ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ» (МГТУ ГА)**

Кафедра экономики и управления на воздушном транспорте
В.В. Андрианов

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ УПРАВЛЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВОМ

ПОСОБИЕ
по подготовке к практическим занятиям

для студентов III курса
направления 190700 (23.03.01)
очной формы обучения

Москва-2015

ББК 33.05
А65

Рецензент канд. экон. наук, доц. Н.И. Степанова

Андрианов В.В.

А65 Экономико-математические методы управления производством: пособие по подготовке к практическим занятиям. - М.: МГТУ ГА, 2015. - 44 с.

Данное пособие издается в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Экономико-математические методы управления производством» по Учебному плану для студентов III курса направления 190700 (23.03.01) очной формы обучения.

Рассмотрено и одобрено на заседаниях кафедры 12.03.15 г. и методического совета 19.03.15 г.

Подписано в печать 27.03.2015 г.

Печать офсетная	Формат 60x84/16	2,31 уч.-изд. л.
2,56 усл. печ.л.	Заказ № 1984/	Тираж 100 экз.

Московский государственный технический университет ГА
125993 Москва, Кронштадтский бульвар, д.20
Редакционно-издательский отдел
125493 Москва, ул. Пулковская, д.6а

Практическое занятие 1

Формирование производственного плана процедурами матричной алгебры

Постановка задачи

Предприятие выпускает 3 продукта и состоит из 3-х цехов: двух основных и вспомогательного. Каждый цех выпускает один продукт. В табл.1.1 приведены коэффициенты расхода (прямые затраты) $A = a_{ij}$ - единиц продукции i-го цеха на единицу выпускаемой продукции и число реализуемых единиц продукции y_i i-го цеха (конечный продукт). Экономико-математическая модель баланса производства и потребления имеет вид $x_i-(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+a_{i3}x_3) = y_i$ (1.1)

или $X - A * X = Y$. (1.2)

Таблица 1.1.

Расходные коэффициенты

Цех	**Прямы затраты матрица A = a_{ij}**			**Конечный продукт y_i**
	0.0	**0.2**	**0.0**	**350**
	0.1	**0.0**	**0.3**	**250**
	0.0	**0.4**	**0.0**	**350**

В табл.1.2 даны нормы расхода ресурсов: сырья а, сырья б, топлива и затрат труда на 1 ед. продукции каждого цеха; с - стоимость единицы каждого ресурса.

Таблица 1.2.

Нормы расхода и стоимости единицы ресурсов

Вид ресурса	**Нормы расхода ресурсов R=r_{ij}**			**Цена 1 ед.**
	1	**2**	**3**	**4**
Сырье а	**1.1**	**1.0**	**0.6**	**2.0**
Сырье б	**0.2**	**0.5**	**1.0**	**5.0**
Топливо	**2.0**	**1.5**	**2.2**	**3.0**
Трудозатраты	**14.0**	**25.0**	**22.0**	**1.0**

***Необходимо** определить*:

X валовой выпуск продукции для каждого цеха X = (x1, x2, x3);

К коэффициенты косвенных затрат;

Р суммарный расход сырья а, сырья б, топлива и трудовых ресурсов;

RR коэффициенты прямых затрат сырья **а**, сырья **б**, топлива и труда на единицу конечной продукции каждого цеха;

PC расход сырья, топлива и трудовых ресурсов по цехам;

PR расходы по цехам на всю производственную программу;

PZ производственные затраты на единицу конечной продукции.

Поскольку $X–A*X=Y$ или $(E-A)*X =Y$, то $X = (E-A)^{-1}*Y = S^{-1}*Y$. (1.3)

Матрица $S^{-1}=(E-A)^{-1}$ содержит коэффициенты полных производственных затрат.

Алгоритм решения задачи 1 *вычисляет:*

Шаг 1. Матрицу $S = (E - A)$. (1.4)

$$\begin{vmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0.0 & 0.2 & 0.0 \\ 0.1 & 0.0 & 0.3 \\ 0.0 & 0.4 & 0.0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1.00 & -0.2 & 0.0 \\ -0.1 & 1.00 & -0.3 \\ 0.0 & -0.4 & 1.00 \end{vmatrix}$$

Шаг 2. Матрицу коэффициентов полных *производственных затрат*, обращая (E - A) алгоритмом Жордана -Гаусса (рис.1.1) $S^{-1} = (E - A)^{-1}$. (1.5)

Матрица (Е-А)	**[1.00]**	-0.20	0.00	1.00	0.00	0.00	Матрица Е
	-0.20	1.00	-0.30	0.00	1.00	0.00	
	0.00	-0.40	1.00	0.00	0.00	1.00	
Итерация 1	1.00	-0.20	0.00	1.00	0.00	0.00	
	0.00	**[0.98]**	-0.30	0.10	1.00	0.00	
	0.00	-0.40	1.00	0.00	0.00	1.00	
Итерация 2	1.00	0.00	-0.06	1.02	0.20	0.00	
	0.00	1.00	-0.31	0.10	1.02	1.00	(1.5)
	0.00	0.00	**[0.88]**	0.04	0.41	0.00	
Итерация 3	1.00	0.00	0.00	**1.02**	**0.23**	**0.07**	Матрица $(E-A)^{-1}$
	0.00	1.00	0.00	**0.12**	**1.16**	**0.35**	
	0.00	0.00	1.00	**0.05**	**0.47**	**1.14**	

Рис.1.1. Обращение матрицы (Е-А) алгоритмом Жордана-Гаусса

Шаг 3. Валовой выпуск продукции *цехов* $(E - A)^{-1} * Y = X$. (1.6)

Расчеты на ЭВМ

$$\begin{vmatrix} 1.02 & 0.23 & 0.07 \\ 0.12 & 1.16 & 0.35 \\ 0.05 & 0.47 & 1.14 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 350 \\ 250 \\ 350 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 441 \\ 453 \\ 531 \end{vmatrix}$$

Расчеты на калькуляторе

1.02*350+0.23*250+0.07*350=357+57.5+24.5 = **439**
0.12*350+1.16*250+0.35*350=42+290+122.5 = **454**
0.05*350+0.47*250+1.14*350=17.5+117.5+399=**534**

Шаг 4. Программу производства (табл.1.3) $z_{ik}= \sum a_{ik*} x_k$ (1.7)

Таблица 1.3.

Программа производства

Цех	**Внутреннее потребление**			**Итого**	**Конечный продукт**	**Валовой продукт**
	1	**2**	**3**			
1	**0**	**91**	**0**	**91**	**350**	**441**
2	**51**	**0**	**152**	**203**	**250**	**453**
3	**0**	**181**	**0**	**181**	**350**	**531**

Шаг 5. Матрицу коэффициентов косвенных затрат $(E-A)^{-1}-A=K$ (1.8)

$$\begin{vmatrix} 1.02 & 0.23 & 0.07 \\ 0.12 & 1.16 & 0.35 \\ 0.05 & 0.47 & 1.14 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0.00 & 0.20 & 0.00 \\ 0.10 & 0.00 & 0.30 \\ 0.00 & 0.40 & 0.00 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1.02 & 0.03 & 0.07 \\ 0.02 & 1.16 & 0.05 \\ 0.05 & 0.07 & 1.14 \end{vmatrix}$$

Шаг 6. Расход сырья а и в, топлива и труда $R*X=P$. (1.9)

Расчеты на ЭВМ

$$\begin{vmatrix} 1.1 & 1.0 & 0.6 \\ 0.2 & 0.5 & 1.0 \\ 2.0 & 1.5 & 2.2 \\ 14 & 25 & 22 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 441 \\ 453 \\ 531 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1257 \\ 846 \\ 2731 \\ 29198 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Сырье а} \\ \text{Сырье б} \\ \text{топливо} \\ \text{Чел.-ч.} \end{matrix}$$

Расчеты на калькуляторе

1.1*439+1*454+0.6*534=482.5+439 + 320.4 = **1242**
0.2*439+0.5*454+1*534=87.8+227+534 = **849**
2*439+1.5*454+2.2*534=878+681+1174.8 = **2734**
14*439+25*454+22*534=6146+11350+11748= **29244**

Шаг 7. Расход ресурсов на ед. конечной продукции $R*(E -A)^{-1}=RR$ (1.10)

Расчеты на ЭВМ

$$\begin{vmatrix} 1.1 & 1.0 & 0.6 \\ 0.2 & 0.5 & 1.0 \\ 2.0 & 1.5 & 2.2 \\ 14 & 25 & 22 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 1.02 & 0.23 & 0.07 \\ 0.12 & 1.16 & 0.35 \\ 0.05 & 0.47 & 1.14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1.27 & 1.70 & 1.11 \\ 0.31 & 1.09 & 1.33 \\ 2.32 & 3.23 & 3.17 \\ 18.26 & 42.56 & 34.77 \end{vmatrix}$$

Расчеты на калькуляторе

1.272	1.695	1.111
0.314	1.096	1.329
2.330	3.234	3.173
18.38	42.56	34.87

Шаг 8. Расход ресурсов по каждому цеху $X^{\sim}*R=PC$. (1.11)

Расчеты на ЭВМ

$$\begin{vmatrix} 441 & 453 & 531 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1.1 & 1.0 & 0.6 \\ 0.2 & 0.5 & 1.0 \\ 2.0 & 1.5 & 2.2 \\ 14.0 & 25.0 & 22.0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 485 & 453 & 319 \\ 88 & 226 & 531 \\ 882 & 680 & 1168 \\ 6174 & 11325 & 11682 \end{vmatrix}$$

Расчеты на калькуляторе

483	454	320
88	227	534
878	681	1175
6146	11350	11748

485 = 441 * 1.1; 453 = 453 * 1.0; 319 = 531 * 0.6; и т.д.

Шаг 9. Расходы цехов $\tilde{c}$*PC = PR, где $\tilde{c}$ - цены 1 ед. ресурсов. (1.12)

Расчеты на ЭВМ | Расчеты на калькуляторе

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 485 & 453 & 319 \\ 88 & 226 & 531 \\ 882 & 680 & 1168 \\ 6174 & 11325 & 11682 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 10231 & 15402 & 18479 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 10186 & 15436 & 18583 \end{vmatrix}$$

Шаг 10. Затраты на 1 ед. конечной продукции $\tilde{c}$*RR=PZ. (1.13)

Расчеты на ЭВМ | Расчеты на калькуляторе

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 1.27 & 1.70 & 1.11 \\ 0.31 & 1.09 & 1.33 \\ 2.32 & 3.23 & 3.17 \\ 18.26 & 42.56 & 34.77 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 29.3 & 61.1 & 53.1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 29.48 & 61.14 & 53.26 \end{vmatrix}$$

Таблица 1.4.

Исходные данные вариантов задачи 1

	Вариант 1				***Вариант 2***				***Вариант 3***			
Цех 1	**0.0**	**0.1**	**0.0**	**305**	**0.0**	**0.1**	**0.0**	**350**	**0.0**	**0.2**	**0.0**	**300**
Цех 2	**0.1**	**0.0**	**0.1**	**310**	**0.3**	**0.0**	**0.3**	**220**	**0.4**	**0.0**	**0.3**	**230**
Цех 3	**0.0**	**0.2**	**0.1**	**405**	**0.0**	**0.1**	**0.2**	**330**	**0.0**	**0.1**	**0.2**	**400**
Сырье а	**1.3**	**2.3**	**0.7**	**5**	**1.2**	**2.3**	**1.2**	**4**	**1.6**	**2.3**	**0.9**	**3**
Сырье а	**1.0**	**0.5**	**1.5**	**11**	**1.0**	**1.6**	**2.1**	**3**	**1.0**	**0.3**	**1.4**	**5**
Топливо	**2.1**	**1.7**	**2.1**	**2**	**2.2**	**1.8**	**3.1**	**1**	**1.3**	**1.4**	**2.1**	**2**
Труд ч-ч	**10**	**21**	**25**	**1.1**	**12**	**13**	**11**	**1.1**	**15**	**10**	**15**	**1.2**
	Вариант 4				***Вариант 5***				***Вариант 6***			
Цех 1	**0.0**	**0.2**	**0.0**	**405**	**0.0**	**0.6**	**0.0**	**230**	**0.0**	**0.1**	**0.0**	**400**
Цех 2	**0.1**	**0.1**	**0.3**	**310**	**0.4**	**0.0**	**0.2**	**320**	**0.2**	**0.0**	**0.1**	**300**
Цех 3	**0.0**	**0.2**	**0.3**	**305**	**0.0**	**0.2**	**0.1**	**410**	**0.0**	**0.1**	**0.2**	**200**
Сырье а	**1.2**	**2.1**	**0.5**	**4**	**0.1**	**2.5**	**1.4**	**1**	**1.3**	**2.1**	**0.6**	**3**
Сырье а	**0.1**	**0.2**	**1.4**	**13**	**0.2**	**1.3**	**2.3**	**13**	**0.2**	**0.2**	**1.5**	**11**
Топливо	**2.0**	**1.3**	**2.6**	**5**	**2.3**	**1.3**	**3.1**	**2**	**1.3**	**1.4**	**2.7**	**2**
Труд ч-ч	**10**	**20**	**15**	**1.1**	**12**	**13**	**14**	**1.1**	**15**	**11**	**15**	**1.2**

Практическое занятие 2

Прогнозирования системы показателей алгоритмом цепей Маркова

Постановка задачи

Имеется выборка А из n=100 наблюдений x_i - t подготовки самолетов к вылету (мин) {X} = **{187, 143, 250, 140, 131, 110, 90, 79, 199, 177, 143, 226, 150, 197, 144, 63, 144, 192, 200, 162 , 72, 171, 158, 156, 155, 91, 151, 140, 129, 121, 140, 125, 132, 203, 181, 150, 195, 243, 167, 242, 143, 116, 216, 182, 134, 148, 89, 152, 192, 236, 100, 220, 180, 175,163, 163, 94, 156, 150, 175, 216, 240,108, 70, 164, 83, 170, 156, 151, 173, 156, 66, 110, 66, 166, 86, 91, 128, 128, 105, 142, 130, 144, 125, 170, 155, 218, 201, 146, 64, 214, 131, 190, 191, 50, 112, 112, 155, 232, 144}**, для которой вычислены:

1) μ^* - точечная оценка математического ожидания (МО) {X};

$$\mu^* = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}, \qquad i=1,n; \qquad (2.1)$$

2) точечная оценка среднего квадратичного отклонения (СКО) {X}

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum (x_i - \mu^*)^2} = 45.9; \qquad (2.2)$$

3) максимальное и минимальное значения x_i x_{max}=250 и x_{min}=50;

4) число интервалов $n_и$ разбиения упорядоченного от x_{min} до x_{max} ряда $\{x_i\}$

$$n_и = 5Log(n) = 5Log(100) = 10\ ; \qquad (2.3)$$

5) количества попаданий n_i в интервалы (табл.2.1).

Таблица 2.1.

Количества попаданий в интервалы

Интервал	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
n_i	**6**	**8**	**8**	**11**	**20**	**20**	**10**	**8**	**5**	**4**

Необходимо найти закон распределения {X}, оценив гипотезы о законах Пуассона, Гаусса и экспоненциальном законе.

Алгоритм решения задачи 2 *вычисляет:*

Шаг 1. Ширину интервала $$\Delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{n_и} = \frac{250-50}{10} = 20 \quad . \qquad (2.4)$$

Шаг 2. Границы интервалов, начиная с x_{min}=50 до x_{max}=250 (табл.2.2.).

Таблица 2.2.

Границы интервалов

Интервал	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Граница левая Граница правая	**50- 70**	**71- 91**	**92- 112**	**113- 133**	**134- 154**	**155- 175**	**176- 196**	**197- 217**	**218- 238**	**239- 259**

Шаг 3. Вероятности попаданий p^*_i {X} в i -й интервал $p_i^* = \frac{n_i^*}{n}$. (2.5)

Шаг 4. Оценки функции плотности *распределения* $f_x^* = \frac{p_i^*}{\Delta x}$. (2.6)

Шаг 5. Оценки функции распределения $F^*(x) = \sum p_i^*$. (2.7)

Таблица 2.3.

Расчетные значения n i , p i , f (x) , F (x)

Интервал	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Границы	**50- 70**	**71- 91**	**92- 112**	**113- 133**	**134- 154**	**155- 175**	**176- 196**	**197- 217**	**218- 238**	**239- 259**
n_i	**6**	**8**	**8**	**11**	**20**	**20**	**10**	**8**	**5**	**4**
p^*_i f^*_i F^*_i	**0.060 0.003 0.060**	**0.080 0.004 0.140**	**0.080 0.004 0.220**	**0.110 0.005 0.330**	**0.200 0.010 0.530**	**0.200 0.010 0.730**	**0.100 0.005 0.830**	**0.080 0.004 0.910**	**0.050 0.003 0.960**	**0.040 0.002 1.000**

Оценивая гипотезы Но о закон распределения {X}, находим:

Шаг 6. Параметры закона по теоретическим моделям табл.2.4.

Шаг 7. Теоретические точечные оценки $F_т(x)$ и $f_т(x)$ (табл.2.4).

Шаг 8. Теоретические вероятности попадания p_{Ti} в i-й интервал

$$p_{T\,i} = F_т(x_i) - F_т(x_{i-1}) \quad , \qquad (2.8)$$

где $F_т(x_i)$ и $F_т(x_{т\,i-1})$ - $F_т(x)$ вычислены по моделям табл.2.4.

Таблица 2.4.

Модели законов распределения

Закон	**Параметр**	**Модели F(x) и f(x)**
Пуассона	$\lambda = \sum_{i=1}^{n_и} \frac{i * n_i}{n};$	$F_T(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda};\ f_T(x) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda};\ 0 < n < 4;\ k = 0,1,..n;$

		Продолжение табл.2.4
Гаусса	$\mu=\mu^*$; $\sigma^2=\sigma^{*2}$;	$F_T(x)=\int f_T(x)dx;\ f_T(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}};0<x<4;$
Экспоненциальный	$\lambda=\dfrac{1}{\mu}$;	$F_T(x)=1-e^{-\lambda};\quad f_T(x)=\lambda e^{-\lambda x};\quad 0<x<4;$

Шаг 9. Расчетную оценку критерия Пирсона χ^{*2} $0<n<4;$

$$\chi^{2*}=\sum_{i=1}^{n_u}\frac{(n_i-np_{Tii})^2}{np_{Ti}}, \qquad (2.9)$$

где $n_и$ - количество интервалов;

p_{Ti} - теоретическая вероятность попадания в i-й интервал.

Шаг 10. Сравниваем $\chi^{*2}\le\chi^{*2}_{v,p\ таб}$, (2.10)

где $\chi^{*2}_{v,p\ таб}$ - табличное значение критерия хи-квадрат, при $v=(n_и-n_p-1)$ и $p=(1-p_d)$ (табл.2.2. П. I I.);

p_d - доверительная вероятность (рекомендуется p_d=95%);

n_p - число параметров в теоретической модели закона.

Гипотеза Ho не отвергается если $\chi^{*2}\le\chi^{*2}_{v,p\ таб}$

Оценка гипотезы Ho о распределении {X} по закону Гаусса

Шаг 1. Выдвигаем гипотезу Ho о нормальном законе распределения {X} с параметрами μ^*=150.9 и σ^*=45.9. Модель закона в табл.2.4.

