ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ «МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ» (МГТУ ГА)

Кафедра технической эксплуатации радиоэлектронного оборудования воздушного транспорта

А.Л. Горбунов

ТЕОРИЯ ИНФОРМАЦИИ И КОДИРОВАНИЯ

ПОСОБИЕ
по выполнению практических занятий

для студентов III курса
специальности 090302 (10.05.02)
очной формы обучения

Москва-2015

ББК 6Ф2.1
Г67

Рецензент канд. техн. наук, проф. Д.Н. Яманов

Горбунов А.Л.

Г67 Теория информации и кодирования: пособие по выполнению практических занятий. - М.: МГТУ ГА, 2015. - 28 с.

Данное пособие издается в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Теория информации и кодирования» по учебному плану для студентов III курса специальности 090302 (10.05.02) очной формы обучения.

Рассмотрено и одобрено на заседаниях кафедры 14.01.15 г. и методического совета 25.12.14 г.

Контрольные задачи и вопросы для практических занятий

1. Тема «Информационные системы (1/2)»

Некоторые теоретические сведения по теме

Количество кодовых комбинаций для цифрового сигнала $N = m^n$, где m – основание кода, n - разрядность. С ростом m и n количество кодовых комбинаций N растет, т.е. число сообщений увеличивается. Поэтому N можно использовать как основу для определения меры количества передаваемой информации J. Т.к. n – показатель степени, то удобно использовать логарифмическую функцию:

$$\boxed{J = \log_b N = n \log_b m}$$

Если $m = b = 2$, то при $n = 1$ и $J = 1$ – бит информации. При условии, что разряды сообщения взаимонезависимы и равновероятны и $b = 2$ количество информации:

$$\boxed{J_0 = n \log_2 m}$$

В общем случае вероятность появления разных символов в сообщении неодинакова (в русском языке чаще всего встречается буква О, реже всего – Ф). Тогда количество информации при неравновероятных и взаимонезависимых элементах сообщения:

$$\boxed{J_1 = -n \sum_{i=1}^{m} P_i \log_2 P_i}$$

где P_i – вероятность появления в сообщении i-го элемента. Знак минуса компенсирует отрицательное значение логарифма от числа <1.

В реальных сообщениях элементы часто взаимозависимы, т.е. надо учитывать условные вероятности P_{ij} – вероятность появления элемента j если предыдущим был элемент i:

$$\boxed{J_2 = -n \sum_{i=1}^{m} P_i \sum_{i=1}^{m} P_{ij} \log_2 P_{ij}}$$

Полученная информация будет тем ценнее, чем выше была информационная неопределенность до ее получения. В качестве меры неопределенности Шеннон ввел понятие энтропии – количества информации, приходящейся на один элемент сообщения:

$$\boxed{\begin{aligned}
H_0 &= \frac{J_0}{n} = \log_2 m \\
H_1 &= \frac{J_1}{n} = -\sum_{i=1}^{m} P_i \log_2 P_i \\
H_2 &= \frac{J_2}{n} = -\sum_{i=1}^{m} P_i \sum_{j=1}^{m} P_{ij} \log_2 P_{ij}
\end{aligned}}$$

Спектральная мощность ***S(k)*** и автокорреляционная функция ***R(n)*** связаны между собой прямым и обратным преобразованиями Фурье, которые для дискретных сигналов имеют вид:

$$S(k)=\sum_{n=0}^{N-1}R(n)\exp(-j\frac{2\pi kn}{N})$$
$$R(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}S(k)\exp(j\frac{2\pi kn}{N})$$

Эффективными в вычислительном смысле способами выполнения преобразования Фурье являются алгоритмы быстрого преобразования Фурье (БПФ): из исходного одномерного массива, содержащего ***N*** элементов, строится двумерный массив, содержащий ***M*** столбцов и ***L*** строк, номер столбца ***m=0,1,2…M-1***, номер строки ***l=0,1,2…L-1***. Тогда если в одномерном массиве отсчет имеет номер ***n***, то в двумерном он располагается в столбце ***m*** и строке ***l*** удовлетворяющим условию ***n=Ml+m***. Результат ДПФ также представляется в форме двумерного массива, где элемент с номером ***k*** располагается в столбце ***q=0,1,2…M-1*** и строке ***s=0,1,2,…L-1*** удовлетворяющим условию ***k=Lq+s***. При этом результат БПФ определяется выражением:

$$S_{вх}(s,q)=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{M-1}W_N^{mq}W_N^{ms}\sum_{l=0}^{L-1}U_{вх}(l,m)W_N^{sl}$$
$$где\quad W_c^{ab}=\exp(-j\frac{2\pi ab}{c})$$

Комплексная огибающая входной смеси (входного сигнала информационной системы, содержащего полезную и шумовую составляющие) выражается через аналитический комплексный сигнал:

$$\overset{o}{U}_{вх}(t)=\overset{o}{u}_{вх}(t)\exp(-j\omega_0 t)$$

где $\boldsymbol{\omega_0}$ – опорная частота, равная или близкая к центральной частоте спектра входного сигнала. Комплексную огибающую можно представить в показательной и алгебраической формах:

$$\overset{o}{U}_{вх}(t)=U_{вх}(t)\exp(j\varphi_{вх}(t))=C(t)+jS(t)$$

где $\boldsymbol{\varphi_{вх}(t)}$ – фаза входной смеси относительно опорной частоты,

$$C(t)=U_{вх}(t)\cos\varphi_{вх}(t);\ S(t)=U_{вх}(t)\sin\varphi_{вх}(t)$$

– соответственно косинусная и синусная квадратурные составляющие входной смеси. При этом справедливы соотношения:

$$U_{вх}(t)=\sqrt{C^2(t)+S^2(t)}$$
$$\phi_{вх}(t)=arctg(S(t)/C(t))$$
$$u_{вх}(t)=U_{вх}(t)\cos(\omega_0+\phi_{вх}(t))$$

Контрольные задачи и вопросы по теме

1.1. Дайте определения понятиям «информация», «сообщение», «сигнал».

1.2. Как измеряется количество информации? Определите энтропию источника, вырабатывающего независимые символы a_1 и a_2, если $p(a_1)=0,3$.
1.3. Что такое непрерывный, дискретный, цифровой сигналы?
1.4. Каковы функции кодера в обобщенной схеме системы связи?
1.5. Что такое энтропия сообщения, какие типы сообщений рассматриваются при определении энтропии?
1.6. Пусть одномерный массив длиной 128 элементов приводится к двумерному виду для выполнения БПФ и двумерный массив имеет 16 строк и 8 столбцов. Пусть в одномерном массиве некоторый элемент имеет номер n, равный последней цифре студенческого билета плюс 20. Определите номер столбца этого элемента в двумерном массиве, выбирая в качестве такового минимальное значение и полагая, что номера строк и столбцов начинаются с нуля.
1.7. Как фаза радиосигнала соотносится с его синусной и косинусной квадратурными составляющими?
1.8. Что происходит на представительском уровне представления системы связи в виде эталонной модели ISO-7948?

2. Тема «Информационные системы (2/2)»

Некоторые теоретические сведения по теме

Пусть $\boldsymbol{A}$ - ансамбль дискретных сообщений,

$\boldsymbol{A = \{a, p(a)\}}$

а $\boldsymbol{S}$ - ансамбль дискретных сигналов, в которые преобразуются сообщения А. Условная энтропия $\boldsymbol{H(A|S)}$:

$\boldsymbol{H(A|S) = - \sum p(a|s) \log p(a|s)}$

Взаимная информация $\boldsymbol{I(A;S)}$ – количество информации в $\boldsymbol{A}$ о $\boldsymbol{S}$ и наоборот:

$\boldsymbol{I(A;S) = H(A) - H(A|S) = H(S) - H(S|A)}$

Если преобразование является взаимно однозначным и обратимым, условная энтропия $\boldsymbol{H(A|S)}$ равна нулю. При необратимом преобразовании $\boldsymbol{I(A;S) < H(A)}$ и разность

$\boldsymbol{H(A) - I(A; S) = H(AIS)}$

по существу представляет собой потери информации, которые происходят в процессе преобразования сообщения в сигнал.

