенциальную П энергии системы приближенно в виде квадратичных форм обобщенных скорости и координаты:

$$\text{Т} = \frac{1}{2}a_{11}\dot{q}^2 \quad \text{и} \quad \text{П} = \frac{1}{2}c_{11}q^2.$$

1. Определение a_{11}.

Для вращающейся рамы кинетическая энергия

$$\text{Т} = \frac{1}{2}J_z\omega^2,$$

следовательно, $a_{11} = J_z$. Момент инерции рамы может быть получен с использованием формулы для момента инерции однородного тонкого стержня относительно оси, проходящей через его конец, в виде

$$J_z = \frac{m_1\ell_1^2}{3} + \frac{m_2\ell_2^2}{3} \approx 63{,}3 \text{ кг·м}^2.$$

Итак, $a_{11} = 63{,}3$ кг·м^2.

2. Определение c_{11}.

Потенциальная энергия всей системы в отклоненном на угол φ положении определяется потенциальными энергиями рамы в поле силы тяжести и потенциальной энергией в пружине (в поле силы упругости): $\text{П} = \text{П}_g + \text{П}_c$. Потенциальная энергия П_g определяется опусканием центра тяжести рамы по вертикальной оси по отношению к положению равновесия (рис. 23):

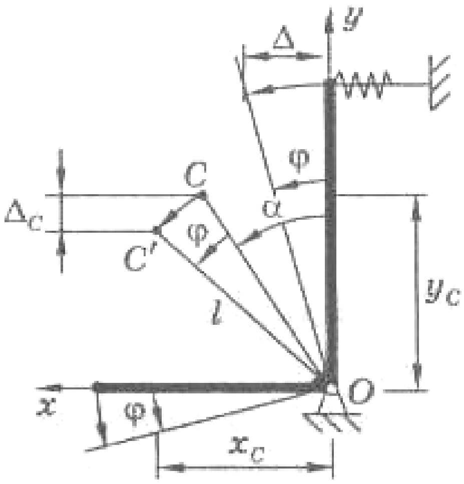


Рис. 23

$$\text{П}_g = -\,mg\Delta_C.$$

Найдем координаты центра тяжести (точка ***C***) рамы, учитывая координаты центров масс ее тел: $x_1 = l_1/2 = 0{,}5$ м; $x_2 = 0$; $y_1 = 0$; $y_2 = l_2/2 = 1$ м; а также массу всей рамы $m = m_1 + m_2 = 70$ кг.

Тогда

$$x_C = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m} = \frac{3}{14} \text{ м}; \qquad y_C = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m} = \frac{4}{7} \text{ м}.$$

Обозначим через l - длину отрезка ***OC***, α – угол между линией ***OC*** и вертикалью в положении равновесия.

Рассматривая поворот рамы на угол φ и переход точки ***C*** в положение ***C'*** , из соответствующих треугольников находим

$$\Delta_C = l\cos\alpha - l\cos(\alpha + \varphi) = l\cos\alpha - l\cos\alpha\cos\varphi + l\sin\alpha\sin\varphi =$$
$$= y_C(1 - \cos\varphi) + x_C\sin\varphi.$$

Осуществляя переход к малым колебаниям, делаем замены:

$$1 - \cos\varphi \approx \frac{\varphi^2}{2} \quad \text{и} \quad \sin\varphi \approx \varphi.$$

Тогда $\Delta_C = y_C\frac{\varphi^2}{2} + x_C\varphi$, и потенциальную энергию находим в виде

$$\Pi_g = -\,\mathrm{mg}\, y_C\frac{\varphi^2}{2} - \mathrm{mg}\, x_C\varphi.$$

Потенциальная энергия в пружине определяется ее деформацией x из нейтрального состояния

$$\Pi_c = \frac{1}{2}cx^2,$$

при этом сама эта деформация будет равна сумме статической деформации $f_{ст}$ (в положении равновесия) и изменения длины пружины Δ при повороте рамы на угол φ: $x = \Delta + f_{ст}$, т.е.