Шаг 2. Определяем теоретические $F_{mi}=\Phi(Z_i)$, где $Z_i=(\dfrac{x_i-\mu_x}{\sigma_x})$ из табл.2.1 П.2, в которой $\Phi(-Z_i)=1-\Phi(Z_i)$.

Шаг 3. Находим p_{Ti} по (2.8): $p_{T1}=F_{T1}=0.039$;$p_{T2}=F_{T2}-F_{T1}=0.093-0.039=0.054$

Шаг 4. Вычисляем теоретические F_{mi} и p_{Ti} *для закона Гаусса* (табл.2.5).

Таблица 2.5.

Теоретические F_{Ti} и p_{Ti} для закона Гаусса

Интервал	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Границы	**50 - 70**	**71 - 91**	**92 - 112**	**113-133**	**134-154**	**155-175**	**176-196**	**197-217**	**218-238**	**239-259**
x_i - μ	**-80.92**	**-60.92**	**-40.92**	**-20.92**	**-0.92**	**19.08**	**39.08**	**59.08**	**79.08**	**99.08**
Z_i	**-1.76**	**-1.33**	**-0.89**	**-0.46**	**-0.02**	**0.42**	**0.85**	**1.29**	**1.72**	**2.16**
F_{Ti}	**0.039**	**0.093**	**0.188**	**0.328**	**0.496**	**0.665**	**0.805**	**0.903**	**0.958**	**0.985**
p_{Ti}	**0.039**	**0.054**	**0.095**	**0.139**	**0.168**	**0.169**	**0.141**	**0.097**	**0.056**	**0.026**

Шаг 5. Вычисляем χ^{*2}

$$\chi^{2*}=\sum_{i=1}^{n_u}\frac{(n_i-np_{Tii})^2}{np_{Ti}}=\frac{(6-100*0.039)^2}{100*0.039}+\frac{(8-100*0.054)^2}{100*0.054}+\frac{(8-100*0.095)^2}{100*0.095}+..+..=6.60.$$

Шаг 6. Сравниваем $\chi^{*2}_{v,p\ таб}$ =14.07 ($v=n_и-n_p-1$=10-2-1=7 и $p=1-p_d$=1- 0.95= =0.05, из табл.2.2.П I I) с расчетным x^{*2}=6.60.

Поскольку χ^{*2} = 6.60 < $\chi^{*2}_{v,p\ таб}$ = 14.07, гипотеза Ho не отвергается.

Оценка гипотезы Но о распределении {X} *по закону Пуассона*

Шаг 1*. *Выдвигаем гипотезу Но *о распределении X по закону Пуассона* с параметром $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \frac{i * n_i}{n} = 5.29$. По табл.2.2 П II. вычисляем e $^{-5.29}$ = 0.005.

Шаг 2*. *Определяем теоретические F_{mi}, вычисляя слагаемые модели

k=0; $F_{\text{т}i} = \sum_{k=0}^{n_u} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = \frac{1}{1} 0.005 = 0.005;$

k=1; $F_{\text{т}i} = \sum_{k=0}^{n_u} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^0}{0!} * \frac{\lambda}{1} * e^{-\lambda} = \frac{\lambda^0}{0!} * e^{-\lambda} * \frac{\lambda}{1} = 0.005 * \frac{\lambda}{1} = 0.005 * \frac{5.29}{1} = 0.027;$

k=2; $F_{\text{т}i} = \sum_{k=0}^{n_u} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^1}{1!} * \frac{\lambda}{2} * e^{-\lambda} = \frac{\lambda^1}{1!} * e^{-\lambda} * \frac{\lambda}{2} = 0.027 * \frac{\lambda}{2} = 0.071;$

k=3; $F_{\text{т}i} = \sum_{k=0}^{n_u} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = 0.071 * \frac{\lambda}{3} = 0.124;$ k=4; $F_{\text{т}i} = \sum_{k=0}^{n_u} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = 0.124 * \frac{\lambda}{4} = 0.165;$ и т.д.

Таблица 2.6.

Теоретические $F_{\text{т}i}$ и $p_{\text{т}i}$ для закона Пуассона

Интервал	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$F_{\text{т}i}$	0.032	0.102	0.227	0.391	0.565	0.719	0.835	0.911	0.956	0.980
$p_{\text{т}i}$	0.032	0.071	0.124	0.165	0.174	0.153	0.116	0.077	0.045	0.024

Шаг 3*. *Находим поинтервальные квантили критерия Пирсона χ^{*2}

χ^{*2}=2.52+0.13+1.58+1.81+0.39+1.41+0.22+0.01+0.05+1.09=9.22 .

Поскольку $\chi^{*2}=9.22<\chi^{*2}_{v,p\ \text{таб}}=15.5$ (при v=10-1-1=8 и $p=1-p_d=1-0.95=0.05$), гипотеза Но не отвергается.

Оценка гипотезы Но об экспоненциальном законе

Шаг 1*. *Выдвигаем гипотезу Но об экспоненциальном законе распределения {X } с параметром $\lambda=1/\mu^* = 0.0066$.

Шаг 2. Определяем теоретические $F_{\text{т}i}(x_i)$, подставляя x_i правой границы интервалов в модель закона. Для i=1 $F_{\text{т}i}=1(x=50)=1-e^{-0.0066*50}=1-e^{-0.33} = 0.375$.

Шаг 3. Находим теоретические вероятности $p_{\text{т}i}=F_{\text{т}i}-F_{\text{т}i-1}$

$p_{\text{т}1}= F_{\text{т}1}= 0.375$; $p_{\text{т}2}=0.46-0.375 = 0.085$ и т.д. Результаты в табл.2.7.

Таблица 2.7.

Теоретические $F_{\text{т}i}$ и $p_{\text{т}i}$ для экспоненциального закона

Интервал	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$F_{\text{т}i}$	0.375	0.460	0.533	0.597	0.651	0.699	0.739	0.775	0.805	0.832
$P_{\text{т}i}$	0.375	0.085	0.073	0.063	0.055	0.047	0.041	0.035	0.031	0.026

Шаг 4. χ^{*2}=26.49+0.03+0.06+3.44+38.57+49.3+8.55+5.64+1.24+0.70=134.02

Шаг 5. Поскольку $\chi^{*2}=134.02>\chi^{*2}_{v,p\ \text{таб}}=15.51$ (при v=10-1-1=8 и $p = 1-p_d =$ $=1-0.95 = 0.05$) , гипотеза Но об экспоненциальном законе отвергается.

Так как для закона Гаусса $x^{*2}=6.6 < x^{*2}=9.22$ закона Пуассона, принимаем гипотезу о законе Гаусса.

Таблица 2.8.

Исходные данные вариантов задачи 2

$n_и$	μ	σ	x_{max}	x_{min}	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7	n_8	n_9	n_{10}
1	33.09	2.29	39	30	7	5	14	19	20	10	8	9	4	4
2	46.22	6.89	60	30	4	2	9	20	14	13	14	7	12	5
3	47.68	7.06	67	35	11	10	16	18	16	14	8	3	1	3
4	36.06	36.69	180	1	46	15	15	11	4	3	2	2	1	1
5	46.91	11.92	89	24	8	14	18	26	14	12	5	1	0	2
6	46.69	11.85	78	23	5	5	23	18	14	16	6	6	5	2

Практическое занятие 3

ЭММ прогнозирования системы показателей алгоритмом цепей Маркова

Постановка задачи

Задана матрица A={a_{ij}} i=1,m; j=1,n; (табл.3.1) где a_{ij} –система показателей за n периодов наблюдений. Надо спрогнозировать структуру {a_{ij}}.

Алгоритм решения задачи

Шаг 1. Относительные % доли t_{ij} (табл.3.2), деля a_{ij}*100% на сумму

Таблица 3.1.

Численности работников по категориям

Категории работников/Годы	***2011***	***2012***	***2013***	***2014***
Производственные рабочие	266	267	268	269
Вспомогательные рабочие	114	120	127	132
Инженерно-технические работники	66	70	70	72
Служащие и МОП	32	33	35	41
Итого:	***478***	***490***	***500***	***514***

элементов j-го столбца табл.3.1 и переходя от a_i к t_{jm}

$$t_i = \frac{a_i}{\sum_{j=1}^{n} a_j} *100\% \quad j=1,n. \qquad (3.1)$$

Шаг 2. Относительные изменения $c_{i,k}=t_{i,j+1}-t_{i,j}$(табл.3.3). Например,

Таблица 3.2.

Относительные % доли структуры

Категории работников \ Годы	***2011***	***2012***	***2013***	***2014***
Производственные рабочие	55.65	54.49	53.60	52.33
Вспомогательные рабочие	23.85	24.49	25.40	25.68
Инженерно-технические работники	13.81	14.29	14.00	14.01
Служащие и МОП	6.69	6.73	7.00	7.98
Итого:	*100%*	*100%*	*100%*	*100%*

54.49-55.65=-1.16. Суммируем по столбцам c_{ik}>0 и записываем суммы внизу табл.3.3. C_{ik} >0 в столбцах табл.3.3 отображают прирост числа работников i-й категории в k-м периоде за счет уменьшения категорий c_{ik}<0. Сумма c_{ik}<0 в столбцах табл.3.3 равна сумме c_{ik}>0.

Шаг 3. Доли приростов численностей работников по категориям от года к году, оценивая отношения c_{ik} к суммам c_{ik}>0 в столбцах: 0.64/1.16=0.55; 0.48/1.16=0.41 и 0.04/1.16=0.03. Сумма 0.55+0.41+0.03=1.0 .

Таблица 3.3.

Относительные изменения

Годы	*11/12*	*12/13*	*13/14*
	@ -1.16	@ -0.89	@ -1.27
	# *0.64*	# *0.91*	# *0.28*
	# *0.48*	@ -0.29	# *0.01*
	# *0.04*	# *0.27*	# *0.98*
$\sum c_{ij+}$	*1.16*	*1.18*	*1.27*

Таблица 3.4.

Доли общего прироста

Годы	*11/12*	*12/13*	*13/14*
	0	0	0
	0.55	0.77	0.22
	0.41	0	0.01
	0.03	0.23	0.77
	1.00	*1.00*	*1.00*

Шаг 4. Матрицы D(k) изменений соседних пар лет, фиксирующие изменения в структуре работников по категориям в k-м периоде от j-го к (j+1)-му году, используя табл.3.3 и 3.4. На диагонали (табл.3.5) min a_{ij} из табл.3.2 для первой пары лет - 2011 и 2012 г.г.

Таблица 3.5.

Матрица D(1)

	54.49	0	0	0	53.60
#(+)	*0.64*	23.85	0	0	25.40
#(+)	*0.48*	0	13.81	0	14.00
#(+)	*0.04*	0	0	6.69	6.73
	54.49	23.85	13.81	6.69	100%
	@ (-)				

В столбце j=1 - доли прироста работников категорий i=2,3,4 на 0.64%, 0.48% и 0.04% за счет уменьшения числа работников категории j=1 на (0.64%+0.48%+0.04%)=1.16%. При отсутствии уменьшения работников j-й $D(k)_{ij}=0$. В D(1) записаны изменения в $\{a_{ij}\}$ за 2011/2012 г.г.

Суммы a_{ij} по столбцам j=1,4 соответствуют структуре $\{a_{ij}\}$ в 2011 г. Суммы a_{ij} по строкам i=1,4 - структуре $\{a_{ij}\}$ в 2012 г. Сумма a_{ij} правого столбца и нижней строки равны 100%. Матрицы D(k) формируются для всех пар лет: 2011/2012 (табл.3.5); 2012/2013 (табл.3.6) и 2013/2014 г.г. (табл.3.7).

Таблица 3.6.

Матрица D(2)

	53.60	0	0	0	**53.60**
#(+)	*0.69*	**24.49**	*0.22*	0	**25.40**
	0	0	**14.00**	0	**14.00**
#(+)	*0.20*	0	*0.07*	**6.73**	**7.00**
	54.49	**24.49**	**14.29**	**6.73**	100%
	@ (-)		@ (-)		

Таблица 3.7.

Матрица D(3)

	52.33	0	0	0	**52.33**
#(+)	*0.28*	**24.40**	0	0	**25.68**
#(+)	*0.01*	0	**14.00**	0	**14.01**
#(+)	*0.98*	0	0	**7.00**	**7.98**
	53.60	25.40	14.00	7.00	100%
	@ (-)				

Шаг 5. Матрицу кумулятивных изменений (табл.3.8) за 2011-2014гг.

$$S_{ij}=d(1)_{ij}+d(2)_{ij}+\ldots+d(n-1)_{ij};\ i=1,\ldots m;\ j=1,\ldots m. \qquad (3.2)$$

Шаг 6. Матрицу тенденций переходов E_{ij} (табл.3.9)

$$E_{ij} = S_{ij}/S_{m+1j};\quad i=1,..m+1;\ j=1,..m. \qquad (5.3)$$

Таблица 3.8.

Матрица S_{ij}

160.42	0.00	0.00	0.00
1.61	**73.74**	**0.22**	0.00
0.49	0.00	**41.81**	0.00
1.22	0.00	**0.06**	**20.43**
163.74	***73.74***	***42.09***	***20.43***

Таблица 3.9.

Матрица E_{ij}

0.9798	0.0000	0.0000	0.0000
0.0098	**1.0000**	**0.0053**	0.0000
0.0030	0.0000	**0.9932**	0.0000
0.0074	0.0000	**0.0015**	**1.0000**
1.0000	***1.0000***	***1.0000***	***1.0000***

Шаг 7. Ретропрогноз t_{ij} (табл.3.10), умножая E_{ij} на табл.3.2.

Таблица 3.10.

Ретропрогноз t_{ij}

Категории работников \Год	*2011*	*2012*	*2013*	*2014*
Производственные рабочие	**54.52**	**53.39**	**52.52**	**51.28**
Вспомогательные рабочие	**24.47**	**25.10**	**26.00**	**26.27**
Инженерно-технические работники	**13.88**	**14.35**	**14.06**	**14.07**
Служащие и МОП	**7.13**	**7.16**	**7.42**	**8.39**

Шаг 8. Точность воспроизвения структуры 2011-2012, вычитая табл.3.2 из табл.3.10 $D_{ij}=t^{p}_{ij}-t_{ij}$. Ошибки ретропрогноза в табл.3.11.

Таблица 3.11.

Ошибки ретропрогноза D_{ij}

Категории работников \ Год	*2011*	*2012*	*2013*	*2014*
Производственные рабочие	**-1.13**	**-1.10**	**-1.08**	**-1.06**
Вспомогательные рабочие	**0.62**	**0.61**	**0.60**	**0.59**
Инженерно-технические работники	**0.07**	**0.06**	**0.06**	**0.06**
Служащие и МОП	**0.43**	**0.43**	**0.42**	**0.41**

Шаг 9. Средние ошибки по годам: D_{ij}={0.56, 0.55, 0.54, 0.53}.

Шаг 10. Min D_{ij}=0.06% ***и max D_{ij}***=1.13% в табл.3.11. Сложив $D_{ij.}$ и разделив их сумму на число наблюдений, находим D_{ij}=0.55%.

Шаг 11. Прогноз структуры на 2015 г., умножив Е на вектор ретропрогноза % 2014 г. (табл.3.11). Результаты в табл.3.12.

Таблица 3.12.

Прогноз на 2015 г.

Категории работников /Год	*% 2015*	*Прогноз*
Производственные рабочие	**50.24**	**264**
Вспомогательные рабочие	**26.85**	**141**
Инженерно-технические работники	**14.12**	**74**
Служащие и МОП	**8.79**	**46**
Итого:	***100%***	***525***

Шаг 12. Прогноз на 2015 г.- 525 чел. (478,490,500,514) умножаем на % % доли табл.5.12 и получаем прогноз (табл. 3.12).

Таблица 3.13.

Исходные данные вариантов задачи 5														
Вариант 1					***Вариант 2***					***Вариант 3***				
266	**262**	**265**	**263**		**66**	**62**	**65**	**63**		**106**	**112**	**124**	**133**	
232	**238**	**220**	**223**		**32**	**38**	**20**	**23**		**202**	**218**	**220**	**223**	
57	**58**	**55**	**60**		**57**	**58**	**55**	**60**		**47**	**58**	**55**	**60**	
58	**50**	**45**	**44**		**58**	**50**	**45**	**44**		**48**	**50**	**45**	**44**	
613	**608**	**585**	**590**		**213**	**208**	**185**	**190**		**403**	**438**	**444**	**460**	
Вариант 4					***Вариант 5***					***Вариант 6***				
166	**162**	**165**	**169**		**166**	**162**	**165**	**163**		**236**	**244**	**265**	**273**	
132	**138**	**130**	**131**		**232**	**238**	**220**	**223**		**212**	**238**	**240**	**253**	
127	**118**	**12**	**129**		**57**	**58**	**55**	**60**		**77**	**98**	**105**	**111**	
64	**70**	**59**	**63**		**58**	**50**	**45**	**44**		**38**	**52**	**45**	**34**	
489	**488**	**479**	**492**		**513**	**508**	**485**	**490**		**563**	**632**	**655**	**671**	

Практическое занятие 4

Прогнозирования показателей полиномами Лагранжа

Постановка задачи

Задана динамика фактора ***x***. Исходные данные примера - в табл.4.1.

Таблица 4.1.

Исходные данные для прогнозирования фактора x

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y	0.47	0.55	0.58	0.67	0.51	0.58	0.65	0.71	0.73	.?.

Необходимо спрогнозироватьY методом экстраполяции тенденций полиномами Лагранжа. Метод применяют, если процесс не подвержен влиянию новых критических факторов. Max глубина P_{max}=P прогноза при известном n и min допустимой длины q для ряда $P_{\max} = \left[\frac{n-1}{q-1}\right]$ где […] – целая часть.

Методические рекомендации

Для прогноза ищем полином Лагранжа оптимальной степени. В качестве ***критерия*** его пригодности берем среднюю абсолютную погрешность прогноза. ***Полиномы Лагранжа*** формируем последовательностями разных степеней (через две точки – линейные, через три – квадратичные и т.д.). Ретропрогнозы сравниваем с фактическими значениями и выбираем полином Лагранжа, дающий min средней абсолютной погрешности прошлых значений. Если ошибки малы и тенденция сохраняется, алгоритм пригоден для прогноза.

Алгоритм решения задачи

Построим по данным табл.3.1. полиномы Лагранжа 1-й, 2-й и 3-й степеней и вычислим с их помощью значение показателя за промежуток времени 1 – 9.

Шаг 1. Вычисляем полином 1-й степени для f(3) и f(4). Итоги в табл.4.2.

Таблица 3.2.

Полином Лагранжа 1-й степени

x	Y	
1	0.47	$f(3) = \frac{(3-2)}{(1-2)} * 0.47 + \frac{(3-1)}{(2-1)} * 0.55 = -0.47 + 1.1 = 0.63$
2	0.55	
x	y	
2	0.55	$f(4) = \frac{(4-3)}{(2-3)} * 0.55 + \frac{(4-2)}{(3-2)} * 0.58 = -0.55 + 1.16 = 0.61$
3	0.58	

Шаг 2. Аналогично прогнозируем f(5), f(6), f(7), f(8), f(9)и вычисляем точечные оценки ошибок прогнозирования |0.63-0.58|=0.05; и т.д. Итоги в табл.4.3.