Непрерывным ансамблем, задаваемым плотностью распределения вероятностей $\boldsymbol{w(x)}$, называют пару $\boldsymbol{\{X, w(x)\}}$, где $\boldsymbol{X}$ — числовая ось и распределение вероятностей на X задается функцией $\boldsymbol{w(x)}$. Соответственно $\boldsymbol{\{XY, w(x, y)\}}$ называют системой двух совместно заданных непрерывных ансамблей. Энтропия для $\boldsymbol{\{X, w(x)\}}$ вычисляется переходом к пределу по стремящемуся к 0 шагу дискретизации $\Delta \boldsymbol{x}$ для аналогичного выражения для дискретных сообщений:

$$H(X) = \lim_{\Delta x \to 0} \left\{ -\sum w(x_k)\Delta x \log[w(x_k)\Delta x] \right\} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left\{ -\sum w(x_k)[\log w(x_k)]\Delta x \right\} + \lim_{\Delta x \to 0} \left\{ -\sum w(x_k)[\log \Delta x]\Delta x \right\} =$$
$$= -\int w(x) \log w(x)\, dx + \lim_{\Delta x \to 0} \left\{ -[\log \Delta x] \sum_k w(x_k)\Delta x \right\} =$$
$$= -\int w(x) \log w(x)\, dx - \lim_{\Delta x \to 0} \log \Delta x.$$

Пусть на числовой оси определен непрерывный вероятностный ансамбль $\boldsymbol{X}$, заданный плотностью распределения $\boldsymbol{f(x)}$. Математически задача квантования описывается как построение отображения множества $\boldsymbol{X}$ на дискретное аппроксимирующее множество $\boldsymbol{Y}$, входящее в $\boldsymbol{X}$. Такое отображение можно задать, разбив $\boldsymbol{X}$ на прилегающие друг к другу непересекающиеся отрезки $\boldsymbol{I_j}$, и выбрав по одной точке каждого отрезка в качестве одного из элементов $\boldsymbol{Y}$. Отрезки называют квантами, границы отрезков - границами квантов, элементы $\boldsymbol{y}$ множества $\boldsymbol{Y}$ - аппроксимирующими значениями.

Устройство квантования (квантователь) по значению $\boldsymbol{x}$ находит тот квант, которому принадлежит это значение; и сохраняет номер кванта для последующем использования, например, кодирования и передачи по каналу.
Для простоты предположим, что $\boldsymbol{Y}$ - конечное множество, число его элементов представляет собой число квантов или объем аппроксимирующего алфавита. Обозначим через $\mathbf{y_i, \dots , y_Q}$ аппроксимирующие значения, а через $\boldsymbol{b_o, b_1, \dots, b_Q}$ — границы квантов. Подразумевается, что $\boldsymbol{y_j}$ принадлежит интервалу $[\boldsymbol{b_{j-1}, b_j})$.
В качестве меры искажения принимается среднеквадратическая ошибку

$$D = \mathrm{M}\left[(x - y(x))^2\right] = \sum_{j=1}^{Q} \int_{b_{j-1}}^{b_j} (x - y_j)^2 f(x)dx.$$

Задача построения оптимального квантователя состоит в том, чтобы обеспечить наименьшую скорость $\boldsymbol{R}$ при заданных ограничениях на ошибку $\boldsymbol{D}$, или, напротив, минимизировать ошибку квантования при заданной скорости.

Контрольные задачи и вопросы по теме

2.1. Каковы характеристики систем связи?
2.2. Как определяется производительностью источника информации?
2.3. Как вычисляется пропускная способность дискретного канала?
2.4. Как определяется пропускная способность непрерывного канала?
2.5. Каковы основные типы помех, влияющих на работу системах связи на радиолиниях?

2.6. Какие специфические искажения возникают при передаче дискретных сообщений? Как осуществляется регистрация принимаемых импульсов дискретных сообщений?
2.7. Что такое условная и совместная энтропия дискретного сообщения?
2.8. Как вычисляется энтропия непрерывного сообщения?
2.9. Какими критериями задаются при определении параметров квантования?
2.10. Как вычисляется среднеквадратическая ошибка квантователя при заданных числе квантов, границах квантов и аппроксимирующих значениях сигнала?

3. Тема «Кодирование источников (1/4)»

Некоторые теоретические сведения по теме

Избыточности источника с мощностью алфавита ***k***:

$$\boxed{\chi = [H_{\max}(A) - H(A)]/H_{\max}(A) = 1 - H(A)/\log K.}$$

Код называется *равномерным,* если все его слова имеют одинаковую длину ***l***, называемую длиной кода. В противном случае код называется *неравномерным.* Количество различных слов равномерного кода длины ***l*** не превосходит $\boldsymbol{m^l}$ — числа различных ***m***-ичных последовательностей длины ***l***. Процесс кодирования заключается в разбиении последовательности сообщений на выходе источника на блоки длиной ***n*** и сопоставлении каждому блоку соответствующего кодового слова длины ***l***, общее число требуемых кодовых слов - ***M***. Ошибкой процедуры декодирования при этом является событие, состоящее в появлении неоднозначно кодируемого блока. Число ***log M/n = R*** для заданных значений ***M*** и ***n*** называется *скоростью равномерного кодирования источника*. Суть равномерного кодирования заключается в выборе множества однозначно кодируемых ***n***-последовательностей сообщений.

Прямая теорема кодирования источника:

*Для любого **R > H** и произвольного положительного **δ** найдется значение **n** и код со скоростью **R**, для которого вероятность ошибки не превосходит **δ**.*

Вероятность любой ***n***-последовательности символов дискретного стационарного источника, выбирающего сообщения из множества ***A***, записывается в виде:

$$\boxed{p(\vec{a}) = \prod_{k=1}^{n} p(a^{(k)})}$$

при этом количество собственной информации в последовательности определяется величиной:

$$\boxed{i(\vec{a}) = -\log p(\vec{a}) = -\sum_{k=1}^{n} \log p(a^{(k)}) = \sum_{k=1}^{n} i(a^{(k)}).}$$

Теорема о высоковероятных множествах дискретного источника без памяти*:*
Для любых положительных чисел **ε** *и* **δ** *найдется такое* **N***, что для всех* ***n*** **>** ***N*** *с вероятностью, большей,* чем **1-δ***, выполняется неравенство*

$$\boxed{\Pr\left|\frac{1}{n}i(\vec{a}) - H(A)\right| \leqslant \varepsilon.}$$

Обратная теорема кодирования источника:
Для любого ***R*** < ***H*** *найдется зависящее от* ***R*** *положительное число* ***δ*** *такое, что для всех* ***n*** *и для всех равномерных кодов со скоростью* ***R*** *вероятность ошибочного декодирования больше* ***δ*.**

Пример кодирования по методу Шеннона-Фано:

Сообщения	Вероятности	1-й шаг	2-й шаг	3-й шаг	4-й шаг	Кодовые слова
A_1	0,25		I			00
A_2	0,125	I		I		010
A_3	0,0625		II	II	I	0110
A_4	0,0625				II	0111
A_5	0,0625			I	I	1000
A_6	0,0625		I		II	1001
A_7	0,125	II		II		101
A_8	0,125		II	I		110
A_9	0,125			II		111

Пример кодирования по методу Хаффмена:

Сообщения	Вероятности	1	2	3	4	5	6	7	8	Кодовое слово
a_1	0,20									10
a_2	0,15									001
a_3	0,15				0,27		0,4			010
a_4	0,12							0,6		011
a_5	0,10			0,2		0,33				110
a_6	0,10									111
a_7	0,08		0,18							0001
a_8	0,06	0,1								00000
a_9	0,04									00001

Контрольные задачи и вопросы по теме

3.1. Какова энтропия источника с алфавитом 96 символов при равновероятной и независимой передаче букв двоичными символами?
3.2. Дайте развернутое определение понятие избыточности источника с мощностью алфавита ***k***.
3.3. Что такое энтропия стационарного источника на сообщение?
3.4. Как определяется понятие эффективного кодирования?
3.5. Что называется скоростью равномерного кодирования источника?