$$\Pi_c = \frac{1}{2}c\Delta^2 + c\, f_{ст}\Delta + \frac{1}{2}c f_{ст}^2.$$

Последнее слагаемое можно отбросить, так как потенциальная энергия определяется с точностью до постоянного слагаемого. Учтем теперь, что $\Delta = l_2\sin\varphi \approx l_2\varphi$, и получим

$$\Pi_c = \frac{1}{2}c\ell_2^2\varphi^2 + cf_{ст}\, l_2\varphi.$$

Вся потенциальная энергия системы запишется тогда в виде

$$\Pi = \frac{1}{2}(c\ell_2^2 - \mathrm{mg}\, y_C)\varphi^2 + (cf_{ст}\, l_2 - \mathrm{mg}\, x_C)\varphi.$$

Согласно принципу Лагранжа, в положении равновесия производная от потенциальной энергии равна нулю:

$$\left.\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=0} = 0,$$

откуда получаем

$$cf_{ст}\, l_2 - \mathrm{mg}\, x_C = 0. \qquad (*)$$

Это уравнение позволяет определить статическую деформацию:

$$f_{ст} = \frac{\mathrm{mg}x_C}{c\ell_2} = 0{,}029 \text{ м}.$$

С учетом равенства (*) потенциальная энергия упрощается:

$$\Pi = \frac{1}{2}(c\ell_2^2 - \mathrm{mg}\, y_C)\varphi^2, \text{ то есть} \quad c_{11} = c\ell_2^2 - \mathrm{mg}\, y_C \approx 9608 \text{ Н·м}.$$

При этом условие устойчивости положения равновесия, а именно $c_{11} > 0$ оказалось выполненным.

3. Получение уравнения колебаний.

Определяем собственную частоту колебаний системы

$$k = \sqrt{\frac{c_{11}}{a_{11}}} \approx 12{,}3\ \text{с}^{-1}$$

и период колебаний $\quad T = \dfrac{2\pi}{k} \approx 0{,}51$ с.

Общее решение уравнения колебаний имеет вид $\varphi = A\sin(kt + \alpha)$.

Постоянные интегрирования, а именно: A – амплитуда колебаний и α – начальная фаза колебаний, определяются из начальных условий (при $t = 0$: $\varphi = 0$; $\dot{\varphi} = 0{,}24$ рад/с). С учетом выражения для угловой скорости $\dot{\varphi} = Ak\cos(kt + \alpha)$ получим $0 = A\sin\alpha$; $0{,}24 = Ak\cos\alpha$, откуда $\alpha = 0$, и $A = 0{,}0195$ рад.

Уравнение малых свободных колебаний рамы принимает вид

$$\varphi = 0{,}0195\sin 12{,}3t.$$

2. Исследование малых затухающих колебаний ($b \neq 0$, $\bar{F} = 0$).

Учтем теперь влияние силы сопротивления $\bar{R} = -b\bar{\upsilon}_B$ со стороны вязкого демпфера на свободные колебания рамы. Дифференциальное уравнение малых затухающих колебаний имеет вид $\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = 0$, где $2n = \dfrac{b_{11}}{\alpha_{11}}$, b_{11} – - обобщенный коэффициент сопротивления. Для определения коэффициента b_{11} диссипативную функцию (функции рассеяния) для данной системы следует представить в виде квадратичной формы обобщенной скорости $D = \dfrac{1}{2}b_{11}\dot{q}^2$.

Учитывая, что скорость точки прикрепления демпфера $\upsilon_B = l_1\omega = l_1\dot{\varphi}$,

найдем $$D = \frac{1}{2}b\upsilon_B^2 = \frac{1}{2}b\ell_1^2\dot{\varphi}^2.$$

Таким образом, $b_{11} = b\ell_1^2 = 190$ Н·с·м, и

$$n = \frac{b_{11}}{2a_{11}} = 1{,}5\ \text{с}^{-1}.$$

Так как $n < k$ (случай малого сопротивления), то будут иметь место затухающие колебания.

Общее решение уравнения затухающих колебаний имеет вид

$$\varphi = Ae^{-nt}\sin(k^* t + \alpha),$$

где $k^* = \sqrt{k^2 - n^2} = 12{,}2\ \text{с}^{-1}$ – частота затухающих колебаний.

Период затухающих колебаний равен

$$T^* = \frac{2\pi}{k^*} \approx 0{,}515\ \text{с}.$$

Определяя постоянные интегрирования из начальных условий, находим, что $\alpha = 0$, и $A = 0{,}0197$ рад.