Таблица 4.3.

Результаты прогнозирования полиномом Лагранжа 1-й степени

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Δ_1
Факт	0.47	0.55	0.58	0.67	0.51	0.58	0.65	0.71	0.73	
Рпро			0.63	0.61	0.76	0.35	0.65	0.72	0.77	
Δ ошибка	-	-	***0.05***	***0.06***	***0.25***	***0.23***	***0.0***	***0.01***	***0.04***	***0.091***

Шаг 3. Вычисляем среднюю величину абсолютной погрешности

$$\Delta_1 = (0.05+0.06+0.25+0.23+0+0.01+0.04)/7 = 0.091$$

Шаг 4. Вычисляем полиномы 2-й степени для f(4) и f(5). Итоги в табл.4.4.

Таблица 4.4.

Полиномы Лагранжа 2-й степени

x	y	
1	0.47	$f(4)=\frac{(4-2)}{(1-2)}\frac{(4-3)}{(2-3)}*0.47+\frac{(4-1)}{(2-1)}\frac{(4-3)}{(2-3)}*0.55+\frac{(4-1)}{(3-1)}\frac{(4-2)}{(3-2)}*0.58=0.56$
2	0.55	
3	0.58	

x	y	
2	0.55	$f(5)=\frac{(5-3)}{(2-3)}\frac{(5-4)}{(3-4)}*0.55+\frac{(5-2)}{(3-2)}\frac{(5-4)}{(3-4)}*0.58+\frac{(5-2)}{(4-2)}\frac{(5-3)}{(4-3)}*0.67=0.82$
3	0.58	
4	0.67	

Аналогично прогнозируем f(6), f(7), f(8), f(9). Результаты в табл.4.5.

Таблица 4.5.

Результаты прогнозирования полиномом Лагранжа 2-й степени

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Δ_2
Факт	0.47	0.55	0.58	0.67	0.51	0.58	0.65	0.71	0.73	
Рпро	-	-	-	0.56	0.82	0.10	0.85	0.72	0.76	
δ	-	-	-	0.11	0.31	0.48	0.20	0.01	0.03	0.19

Шаг 5. Вычисляем точечные оценки ошибок прогнозирования

|0.56-0.67| =0.11, |0.51-0.82| =0.31 и т.д. Итоги в табл.4.5.

Шаг 6. Вычисляем среднюю величину абсолютной погрешности

Δ_2=(0.11+0.31+0.48+0.20+0.01+0.03)/6=0.19. Итоги в табл.4.5.

Шаг 7. Вычисляем полиномы 3-й степени для f(5) и f(6). Итоги в табл.4.6.

Таблица 4.6.

Полиномы Лагранжа 3-й степени

x	y	
1	0.47	$f(5)=\frac{(5-2)(5-3)(5-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)}*0.47+\frac{(5-1)(5-3)(5-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)}*0.55+$
2	0.55	$+\frac{(5-1)(5-2)(5-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)}*0.58+\frac{(5-1)}{(3-1)}\frac{(5-2)}{(3-2)}\frac{(5-3)}{(4-3)}*0.67=0.93$
3	0.58	
4	0.67	
x	y	
2	0.55	$f(6)=\frac{(6-3)}{(2-3)}\frac{(6-4)}{(2-4)}\frac{(6-5)}{(2-5)}*0.55+\frac{(6-2)}{(3-2)}\frac{(6-4)}{(3-4)}\frac{(6-5)}{(3-5)}*0.58+$
3	0.58	$+\frac{(6-2)}{(4-2)}\frac{(6-3)}{(4-3)}\frac{(6-5)}{(4-5)}*0.67+\frac{(6-2)}{(5-2)}\frac{(6-3)}{(5-3)}\frac{(6-4)}{(5-4)}*0.51=-0.21$
4	0.67	
5	0.51	

Аналогично прогнозируем f(6), f(7), f(8), f(9). Итоги в табл.4.7.

Таблица 4.7.

Результаты прогнозирования полиномом Лагранжа 3-й степени

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Δ_3
Факт	0.47	0.55	0.58	0.67	0.51	0.58	0.65	0.71	0.73	
Рпро	-	-	-	-	0.93	-0.21	1.36	0.49	0.75	
δ	-	-	-	-	0.42	0.79	0.71	0.22	0.02	0.43

Шаг 8. Вычисляем точечные оценки ошибок прогнозирования

|0.93-0.51| =0.42, |-0.21-0.58| =0.79 и т.д. Итоги в табл.4.7.

Шаг 9. Вычисляем среднюю величину абсолютной погрешности

Δ_3= (0.42+0.79+0.71+0.22+0.02)/5 =0.43. Итоги в табл.4.7.

Шаг 10. Сравнивая $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ находим $\Delta_{min} = \Delta_1 = 0.091$ и принимаем решение: прогноз показателя вычислять полиномом Лагранжа 1-й степени.

Шаг 11. Прогноз для k=10 вычисляем при k=8 и k=9. Итоги в табл.4.8,4.9.

Таблица 4.8.

Полином Лагранжа 1-й степени

x	Y	
1	0.71	$f(3)=\frac{(3-2)}{(1-2)}*0.71+\frac{(3-1)}{(2-1)}*0.73=-0.71+1.46=0.75$
2	0.73	

Таблица 4.9.

Результаты прогнозирования полиномом 1-й степени для К=10

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Факт	0.47	0.55	0.58	0.67	0.51	0.58	0.65	0.71	0.73			
Рпро			0.63	0.61	0.76	0.35	0.65	0.72	0.77	**0.75**		
					0.69		0.44		0.79		**0.81**	
									0.58			**0.88**
Δ ошибка	-	-	**0.05**	**0.06**	**0.25**	**0.23**	**0.0**	**0.01**	**0.04**			

Прогнозы для K≥11 рассчитываем по данным

1	3	5	7	9
0.47	0.58	0.51	0.65	0.73

через одно, начиная с последнего значения матрицы исходных данных.

Шаг 12. Прогнозируем для К=11, выполняя расчеты при k=7 и k=9.

Таблица 4.10.

Полином Лагранжа 1-й степени для К=11

x	Y	
1	0.65	$f(3)=\frac{(3-2)}{(1-2)}*0.65+\frac{(3-1)}{(2-1)}*0.73=-0.65+1.46=0.81$
2	0.73	

Шаг 13. Прогнозируем для К=12, выполняя расчеты при k=6 и k=9.

Таблица 4.11.

Полином Лагранжа 1-й степени для К=12

x	Y	
1	0.58	$f(3)=\frac{(3-2)}{(1-2)}*0.58+\frac{(3-1)}{(2-1)}*0.73=-0.58+1.46=0.88$
2	0.73	

Показатель 9-го года занижен и можно считать, что и прогноз на 12-й год завышен. Прогноз показателя полиномом 1-й степени в табл.4.9.

Таблица 4.11.

Исходные данные вариантов задачи 4

Вариант\годы	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	**82**	**89**	**93**	**96**	**97**	**99**	**101**	**104**	**111**
2	**35**	**63**	**80**	**112**	**141**	**166**	**189**	**208**	**229**
3	**38**	**46**	**58**	**66**	**75**	**86**	**96**	**104**	**115**
4	**102**	**104**	**108**	**110**	**114**	**117**	**121**	**126**	**135**
5	**130**	**142**	**156**	**171**	**187**	**199**	**204**	**215**	**228**

Практическое занятие 5

Прогнозирование с использованием ЭММ производственной функции

Постановка задачи

Цель задачи - вычислить *многофакторную производственную функцию*

$$\mathbf{Q_7} = a_0 + a_1 * x_1 + a_2 * x_2, \qquad (5.1)$$

Исходными данными в задаче 2 являются: *динамика спроса на перевозки по ВЛ* (далее обозначен **y**), динамика и прогнозы факторов $\mathbf{x_1}$ и $\mathbf{x_2}$.(см.табл.5.1).

Таблица 5.1.

Исходные данные

Q7=y	Св. член	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$
110.0	**1.0**	**11.0**	**28.0**
120.0	**1.0**	**14.0**	**34.0**
140.0	**1.0**	**15.0**	**39.0**
160.0	**1.0**	**15.0**	**43.0**
170.0	**1.0**	**16.0**	**46.0**
180.0	**1.0**	**16.0**	**48.0**
194.0	**1.0**	**15.0**	**49.0**
203.0	**1.0**	**Дано-> 14.0**	**Прогноз $\mathbf{x_2}$ = 49.3**

Искомыми являются: a_0, a_1, a_2 и критерии адекватности**.**

Алгоритм решения задачи

Минимизируем критерий метода наименьших квадратов К

$$К=\sum_i (y_i^{ф}-y_i^{p})^2+\sum_i \xi_i^2 = (y_i^{ф}-y_i^{p})^T(y_i^{ф}-y_i^{p}), \qquad (5.2)$$

где n - объем выборки;

$y_i^{ф}$ - фактические значения ***y***;

y_i^{p} - расчетные значения **y.**

Параметры уравнения $\mathbf{Q_7} = a_0 + a_1 * x_1 + a_2 * x_2$, находим, решая уравнение

$$A=(X^TX)^{-1}X^TY .$$

Шаг 1. Транспонируем матрицу X : $M_1 = X^T$. (5.3)

$$M1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 11 & 14 & 15 & 15 & 16 & 16 & 15 \\ 28 & 34 & 39 & 43 & 46 & 48 & 49 \end{vmatrix}$$

Шаг 2. Умножаем M_1 на X: $M_2 = (X^TX)$ (5.4)

$$M1= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 11 & 14 & 15 & 15 & 16 & 16 & 15 \\ 28 & 34 & 39 & 43 & 46 & 48 & 49 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 1 & 11 & 28 \\ 1 & 14 & 34 \\ 1 & 15 & 39 \\ 1 & 11 & 28 \\ 1 & 14 & 34 \\ 1 & 15 & 39 \\ 1 & 15 & 43 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7.0 & 102.0 & 287.0 \\ 102.0 & 1504.0 & 4253.0 \\ 287.0 & 4253.0 & 12131.0 \end{vmatrix}$$

1*1+1*1+1*1+1*1+1*1+1*1+1*1=7

1*1+1*11+1*14+1*15+1*11+1*14+1*15+1*15=102

1*28+1*34+1*39+1*28+1*34+1*39+1*43=287

Шаг 3. Обращаем матрицу M_2 : $M_3 = (X^TX)^{-1}$ (5.5)

M_2 =	**[7.0]**	102.0	287.0	1.0	0.0	0.0	Матрица E
	102.0	1504.0	4253.0	0.0	1.0	0.0	
	287.0	4253.0	12131.0	0.0	0.0	1.0	
Итерация 1	1.00	14.57	41.00	0.14	0.00	0.00	
	0.00	[**17.71**]	71.00	-14.57	1.00	0.00	
	0.00	71.00	364.00	-41.00	0.00	1.00	
Итерация 2	1.00	0.00	-17.40	12.13	-0.82	0.00	
	0.00	1.00	4.01	-0.82	0.06	0.00	
	0.00	0.00	[**79.43**]	17.40	-4.01	1.00	
Итерация 3	1.00	0.00	0.00	***15.94***	***-1.70***	***0.22***	Матрица M_3
	0.00	1.00	0.00	***-1.70***	***0.26***	***-0.05***	
	0.00	0.00	1.00	***0.22***	***-0.05***	***0.01***	

Шаг 4. Умножаем M_2 на M_1: $$M_4 = (X^T X)^{-1} X^T \qquad (5.6)$$

$$\begin{vmatrix} 15.94 & -1.70 & 0.22 \\ -1.70 & 0.26 & -0.05 \\ 0.22 & -0.05 & 0.01 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 11 & 14 & 15 & 15 & 16 & 16 & 15 \\ 28 & 34 & 39 & 43 & 46 & 48 & 49 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3.369 & -0.419 & -1.024 & -0.148 & -1.191 & -0.753 & 1.167 \\ -0.268 & 0.205 & 0.212 & 0.010 & 0.117 & 0.016 & -0.293 \\ 0.017 & -0.059 & -0.047 & 0.004 & -0.009 & 0.016 & 0.079 \end{vmatrix}$$

Шаг 5. Умножая M_4 на $У$: $M_5 = (X^T X)^{-1} X^T Y$ (5.7), получаем регрессионную модель $\boldsymbol{y = 41.511 - 7.511 * x_1 + 5.399 * x_2}$. (5.8)

Шаг 6. Вычисляем y_{pj} и прогноз y_n, подставляя x_{1i}, x_{2i} в (5.8) (табл.5.2).

Таблица 5.2.

Анализ регрессионной модели (4.8)

x_1	x_2	Уфi	Уpi	Δy	%Δy
11.0	**28.0**	**110.00**	**110.06**	**0.06**	**0.06**
14.0	**34.0**	**120.00**	**119.93**	**-0.07**	**0.06**
15.0	**39.0**	**140.00**	**139.41**	**-0.59**	**0.42**
15.0	**43.0**	**160.00**	**161.01**	**1.01**	**0.63**
16.0	**46.0**	**170.00**	**169.69**	**-0.31**	**0.18**
16.0	**48.0**	**180.00**	**180.49**	**0.49**	**0.27**
15.0	**49.0**	**194.00**	**193.40**	**-0.60**	**0.31**

Шаг 7. Вычисляем критерии адекватности модели (табл.5.3.)

Таблица 5.3.

Критерии адекватности модели			
Критерий	Модель	Значи-мость	
Системная дисперсия σ_y^2	$\sigma_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i^\phi - \mu_y)^2}{(n-1)} = 975.62$		(5.9)
Остаточная дисперсия $\sigma_{ост}^2$	$\sigma_{ост}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i^\phi - y_i^p)^2}{(n-n_p)} = 0.516$		(5.10)
F-критерий Фишера	$F_{кр}^* = \frac{\sigma_y^2}{\sigma_{ост}^2} \ge F_{кр}^{таб}$; $\frac{975.62}{0.516} = 1890 \ge 3.11$,	значим	(5.11)
Коэффициент R	$R = \sqrt{1 - \frac{\sigma_{ост}^2}{\sigma_y^2}} = \sqrt{1 - \frac{0.516}{975.62}} = 0.9997$.		(5.12)
Коэффициент D	$D = R^2 = 0.9994.$		(5.13)
t_R-критерий значимости R	$t_R = \frac{R}{\mu_R} = \frac{R\sqrt{n-n_p-1}}{1-R^2} = 3272.75;$	значим	(5.14)
Средняя ошибка $\Delta\varepsilon$	$\Delta\varepsilon = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\lvert y_i^\phi - y_i^p \rvert}{y_i^\phi} * 100\% = 0.276\%$	значим	(5.15)
Оценки значимости a_i:	$t_{a_i} = \frac{\lvert a_i \rvert}{\sigma_{ост\sqrt{c_{ii}}}} \ge t_{\alpha,k}$		(5.16)

			Продолжение табл.5.3.
t_a$_1$	$t_{a1} = \dfrac{\lvert a_i \rvert}{\sigma_{ост}\sqrt{M_{3ii}}} = \dfrac{41.511}{0.7183*\sqrt{15.94}} = 14.47 > 2.447;$	Значим	(5.17)
t_a$_2$	$t_{a2} = \dfrac{\lvert a_i \rvert}{\sigma_{ост}\sqrt{M_{3ii}}} = \dfrac{7.511}{0.7183*\sqrt{0.26}} = 20.51 > 2.447$	значим	(5.18)
t_a$_3$	$t_{a3} = \dfrac{\lvert a_i \rvert}{\sigma_{ост}\sqrt{M_{3ii}}} = \dfrac{5.399}{0.7183*\sqrt{0.01}} = 75.16 > 2.447$	значим	(5.19)

где n - объем выборки;

n_p - количество расчетных параметров;

$y_i^{ф}$ - фактические значения ***y***;

y_i^{p} - расчетные значения **y;**

$F^*_{кр}$ - расчетное значение критерия Фишера;

$F_{кр\ табл}$ - табличное значение квантиля критерия Фишера;

k_1, k_2, ν - входы в табл.квантилей критерия Фишера;

$\boldsymbol{t_{v,k}}$ - табличное значение квантиля t-критерия Стьюдента;

$k = n - 1$ - число степеней свободы - вход в табл. t-кр Стьюдента;

ν - уровень значимости (≥90%) – вход в табл. t-кр Стьюдента;

μ_R - погрешность коэффициента R;

a_i - i-й коэффициент многофакторного уравнения регрессии;

M_{3ii} - диагональный элемент матрицы $M_3 = (X^T X)^{-1}$;

Модель (3.38) адекватна, поскольку $F^*_{кр}= 1890 > F_{кр\ таб\ [k1,\ k2,\nu]}=3.11$ при $к_1=n-1=6$, $к_2=n-n_p-1=3$ и $\nu = 0.1$ все a_i значимы.

Каждый критерий оценивает один из признаков адекватности:

1. ***Остаточная дисперсия*** – степень отображения дисперсии.
2. ***Средняя ошибка аппроксимации*** - точность модели.
3. $\boldsymbol{F^*_{кр} \geq F_{кр\ таб}}$ ***- критерий Фишера*** - однородность дисперсий.
4. ***Коэффициент множественной корреляции R*** - гипотезу о линейности связи ***y*** и ***x***.

5. ***Коэффициент множественной детерминации D***, полноту множества {x}. Так, если R=0.9997, а D=0.9994, то x_1, x_2 отображают 99.94% дисперсии **У**, а 0.06% приходится на факторы, которых нет в модели.

6. Оценки значимости *коэффициентов регрессии* t_{ai}.

Модель (4.8) адекватна, когда $y_{pi} \approx y_{фi}$, суть влияния a_j совпадает с сутью влияния $\mathbf{x_i}$ на $y_{фi}$, и критерии адекватности подтверждают её значимость и $t_{ai} \geq t_{v,k}$ при v=0.05 и k=n-1. Прогноз **y** находим, подставляя $x_1=14$ и $x_2=49.3$ в модель (4.8)

$$\mathbf{y = 41.511-7.511*x_1+5.399*x_2=41.511-7.511*14 +5.399*49.3 =202.69 .}$$

Таблица 5.4.

Исходные данные вариантов задачи 5

Вариант - 1					***Вариант - 2***					***Вариант - 3***			
y	**-**	***x₁***	***x₂***		***y***	**-**	***x₁***	***x₂***		***y***	**-**	***x₁***	***x₂***
401	1	6	71		213	1	10	58		200	1	15	92
405	1	8	89		234	1	12	69		228	1	14	94
409	1	10	107		256	1	13	80		240	1	13	95
412	1	12	125		265	1	14	90		260	1	12	96
417	1	14	143		287	1	13	101		280	1	7	97
421	1	16	161		294	1	12	112		305	1	12	99
467	1	23	179		305	1	11	122		314	1	15	100
		27	?				10	?				16	?
Вариант - 4					***Вариант - 5***					***Вариант - 6***			
331	1	48	61		202	1	24	104		412	1	20	171
344	1	46	71		204	1	25	105		424	1	20	186
357	1	44	80		208	1	26	106		434	1	19	203
369	1	42	90		213	1	27	108		446	1	19	221
382	1	40	99		216	1	27	109		454	1	20	241
393	1	38	109		221	1	26	110		466	1	19	263
408	1	34	118		233	1	25	111		478	1	19	287
		32	?				24	?				20	?