3.6. Поясните смысл прямой теоремы кодирования источника?
3.7. Приведите теорему о высоковероятных множествах дискретного источника без памяти.
3.8. Поясните смысл обратной теоремы кодирования источника.
3.9. Суть неравномерного кодирования, метод Шеннона-Фано.
3.10. Метод кодирования Хаффмена.

4. Тема «Кодирование источников (2/4)»

Некоторые теоретические сведения по теме

Алгоритм LZ-77

Параметром алгоритма является длина «окна наблюдения» W. Эту величину можно также интерпретировать как «объем скользящего словаря». Пусть $X = \{0, 1, \dots, M-1\}$ — алфавит источника и на выходе источника наблюдается последовательность $x_1, x_2, \dots, x_n$. Кодер LZ-77 хранит в памяти скользящий словарь объемом W. Словами словаря служат всевозможные подпоследовательности следующих друг за другом букв, содержащиеся в последних W буквах источника. При поступлении на вход кодера очередных букв источника кодер находит как можно более длинную последовательность, уже имеющуюся в словаре

В канал передается флаг (1 или 0), указывающий на то, найдено или нет подходящее словарное слово. В случае успеха (флаг равен 1) словарное слово передается указанием расстояния начала слова от текущей позиции и длины словарного слова.

Расстояние до слова d передается равномерным кодом, а длина слова (длина совпадения) l — некоторым неравномерным кодом. Если же словарного слова не нашлось, передается значение флага, равное 0, и за ним следует очередная буква источника, передаваемая без кодирования.

Алгоритм LZ-78

Вместо последовательностей букв передаются номера слов в некотором словаре. Кодер и декодер в процессе работы синхронно формируют этот словарь. На каждом шаге словарь пополняется одним новым словом, которое до этого в словаре отсутствовало, но является продолжением на одну букву одного из слов словаря.

Пусть $X = \{0, 1, \dots, M-1\}$ — алфавит источника и на выходе источника наблюдается последовательность $x_1, x_2, \dots, x_n$. Для простоты описания алгоритма будем считать, что в начале работы кодера каждая из букв алфавита является словом длиной 1 и входит в состав словаря. На каждом следующем шаге находится самое длинное слово, совпадающее с началом подлежащей кодированию последовательности. Пусть l — длина совпадения. Эти l букв передаются в виде ссылки на соответствующее слово словаря. Если объем словаря равен с, то для передачи этой ссылки достаточно $\log(c-1)$ бит. Словарь пополняется новым словом, $x_1, x_2, \dots, x_n$. которое получается дописыванием к использованному на данном шаге слову следующей за ним в потоке кодируемых данных буквы. Поскольку декодер не знает еще этой новой буквы, он сможет выполнить эту операцию только с задержкой на один шаг. Чтобы избежать неоднозначности кодирования, кодеру запрещается пользоваться последним построенным словом словаря. Исключение составляет первый шаг, когда словарь полностью известен кодеру и декодеру.

Алгоритм PPM

Предположим, что последовательность $x^t=(x_1, x_2, \dots, x_t)$ первых t букв источника уже передана и предстоит передать символ x_{t+1}. При кодировании очередной буквы выполняются следующие шаги:

1. Находим контекст x^t_{t-d+1} наибольшей длины d, не превышающей заданной величины D. Под контекстом понимается последовательность $s = x^t_{t-d+1}$, непосредственно предшествующая кодируемому символу и такая, что в точности такая же последовательность s уже встречалась в переданной последовательности x^{t-1}.
2. Для всех возможных значений символа x_{t+1} вычисляются оценки условных вероятностей символа при известном контексте s.
3. Значение символа x_{t+1} кодируется арифметическим кодом в соответствии с вычисленной на шаге 2 оценкой условной вероятности.

Контрольные задачи и вопросы по теме

4.1. Критерии качества работы архиваторов.
4.2. Метод скользящего словаря.
4.3. Какие последовательности при использовании метода LZ-77 кодируются побуквенно? Почему?
4.4. Методы повышению эффективности кодирования LZ-77.
4.5. Суть метода LZ-78.
4.6. Достоинства и недостатки LZ-77 и LZ-78 - сравнение.
4.7. Как поступают при заполнении словарем допустимого объема памяти а методах LZ?
4.8. Суть алгоритма PPM.

5. <u>Тема «Кодирование источников (3/4)»</u>

Некоторые теоретические сведения по теме

Видео – последовательность изображений, поэтому методы сжатия видео включают в себя методы компрессии собственно изображений и методы компрессии их последовательностей. Возможности сокращенного описания изображений в основном связаны с 2 факторами:

1) Специфика зрительного восприятия, благодаря которой исходное изображение можно без ущерба для субъективного оцениваемого

качества аппроксимировать более простым, экономно описываемым изображением.

2) Избыточность цифрового представления изображения, которую можно уменьшить методами статистического кодирования.

Дискретное косинусное преобразование:
прямое

$$C(k) = \frac{2}{N} c(k) \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \cos \frac{2n+1}{2N} k\pi, \quad k \in \{0, 1, \dots, N-1\},$$

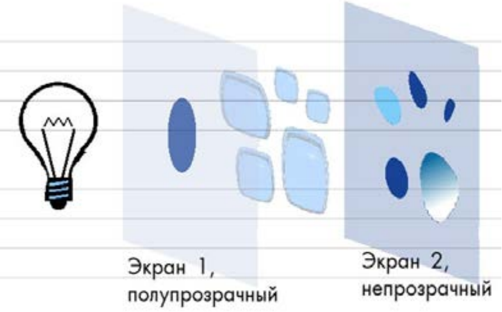
обратное

$$f(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c(k) C(k) \cos \frac{2n+1}{2N} k\pi, \quad n \in \{0, 1, \dots, N-1\},$$

где

$$c(k) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{для } k = 0, \\ 1 & \text{для } k \in \{1, 2, \dots, N-1\}. \end{cases}$$

Перспективным способом компрессии изображений является фрактальный метод. Идея метода – представление изображения в компактном виде с помощью коэффициентов итерируемых функций. Идея иллюстрируется абстрактным понятием фрактальной копировальной машины:



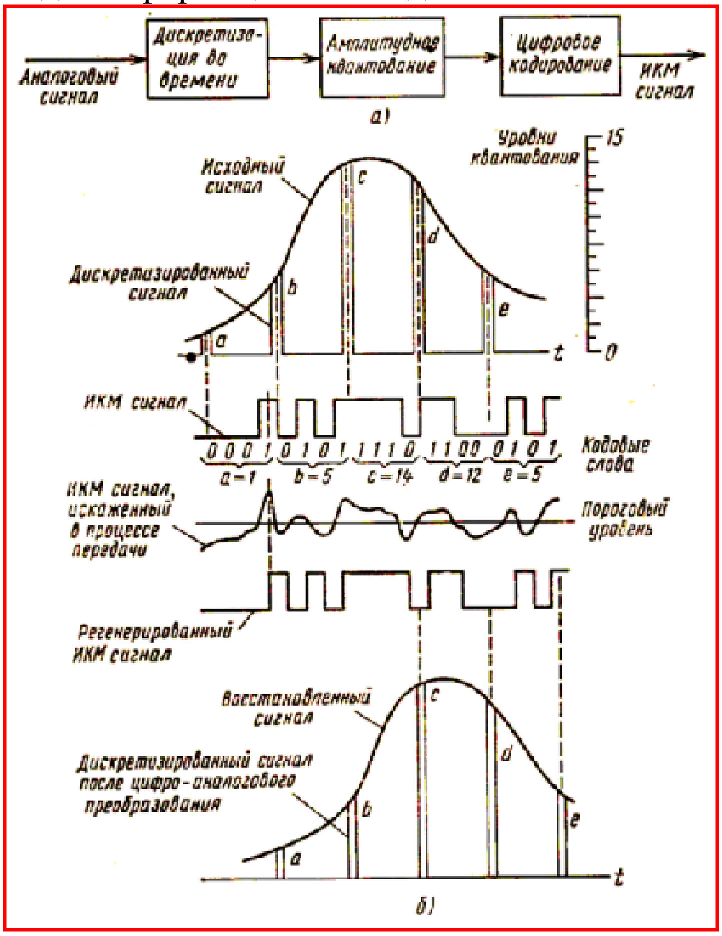
Контрольные задачи и вопросы по теме

5.1. Каковы способы сокращения психофизиологической избыточности при кодировании видеосообщений?
5.2. Каковы этапы компрессии по стандарту JPEG?
5.3. В чем смысл использования дискретного косинусного преобразования при компрессии по стандарту JPEG?
5.4. Какова суть фрактальных методов компрессии?
5.5. Как работает «фрактальная копировальная машина»?

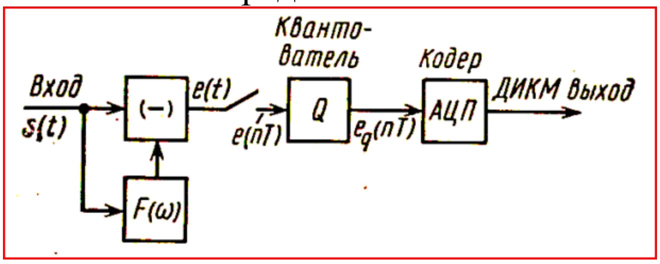
6. <u>Тема «Кодирование источников 4/4)»</u>

Некоторые теоретические сведения по теме

Основные применяемые методы при кодировании изображений при непосредственной передаче через канал обмена: импульсно-кодовая модуляция (ИКМ), дифференциальная импульсно-кодовой модуляции (ДИКМ), дельта-модуляция (ДМ). ИКМ является базовым методом цифрового кодирования источников изображений. Каждому закодированному в цифровую форму слову на выходе соответствует квантованный по времени и амплитуде отсчет видеоинформации на входе:

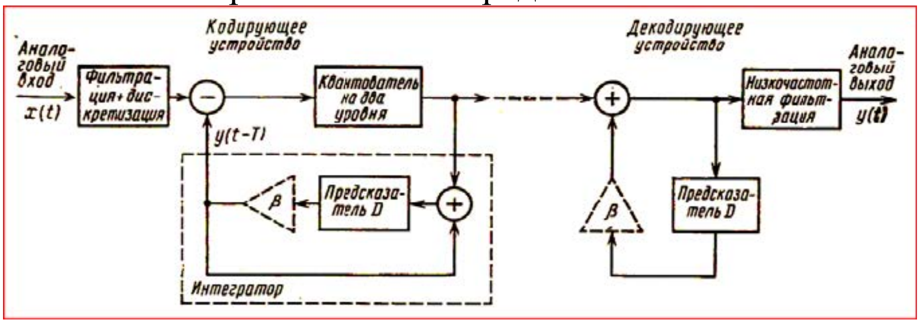


При ДИКМ каждому цифровому слову на выходе соответствует дискретизированная и квантованная разность между мгновенным значением отсчета и его предсказанным значением:

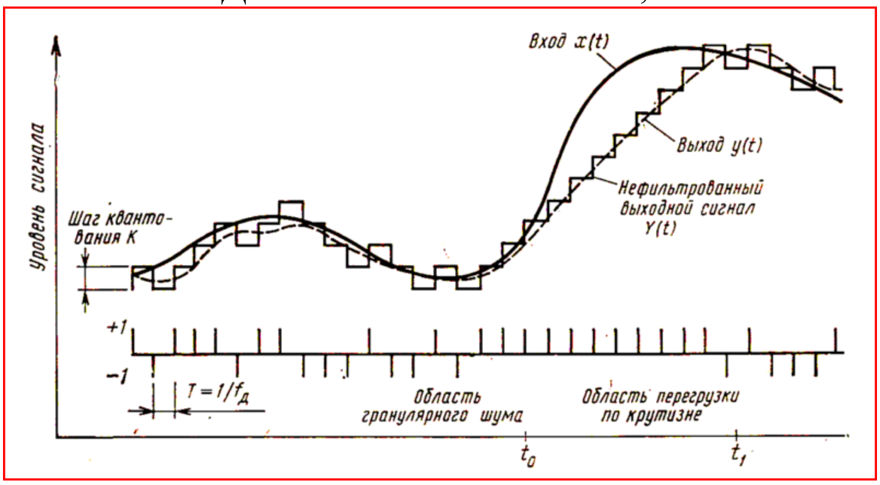


s(t) - входной аналоговый сигнал, ***T*** - интервал дискретизации по времени, $s_q(nT)$ — дискретизированный и квантованный сигнал, а **e(t)** и $e_q(nT)$ - разностные сигналы до и после квантования соответственно.

ДМ характеризуется тем, что кодовое слово формируется одним кодовым символом, отражающим знак разности между оцифрованным значением элемента изображения и его предсказанным значением:



В сиспо теме ДМ возникают искажения, вызванные квантованием:



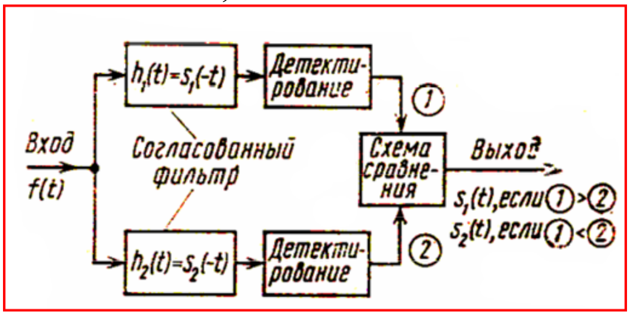
Контрольные задачи и вопросы по теме

6.1. Принцип, достоинства и недостатки импульсно-кодовой модуляции.
6.2. Униполярное и биполярное представления ИКМ-сигнала.
6.3. Бичастотное и бифазное представления ИКМ-сигнала.
6.4. Вероятности ошибочного приема символов при униполярном представлении ИКМ-сигнала.
6.5. Пропускная способность цифрового канала с шумом.
6.6. Принцип дифференциальной импульсно-кодовой модуляции.
6.7. Целесообразность применения ДИКМ для передачи видеоинформации.
6.8. Кодек ДИКМ с петлей обратной связи, охватывающей квантователь
6.9. Кодека ДИКМ с петлей обратной связи, не охватывающей квантователь.
6.10. Принцип и схема дельта-модуляции.
6.11. Искажения при дельта-модуляции.

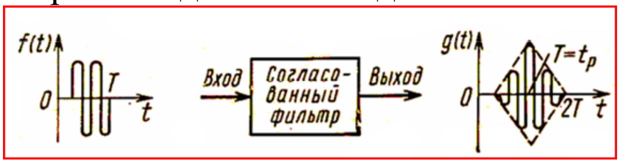
7. <u>Тема «Кодирование каналов»</u>

Некоторые теоретические сведения по теме

Амплитудная манипуляция (АМ) является одним из наиболее простых способов передачи цифровых сигналов по радиоканалу. В простейшем случае одному состоянию соответствует наличие несущей, а второму — ее отсутствие. При приеме можно воспользоваться двумя способами детектирования: первый заключается в детектирования огибающей. Второй, более сложный, но более качественный, основан на согласованной фильтрации.