Уравнение затухающих колебаний имеет вид $\varphi = 0{,}0197e^{-1{,}5t}\sin 12{,}2t$.

Декремент колебаний (уменьшение амплитуды за один период колебаний) равен $e^{-nT^*} = 0{,}462$.

3. Исследование чисто вынужденных колебаний.

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний с учетом сопротивления имеет вид $\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = h \sin pt$, где $h = \dfrac{Q_0}{a_{11}}$; Q_0 - амплитуда обобщенной вынуждающей силы.

Обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате q = φ, равна коэффициенту при возможной скорости в выражении возможной мощности $N = Q\dot{q} = F_0 \sin pt \cdot l_2 \dot{\varphi}$ или коэффициенту при вариации обобщенной координаты $\delta\varphi$ в выражении возможной работы $\delta A = Q\delta q = F_0 \sin pt \cdot l_2 \delta\varphi$.

Имеем $Q = F_0 l_2 \sin pt$; $Q_0 = F_0 l_2 = 100$ Н·м; $h = \dfrac{Q_0}{a_{11}} = 1{,}58$ с$^{-1}$.

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения представляется суммой двух слагаемых: $\varphi = \varphi_{OO} + \tilde{\varphi}$.

Первое слагаемое φ_{OO}, определяющее общее решение соответствующего однородного уравнения, описывает колебания с собственной частотой k, которые при наличии сопротивления затухают.

Второе слагаемое $\tilde{\varphi}$ (чисто вынужденные колебания) является частным решением уравнения колебаний и имеет вид $\tilde{\varphi} = B \sin(pt - \varepsilon)$.

Эти колебания происходят с частотой вынуждающей силы и не затухают даже при наличии сопротивления. Амплитуду B и сдвиг фазы ε найдем по известным формулам:

$$B = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}} = 0{,}0177 \text{ рад};$$

$$\varepsilon = \operatorname{arctg}\frac{2np}{k^2 - p^2} = 0{,}268 \text{ рад}.$$

Уравнение установившихся вынужденных колебаний при наличии сопротивления принимает вид

$$\tilde{\varphi} = 0{,}0177 \sin(8t - 0{,}268).$$

При отсутствии сопротивления (b = 0, n = 0) получаем

$$B = \frac{h}{k^2 - p^2} = 0{,}0181 \text{ рад}; \quad \tilde{\varphi} = 0{,}0181 \sin 8t.$$

О т в е т : 1) $\varphi = 0{,}0195 \sin 12{,}3t$;

2) $\varphi = 0{,}0197 e^{-1{,}5t} \sin 12{,}2t$; $e^{-nT^*} = 0{,}462$;

3) $\tilde{\varphi} = 0{,}0177 \sin(8t - 0{,}268)$; $\tilde{\varphi} = 0{,}0181 \sin 8t$.

ОТВЕТЫ

№	k, 1/с	B, рад
1.	11,6	0,00928
2.	19,1	0,0145
3.	3,61	0,00846
4.	10,7	0,00462
5.	11,5	0,0102
6.	9,63	0,00185
7.	24,6	0,247
8.	16,7	0,0133
9.	11,3	0,00670
10.	14,0	0,00828
11.	4,61	0,00695
12.	16,8	0,0199
13.	20,5	0,0227
14.	13,0	0,0155
15.	14,1	0,0108

№	k, 1/с	B, рад
16.	5,42	0,00671
17.	4,45	0,00318
18.	12,1	0,00409
19.	6,91	0,00118
20.	15,8	0,00792
21.	17,1	0,00782
22.	12,1	0,0160
23.	8,25	0,00336
24.	10,9	0,0113
25.	13,3	0,00554
26.	32,2	0,00185
27.	23,5	0,0185
28.	5,82	0,00217
29.	15,4	0,00673
30.	8,57	0,00256

Приложение 1

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

КАФЕДРА ТЕХНИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ И ИНЖЕНЕРНОЙ ГРАФИКИ

Контрольная (расчетно-графическая работа)

по теоретической механике

Выполнил: Иванов А.А.
Группа: М-2-1
Шифр

Проверил: к.т.н., доц.
Пермякова В.В.

Москва – 2015

Содержание