Практическое занятие 6

Оптимизация использования дробных ресурсов матричным симплекс-методом

Постановка задачи

Предприятие имеет n видов ресурсов объемом b_i i=1,n, из которых можно произвести m видов продукции. ***Заданы :*** *нормы расхода* a_{ij} *i-го ресурса* на 1 ед. продукции j-го вида; c_j - *доход от реализации 1 ед. j-го* вида продукции.
Искомое: x_j=1,m - *объемы продукции, дающие max доход*.

Математическая модель задачи

$$Z = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \dashrightarrow \max \qquad (6.1)$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} 2x_1 \qquad\quad + 2x_3 &\le 21; \\ x_1 + 2x_2 \qquad\quad &\le 19; \qquad (6.2) \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\le 17; \end{aligned}$$

$$x_{1,\,2,\,3} \ge 0. \qquad (6.3)$$

Алгоритм решения задачи

Шаг 1. Приводим модель задачи к каноническому виду:

а) преобразуем неравенства (6.2) в уравнения, вводя в них x_4, x_5, x_6

$$\begin{aligned} 2x_1 + \quad 2x_3 + x_4 \qquad\qquad &= 21; \\ x_1 + 2x_2 \qquad\quad + x_5 \qquad &= 19; \qquad (6.4) \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \qquad\quad + x_6 &= 17; \end{aligned}$$

б) включаем x_4, x_5, x_6 в (6.3) в Z с множителем 0

$$Z = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 0(x_4 + x_5 + x_6) \rightarrow \max. \qquad (6.5)$$

Шаг 2. Переносим правую часть (6.5) за знак (=) с множителем (-1)

$$Z - 4x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 0(x_4 + x_5 + x_6) = 0. \qquad (6.6)$$

Шаг 3. Заполняем симплекс-таблицу (табл.6.1).

Шаг 4. Поскольку в строке Z в столбцах x_j есть $a_{ij} < 0$ - план не оптимален.
Шаг 5. В строке Z ищем min число<0 (-5). Это опорный столбец (j=p).

Таблица 6.1.

Опорный план задачи

Базис	a_{i0}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Θ_i
x_4	**21**	**2**	**0**	**2**	**1**	**0**	**0**	**10.5**
X_5	**19**	**1**	**2**	**0**	**0**	**1**	**0**	∞
x_3	**17**	**1**	**2**	**[2]**	**0**	**0**	**1**	**8.5 ←Опорная строка i=q**
Z	**0**	**-4**	**-3**	**-5**	**0**	**0**	**0**	**-**

Опорный ↑ столбец

Шаг 6. Делим элементы столбца a_{i0} на элементы опорного столбца a_{ij} (j=p)
$\Theta_i = \frac{a_{i0}}{a_{ij}} > 0$, $\{\frac{21}{2};\frac{19}{0};\frac{17}{2}\}$. Min $\Theta_i = \frac{17}{2} = 8.5$ в опорной строке (i=q=3).

Шаг 7. На пересечении опорного столбца j=p=3 и опорной строки i=q=3 находится опорный элемент $a_{i=q;j=p}$ $x_{[q,p]}=x_{[3,3]}$=[2].
Выполняем ***процедуру Жордана-Гаусса:***
а) ***элементы опорной строки*** *делим на опорный элемент* и записываем их на те же места в табл. 6.2 $a_{ij}= \frac{a_{ij}}{}$ при j=1,m; i=q . (6.7)
б) ***в опорном столбце*** *все a_{jp} кроме опорного равны* $a_{jp}=0$ (6.8)
в) ***элементы вне опорной строки и опорного столбца*** (i≠q, j≠p) a_{ij}',

вычисляются по модели $$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{qj}a_{ip}}{a_{qp}} \qquad i\neq q;\ j\neq p. \qquad (6.9)$$

где a_{ij}, a_{qj}, a_{ip}, a_{qp} - элементы на вершинах прямоугольника.

Соединив a_{ij} с опорным элементом a_{qp} прямой, считаем ее диагональю, вокруг которой строим прямоугольник и реализуем модели (6.8-6.9)

Таблица 6.2.

Мнемонический прямоугольник для a_{10}=21

Базис	a_{i0}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Θ_i
x_4	**21**	**2**	**0**	**2**	**1**	**0**	**0**	**10.5**
X_5	**19**	**1**	**2**	**0**	**0**	**1**	**0**	∞
x_3	**17**	**1**	**2**	**[2]**	**0**	**0**	**1**	**8.5 ←Оп стр i=q**
Z	**0**	**-4**	**-3**	**-5**	**0**	**0**	**0**	**-**

Подставляем в (6.9) числа, с вершин прямоугольника. Так, для a_{10}=21
$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{qj}a_{ip}}{a_{qp}} = 21 - \frac{17*2}{2} = 21 - 17 = 4.$ По (6.7-6.9) преобразуем табл.6.2.

Таблица 6.3.

Итог 1-й итерации

Базис	**a_{i0}**	**X_1**	**x_2**	**x_3**	**x_4**	**x_5**	**x_6**	**Θ_i**
x_4	**4**	**[1.0]**	**-2**	**0**	**1**	**0**	**-1**	**4 min**
X_5	**19**	**1**	**2**	**0**	**0**	**1**	**0**	**19**
x_3	**8.5**	**0.5**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0.5**	**17**
Z	**42.5**	**-1.5**	**2**	**0**	**0**	**0**	**2.5**	**-**

Шаг 8. Поскольку в Z есть a_{ij}=-1.5<0 – ***находим,*** *что план не оптимален.*

Шаг 10. Находим в строке Z min по $a_{ij}< 0 = -1.50$ *опорный столбец* j=2.

Шаг 11. **Вычисляем** $\Theta_i=a_{i0}/a_{ij}>0$ (j=p) для всех строк, кроме Z {Θ_1=4/1; Θ_2=19/1; Θ_3=8.5/0.5=17}. По minΘ_i=4 находим опорную строку i=1.

Шаг 12. На пересечении опорного столбца и опорной строки находится опорный элемент a_{qp} = x[1,1]= 1.00.

Шаг 13. Выполняем 2-ю итерацию (см. табл.6.4).

Таблица 6.4.

Итог 2-й итерации

Базис	a_{i0}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Θ_i
x_1	4	1	-2	0	1	0	-1	-
X_5	15	0	4	0	-1	1	1	3.75
x_3	6.5	0	[2]	1	-0.5	0	1	3.25 min
Z	48.5	0	-1	0	0	0	1	-

В строке Z есть a_{ij} <0 (-1.00)- план не оптимален. Вновь ищем опорный элемент [2.0] и выполняем 3-ю итерацию. Результаты в табл.6.5.

Таблица 6.5.

Оптимальный план

Базис	a_{i0}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	**10.5**	1	0	1	0.5	0	0
X_5	**2**	0	0	-2	0	1	-1
x_2	**3.25**	0	1	0.5	-0.25	0	0.5
Z	**51.75**	**0**	**0**	**0.5**	**1.25**	**0**	**1.5**

Поскольку в Z все числа ≥0 - план оптимален. В столбце a_{i0} находится искомое оптимальное решение: Z*max=51.75 при x_1*=10.5, x_2*=3.25 и x_5*=2.0.

Таблица 6.6.

Исходные данные вариантов задачи 6 (все $x_i \geq 0$)

Вариант 1	***Вариант 2***	***Вариант 3***
Z= $4x_1 -3x_2 +3x_3$-> max	**Z= $4x_1 +3x_2 -4x_3$ -> max**	**Z= $5x_1 +2x_2 +3x_3$-> max**
$-2x_1 +1x_2 +0x_3 \leq$ 19;	**$3x_1 +3x_2 +2x_3 \leq$ 10;**	**$-1x_1 +2x_2 +6x_3 \leq$ 20;**
$3x_1 -2x_2 +1x_3 \leq$ 17;	**$3x_1 +4x_2 +0x_3 \leq$ 12;**	**$2x_1 +5x_2 -3x_3 \leq$ 22;**
$4x_1 +2x_2 -1x_3 \leq$ 8;	**$4x_1 +2x_2 +5x_3 \leq$ 8 ;**	**$3x_1 -2x_2 +3x_3 \leq$ 18 ;**
Вариант 4	***Вариант 5***	***Вариант 6***
Z= $7x_1 -2x_2+4x_3$-> max	Z= $6x_1 -1x_2+4x_3$ -> max	Z= $3x_1 -1x_2+4x_3$-> Max
$-2x_1+3x_2+5x_3 \leq$ 20;	$-3x_1+1x_2+3x_3 \leq$ 30;	$-2x_1+1x_2+3x_3 \leq$ 10;
$2x_1+5x_2 -2x_3 \leq$ 22;	$3x_1+3x_2 -1x_3 \leq$ 32;	$2x_1+2x_2 -1x_3 \leq$ 12;
$4x_1 -3x_2+2x_3 \leq$ 18;	$5x_1 -2x_2+1x_3 \leq$ 18 ;	$3x_1 -2x_2+1x_3 \leq$ 18 ;

Практическое занятие 7

Оптимизация использования ресурсов симплекс-методом с искусственным базисом

Постановка задачи

В модель 6.1 вводим условие равенства объема производства заданному значению

$$Z = 5x_1+ 4x_2 \text{ ---> max}; \quad (7.1)$$

при

$$x_1 + x_2 \geq 1;$$
$$2x_1 + 5x_2 \leq 16; \quad (7.2)$$
$$3x_1 + 3x_2 \leq 13;$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 10; \qquad x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0. \quad (7.3)$$

Шаг 1. Вводя x_3, x_4, x_5, x_6, преобразуем неравенства в уравнения

$$x_1 + x_2 - x_3 = 1; \quad (7.4)$$

$$2x_1 + 5x_2 + x_4 = 16;$$

$$x_1 + 3x_2 + x_5 = 13; \quad (7.5)$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_6 = 10;$$

$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ x_3 \geq 0;\ x_4 \geq 0;\ x_5 \geq 0;\ x_6 \geq 0. \quad (7.6)$$

Шаг 2. Вводим в (7.1) x_3, x_4, x_5, x_6 с множителями 0

$$Z= 5x_1+ 4x_2 + 0(x_3 + x_4+x_5 +x_6) \text{ --> max}. \quad (7.7)$$

Шаг 3. В (7.4) при x_3 стоит знак минус (-), т.е. в задаче нет базиса.

Шаг 4. Формируем базис, вводя в (7.4)"искусственную" $x7' \geq 0$

$$x_1 + x_2 -0\, x_3 + x_{7'} = 1; \quad (7.8)$$

$$2x_1 + 5x_2 + 0\, x_4 = 16;$$

$$3x_1 + 3x_2 + x_5 = 13; \quad (7.9)$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_6 = 10;$$

$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ x_3 \geq 0;\ x_4 \geq 0;\ x_5 \geq 0;\ x_6 \geq 0;\ x_{7'} \geq 0. \quad (7.10)$$

Шаг 5. Вводим в Z–>max неизвестную $x_{7'}$ с множителем M=-100

$$Z = 5x_1 + 4x_2 + 0(x_3 + x_4 + x_5 + x_6) - 100x_{7'} \text{ -->max}.$$

Шаг 6. Заполняем симплекс-таблицу и ее строку (m+1) (см. табл.7.1):

1) m+1;Z=($\sum C_i – a_{i0}$)=(-100*1+0*16+0*13+0*10)=-100;

2) m+1;($\sum C_i$-a_{i1})-C_{i1}=(-100*1+0*2+0*3+0*3)-(5)=-100-5=-105 и т.д.

Таблица 7.1.

Опорный план

			5	4	0	0	0	0	-100	Θ_i
Базис	**$C_{iб}$**	**a_{i0}**	**x_1**	**x_2**	**x_3**	**x_4**	**x_5**	**x_6**	**x_7**	
X_7	*- 100*	1	**[1]**	1	-1	0	0	0	1	1.0 Оп строка
X_4	*0*	16	2	5	0	1	0	0	0	3.2
X_5	*0*	13	3	3	0	0	1	0	0	4.33
X_6	*0*	10	3	2	0	0	0	1	0	5.0
M+1	**-**	**-100**	**-105**	**-104**	**100**	***0***	***0***	***0***	**0**	
		Опорный	**↑**	**столбец**			**Базис**			

Шаг 8. По min (<0) числу в строке (m+1) находим опорный столбец j=1. По min $\Theta i=a_{io}/a_{ip}>0$ {Θ_1=1/1=1; Θ_2=16/2=8; Θ_3=13/3=4.3; Θ_4=10/3=3.3} - опорную строку i=1 и опорный элемент x[i=1,j=1]=1.

Шаг 9. Выполняем итерацию Жордана-Гаусса, находим (m+1)-ю строку и повторяем Шаги 8-9 , пока в (m+1)-й строке все a_{ij}<0. Результаты в табл.7.2.

										Таблица 7.2.
				I-я итерация						
			5	**4**	**0**	**0**	**0**	**0**	**-100**	Θ_i
Базис	**$C_{iб}$**	**a_{i0}**	**x_1**	**x_2**	**x_3**	**x_4**	**x_5**	**x_6**	**x_7**	
X_1	***5***	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**-**
X_4	***0***	**14**	**0**	**3**	**2**	**1**	**0**	**0**	**-2**	**7**
X_5	***0***	**10**	**0**	**0**	**3**	**0**	**1**	**0**	**-3**	**3.33**
X_6	***0***	**7**	**0**	**1**	**[3]**	**0**	**0**	**1**	**-3**	**2.33 Оп строка**
M+1	**-**	**5**	***0***	**1**	**-5**	***0***	***0***	***0***	**105**	

										Продолжение табл.7.2.
X_1	*5*	**1.64**	**1**	**0.67**	**0**	**0**	**0**	**0.33**	**-**	**4.97**
X_2	*4*	**2.55**	**0**	**3.67**	**0**	**1**	**0**	**-0.67**	**-**	**2.54**
X_5	*0*	**0.45**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**-1**	**-**	**3.00**
X_6	*0*	**3.18**	**0**	**-0.33**	**1**	**0**	**0**	**0.33**	**-**	**-**
M+1			*0*	**-0.67**	*0*	*0*	*0*	**1.67**	**-**	
X_1	*5*	*1.64*	**1**	**0**	**0**	**-0.18**	**0**	**0.45**		
X_2	*4*	*2.55*	**0**	**1**	**0**	**0.27**	**0**	**-0.18**	**0.18**	
X_5	*0*	*0.45*	**0**	**0**	**0**	**-0.27**	**1**	**-0.82**		
X_3	*0*	*3.18*	**0**	**0**	**1**	**0.09**	**0**	**0.27**		
M+1		**18.36**	*0*	*0*	*0*	**0.18**	*0*	**1.55**		

Поскольку в строке (m+1) все $a_{ij} \geq 0$-план оптимален и

$$Z\max^* = 18.36 \text{ при } x_1^* = 1.64,\ x_2^* = 2.55,\ x_3^* = 3.18.$$

Таблица 7.3.

Исходные данные вариантов задачи 7

Вариант 1	***Вариант 2***	***Вариант 3***
$Z = 4x_1 - x_2 + 2x_3 \to \min$ $4x_1 - 1x_2 + 2x_3 = 4;$ $1x_1 + 1x_2 - 1x_3 \leq 4;$ $3x_1 - 1x_2 + 4x_3 \geq 12;$	$Z = 3x_1 - 1x_2 + 2x_3 \to \min$ $4x_1 - 1x_2 + 2x_3 = 4$ $1x_1 + 1x_2 - 1x_3 \leq 4$ $3x_1 - 1x_2 + 4x_3 \geq 14$	$Z = -5x_1 - 2x_2 + 3x_3 \to \min$ $-2x_1 + 0x_2 + 1x_3 = 6$ $6x_1 - 1x_2 + 1x_3 \leq 2$ $3x_1 + 0x_2 - 1x_3 \geq 6$
Вариант 4	***Вариант 5***	***Вариант 6***
$Z = 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 \to \min$ $2x_1 - 1x_2 + 1x_3 = 2;$ $1x_1 + 1x_2 - .5x_3 \leq 5;$ $0x_1 + 2x_2 - 1x_3 \geq 9;$	$Z = -4x_1 + 1x_2 + 3x_3 \to \min$ $2x_1 - 1x_2 + 1x_3 = 0$ $1x_1 + 1x_2 - .5x_3 \leq 5$ $0x_1 + 2x_2 - 1x_3 \geq 7$	$Z = 3x_1 + 2x_2 - 1x_3 \to \min$ $-2x_1 - .5x_2 + 2x_3 = 5$ $1x_1 + 1x_2 - 1x_3 \leq 1$ $2x_1 - 3x_2 + 4x_3 \geq 6$

Практическое занятие 8

Двойственный симплекс-метод

Постановка задачи 8

При целочисленной оптимизации алгоритм двойственного симплекс-метода, необходим для вычислениях при $a_{i0} < 0$.

Модель задачи имеет вид

$$Z = 7.0x_1 + 3.0x_2 + 6.0x_3 \dashrightarrow \min \qquad (8.1)$$

$$\text{при} \quad \begin{aligned} 9.0x_1 - 2.0x_2 - 5.0x_3 &= -7.0; \\ 7.0x_1 + 4.0x_2 - 4.0x_3 &= 4.0; \qquad (8.2) \\ -4.0x_1 - 7.0x_2 + 4.0x_3 &= -6.0; \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; \quad x_3 \geq 0$$

Алгоритм решения задачи

Шаг 1. Вводим $x_4, x_5, x_6 \geq 0$ в ограничения и в Z

$$\begin{aligned} -9.0x_1 - 2.0x_2 - 5.0x_3 + x_4 &= -7.0; \\ 7.0x_1 + 4.0x_2 - 4.0x_3 + x_5 &= 4.0; \qquad (8.3) \\ -4.0x_1 - 7.0x_2 + 4.0x_3 + x6 &= -6.0; \end{aligned}$$

$$Z = 7.0x_1 + 3.0x_2 + 6.0x_3 + 0(x_4 + x_5 + x6) \dashrightarrow \min. \qquad (8.4)$$

Шаг 2. Преобразуем Z (8.4) и записываем опорный план в табл.8.1.

$$0 = -Z + 7.0x_1 + 3.0x_2 + 6.0x_3 + 0(x_4 + x_5 + x_6) \dashrightarrow \min, \qquad (8.5)$$

$$-Z + 7.0x_1 + 3.0x_2 + 6.0x_3 + 0(x_4 + x_5 + x6) = 0. \qquad (8.6)$$

Таблица 8.1.