Формы входных и выходных сигналов при согласованной фильтрации:

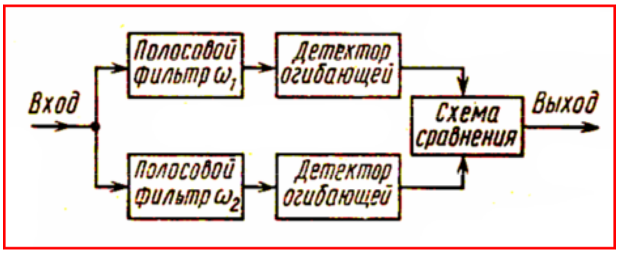


Передача по радиоканалу методом частотной манипуляции (ЧМ) осуществляется с помощью импульсного изменения частоты несущей при постоянной амплитуде:

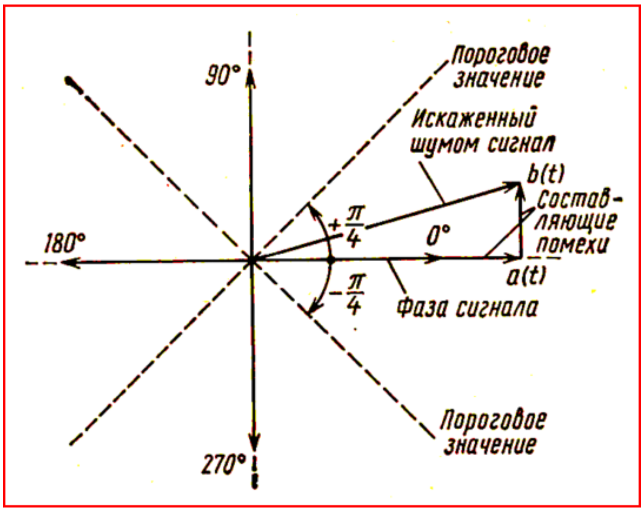
$$s_1(t) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2E_0}{T}} \sin \omega_1 t, & 0 \leqslant t \leqslant T, \\ 0 & \text{в других случаях,} \end{cases}$$

$$s_2(t) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2E_0}{T}} \sin \omega_2 t, & 0 \leqslant t \leqslant T, \\ 0 & \text{в других случаях,} \end{cases}$$

где E_0-- постоянная энергия сигналов $s_1(t)$, $s_2(t)$; w_1, w_2 - их циклические частоты, T - длительность передачи двоичного символа. Детектирование двоичных сигналов ЧМ:



Передача информации по радиоканалам методом фазовой манипуляции (ФМ) осуществляется с помощью импульсного изменения фазы несущей при постоянной амплитуде и частоте. Векторная диаграмма четырехпозиционной ФМ (с четырьмя состояниями) при воздействии шума:



Осуществить прием сигнала ФМ можно с помощью когерентного детектирования, заключающегося в определении на приемной стороне опорной фазы несущей посредством фазовой синхронизации приемника с передатчиком.

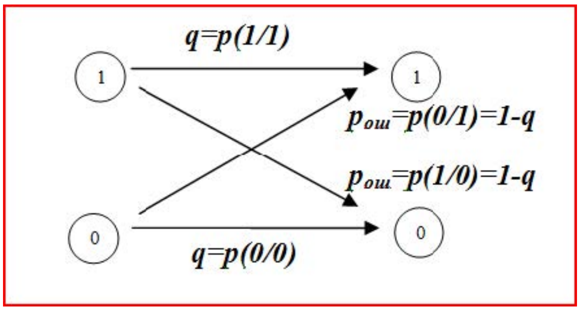
Контрольные задачи и вопросы по теме

7.1. Принцип и реализация амплитудной манипуляции.
7.2. Принцип и реализация частотной манипуляции.
7.3. Принцип и реализация фазовой манипуляции.
7.4. Вероятность ошибки, возникающей в результате шума при ФМ.
7.5. Сравнение достоинств и недостатков АМ, ЧМ и ФМ.

8. Тема «Помехоустойчивое кодирование (1/7)»

Некоторые теоретические сведения по теме

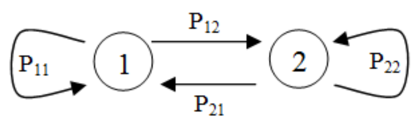
Граф двоичного симметричного (вероятности ошибок при передаче 0 и 1 равны) канала без памяти:



Вероятность того, что в среди принятых ***n*** символов имеется ***t*** ошибок:

$$P_n(t) = C_n^t\, p_{ош}^t (1-p_{ош})^{n-1}\text{, где } C_n^t = n!/t!(n-t)!$$

Простейшей моделью изменения состояния системы связи вследствие возникновения ошибок, основанной на аппарате Марковских цепей, является модель источника ошибок Гильберта:



где 1 – состояние отсутствия ошибок, 2 – состояние наличия ошибок.

Каждому символу алфавита сообщений N_A поставим в соответствие n-элементную двоичную последовательность (кодовая комбинация). Максимальное число таких последовательностей равно $N_0 = 2^n$. Если $N_A=N_0$, то все возможные последовательности используются для передачи (разрешенные последовательности), а код является простым и неспособным обнаруживать ошибки. Степень различия кодовых комбинаций характеризуется расстоянием Хэмминга, которое определяется числом несовпадающих разрядов. Для того, чтобы код стал корректирующим, необходимо соблюдение неравенства $N_A<N_0$. При этом неиспользуемые кодовые комбинации называются запрещенными и определяют избыточность кода. Ошибка будет обнаружена, если переданная разрешенная кодовая комбинация перейдет в запрещенную. Задача получения кода с заданной корректирующей способностью сводится к задаче выбора из N_0 подмножества N_A комбинаций с требуемым минимальным расстоянием Хэмминга.

Эффект от применения корректирующего кода определяется снижением вероятности ошибок передачи. Вероятность неправильного приема простого кода:

$$\boxed{P^{(n)}_{Н.П.} = 1-(1-p_{ош})^n}$$

Та же вероятность при использовании корректирующего кода с кратностью исправления ошибок $t_{и.ош.}$:

$$\boxed{P^{(n)}_{И.П.} = \sum_{t-t_{и.ош.}+1}^{n} C_n^t p_{ош}^t (1-p_{ош})^{n-t}}$$

Контрольные задачи и вопросы по теме

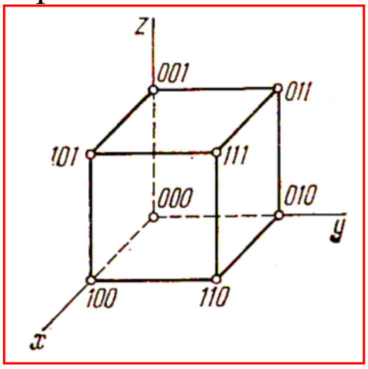
8.1. Задание случайного процесса возникновения ошибок для двоичного симметричного канала без памяти.
8.2. Описание канала через источник ошибок.
8.3. Пусть вероятность ошибки при передаче одного двоичного элемента сообщения равна 10^{-5}. Какова вероятность того, что среди принятых 8 элементов имеется 3 ошибки?
8.4. Модель источника ошибок Гильберта
8.5. Средняя вероятность ошибки в канале и средняя длина пакета ошибок для модели Гильберта?
8.6. Методы снижения количества ошибок.

8.7. Что такое расстояние Хэмминга и кодовое расстояние?
8.8. Какова связь между кодовым расстоянием и кратностью обнаруживаемых ошибок?
8.9. Какие коды называют: блочными, непрерывными, равномерными, неравномерными?
8.10. При каких условиях применение корректирующих кодов целесообразно?

9. Тема «Помехоустойчивое кодирование (2/7)»

Некоторые теоретические сведения по теме

Геометрическая интерпретация кода с параметрами $\boldsymbol{m = n} = 3$ и расстоянием Хэмминга $\boldsymbol{d = 1}$ в виде куба с ребрами, длина которых равна единице и 8 вершинами:



Помехоустойчивость двоичного кода достигается в результате увеличения расстояния Хэмминга, т. е. $\boldsymbol{d} >= 2$. В геометрической модели кода это означает, что соответствующие определенным сообщениям кодовые комбинации удалены друг от друга на расстояние двух ребер, таким образом, в результате возникновения одиночкой ошибки кодовой комбинации будет соответствовать вершина многогранника, не несущая информации. Так как переход в эту вершину возможен из различных вершин, которым соответствуют несущие информацию кодовые комбинации (с одинаковым расстоянием Хэмминга между ними), то при расстоянии $\boldsymbol{d}$=2 единичные ошибки в кодовых комбинациях можно только обнаружить.

Пусть имеется $\boldsymbol{n}$-разрядная кодовая комбинация с $\boldsymbol{k}$ информационными и $\boldsymbol{r}$ проверочными разрядами, $\boldsymbol{n=k+r}$. Кодовой комбинации, состоящей из нескольких информационных и нескольких проверочных символов, каждый проверочный символ должен быть функцией информационных символов. Предположим, что в кодовой комбинации из 6 символов $\boldsymbol{C_1\ C_2\ C_3\ C_4\ C_5\ C_6}$, $\boldsymbol{k}=3$, $\boldsymbol{r}=3$ проверочные символы определяются следующим образом:

$$
\begin{aligned}
C_4 &= C_1 \oplus C_2, \\
C_5 &= C_1 \oplus C_3, \\
C_6 &= C_2 \oplus C_3,
\end{aligned}
$$

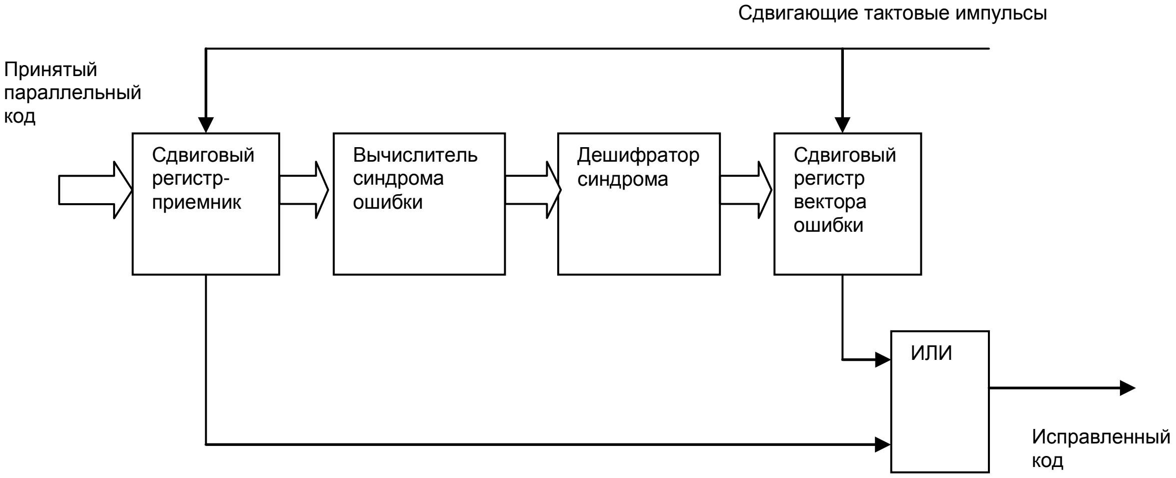
чему соответствует матричная форма записи:

$$\begin{bmatrix} C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}$$

Кодовая комбинация должна удовлетворять проверочному условию, записанному, например, в виде:

$$\begin{aligned} C_1 \oplus C_2 \oplus C_4 = 0, \\ C_1 \oplus C_3 \oplus C_5 = 0, \\ C_2 \oplus C_3 \oplus C_6 = 0, \end{aligned}$$

Общая схема декодера корректирующего кода:



Кодирование с целью исправления ошибок заключается в перекодировании кодовой комбинации по заданным правилам таким образом, что в случае их нарушения можно найти положение ошибки передачи п исправить ее. Простейшими кодами, корректирующими ошибки, являются блоковые коды. Эти коды основаны на перекодировании $\boldsymbol{k}$ информационных символов исходной кодовой комбинации в кодовую комбинацию с $\boldsymbol{n}$ символами $(\boldsymbol{n} > \boldsymbol{k})$ так, что дополнительные проверочные символы ($\boldsymbol{n}$ - $\boldsymbol{\kappa}$) формируются из информационных по соответствующим правилам кодирования. Характерной особенностью этих кодов является то, что ($\boldsymbol{n}$ - $\boldsymbol{\kappa}$) проверочных символов формируются в рамках только одного блока кодовой комбинации, а исходные информационные символы не изменяются.

Контрольные задачи и вопросы по теме

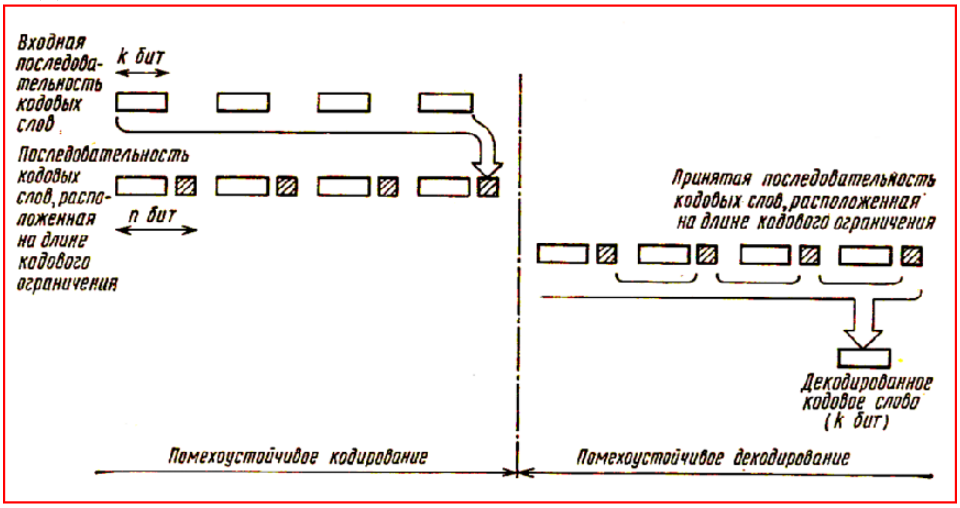
9.1. Каковы основные свойства кода с расстоянием Хэмминга между комбинациями ***d***=3?
9.2. Что такое линейный помехоустойчивый код?
9.3. Как формируется проверочная матрица линейного кода?
9.4. Как формируется и для чего служит синдром линейного кода?
9.5.Структура блокового помехоустойчивого кода.
9.6. Свойства кода Хэмминга.
9.7.Приведите структурную схему кодера кода Хэмминга (***n*=6, *k*=3**), со следующим правилами формирования проверочных символов:

$$C_4 = C_1 \oplus C_2,$$
$$C_5 = C_1 \oplus C_3,$$
$$C_6 = C_2 \oplus C_3,$$

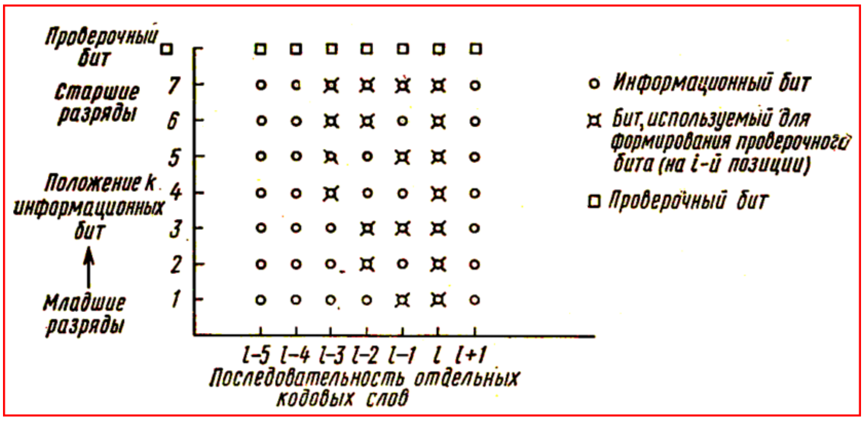
10.Тема «Помехоустойчивое кодирование (3/7)»