Опорный план

Базис	a_{i0}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Θ_i
x_4	-7	**{-9}**	-2	-5	1	0	0	3.5 max←Оп строка i=q
X_5	4	7	4	-4	0	1	0	-
X_6	-6	-4	-7	4	0	0	1	1.5
Z	0	7	3	6	0	0	0	-

Опорный ↑ столбец

Ша

Шаг 3. В строках с $a_{i0}<0$ находим Θ_i $=\{\frac{-7}{-9};\frac{-7}{-2};\frac{-7}{-5}\};\{\frac{-6}{-4};\frac{-6}{-7}\}$. По $\Theta_{i\ max}=\frac{-7}{-2}$ находим опорную строку i=1, в которой по $\Theta_{imin}=\frac{-7}{-9}=0.78$ - опорный элемент $a_{qp}=[-9.00]$. Выполняем преобразования Жордана-Гаусса.

Таблица 8.2.

Итерация 1

Базис	a_{i0}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Θ_i
X_1	-7	**1**	0.22	0.56	-0.11	0	0	-
X_5	4	0	2.44	-7.89	0.78	1	0	0.18
X_6	-6	0	***-6.11***	6.22	-0.44	0	1	6.57 max
Z	0	0	1.44	2.11	0.78	0	0	-

Опорный ↑ столбец

В табл.8.2 строке a_{i0} есть aij{-1.44, -2.89}<0, поэтому план не оптимален.

Шаг 4. Находим по $\Theta_{i=3max}=6.57$ опорную строку i=3, в которой по min $\Theta_i=0.47$ опорный элемент $a_{qp}=[-6.11]$. Выполняем преобразования Жордана-Гаусса. Поскольку в табл.8.3 строке Z есть $a_{i0}=-2.60<0$, план не оптимален.

Таблица 8.3.

Итерация 2

Базис	a_{i0}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Θ_i
X_1	0.67	**1**	0	0.78	-0.13	0	0.04	-
X_5	-2.60	0	0	**{-5.40}**	0.60	1	0.40	0.48
X_2	0.47	0	1	-1.02	0.07	0	-0.16	
Z	-6.13	7	0	3.58	0.67	0	0.24	-

Шаг 5. $a_{i0}<0$ есть только во 2-й строке - опорная строка (i=2).

Шаг 6. В опорной строке $\Theta_i>0=-2.6/-5.4$ - опорный элемент $a_{qp}=[-5.4]$.

Шаг 7. В табл.8.4 $a_{i0}<0$ нет и нет $a_{ij}<0$ в строке -Z - план оптимален.

Таблица 8.4.

Оптимальный план

Базис	a_{i0}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
X_1	**0.30**	1	0	0	-0.04	0.14	0.09
X_3	**0.48**	0	0	1	-0.11	-0.19	-0.07
X_2	**0.96**	0	1	0	-0.04	-0.19	-0.24
Z	**-7.85**	0	0	0	1.07	0.66	0.50

$Z_{min}^*=7.85$ при $x_1^*=0.30$; $x_2^*=0.96$; $x_3^*=0.48$.

Таблица 8.5.

Исходные данные вариантов задачи 8

Вариант 1	**Вариант 2**	**Вариант 3**
$Z= x_1 +3x_2 +2x_3$ -> min	$Z= 3x_1 +2x_2 +7x_3$ -> min	$Z= 2x_1 -1x_2 +3x_3$ -> min
$-1x_1 +2x_2 +0x_3 \le -2$;	$3x_1 -3x_2 -1x_3 \le -1$	$1x_1 -2x_2 -1x_3 \le 3$
$2x_1 -3x_2 -1x_3 \le -3$;	$-6x_1 +3x_2 +2x_3 \le -5$	$-3x_1 +0x_2 -2x_3 \le -4$
$3x_1 +1x_2 -1x_3 \le -1$;	$1x_1 -3x_2 +1x_3 \le -3$	$-2x_1 +3x_2 -1x_3 \le -5$
Вариант 4	**Вариант 5**	**Вариант 6**
$Z= 4x_1 -2x_2 +4x_3$ -> min	$Z= 7x_1 +4x_2 +3x_3$ -> min	$Z= 3x_1 -1x_2 +2x_3$ -> min
$2x_1 -4x_2 -1x_3 \le -5$;	$1x_1 -4x_2 -1x_3 \le -7$	$2x_1 -3x_2 -2x_3 \le -5$
$1x_1 +0x_2 -3x_3 \le -2$;	$-3x_1 +1x_2 -2x_3 \le -4$	$-2x_1 +0x_2 +1x_3 \le -4$
$2x_1 +2x_2 -2x_3 \le 1$;	$2x_1 +0x_2 -1x_3 \le -3$	$3x_1 +1x_2 -2x_3 \le 2$

Практическое занятие 9

Оптимизация использования дробных ресурсов Full- симплекс-методом

Постановка задачи

Найти число рейсов x_j (j=1,n) m ВС по n ВЛ, если известны: b_i - запасы ресурсов i=1,m; p_j - прибыль от выполнения рейса по j-й ВЛ; a_{ij} - нормы расхода i-го ресурса при выполнении рейса по j-й ВЛ j=1,n. Множество x_j j=1,n должно обеспечить max прибыли Z.

Модель задачи имеет вид $Z=2x_1+5x_2+7x_3$--->max (9.1)

при ограничениях

$$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 31;$$
$$x_1 + x_2 + 3x_3 = 22; \quad (9.2)$$
$$x_1 + 7x_2 + x_3 \le 44;$$

$x_1\ge 0$; $x_2\ge 0$; $x_3\ge 0$. – целые числа . (9.3)

Алгоритм решения задачи 9

Шаг 1. Вводим в (9.1-9.6) x_4, x_5, x6 >= 0 в ограничения и в Z

$$Z = 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x6 \text{-->max}; \quad (9.4)$$

при

$$x_1+ 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 31;$$
$$x_1 + x_2+ 3x_3 + x6 = 22; \quad (9.5)$$
$$x_1 + 7x_2 + x_3 + x_4 = 44;$$

$$x_1\ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0;\ x_5 \ge 0;\ x_6 \ge 0. \quad (9.6)$$

Шаг 2. Преобразуем $Z - 2x_1- 5x_2 - 7x_3 - 0(x_4 + x_5 + x_6) = 0$.

Шаг 3. Заполняем опорный план 1 симплекс-таблицы (табл.9.1).

Таблица 9.1.

Опорный план

Базис	**ai0**	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	**X_6**
(=)X_5	31.00	3.00	2.00	3.00	0	1	0
(=)X_6	22.00	1.00	1.00	3.00	0	0	1
X_4	44.00	1.00	7.00	1.00	1	0	0
Z	0.00	-2.00	-5.00	-7.00	0	0	0

Шаг 4. Формируем строку–W_j =-∑ a_{ij}, складывая a_{ij} стоящие на пересечении опорного столбца и строк симплекс-таблицы со знаками (≥) и (=) 1(31+22)=-53; -1(3+1)=-4; -1(2+1)=-2; -1(3+3)=-6. Full-симплексом дробное оптимальное решение находим, выбирая опорный столбец по строке –W.

Таблица 9.2.

Формирование строки –W

Базис	ai0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	Θi
(=)X_5	31.00	3.00	2.00	3.00	0.00	1.00	0.00	10.33
(=)X_6	22.00	1.00	1.00	**[3.00]**	0.00	0.00	1.00	7.33 $_{min}$
(≥)X_4	44.00	1.00	7.00	1.00	1.00	0.00	0.00	44.00
Z	0.00	-2.00	-5.00	-7.00	0.00	0.00	0.00	-
-W	-53.00	-4.00	-3.00	**-6.00**	0.00	0.00	0.00	-

Шаг 5. В W ищем min элемент <0=(-6) в опорном столбце.

Шаг 6. По $\min\Theta_i = a_{i0}/a_{j=p}$ =22/3 =7.33 находим опорную строку i=2. На пересечении i=2 и j=3 опорный элемент x[2,3]=3.0 (табл.9.2).

Шаг 7. Выполняем преобразования Жордана-Гаусса. Из базиса вышел x_6. Далее для расчета -W используем строку век/тора-базиса x_5 (табл.9.3).

Таблица 9.3.

Итерация 1

Базис	ai0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	Θi
(=)X_5	**9.00**	**[2.00]**	1.00	0.00	0.00	1.00	-1.00	4.50 $_{min}$
X_3	**7.33**	0.33	0.33	1.00	0.00	0.00	0.33	22.21
X_4	**36.67**	0.67	6.67	0.00	1.00	0.00	-0.33	54.73
Z	**51.33**	0.33	-2.67	0.00	0.00	0.00	2.33	-
-W	**-9.00**	**-2.00**	-1.00	0.00	0.00	0.00	2.00	-

Шаг 8. По min a_{io}=-2 в строке –W опорный столбец j=1, а по $\min\Theta_i$=4.5 опорная строка i=1. На пересечении j=1 и i=1 опорный элемент x[1,1]=2.

Таблица 9.4.

Итерация 2

Базис	ai0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
X_1	**4.50**	1.00	0.50	0.00	0.00	0.50	-0.50
X_3	**5.83**	0.00	0.17	1.00	0.00	-0.17	0.50
X_4	**33.67**	0.00	6.33	0.00	1.00	-0.33	0.00
Z	**49.83**	0.00	**-2.83**	0.00	0.00	-0.17	2.50
-W	**0.00**	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	1.00

Поскольку в базисе нет x_i со знаками (=) и (≥), строка -W не вычисляется. Вектора x_5 и x_6, ушедшие из базиса, удаляются из симплекс-таблицы. Если в строке Z есть число <0, то план не оптимален и по Z ищется опорный столбец.

Таблица 9.5.

Удаление векторов x_5 и x_6

Базис	ai0	X_1	X_2	X_3	X_4	Θi
X_1	**4.50**	1.00	0.50	0.00	0.00	9.00
X_3	**5.83**	0.00	0.17	1.00	0.00	34.29
X_4	**33.67**	0.00	**[6.33]**	0.00	1.00	5.31 $_{min}$
Z	**49.83**	0.00	**-2.83**	0.00	0.00	

Находим по строке Z опорный столбец j=2 и по $\min Q_i$=33.67/6.33= =5.31 и опорную строку i=3. По опорному элементу x(2,3)=6.33, вычисляем новый план. В строке Z нет a_{ij}<0– план оптимален Z^*_{max}=64.69 при x_1^*=1.84;x_2^*=5.32; x_3^*=4.95.

Таблица 9.6.

Дробный оптимальный план

Базис	a_{i0}	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	**1.84**	1.00	0.00	0.00	-0.08
x_3	**4.95**	0.00	0.00	1.00	-0.03
x_2	**5.32**	0.00	1.00	0.00	0.16
Z	**64.89**	0.00	0.00	0.00	0.45

Таблица 9.7.

Исходные данные вариантов задачи 9 (все x_j>0)

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
$Z= 1x_1 +3x_2 +2x_3$ -> max	**$Z= 2x_1 +3x_2 +3x_3$ -> max**	**$Z= 2x_1 +4x_2 +3x_3$ -> max**
$2x_1 +2x_2 +1x_3 = 5$;	**$2x_1 +1x_2 +1x_3 = 6$;**	**$3x_1 +1x_2 +1x_3 = 9$;**
$2x_1 +0x_2 +2x_3 \leq 8$;	**$1x_1 +3x_2 +1x_3 \leq 11$;**	**$2x_1 +4x_2 +1x_3 \leq 11$;**
$1x_1 +3x_2 +4x_3 \leq 12$;	**$2x_1 +1x_2 +2x_3 \leq 8$;**	**$1x_1 +1x_2 +0x_3 \leq 9$;**
Вариант 4	Вариант 5	Вариант 6
$Z= 1x_1 +5x_2 +3x_3$ -> max	**$Z= 2x_1 +4x_2 -4x_3$ -> max**	**$Z= 2x_1 +5x_2 +2x_3$ -> max**
$1x_1 +1x_2 +0x_3 = 11$;	**$2x_1 +1x_2 +2x_3 = 8$;**	**$1x_1 +0x_2 +1x_3 \geq 10$;**
$1x_1 +0x_2 +1x_3 \leq 8$;	**$2x_1 +0x_2 +1x_3 \leq 10$;**	**$1x_1 +2x_2 +1x_3 = 16$;**
$0x_1 +2x_2 +1x_3 \leq 10$;	**$4x_1 +3x_2 +1x_3 \leq 11$;**	**$2x_1 +3x_2 -4x_3 \leq 13$;**

Практическое занятие 10

Оптимизация использования неделимых ресурсов алгоритмом Гомори

Постановка задачи

Дробный оптимальный план (9.6) надо преобразовать в целочисленный.

Алгоритм решения задачи

Шаг 1. Целочисленный оптимальный план формируется из дробного алгоритмом Гомори. В столбце a_{i0}, ищем первое дробное a(1,1)=1.84. Преобразуем строку i=1, вычитая из исходного числа ближайшее целое число, стоящее слева на числовой оси (из целого числа вычитается это же число):

Св.член	X_1	X_2	X_3	X_4
1.84-1=0.84;	1-1=0;	0-0=0;	0-0=0;	-0.08-(-1)=0.92.

Шаг 2. Формируем неравенство $0.92x_4 - 0.84 \geq 0$. (10.1)

Умножаем (5.14) на -1 $-0.92x_4 + 0.84 \leq 0$. (10.2)

Вводим x5≥0 $-0.92x_4+0.84+x_5=0$. (10.3)

Переносим вправо $0.84 -0.92x_4 + x_5=-0.84$. (10.4)

Включаем (10.4) и новый x_5 в табл.10.1. Так как a(4,0)=-0.84, используем двойственный симплекс-метод. Опорная строка i=4. Опорный элемент находим по $\min\Theta_i \geq a_{i0}/a_{j=p}$. В опорной строке лишь a(4,4)<0=(-0.92) - $\min\Theta_4$=0.92.

Таблица 10.1.

Ввод дополнительного ограничения

Базис	**a_{i0}**	**x_1**	**x_2**	**x_3**	**x_4**	**x_5**
x_1	**1.84**	1.00	0.00	0.00	-0.08	0.00
x_3	**4.95**	0.00	0.00	1.00	-0.03	0.00
x_2	**5.32**	0.00	1.00	0.00	0.16	0.00
x_5	**-0.84**	0.00	0.00	0.00	**-0.92**	**1.00**
Z	**64.89**	0.00	0.00	0.00	0.45	0.00

Шаг 3. Процедура Жордана-Гаусса вновь дает дробно-оптимальный план.

Таблица 10.2.

Дробный оптимальный план

Базис	**a_{i0}**	**x_1**	**x_2**	**x_3**	**x_4**	**x_5**
x_1	**1.91**	1.00	0.00	0.00	0.00	-0.09
x_3	**4.97**	0.00	0.00	1.00	0.00	-0.03
x_2	**5.17**	0.00	1.00	0.00	0.00	0.17
x_5	**0.91**	0.00	0.00	0.00	1.00	-1.09
Z	**64.89**	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Шаг 4. Вновь вводим дополнительное ограничение (табл.10.3).

Таблица 10.3.

Целочисленная оптимизация задачи ЛП

	Базис	a_{i0}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
Итерация 4	**x_1**	**1.91**	**1.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**-0.09**	**0.00**
	x_3	**4.97**	**0.00**	**0.00**	**1.00**	**0.00**	**-0.03**	**0.00**
	x_2	**5.17**	**0.00**	**1.00**	**0.00**	**0.00**	**0.17**	**0.00**
	x_4	**0.91**	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**1.00**	**-1.09**	**0.00**
	x_6	**-0.91**	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**-0.91**	**1.00**
	Z	**64.89**	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**
	x_1	**2.00**	**1.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**-0.09**
	x_3	**5.00**	**0.00**	**0.00**	**1.00**	**0.00**	**0.00**	**-0.03**
	x_2	**5.00**	**0.00**	**1.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**0.19**
	x_4	**2.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**1.00**	**0.00**	**-1.19**
	x_6	**1.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**1.00**	**-1.09**
	Z	**64.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**0.53**

$Zopt^*=64$ при $x^*_1=2$; $x_2^*=5$; $x_3^*=5$; $x_4^*=2$; $x_5^*=1$; $x_6^*=0$.В табл.10.4 все $x_i>0$.

Таблица 10.4.

Исходные данные вариантов задачи 10

Вариант 1		**Вариант 2**		**Вариант 3**
$Z= 1x_1 +3x_2 +2x_3 \to max$		**$Z= 2x_1 +3x_2 +3x_3 \to max$**		**$Z= 2x_1 +4x_2 +3x_3 \to max$**
$2x_1 +2x_2 +1x_3 = 5;$		**$2x_1 +1x_2 +1x_3 = 6;$**		**$3x_1 +1x_2 +1x_3 = 9;$**
$2x_1 +0x_2 +2x_3 \leq 8;$		**$1x_1 +3x_2 +1x_3 \leq 11;$**		**$2x_1 +4x_2 +1x_3 \leq 11;$**
$1x_1 +3x_2 +4x_3 \leq 12;$		**$2x_1 +1x_2 +2x_3 \leq 8;$**		**$1x_1 +1x_2 +0x_3 \leq 9;$**
Вариант 4		**Вариант 5**		**Вариант 6**
$Z= 1x_1 +5x_2 +3x_3 \to max$		**$Z= 2x_1 +4x_2 -4x_3 \to max$**		**$Z= 2x_1 +5x_2 +2x_3 \to max$**
$1x_1 +1x_2 +0x_3 = 11;$		**$2x_1 +1x_2 +2x_3 = 8;$**		**$1x_1 +0x_2 +1x_3 \geq 10;$**
$1x_1 +0x_2 +1x_3 \leq 8;$		**$2x_1 +0x_2 +1x_3 \leq 10;$**		**$1x_1 +2x_2 +1x_3 = 16;$**
$0x_1 +2x_2 +1x_3 \leq 10;$		**$4x_1 +3x_2 +1x_3 \leq 11;$**		**$2x_1 +3x_2 -4x_3 \leq 13 ;$**

Практическое занятие 11

Оптимизация расстановки парка ВС по min затрат на перевозки

Постановка задачи

АК летает по m ВЛ на n типах ВС. Известны: c_{ij} - расходы на 1 ткм на i-м типе ВС по j-й ВЛ (руб./ткм.); a_i - потенциал i-го типа ВС (млн.ткм./год); b_j - прогноз спроса по j-й ВЛ (млн.ткм.). Исходные данные в табл.11.1.

Таблица 11.1.

Исходные данные примера 11

Типы ВС	***Воздушные линии***						***a_i***
1	$c_{ij}=14$	9	8	7	12	14	**31**
2	6	13	11	9	14	9	**36**
3	10	8	13	14	11	11	**32**
4	10	10	6	8	14	6	**24**
b_j	**22**	**23**	**17**	**22**	**15**	**24**	123

Надо найти x_{ij} (i=1,n;j=1,m;) - объёмы перевозок на i-м типе ВС по j-й ВЛ (млн.ткм), дащие min расходы $C=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}C_{ij}X_{ij}\to\min/\text{ден.ед.}/(\mathrm{i}=1,\mathrm{n};\ \mathrm{j}=1,\mathrm{m};)$ (11.1)

При $\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=a_i$ (11.2)

$$\sum_{j=1}^{m}x_{ij}=b_j \qquad (11.3)$$

$$\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{j=1}^{m}b_j \qquad (11.4)$$

$$x_{ij}\ge 0. \qquad (11.5)$$

Алгоритм решения задачи

Шаг 1. Проверяем выполнение (11.4). Поскольку $\sum a_i=\sum b_j=123$, то задача "закрытая" и можно строить опорный план.