Некоторые теоретические сведения по теме

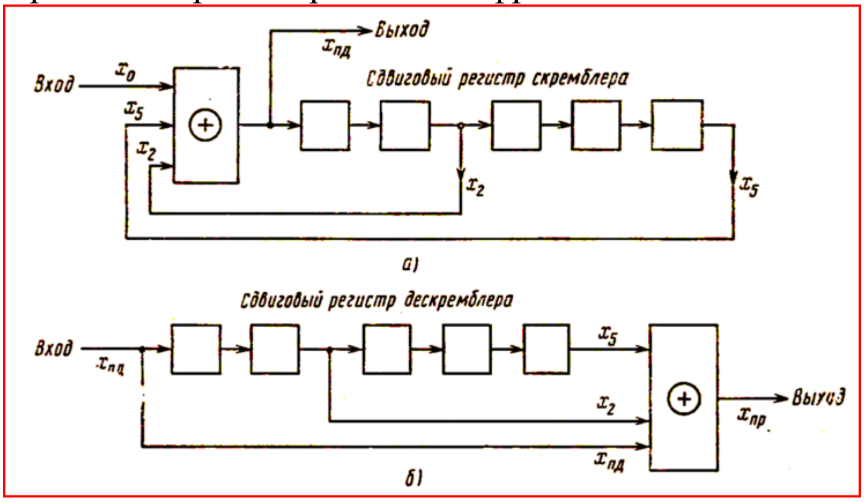
В отличие от блоковых кодов, свёрточные (рекуррентные) помехоустойчивые коды обеспечивают помехоустойчивость передачи нескольких блоков бит передаваемой информации. Сверточные коды относятся к классу систематических линейных кодов, в которых ***n*** бит результирующего защищенного блока формируются в соответствии с ***k*** информационными битами передаваемого в данный момент блока, а также с информационными битами ***N-1*** предыдущих блоков. Структура свёрточного помехоустойчивого кода:



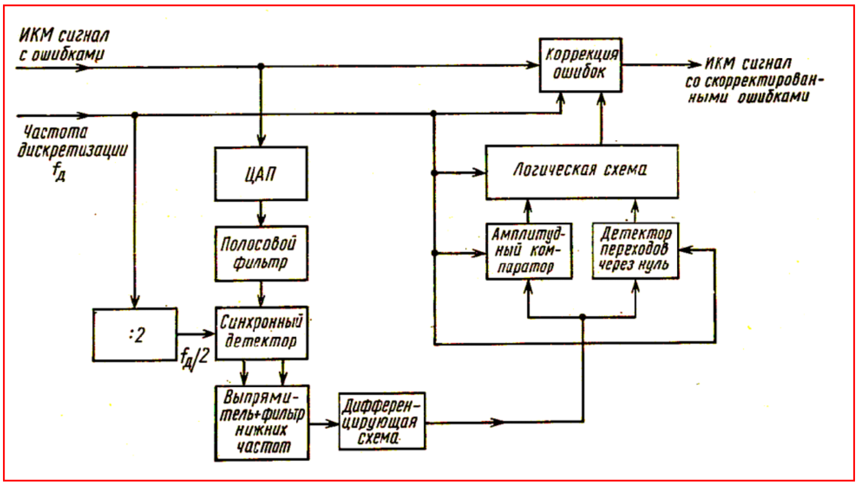
Пример сверточного кода Вайнера — Эша (8,7):



Принцип скремблирования цифрового сигнала:



Функциональная схема спектрального корректора ошибок, в котором используется избыточность, обусловленная выбором частоты дискретизации:



Контрольные задачи и вопросы по теме

10.1. Основные свойства сверточных помехоустойчивых кодов.
10.2. Что такое сверточный код Вайнера — Эша.
10.3. Что такое кодовое ограничение сверточного кода?
10.4. Принцип работы кодера Вайнера-Эша.
10.5. Принцип работы декодера Вайнера-Эша.

10.6. Каковы критерии оценки помехоустойчивых кодов?
10.7. Для чего применяется скремблирование?
10.8. Смысл и механизм спектральных методов коррекции ошибок.

11. Тема «Помехоустойчивое кодирование (4/7)»

Некоторые теоретические сведения по теме

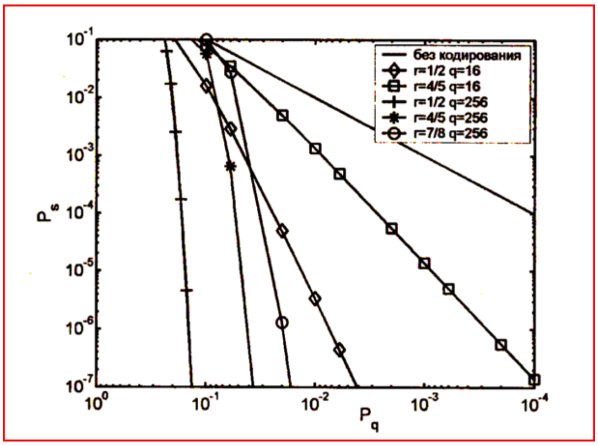
Подкласс линейных кодов составляют *циклические* коды (ЦК), обладающие циклическими свойствами: если
$C = (c_0\ c_1, ..., c_{n-1})$ — кодовое слово ЦК, тогда и
$C' = (c_1, c_2, ...c_{n-1}, c_0)$, полученное циклическим сдвигом элементов C , также является кодовым словом.
Для компактной записи циклического (***n, k***) кода часто используется *порождающий* или *образующий полином* ***g(x)*** степени ***n-k:***

$$g(x) = g_0 + g_1x + g_2x^2 + ... + g_{n-k}x^{n-k}$$

Для задания кодов Рида-Соломона используется порождающий многочлен вида:

$$g(x) = (x-\alpha)(x-\alpha^2)...(x-\alpha^{2t}),$$

где $t = [1/2(dmin - 1)]$.
Графики зависимости вероятности ошибки на символ P_s от вероятности ошибки на бит P_b для кода Рида-Соломона:



Контрольные задачи и вопросы по теме

11.1. Основные свойства циклических помехоустойчивых кодов (ЦК).
11.2. Что такое код Рида-Соломона?
11.3. Приведите структурную схему кодера ЦК с порождающим полиномом $g(x) = 1 + x + x^3 + x^4$.
11.4. Что такое примитивный порождающий полином ЦК?