Шаг 2. Строим опорный план методом *минимальной стоимости*. ***Находим в строке 1 клетку с min*** $c_{i=1\ j=4}$ =7 и пишем в нее max $x_{i=1\ j=4}=22$, получаемый из a_1=31 и b_4=22 (11.3)**.** Остаток a_i=31-22=9 пишем в клетку с min $c_{i=1\ j=}$ =8→$x_{i=1\ j=3}$ =9.

Идем на строку 2, находим min $c_{i=2\ j=1}$=6 и из a2=36 и b1=22 пишем $x_{i=2\ j=1}=22$**.** Остаток $a_{i=2}$=36-22=14 пишем в клетку с min $c_{i=2\ j=6}=9$ $x_{i=2\ j=6}=14$.

Идем на строку 3, находим min $c_{i=3\ j=2}$=8 и исходя из a3=32 и b_2=23 пишем $x_{i=3\ j=2}=23$**.** Остаток $a_{i=3}$=32-23=9 пишем в клетку с min $c_{i=3\ j=6}=11$ $x_{i=3\ j=6}=9$.

Идем на строку 4, находим min $c_{i=4\ j=3}$=6 и исходя из a_4=24 и b_3=17 и $x_{i=1\ j=3}$ =9 пишем $x_{i=4\ j=3}=8$**.** Остаток $a_{i=4}$=24-8=16 пишем в клетку с min $c_{i=4\ j=6}$ ***=6 исходя из*** b_3=***24***, $x_{i=2\ j=6}=14$, $x_{i=3\ j=6}=9$, ***находим*** $x_{i=4\ j=6}=1$. Остаток $a_{i=4}$=15 пишем в $x_{i=4\ j=5}=15$.

Таблица 11.2.

Опорный план

Типы ВС	***Воздушные линии***						a_i	K_i
1	14	9	8 $x_{13}=9$	7 $x_{14}=22$	12	14	**33**	**9*8+22*7= *226***
2	6 $x_{21}=22$	13	11	9	14	9 $x_{26}=14$	**36**	**22*6+14*9= *258***
3	10	8 $x_{32}=23$	13	14	11	11 $x_{36}=9$	**32**	**23*8+9*11= *283***
4	10	10	6 $x_{43}=8$	8	14 $x_{45}=15$	6 $x_{46}=1$	**24**	**8*6*15*14+1*6= *264***
b_i	**22**	**23**	**17**	**22**	**15**	**24**	**123**	1031

Шаг 3. Вычисляем критерий *опорного плана*

$$C=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}c_{ij}x_{ij}=8*9+\ 7*22+6*22+9*14+8*23+11*9+6*8+14*15\ +6*1\ =1031$$

План оптимален при: **1) $u_i+v_j=c_{ij}$;** *для "занятых" клеток* (11.6)

2) $u_i+v_j\le c_{ij}$ *- для "незанятых" клеток* (11.7) где U=(u_1, ..., u_n) - потенциалы столбцов; V=(v_1,..., v_m) - потенциалы строк.

Шаг 4. Строим систему потенциалов S_{UV} = (U,V) *по занятым клеткам с* (x_{ij}>0), *исходя из* условия (11.6) (табл.11.3). Вводим в табл. 11.3 столбец u_i и строку v_j. Находим строку с max числом "занятых" клеток (x_{ij}>0) и задаем u_4=0. Из (11.6) и u_4=0 находим $\boldsymbol{v_{i3}=6; v_{i5}=14; v_{i6}=6}$. Из $\boldsymbol{v_{i3}=6}$ и $\boldsymbol{c_{13}=8}$ находим $\boldsymbol{u_{i1}=2.}$ Зная $\boldsymbol{u_{i1}=2}$ и $\boldsymbol{c_{14}=7,}$ находим $\boldsymbol{v_{i4}=5.}$ Из $\boldsymbol{v_{i6}=6}$ $\boldsymbol{c_{26}=9}$ находим $\boldsymbol{u_{i2}=3,}$ так как $\boldsymbol{(u_{i2}=3)+(v_{i6}=6)=(c_{26}=9).}$ Из $\boldsymbol{v_{i6}=6}$ $\boldsymbol{c_{36}=11}$ находим $\boldsymbol{u_{i3}=5,}$ Из $\boldsymbol{u_{i2}=3}$ ***и*** $\boldsymbol{c_{21}=6}$ находим $\boldsymbol{v_{i1}=3,}$ так как $\boldsymbol{(u_{i2}=3)+(v_{i1}=3)=(c_{21}=6).}$ Из $\boldsymbol{u_{i3}=5}$ и $\boldsymbol{c_{32}=8}$ находим $\boldsymbol{v_{i2}=3,}$ так как $\boldsymbol{(u_{i3}=5)+(v_{i3}=3)=(c_{32}=8).}$

Таблица 11.3.

Построение системы потенциалов (итерация 1)

		$v_{i1}=6$	$v_{i2}=8$	$v_{i3}=6$	$v_{i4}=5$	$v_{i5}=14$	$v_{i6}=6$	a_i
1	$u_{i1}=2$	14	9 $\delta_{12}=1$	8 $x_{13}=9$	7 $x_{14}=22$	12 $\delta_{15}=2$	14	**33**
2	$u_{i2}=3$	6 $x_{21}=22$	13	11	9	14 $\delta_{25}=3$	9 $x_{26}=14$	**36**
3	$u_{i3}=5$	10 $\delta_{31}=1$	8 $x_{32}=23$	13	14	(+) 11 $\delta_{35}=8$	(-) 11 $x_{36}=9$	**32**
4	$u_{i4}=0$	10	10	6 $x_{43}=8$	8	(-) 14 $x_{45}=15$	(+) 6 $x_{46}=1$	**24**
	b_i	**22**	**23**	**17**	**22**	**15**	**24**	**123**

Строим систему потенциалов *по занятым клеткам*, выполняя условия *(11.6)*. План оптимален, если для всех незанятых клеток выполнено условие (11.7).

Шаг 5. Проверяем условие (11.7). При невыполнении условия в клетку пишем $\delta_{ij}=\{(u_i+v_j)-c_{ij}\}$. Находим max $\boldsymbol{\delta_{15}=8}$ ***и помечаем клетку знаком (+).***

Шаг 6. Строим замкнутый контур от клетки (+), поворачивая в занятых клетках на 90^0, стремясь вернутся в клетку ***(+)***. ***Помечаем вершины*** *контура знаками* ***{ (-); (+); (-); (+)}.***

Шаг 7. Находим на вершинах *(-)* $\Delta=min\ x_{ij}=9$. Вычитаем Δ из x_{ij}на вершинах (-) и прибавляем к x_{ij} на вершинах (+). Результат в табл.11.4.

Таблица 11.4.

План после изменения x_{ij} на **вершинах контура**

		$v_{i1}=6$	$v_{i2}=8$	$v_{i3}=6$	$v_{i4}=5$	$v_{i5}=14$	$v_{i6}=6$	a_i
1 П	$u_{i1}=2$	14	9 $\delta_{12}=1$	8 $x_{13}=9$	7 $x_{14}=22$	12 $\delta_{15}=4$	14	**33**
2	$u_{i2}=3$	6 $x_{21}=22$	13	11	9	14 $\delta_{25}=3$	9 $x_{26}=14$	**36**
3	$u_{i3}=5$	10 $\delta_{31}=1$	8 $x_{32}=23$	13	14	11 $x_{35}=9$	11	**32**
4	$u_{i4}=0$	10	10	6 $x_{43}=8$	8	14 $x_{45}=6$	6 $x_{46}=10$	**24**
		22	**23**	**17**	**22**	**15**	**24**	**123**

о

Повторяем шаги 4-6, до тех пор, пока (11.6) и (11.7) будут выполнены.

Таблица 11.5.

Оптимизация плана (итерация 2)

		$v_{i1}=3$	$v_{i2}=11$	$v_{i3}=6$	$v_{i4}=5$	$v_{i5}=14$	$v_{i6}=6$	a_i
1	$u_{i1}=2$	14	(+) 9 $\delta_{12}=4$	(-) 8 $x_{13}=9$	7 $x_{14}=22$	12 $\delta_{15}=4$	14	**33**
2	$u_{i2}=3$	6 $x_{21}=22$	13 $\delta_{22}=1$	11	9	14 $\delta_{25}=3$	9 $x_{26}=14$	**36**
3	$u_{i3}=-3$	10	(-) 8 $x_{32}=23$	13	14	(+) 11 $x_{35}=9$	11	**32**
4	$u_{i4}=0$	10	10 $\delta_{42}=1$	(+) 6 $x_{43}=8$	8	(-) 14 $x_{45}=6$	6 $x_{46}=10$	**24**
	b_i	**22**	**23**	**17**	**22**	**15**	**24**	**123**

В табл.11.5 находим на вершинах со знаком (-) $\Delta=\min x_{45}=6$. Вычитаем Δ из x_{ij} на вершинах (-) и прибавляем к x_{ij} на вершинах (+). Результат в табл.11.6.

Таблица 11.6.

Оптимальный план (1)

У		$v_{i1}=5$	$v_{i2}=9$	$v_{i3}=8$	$v_{i4}=7$	$v_{i5}=12$	$v_{i6}=8$	a_i
1	$u_{i1}=0$	14	9 $x_{13}=6$	8 $x_{13}=3$	7 $x_{14}=22$	12	14	**33**
2	$u_{i2}=1$	6 $x_{21}=22$	13	11	9	14	9 $x_{26}=14$	**36**
3	$u_{i3}=-1$	10	8 $x_{32}=17$	13	14	11 $x_{35}=15$	11	**32**
4	$u_{i4}=-2$	10	10	6 $x_{43}=14$	8	14	6 $x_{46}=10$	**24**
	b_i	**22**	**23**	**17**	**22**	**15**	**24**	**123**

сУсловия оптимальности выполнены и план оптимален. Как показали расчеты, у задачи есть еще один оптимальный план (табл.11.7). Величина целевой функции для всех планов равна $C=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}=935\ ден.ед.$

Таблица 11.7.

Оптимальный план (2)								
			$v_{i2}=9$	$v_{i3}=8$	$v_{i4}=7$	$v_{i5}=12$	$v_{i6}=8$	a_i
1	$u_{i1}=0$			$x_{13}=3$	$x_{14}=22$	$x_{15}=6$		**33**
2	$u_{i2}=1$	$x_{21}=22$					$x_{26}=14$	**36**
3	$u_{i3}=-1$		$x_{32}=23$			$x_{35}=9$		**32**
4	$u_{i4}=-2$			$x_{43}=14$			$x_{46}=10$	**24**

Таблица 11.8.

Исходные данные вариантов задачи 11

Вариант 1							**Вариант 2**							**Вариант 3**						
5	8	5	4	10	7	24	14	3	11	8	13	7	36	13	8	10	14	8	8	32
13	12	14	13	3	9	28	10	10	7	5	13	13	39	8	12	13	6	8	9	28
8	3	12	4	9	14	39	12	5	3	5	6	5	27	12	6	4	9	5	10	38
12	8	7	6	11	13	31	9	10	12	14	7	5	23	7	4	11	5	11	12	30
21	22	21	23	23	17		18	17	18	24	17	26		25	29	23	15	20	21	
Вариант 4							**Вариант 5**							**Вариант 6**						
3	3	14	4	9	8	27	14	11	3	10	12	5	37	5	9	4	11	8	8	28
13	9	10	6	12	3	30	7	7	4	12	4	3	38	13	6	11	3	14	8	36
7	5	11	9	5	7	33	6	6	11	11	6	13	28	9	9	14	13	8	7	28
13	5	6	11	9	14	26	10	8	11	9	4	9	27	9	13	10	9	11	11	31
26	22	18	21	19	15		21	25	23	18	15	23		13	25	24	18	14	34	

Практическое занятие 12

Оптимизация расстановки парка ВС на сети с запретными для посадки аэропортами

Постановка задачи

АК летает по m ВЛ на n типах ВС. Известны : c_{ij} - расходы на 1 ткм на i-м типе ВС по j-й ВЛ (руб./ткм.); a_i - потенциал i-го типа ВС (млн.ткм.); b_j- прогноз спроса по j-й ВЛ (млн.ткм.). ВЛ, на которых нельзя использовать i-й тип c_{ij}=100. Исходные данные примера в табл.12.1.

Таблица.12.1.

Исходные данные примера

Типы ВС	*Воздушные линии*						***a**$_i$*
	1	2	3	4	5	6	
1	c_{ij} =1	9	10	3	8	1	**40**
2	3	1	100	4	6	1	**30**
3	9	5	1	6	1	3	**40**
4	3	100	3	1	100	1	**40**
***b**$_i$*	20	20	40	20	20	20	140/150

Надо найти x_{ij} (i=1,n;j=1,m;) - объёмы перевозок на i-м типе ВС по j-й ВЛ, дающие min расходы $$C=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j-1}^{m}C_{ij}X_{ij}\to\min$$, (i=1,n; j=1,m) (12.1)

при : 1. $\sum_{j=1} x_{ij}=a_i$; 2. $\sum_{i=1} x_{ij}=b_j$; 3. $\sum_{i=1} a_i=\sum_{j=1} b_j$; 4. $x_{ij}>=0$; (12.2)

Алгоритм решения задачи

Шаг 1. Преобразуем "открытую" задачу *в "закрытую"*, вводя столбец с $b_{доп}$=10 (табл.12.2) и уравнивая суммы a_i и b_j.

Таблица.12.2.

Преобразование "открытой" задачи в "закрытую"

Типы ВС	*Воздушные линии*							***a**$_i$*
	0	1	2	3	4	5	6	
1	0	c_{ij} =1	9	10	3	8	1	**40**
2	0	3	1	***100***	4	6	1	**30**
3	0	9	5	1	6	1	3	**40**
4	0	3	***100***	3	1	***100***	1	**40**
***b**$_i$*	***10***	20	20	40	20	20	20	140/150

Шаг 2. В табл.12.2 ищем строку *с max числом "запретных" клеток* (c_{ij}=100) и находим в min c_{ij} {c_{40}=0}. Задаем max x_{40}=10. Остаток пишем в клетку с min c_{ij}: x_{44}=20 и x_{46}=10. Сумма x_{ij} 4-й строки $\sum x_{ij}$=10+20+10=40=a_4. Клетки x_{ij}>0 называются "занятыми", а клетки x_{ij}=0 - "незанятыми".

Шаг 3. Вновь ищем строку с "запретными" клетками и записываем в клетку с c_{21}min=1 max x_{22}=20, а также x_{26}=10 Сумма x_{ij} во 2-й строке равна a_2=30.

Шаг 4. Переходим на первую строку, *находим клетку c_{ij}min=1* и пишем в неё max x_{11}=20, так как строк с "запретными" клетками больше нет. Остаток 20 записываем в клетку с c_{ij}min =8 - x_{15}=20. Сумма x_{ij} 1-й строки равна a_1=40.

Таблица.12.3.

Построение опорного плана

Тип	0	1	2	3	4	5	6	a_i
1	0	1	9	10	3	8	1	**40**
2	0	2	1 $x_{22}=\mathbf{20}$	***100***	4	6	***1*** $x_{26}=\mathbf{10}$	**30**
3	0	9	5	1	6	1	***3***	**40**
4	$c_{40}=0$ $x_{40}=\mathbf{10}$	3	***100***	3	***1*** $x_{44}=\mathbf{20}$	***100***	***1*** $x_{46}=\mathbf{10}$	**40**
b_i	**10**	**20**	**20**	**40**	**20**	**20**	**20**	

Шаг 5. Записываем в клетку *с $c_{ij}min=1$ max $x_{33}=40$*, заполняя 3-ю строку.

Шаг 6. Вычисляем критерий *опорного плана*

$$C=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}c_{ij}x_{ij}=1*20+8*20+1*20+1*10+1*40+0*10+1*20+1*20=290\,руб.$$

План оптимален при: *1)$u_i+v_j=c_{ij}$; для "занятых" клеток* (12.3)

2) $u_i+v_j\le c_{ij}$ - для "незанятых" клеток (12.4)

где $U=(u_1, ..., u_n)$ - потенциалы столбцов; $V=(v_1,..., v_m)$ - потенциалы строк.

Шаг 7. Строим систему потенциалов $S_{UV}=(U,V)$,

А. Находим строку с max числом "занятых" клеток ($x_{ij}>0$) и задаем $u_4=0$.

В. По (12.3) находим $v_0=c_{40}-u_4=0-0=0$; $v_4=c_{44}-u_4=1-0=1$; $v_6=c_{46}-u_4=1-0=1$.

Шаг 8. Продолжаем цепочку потенциалов, используя потенциалы и (6.3), из $u_2+v_6=c_{26}$ $u_2=c_{26}-v_6=1-1=0$, а из $u_2+v_2=c_{22}$ $v_2=c_{22}-u_2=1-0=1$.

Таблица.12.4.

Построение опорного плана

Тип	0	1	2	3	4	5	6	a_i
1	0	1 $x_{11}=\mathbf{20}$	9	10	3	8 $x_{15}=\mathbf{20}$	1	**40**
2	0	2	1 $x_{22}=\mathbf{20}$	***100***	4	6	1 $x_{26}=\mathbf{10}$	**30**
3	0	9	***5***	1 $x_{33}=\mathbf{40}$	6	1	3	**40**
4	0 $x_{40}=\mathbf{10}$	3	***100***	3	1 $x_{44}=\mathbf{20}$	***100***	1 $x_{46}=\mathbf{10}$	**40**
b_i	**10**	**20**	**20**	**40**	**20**	**20**	**20**	

Шаг 9. Вводим $(m+n-1)-n_з=2$ *фиктивно занятые клетки*, поскольку расчеты прервались ("занятых" клеток $n_з=8$ меньше, чем $m+n-1=4+7-1=10$):

Таблица.12.5.

Построение системы потенциалов (шаги 7а,7б и 7в)

		$v_0=0$	$v_1=$	$v_2=1$	$v_3=$	$v_4=1$	$v_5=$	$v_6=1$	a_i
1	$U_1=$	0	1 $x_{11}=\mathbf{20}$	9	10	3	8 $x_{15}=\mathbf{20}$	1	4
2	$u_2=0$	0	2	1 $x_{22}=\mathbf{20}$	***100***	4	6	1 $x_{26}=\mathbf{10}$	3
3	$u_3=$	0	9	***5***	1 $x_{33}=\mathbf{40}$	6	1	3	4
4	$u_4=0$	0 $x_{40}=\mathbf{10}$	3	***100***	3	1 $x_{44}=\mathbf{20}$	***100***	1 $x_{46}=\mathbf{10}$	4
b_i		10	20	20	40	20	20	20	

а) помечаем & и зачеркиваем столбцы с потенциалом и строки без него;

б) на пересечениях &-линий ищем клетку с c_{ij}=min;

в) считаем клетку (1,0) фиктивно-занятой и $x_{10}=0$.

Шаг 10. Продолжаем строить систему потенциалов (табл.12.6): $v_0+u_1=c_{10}$; $u_1=c_{10}-v_0=0-0=0$; $u_1+v_1=c_{11}$;$v_1=c_{11}-u_1=1-0=1$; $u_1+v_5=c_{15}$; $v_5=c_{15}-u_1=8-0=8$.

Таблица.12.6.

Ввод фиктивно-занятой клетки

		& v_0=0	**v_1=1**	**& v_2 = 1**	**v_3=**	**& v_4=1**	**v_5=8**	**& v_6=1**	**a_i**
1	**u_1=0**	0 x_{10}=**0**	1 x_{11}=**20**	9	10	3	8 x_{15}=**20**	1	40
	u_2=0	0	2	1 x_{22}=**20**	***100***	4	6	1 x_{26}=**10**	30
3	**u_3=**	0	9	***5***	1 x_{33}=**40**	6	1	3	40
	u_4=0	0 x_{40}=**10**	*3*	***100***	3 x_{43}=**0**	1 x_{44}=**20**	***100***	1 x_{46}=**10**	40
	b_i	10	20	20	40	20	20	20	

Расчеты прервались. Надо ввести ещё одну "фиктивно-занятую" клетку

Шаг 11. Помечаем (&) и *зачеркиваем строки с u_i и столбцы без v_j.* Пишем в зачеркнутую клетку с min c_{ij} $x_{43}=0$. табл.12.6.

Шаг 12. Продолжаем систему потенциалов: $u_4+v_3=c_{43}$ $v_3=c_{43}-u_4=3-0=3$, $u_3+v_3=c_{33}$ $u_3=c_{33}-v_3=1-3=-2$.

Шаг 13. Отмечаем незанятые клетки, в которых $u_i+v_j \le c_{ij}$ не выполнено.

Записываем в табл.12.7 разности $\delta_{ij}=c_{ij}-(u_i+v_j)$.

Шаг 14. Помечаем клетку с δ_{ij} max=5 (+). Строим из нее контур, двигаясь по занятым клеткам и поворачивая в них на 90°, вплоть до клетки (δ=5).

Шаг 15. Помечаем вершины контура (-),(+). В (+) добавляем, а в (-) вычитаем min x_{ij}={20,10,40}=10, из стоящих на вершинах (-).

Шаг 16. Вводим u4=0 и строим систему потенциалов.

Шаг 17. План не оптимален, так как (12.3) в клетке (δ=5) не выполнено.

Таблица. 12.7.

Построение замкнутого контура

		v_1=0	**v_2=1**	**v_3 =1**	**v_4=3**	**v_5=1**	**v_6=8**	**v_7=1**	**a_i**
1	**u_1=0**	(+) 0 x_{10}=**0**	1 x_{11}=**20**	9	10	3	(-) 8 x_{15}=**20**	1	40
2	**u_2=0**	0	2	1 x_{22}=**20**	100	4	6 δ =2	1 x_{26}=**10**	30
3	**u_3=-2**	0	9	5	(-) 1 x_{33}=**40**	6	(+) 1 δ =**5**	3	40
4	**u_4=0**	(-) 0 x_{40}=**10**	3	100	(+) 3 x_{43}=**0**	1 x_{44}=**20**	***100***	1 x_{46}=**10**	40
	b_i	10	20	20	40	20	20	20	

Критерий С=1*20+8*10+1*20+1*10+1*30+1*10+3*10+1*20+1*10=**230**.

Шаг 18. Находим потенциалы, клетку (3,6) с δ=5 max, строим из нее контур, ищем в клетках с (-) x_{ij}min=10, вычитаем его в (-) и прибавляем в (+).

Таблица.12.8.

Оптимизация плана (Итерация 2)

		v_1=-5	v_2=-4	v_3 =1	v_4=3	v_5=1	v_6=3	v_7=1	a_i
1	*u1=5*	0 x_{10}=**10**	1 x_{11}=**20**	9	10	3	(-) 8 x_{15}=**10**	(+) 1 δ =**5**	40
2	*u2=0*	0	2	1 x_{23}=**20**	***100***	4	6	1 x_{26}=**10**	30
3	*u3=-2*	0	9	5	(-) 1 x_{33}=**30**	6	(+) 1 x_{35}=**10**	3	40
4	*u4=0*	0	3	***100***	(+) 3 x_{43}=**10**	1 x_{44}=**20**	***100***	(-) 1 x_{46}=**10**	40
	b_i	10	20	20	40	20	20	20	

План табл. 12.9 оптимален. Критерий К= **180**.

Таблица.12.9.

Оптимальный план

		v_1=-0	v_2=1	v_3 =1	v_4=5	v_5=3	v_6=5	v_7=1	a_i
1	u_1=0	0 x_{10}=**10**	1 x_{11}=**20**	9	10	3	8	1 x_{16}=**10**	40
2	u_2=0	0	2	1 x_{22}=**20**	***100***	4	6	1 x_{26}=**10**	30
3	u_3=-4	0	9	5	1 x_{33}=**20**	6	1 x_{35}=**20**	3	40
4	u_4=-2	0	3	***100***	3 x_{43}=**20**	1 x_{44}=**20**	***100***	1	40
	b_i	10	20	20	40	20	20	20	

В табл.12.10 и табл.12.11 приведены данные задач.

Таблица 12.10.

Исходные данные вариантов задачи 12

Вариант 1							Вариант 2							Вариант 3						
2	9	10	3	8	1	45	1	9	10	3	8	1	40	1	9	10	3	8	1	40
2	7	100	4	6	4	35	2	1	100	4	6	1	30	2	7	100	4	6	1	30
9	5	2	6	2	3	40	9	5	1	6	1	3	30	9	1	1	6	1	3	40
3	100	3	3	100	1	30	3	100	3	1	100	1	30	3	100	3	1	100	1	40
20	10	50	20	20	20		20	20	40	20	30	20		20	20	40	20	20	20	

Вариант 4							Вариант 5							Вариант 6						
3	9	10	3	5	4	40	3	9	10	3	5	4	45	5	9	10	4	7	8	42
2	7	100	4	4	3	40	2	7	100	4	4	3	44	4	7	100	3	5	5	43
1	1	1	6	2	2	40	1	1	1	6	2	2	45	3	1	1	6	1	3	44
3	100	3	1	100	1	30	3	100	3	1	100	1	36	2	100	3	1	100	1	35
20	30	40	20	30	20		23	20	44	20	35	26		24	20	43	20	34	25	

Практическое занятие 13

Оптимизация расстановки парка ВС по критерию max прибыли.

Постановка задачи

АК летает по m ВЛ на n типах ВС. Известны : 1) c_{ij} - расходы на 1 ткм на i-м типе ВС по j-й ВЛ (руб./ткм.); 2) a_i - потенциал i-го типа ВС (млн.ткм.); 3) b_j - прогноз спроса по j-й ВЛ (млн.ткм.). Исходные данные примера в табл.13.1.

Надо оценить x_{ij}(i=1,n;j=1,m;) - объёмы перевозок на i-м типе ВС по j-й ВЛ (млн.ткм) , дающие $\mathrm{P} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}x_{ij} \to \max$ или $-\mathrm{P} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} - p_{ij}x_{ij} \to \min$,(13.1) при ограничениях: 1. $\sum_{i=1} x_{ij}=a_i$; 2. $\sum_{j=1} x_{ij}=b_j$; 3. $\sum_{i=1} a_i=\sum_{j=1} b_j$; 4. $x_{ij}>=0$; (13.2)

Таблица.13.1.

Исходные данные примера задачи 13

Типы ВС	***Воздушные линии***						
	1	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***a_i***
1	12	2	-6	8	-5	5	***25***
2	4	-5	5	-4	5	-4	***27***
3	-5	3	-5	8	-3	-6	***27***
4	-7	4	1	1	-4	1	***30***
b_j	***16***	***13***	***13***	***12***	***14***	***36***	***104/109***

Алгоритм решения задачи

Шаг 1. Преобразуем "открытую" задачу в "закрытую" - вводим столбец с $b_{доп}$ = 5 (см. табл.13.2), уравнивая суммы a_i и b_j.

Таблица.13.2.

Преобразование «открытой» задачи в «закрытую»

Типы ВС	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***a_i***
1	**12**	**2**	**-6**	**8**	**-5**	**5**	***0***	***25***
2	**4**	**-5**	**5**	**-4**	**5**	**-4**	***0***	***27***
3	**-5**	**3**	**-5**	**8**	**-3**	**-6**	***0***	***27***
4	**-7**	**4**	**1**	**1**	**-4**	**1**	***0***	***30***
b_j	***16***	***13***	***13***	***12***	***14***	***36***	***5***	***109/109***

Шаг 2. **Строим опорный план** *методом минимальной стоимости.*

Таблица.13.2.

Опорный план

		v_{i1}=-7	***v_{i2}=-9***	***v_{i3}=-5***	***v_{i4}=1***	***v_{i5}=-4***	***v_{i6}=-8***	***v_{i7}=0***	
Типы ВС		***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***a_i***
1	***u_{i1}=-1***	12	2	-6 ***13***	8	-5 ***12***	5	*0*	***25***
2	***u_{i2}=4***	4	-5 ***13***	5	(+)-4 δ_{24}=9	5	(-) -4 ***14***	*0* δ_{27}=1	***27***
3	***u_{i3}=2***	(-) -5 ***5***	3	-5 δ_{31}=2	8	-3 δ_{35}=1	(+) -6 ***22***	*0* δ_{37}=2	***27***
4	***u_{i4}=0***	(+)-7 ***11***	4	1	(-) 1 ***12***	-4 ***2***	1	*0* ***5***	***30***
b_j		***16***	***13***	***13***	***12***	***14***	***36***	***5***	***109***

***Шаг 3. Строим систему потенциалов** и проверяем условия оптимальности*

1) $u_i + v_j = c_{ij}$; *для "занятых" клеток* (13.3)

2) $u_i + v_j \leq c_{ij}$ - *для "незанятых" клеток* (13.4)

При невыполнении условия (13.4) в клетку пишем разность $\delta_{ij}=\{(u_i+v_j)-c_{ij}\}$. Находим клетку с max δ_{24}***=9 и помечаем ее знаком (+).*** Находим min x_{ij} на вершинах контура, помеченных (-). Δ=min x_{ij}=5. Отнимаем Δ из x_{ij} на вершинах (-) и прибавляем к x_{ij} на вершинах со знаком (+). Результат записываем в табл.13.3.

Таблица.13.3.

Оптимальный план (1)

		v_{i1}=-7	v_{i2}=0	v_{i3}=-5	v_{i4}=1	v_{i5}=-4	v_{i6}=1	v_{i7}=0	
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	a_i
1	u_{i1}=-1	12	2	−6 **13**	8	−5 **12**	5	**0**	**25**
2	u_{i2}=-5	4	−5 **13**	5	−4 **5**	5	−4 **9**	**0**	**27**
3	u_{i3}=-7	−5	3	−5	8	−3	−6 **27**	**0**	**27**
4	u_{i4}=0	−7 **16**	4	1	1 **7**	−4 **2**	1	**0** **5**	**30**
		16	**13**	**13**	**12**	**14**	**36**	**5**	

***Шаг 4. Строим систему потенциалов** и проверяем выполнение условий* оптимальности. Все условия оптимальности выполнены и план табл.13.3 оптимален. У задачи есть еще один оптимальный план (табл.13.4).Целевая функция планов одинакова и равна $-P=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}-p_{ij}x_{ij}=-534$ *ден.ед.*

Таблица.13.4.

Оптимальный план (2)

		v_{i1}=-7	v_{i2}=0	v_{i3}=-5	v_{i4}=1	v_{i5}=-4	v_{i6}=1	v_{i7}=0	
Типы ВС		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	a_i
1	u_{i1}=-1	12	2	−6 **13**	8	−5 **12**	5	**0**	**25**
2	u_{i2}=-5	4	−5 **13**	5	−4 **12**	5	−4 **2**	**0**	**27**
3	u_{i3}=-7	−5	3	−5	8	−3	−6 **27**	**0**	**27**
4	u_{i4}=0	(−)7 **6**	4	1	1	−4 **2**	1 **7**	**0** **5**	**30**
b_i		**16**	**13**	**13**	**12**	**14**	**36**	**5**	**109**

Для оценки получаемую прибыль, умножаем ответ на- 1 P=(-534)*(-1)= 534 .

Таблица 13.5.

Исходные данные вариантов задачи 13

Вариант 1							**Вариант 2**							**Вариант 3**						
-5	-8	-5	4	-10	7	34	3	-3	-1	3	7	3	34	-7	7	-6	10	-9	8	28
13	-2	-7	-8	3	-9	38	-2	-5	12	-1	-1	-4	26	3	3	3	-5	7	-8	36
-8	7	-9	4	-9	-9	29	3	7	4	3	4	-1	32	-7	-2	-2	3	-4	3	33
-2	-8	7	-8	-3	-3	31	-8	-8	-1	-7	-9	8	34	-9	-5	7	-2	6	-3	32
23	22	24	15	23	27		23	24	26	20	18	28		23	25	21	19	14	22	
Вариант 4							**Вариант 5**							**Вариант 6**						
-5	14	13	7	4	8	33	-8	6	6	11	-7	9	35	-8	-4	-2	-5	4	9	31
5	-6	-1	-4	-4	-5	31	-5	1	-5	-3	5	-9	28	14	2	-3	11	-3	-1	33
14	-3	4	-9	1	7	33	6	-7	4	-6	-5	9	35	3	12	5	-13	9	3	31
-9	-5	-1	3	-4	-7	29	-4	-3	14	6	10	-7	26	-4	-3	-4	-4	-3	-2	39
25	12	15	16	19	22		24	29	21	25	16	21		22	18	18	13	21	25	

Практическое занятие 14

Оптимизация “назначений” и графиков оборота ВС, пилотов и бортпроводников

Постановка задачи 14.1

АК выполняет n рейсов на n ВС. Задана матрица C={c_{ij}} себестоимостей j-го рейса на i-м ВС (i,j=1,n) (таб.14.1).

Минимизируя $$Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \to \min \qquad (14.1)$$

при: 1) $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1$; (14.2) 2) $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$; (14.3) 3) x_{ij} =0 или 1; при i,j=1,n. (14.4)

необходимо найти матрицу назначений $X=x_{ij}$ n ВС на n рейсов.

Таблица 14.1.

Исходные данные задачи 14.1

	Воздушные линии				
ВС	***1***	***2***	***3***	***4***	***m=5***
1	**7**	**4**	**11**	**8**	**9**
2	**14**	**13**	**15**	**5**	**16**
3	**9**	**4**	**5**	**8**	**12**
4	**8**	**5**	**7**	**7**	**11**
n=5	**3**	**6**	**6**	**23**	**3**

Алгоритм решения задачи 14.1

Шаг 1. Находим в каждой строке *min c_{ij} и вычитаем его из c_{ij} i-й строки.*

Шаг 2. Находим в каждом столбце *min c_{ij} и вычитаем его из c_{ij}.*

7	4	11	8	9	4
14	12	15	5	16	5
9	4	5	8	12	4
8	5	7	7	11	5
3	6	6	23	3	3
Шаг 1					

3	0	7	4	5
9	8	10	0	11
5	0	1	4	8
3	0	2	2	6
0	3	3	20	0
0	0	1	0	0
Шаг 2				

3	0	6	4	5
9	8	9	0	11
5	0	0	4	8
3	0	1	2	6
0	3	2	20	0
Матрица C_1 Шаг 3				

Рис.14.1. Построение опорного плана (Шаги 1-3)

В каждой строке и столбце матрицы С должен быть ноль (рис.14.1). ***Шаг 3. Идем сверху вниз*** *по строкам* матрицы C_1. Встретив в строке ноль без пометок, помечаем его знаком *, а остальные 0 вправо до конца строки и вниз до конца столбца помечаем ^. 0* называется *помеченным,*а 0^– *непомеченным*.

►	**3**	**0***	**6**	**4**	**5**
	9	**8**	9	0	11
	5	**0^**	0	4	8
	3	**0^**	1	2	6
1	**0**	**3**	2	20	0

	3	**0***	**6**	**4**	**5**
►	**9**	**8**	**9**	**0***	**11**
	5	**0^**	0	4	8
	3	**0^**	1	2	6
2	**0**	**3**	2	20	0

	3	**0***	**6**	**4**	**5**
	9	**8**	**9**	**0***	**11**
►	**5**	**0^**	**0***	4	8
	3	**0^**	1	2	6
3	**0**	**3**	2	20	0

	3	**0***	**6**	**4**	**5**
	9	**8**	**9**	**0***	**11**
	5	**0^**	**0***	**4**	**8**
5	**3**	**0^**	**1**	**2**	**6**
►	**0***	**3**	**2**	**20**	**0^**

Рис.14.2. Пометки 0* и 0^ (Шаг 4)

Шаг 4. Помечаем знаком # строки с 0^ (без 0*) (рис.7.4).

Шаг 5. В строках со знаком #, помечаем столбцы знаком #, в которых 0^.

Шаг 6. В столбце, помеченном знаком #, находим 0* и помечаем знаком # строку, в которой он стоит (рис.14.3).

								#						#			
	3	0*	6	4	5		3	**0***	6	4	5	#	**3**	**0***	**6**	**4**	**5**
	9	8	9	0*	11		9	**8**	9	0*	11		9	**8**	9	0*	11
	5	0^	0*	4	8		5	**0^**	0*	4	8		5	**0^**	0*	4	8
	3	0^	1	2	6	#	**3**	**0^**	**1**	**2**	**6**	#	**3**	**0^**	**1**	**2**	**6**
	0*	3	2	20	0^		0*	**3**	2	20	0^		0*	**3**	2	20	0^

Рис.14.3. Пометки строк и столбцов #

Шаг 7. Помечаем знаком & столбцы со знаком # и строки без знака #. ***Зачеркиваем все нули min числом прямых линий (***рис.14.4).

Шаг 8. Ищем Δ=min не зачеркнутому c_{ij}. Вычитаем Δ из не зачеркнутых c_{ij}, к дважды зачеркнутым c_{ij} прибавляем Δ,зачеркнутые 1 раз c_{ij} не меняем.

	1	&	Вычитаем Δ=1				(Вычли)						Прибавили Δ=1				
	3	0	6	4	5		2	0	5	3	4		2	0	5	3	4
&	9	8	9	0	11		9	8	9	0	11		9	9	9	0	11
&	5	0	0	4	8		5	0	0	4	8		5	1	0	4	8
	3	0	Δ=1	2	6		2	0	0	1	5		2	0	0	1	5
&	0	3	2	20	0		0	3	2	20	0		0	4	2	20	0

Рис.14.4. Зачеркивание строк и столбцов, изменение c_{ij}

Идем на Шаг 3 и, повторяя шаги 3–8, выполняем итерацию II. Помечаем 0* и 0^. Помечаем столбцы и строки #, столбцы и строки &,зачеркиваем 0,меняем план.

								#	#					&	&		
	2	0*	5	3	4	#	2	0*	5	3	4	#	2	0*	5	3	4
	9	9	9	0*	11		9	9	9	0*	11	&	9	9	9	0*	11
	5	1	0*	4	8	#	5	1	0*	4	8	#	5	1	0*	4	8
#	2	0^	0^	1	5	#	2	0^	0^	1	5	#	2	0^	0^	1	5
	0*	4	2	20	0^		0*	4	2	20	0^	&	0*	4	2	20	0^

		&	&				Вычли Δ						Прибавили Δ				
	2	0*	5	3	4		1	0	5	2	3		1	0	5	2	3
&	9	9	9	0*	11		9	9	9	0	11		9	10	10	0	11
	5	1	0*	4	8		4	1	0	3	7		4	1	0	3	7
	2	0^	0^	Δ=1	5		1	0	0	0	4		1	0	0	0	4
&	0*	4	2	20	0^		0	4	2	20	0		0	5	3	20	0

Рис.14.5. Итерация II

План рис.14.5 не оптимален. Идем на шаг 3 и выполняем итерацию III (рис.14.6)

								#	#	#				&	&	&	
	1	0*	5	2	3	#	1	0*	5	2	3		1	0*	5	2	3
	9	10	10	0*	11	#	9	10	10	0*	11		9	10	10	0*	11
	4	1	0*	3	7	#	4	1	0*	3	7		4	1	0*	3	7
	1	0^	0^	0^	4	#	1	0^	0^	0^	4		1	0^	0^	0^	4
	0*	5	3	20	0^		0*	5	3	20	0^	&	0*	5	3	20	0^

		&	&	&			Вычли Δ						Прибавили Δ				
	1	0*	5	2	3		0	0	5	2	2		0	0	5	2	2
	9	10	10	0*	11		8	9	9	0	10		8	9	9	0	10
	4	1	0*	3	7		3	1	0	3	6		3	1	0	3	6
	1	0^	0^	0^	4		0	0	0	0	3		0	0	0	0	3
&	0*	5	3	20	0^		0	4	2	20	0		0	5	3	21	0

Рис.14.6. Итерация III

Шаг 9. Помечаем нули и находим, что план оптимален. Записываем матрицу назначений X (0* на 1 и 0^ на 0). По исходным данным вычисляем Z.

P **Оптимальный план**						**Матрица назначений**						Расчет Z				
0*	0^	5	2	2		**1**	0	0	0	0		7	4	11	8	9
8	9	9	**0***	10		0	0	0	**1**	0		14	12	15	5	16
3	1	**0***	3	6		0	0	1	0	0		9	4	5	8	12
0^	**0***	0^	0^	3		0	1	0	0	0		8	5	7	7	11
u 0^	5	3	21	**0***		0	0	0	0	**1**		3	6	6	23	3

Рис.14.7. Оптимальный план

Целевая функция оптимального плана **Z = 7 + 5 + 5 + 5 + 3 = 25**

Постановка задачи 14.2.

Задано расписание полетов между городами А и В (табл.14.1). Надо сформировать оптимальный график оборота ВС и найти min число ВС.

Таблица 14.1.

Расписание полетов между А и В

Рейс	**Вылет / Прилет из А в В**		**Рейс**	**Вылет / Прилет из В в А**	
1	**10.00**	**12.00**	**11**	**10.00**	**12.00**
2	**11.00**	**13.00**	**12**	**13.00**	**15.00**
3	**13.00**	**15.00**	**13**	**20.00**	**22.00**
4	**15.00**	**17.00**	**14**	**21.00**	**23.00**
5	**21.00**	**23.00**	**15**	**22.00**	**24.00**

Время нахождения ВС на земле $T_{min} \leq 1$ час. Число рейсов в сутки $nr_{SU}=10$.

Алгоритм решения задачи 14.2

Шаг 1. Находим T_{ij} нахождения ВС на земле *каждой пары рейсов.* ВС из А, улетающее в 10.00, сможет улететь из В рейсом 1 в 10.00 только через сутки через (24.00-12.00)+10.00=22 ч. Ищем T_{ij} для каждой пары рейсов.

Шаг 2. Решаем дважды задачу "о назначениях" *по правой и левой частям* табл.7.2. Цифры со знаком # - оптимальные x_{ij}. $\sum$T нахождения ВС на земле для левой матрицы Z=1+7+6+5+1=30,а для правой Z=12+12+13+3+6=46.

Таблица 14.2.

Результаты решения задачи "о назначениях"

В Пр.\Уб.	***11***	***12***	***13***	***14***	***15***	***А Пр./Уб.***	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***
1	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**11**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**
2	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**12**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**
3	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**13**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
4	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**14**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**
5	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**15**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**

Таблица 14.3.

Т нахождения ВС на земле для любой пары рейсов

В Пр.\Уб.	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**А Пр./Уб.**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
11	**22**	**1#**	**8**	**9**	**10**	**11**	**22**	**23**	**1**	**3#**	**9**
2	**21**	**24**	**7#**	**8**	**9**	**12**	**19**	**20**	**22**	**24**	**6#**
3	**19**	**22**	**5**	**6#**	**7**	**13**	**12#**	**13**	**15**	**17**	**23**
4	**17**	**20**	**3**	**4**	**5#**	**14**	**11**	**12#**	**14**	**16**	**22**
5	**11#**	**14**	**21**	**22**	**23**	**15**	**10**	**11**	**3#**	**15**	**21**

Шаг 3. По матрицам назначений находим пары спариваемых рейсов: а) 1-12; 2-13; 3-14; 4-15; 5-11; в) 11- 4; 12- 5; 13- 1;14- 2; 15- 3.

Шаг 4. Используя шага 3, находим цепочку (1) рейсов, дающую min сумму t нахождения каждого ВС на земле: 1-12-5-11-4-15- 3-14-2-13-1.

Шаг 5. ВС, вылетающее из А в понедельник в 9.00 выполнит все рейсы цепочки за 4 дня в четверг в 22.00. В пятницу ВС может начать новую цепочку.

Шаг 6. Определяем число ВС $Nbc = Nr_{SU} * ntc / Nr_{SU} = 10*4/10 = 4$ ВС.

Таблица 14.4.

Исходные данные вариантов задачи 14.1.

Вариант 1					**Вариант 2**					**Вариант 3**				
10	**5**	**9**	**18**	**11**	**23**	**24**	**5**	**15**	**10**	**21**	**22**	**3**	**19**	**10**
13	**19**	**6**	**12**	**4**	**22**	**23**	**4**	**18**	**19**	**20**	**21**	**2**	**18**	**19**
3	**2**	**4**	**4**	**5**	**17**	**18**	**23**	**3**	**4**	**15**	**16**	**21**	**3**	**4**
18	**9**	**12**	**17**	**15**	**11**	**12**	**17**	**21**	**22**	**11**	**12**	**17**	**23**	**23**
11	**6**	**14**	**19**	**10**	**23**	**24**	**5**	**15**	**10**	**10**	**11**	**16**	**22**	**23**
Вариант 4					**Вариант 5**					**Вариант 6**				
5	**6**	**11**	**9**	**11**	**12**	**3**	**11**	**15**	**21**	**7**	**5**	**12**	**9**	**3**
11	**7**	**3**	**10**	**3**	**11**	**13**	**3**	**10**	**3**	**10**	**4**	**6**	**3**	**17**
7	**11**	**11**	**8**	**9**	**7**	**11**	**15**	**15**	**10**	**7**	**2**	**13**	**6**	**6**
10	**8**	**12**	**15**	**13**	**10**	**11**	**5**	**5**	**9**	**6**	**13**	**5**	**15**	**9**
2	**9**	**6**	**11**	**3**	**2**	**11**	**10**	**11**	**3**	**11**	**7**	**4**	**21**	**3**

Таблица 14.5.

Исходные данные вариантов задачи 14.2.

	Вариант 1				Вариант 2		
Рейс	**Вылет/Прилет из А в В**	**Рейс**	**Вылет/Прилет из В в А**	**Рейс**	**Вылет/Прилет из А в В**	**Рейс**	**Вылет/Прилет из В в А**
1	**8.00 - 11.00**	**11**	**8.00 - 11.00**	**1**	**8.00 - 11.00**	**11**	**8.00 - 11.00**
2	**9.00 - 12.00**	**12**	**17.00 - 20.00**	**2**	**10.00 - 13.00**	**12**	**9.00 - 12.00**
3	**11.00 - 14.00**	**13**	**18.00 - 21.00**	**3**	**15.00 - 18.00**	**13**	**14.00 - 17.00**
4	**19.00 - 22.00**	**14**	**19.00 - 22.00**	**4**	**19.00 - 22.00**	**14**	**20.00 - 23.00**
5	**20.00 - 23.00**	**15**	**20.00 - 23.00**	**5**	**20.00 - 23.00**	**15**	**21.00 - 24.00**
Рейс	Вариант 3			**Ре**	Вариант 4		
1	**8.00 - 10.00**	11	**11.00 - 13.00**	**1**	**6.00 - 8.00**	11	8.00 - 10.00
2	**12.00 - 14.00**	12	**12.00 - 14.00**	**2**	**8.00 - 10.00**	12	9.00 - 11.00
3	**15.00 - 17.00**	13	**14.00 - 16.00**	**3**	**10.00 - 12.00**	13	14.00 - 16.00
4	**17.00 - 19.00**	14	**18.00 - 20.00**	**4**	**14.00 - 16.00**	14	20.00 - 22.00
5	**18.00 - 20.00**	15	**19.00 - 21.00**	**5**	**16.00 - 8.00**	15	21.00 - 23.00
Рейс	Вариант 5			**Ре**	Вариант 6		
1	**8.00 - 12.00**	**11**	**7.00 - 11.0**	**1**	**8.00 - 11.00**	**11**	**17.00 - 20.00**
2	**10.00 - 14.00**	**12**	**9.00 - 13.00 11.0**	**2**	**10.00 - 13.00**	**12**	**18.00 - 21.00**
3	**11.00 - 15.00**	**13**	**- 15.00 14.00**	**3**	**15.00 - 18.00**	**13**	**19.00 - 22.00**
4	**13.00 - 17.00**	**14**	**18.00 16.00**	**4**	**17.00 - 20.00**	**14**	**20.00 - 23.00**
5	**15.00 - 19.00**	**15**	**20.0**	**5**	**20.00 - 23.00**	**15**	**21.00 - 24.00**

ПРИЛОЖЕНИЕ I.

Таблица 1.1.

Квантили функции Ф(Z)

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239 .5	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.6026	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5909	.5948	.5987	.6406	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6333	.6368	.6772	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.7123	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7454	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7356	.7389	.7421	.7764	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7703	.7734	.8051	.7793	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8315	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8554	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8437	.8461	.8485	.8508	.8531	.8770	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8962	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8906	.8925	.8943	.9131	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9279	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9406	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9515	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9485	.9505	.9608	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9686	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9648	.9656	.9664	.9671	.9678	.9750	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9803	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9776	.9783	.9788	.9798	.9798	.9846	.9807	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9881	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9874	.9878	.9909	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9930	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9924	.9927	.9929	.9948	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9961	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9958	.9960	.9971	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9980	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9985	.9980	.9981	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9986	.9985	.9986	.9986
3.0	.9986	.9983	.9983	.9984	.9985	.9985	.9992	.9986	.9987	.9987
3.1	.9990	.9990	.9991	.9991	.9991	.9991	.9994	.9992	.9992	.9992
3.2	.9993	.9993	.9993	.9993	.9994	.9994	.9996	.9994	.9994	.9994
3.3	.9995	.9995	.9995	.9995	.9995	.9996	.9997	.9996	.9996	.9996
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998	.9997	.9997	.9997
3.5	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9999	.9998	.9998	.9998
4.0	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999		.9999	.9999	.9999

Таблица 1.2.

Квантили распределения χ^2

$\nu \backslash ^{p}$	0.975	0.95	0.900	0.100	0.050	0.025	0.010
1	0.001	0.004	0.016	2.710	3.840	5.020	6.630
2	0.051	0.103	0.211	4.610	5.990	7.380	9.210
3	0.216	0.352	0.584	6.250	7.810	9.350	11.340
4	0.484	0.711	1.064	7.780	9.490	11.140	13.280
5	0.831	1.150	1.610	9.240	11.070	12.380	15.090
6	1.240	1.640	2.200	10.640	12.590	14.450	16.810
7	1.690	2.170	2.830	12.020	**14.070**	16.010	18.480
8	2.180	2.730	3.490	13.360	**15.510**	17.530	20.090
9	2.700	3.330	4.170	14.680	16.920	19.020	21.670
10	3.250	3.940	4.870	15.990	18.310	20.480	23.210
11	3.820	4.570	5.580	17.280	19.680	21.920	24.730
12	4.400	5.230	6.300	18.550	21.030	23.340	26.220
13	5.010	5.890	7.040	19.810	22.360	24.740	27.690
14	5.630	6.570	7.790	21.060	23.680	26.120	29.140
15	6.260	7.260	8.550	22.310	25.000	27.490	30.580
16	6.910	7.960	9.310	23.540	26.300	28.850	32.000
17	7.560	8.670	10.080	24.770	27.590	30.190	33.410
18	8.230	9.390	10.860	25.990	28.870	31.530	34.810
19	8.910	10.120	11.650	27.200	30.140	32.580	36.190
20	9.590	10.850	12.440	28.410	31.410	34.170	37.570
22	10.980	12.340	14.040	30.810	33.920	36.780	40.290
24	12.400	13.850	15.660	33.200	36.420	39.360	42.980
26	13.840	15.380	17.290	35.560	38.880	41.920	45.640
28	15.310	16.930	18.940	37.920	41.340	44.460	48.280
30	16.790	18.490	20.600	40.260	43.770	46.980	50.890
35	20.570	22.460	24.800	46.060	49.800	53.200	57.340
40	24.430	26.510	29.050	51.810	55.760	59.340	63.690
45	28.520	29.420	33.770	57.320	61.250	65.350	69.560
50	32.360	34.760	37.690	63.170	67.500	71.420	76.160
60	40.480	43.190	46.460	74.400	79.080	83.300	88.380
80	57.150	60.390	64.280	96.580	101.880	106.630	112.330
100	74.220	77.930	82.360	118.500	124.340	129.560	135.810
120	91.570	95.700	100.620	140.230	146.570	152.210	158.950
150	118.700	122.700	128.300	172.600	179.600	185.800	193.200
200	162.700	168.300	174.800	226.000	234.000	241.100	249.400

Таблица 1.3.

Значения функции e^{-x}

\	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	1.000	0.990	0.980	0.970	0.961	0.951	0.942	0.932	0.923	0.914
0.1	.905	.896	.887	.978	.869	.861	.852	.844	.835	.827
0.2	.819	.811	.803	.795	.787	.779	.771	.763	.756	.748
0.3	.741	.733	.726	.719	.712	.705	.698	.601	.694	.677
0.4	.670	.664	.657	.651	.644	.638	.631	.625	.619	.613
0.5	.606	.601	.595	.589	.583	.577	.571	.565	.560	.554
0.6	.549	.543	.538	.533	.527	.522	.517	.512	.507	.502
0.7	.497	.492	.487	.482	.477	.472	.468	.463	.458	.454
0.8	.449	.445	.440	.436	.432	.427	.423	.419	.415	.411
0.9	.407	.403	.399	.395	.391	.387	.383	.379	.375	.372
1.0	.368	.364	.360	.357	.354	.350	.347	.343	.340	.337
1.1	.333	.330	.326	.323	.320	.317	.314	.310	.307	.304
1.2	.301	.298	.295	.292	.289	.287	.287	.281	.278	.275
1.3	.273	.270	.267	.265	.262	.259	.257	.254	.252	.249
1.4	.247	.244	.242	.239	.237	.235	.232	.230	.228	.225
1.5	.223	.221	.219	.217	.214	.212	.210	.208	.206	.204
1.6	.202	.200	.198	.196	.194	.192	.190	.188	.186	.185
1.7	.183	.181	.179	.177	.176	.174	.172	.170	.169	.167
1.8	.165	.164	.162	.160	.159	.157	.156	.154	.153	.151
1.9	.150	.148	.147	.145	.144	.142	.141	.140	.138	.137
2.0	.135	.134	.133	.131	.130	.129	.128	.126	.125	.124
2.1	.123	.121	.120	.119	.118	.117	.115	.114	.113	.112
2.2	.111	.110	.109	.108	.107	.105	.104	.103	.102	.102
2.3	.100	.099	.098	.097	.096	.095	.094	.093	.092	.091
2.4	.091	.090	.089	.088	.087	.086	.085	.085	.084	.083
2.5	.082	.081	.081	.080	.078	.078	.077	.077	.076	.075
2.6	.074	.074	.073	.072	.071	.071	.070	.069	.069	.068
2.7	.067	.067	.066	.065	.065	.064	.063	.063	.062	.061
2.8	.061	.060	.060	.059	.058	.058	.057	.057	.056	.056
2.9	.055	.055	.054	.053	.053	.052	.052	.051	.051	.050
3.0	.050	.049	.049	.048	.048	.047	.047	.046	.046	.046
3.1	.045	.045	.044	.044	.043	.043	.042	.042	.042	.041
3.2	.041	.040	.040	.040	.039	.039	.038	.038	.038	.037
3.3	.038	.037	.036	.036	.035	.035	.035	.034	.034	.034
3.4	.033	.033	.033	.032	.032	.032	.031	.031	.031	.031
3.5	.030	.030	.030	.029	.029	.029	.028	.028	.028	.028
3.6	.027	.027	.027	.027	.026	.026	.026	.026	.025	.025
3.7	.025	.025	.024	.024	.024	.024	.023	.023	.023	.022
3.8	.022	.022	.022	.022	.022	.021	.021	.021	.021	.021
3.9	.020	.020	.020	.020	.020	.019	.019	.019	.019	.019
\	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90
4.0	.018	.017	.015	.014	.012	.011	.010	.009	.008	.008
5.0	.007	.006	.006	.005	.005	.004	.004	.003	.003	.003
6.0	.003	.002	.002	.002	.002	.002	.001	.001	.001	.001
7.0	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.000	.000	.000

Таблица 1.4.

Квантили t-распределения Стьюдента

v\p	0.300	0.200	0.100	0.050	0.020	0.01	0.001
1	1.963	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	636.619
2	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.599
3	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.924
4	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.869
6	1.130	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.408
8	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
25	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
30	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
35	1.053	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724	3.591
40	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
45	1.049	1.301	1.679	2.014	2.412	2.690	3.520
50	1.048	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.496
55	1.047	1.297	1.673	2.004	2.396	2.669	3.478
60	1.046	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
70	1.045	1.294	1.667	1.994	2.381	2.648	3.435
80	1.044	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.416
90	1.043	1.291	1.662	1.987	2.368	2.632	3.402
100	1.042	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.390
120	1.041	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373
∞	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291

ЛИТЕРАТУРА

1. Андрианов В.В.Экономико-математические методы и модели. Часть I: Учебное пособие.- М : МГТУ ГА, 1993.- 137 с.

2. Андрианов В.В.Экономико-математические методы и модели. Часть II. Компьютерная реализация: Учебное пособие. – М. : МГТУ ГА, 1998. -104 с.

3. Андрианов В.В.Алгоритмы методов разработки управленческих решений: Учебное издание.- М.: МГТУ ГА, 2001. - 124с.

СОДЕРЖАНИЕ