11.5. Сложите по мод.2 полиномы

$P_1(x) = x^4+x^3+x+1$

$P_2(x) = x^6+x^2+x+1$

12. Тема «Помехоустойчивое кодирование (5/7)»

Некоторые теоретические сведения по теме

Если ошибка ***e*** в некотором элементе кодового слова входит во все уравнения проверочной матрицы, в то время как ни одна другая ошибка не входит более, чем в одно уравнение, то такое свойство проверочных уравнений называется *ортогональностью* относительно ***e***. Принцип мажоритарного декодирования заключается в следующем. Из анализа системы проверочных уравнений такого кода следует, что любая комбинация из одной или двух ошибок, не включающих ***e***, исказит не более двух проверок, а содержащих ***e*** — как минимум три. Тогда процесс декодирования состоит в вычислении значения суммы указанных проверочных уравнений и в случае превышения данной суммой пороговой величины, равной 2, осуществляется циклический сдвиг кодового слова и начинается декодирование следующего символа.

Среди широкого класса кодов, допускающих мажоритарное декодирование, выделим *самоортогональные коды*, допускающие очень эффективное декодирование. Самоортогональные коды характеризуются тем, что система всех проверок, контролирующих символ ***e***, уже сама является ортогональной относительно данного символа.

Декодер Меггита для исправления пакетов ошибок является простым методом декодирования систематических (разделимых) циклических кодов. Принцип работы данного декодера основан на взаимно однозначном соответствии между множеством исправляемых ошибок и множеством синдромов, а также на наличии очень простой связи между синдромом, соответствующим некоторой комбинации ошибок и синдромом ее циклического сдвига: если синдром ***S(x)*** соответствует вектору ошибок ***E(x)***, то циклически сдвинутый синдром $S'(\mathbf{x})$ соответствует комбинации ошибок ***x'***, равной ***xE(x) mod(xn-1)***. Из последнего свойства следует, что все возможные синдромы можно разбить на непересекающиеся множества, каждое из которых соответствует циклическому сдвигу одной и той же комбинации ошибок.

Многие методы декодирования (такие как декодер Меггита), трудно обобщить на случай использования мягких решений. Одними из наиболее эффективных инструментов решения проблемы являются алгоритмы декодирования Чейза. Принцип работы алгоритмов Чейза основан на жестком декодировании нескольких пробных последовательностей.

Пороговое декодирование является простым алгоритмом декодирования, применимым к мажоритарно декодируемым кодам. Основным отличием такого декодера является использование порогового элементе (ПЭ) осуществляется сравнение суммы элементов синдромного регистра, соответствующих декодируемому символу, с некоторым пороговым значением. В случае если указанная сумма окажется больше порога, выход ПЭ устанавливается равным 1, что приводит к изменению информационного символа и связанных с ним проверок.

Контрольные задачи и вопросы по теме

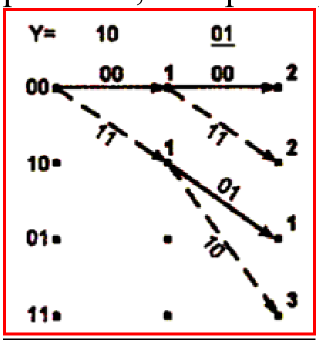
12.1. Принцип мажоритарного декодирования помехоустойчивых кодов.
12.2. Как задаются самоортогональные коды.
12.3. Какова вероятность ошибки на бит для самоортогонального кода в двоичном симметричном канале при кодовом расстоянии 4 и вероятность ошибки на входе декодера 10^{-5}
12.4. Принцип работы данного декодера Меггита.
12.5. Смысл использования и принцип работы алгоритма Чейза.
12.6. Принцип работы порогового декодера.
12.7. Основное достоинство многопорогового декодера?
12.8. Какова функция разностного регистра многопорогового декодера?

13. <u>Тема «Помехоустойчивое кодирование (6/7)»</u>

Некоторые теоретические сведения по теме

Алгоритм декодирования Витерби предназначен для декодирования сверточных кодов и является оптимальным в смысле минимизации вероятности ошибки в принятом коде. Основная идея алгоритма Витерби состоит в пошаговом сравнении всех путей по кодовой решетке с принятой из канала последовательностью ***Y*** и отбрасывании тех из них, которые находятся на большем расстоянии от ***Y***, чем другие пути.

Работа декодера Витерби иллюстрируется движением по кодовой решетке, где узлы соответствуют состояниям кодера сверточного кода, а ребра – входной и выходной последовательностями. Входная последовательность задает путь по решетке, который приводит к выходной последовательности:



В основе последовательных алгоритмов декодирования лежит отказ от анализа маловероятных путей позволит кардинально уменьшить сложность декодирования при незначительных потерях в эффективности. В процессе работы последовательный алгоритм декодирования, в отличие от алгоритма Витерби, осуществляет обработку лишь наиболее вероятного пути по кодовой решетке. Если декодер на каком-либо шаге декодирования совершит ошибку, расстояние между текущим путем и принятой последовательностью начнет быстро увеличиваться. Заметив это, декодер возвращается на один или несколько шагов назад и пытается найти более правильное решение.

Пороговый декодер сверточных кодов работает со сверточными самоортогональными кодами, которые определяются с помощью образующих полиномов, разностные треугольники которых не содержат одинаковых элементов.

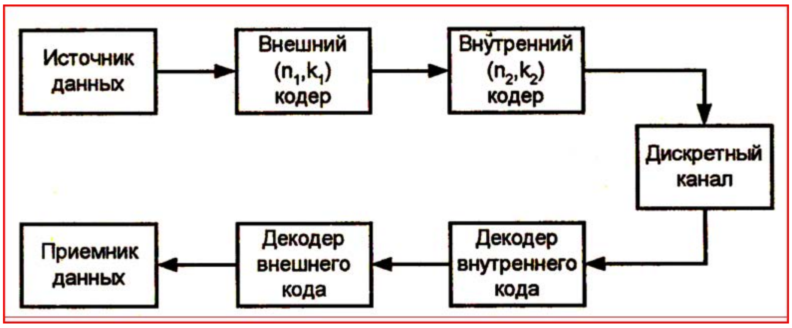
Контрольные задачи и вопросы по теме

13.1. Принцип работы алгоритма Витерби.
13.2. Каким способом устраняется неопределенность при равенстве метрик конкурирующих путей в алгоритме Витерби?
13.3. Что такое глубина декодирования в алгоритме Витерби?
13.4. Достоинства и недостатки алгоритма Витерби.
13.5. Принцип работы последовательного алгоритма декодирования сверточных кодов.
13.6. Что используется в качестве критерия выбора правильного пути в последовательном алгоритме декодирования?
13.7. Достоинства и недостатки последовательного алгоритма декодирования.
13.8. Схема порогового декодера сверточного самоортогонального кода.

14. Тема «Помехоустойчивое кодирование (7/7)»

Некоторые теоретические сведения по теме

Каскадные коды используются для реализации кода с большой длиной блока и высокой корректирующей способностью. Эти цели достигаются при наличии нескольких уровней кодирования. Наиболее распространенной является схема с двумя уровнями. В качестве внешнего обычно используется код Рида-Соломона, в качестве внутреннего - сверточные коды.

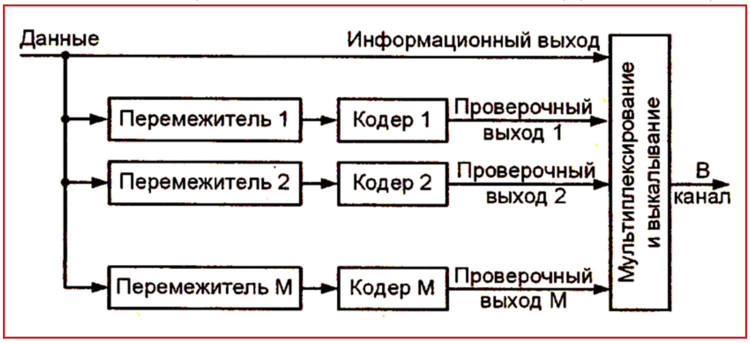


Общая длина кодового слова каскадного кода оказывается равной $N=n_1n_2$ двоичных символов, причем $K=k_1k_2$ из них являются информационными. Кодовая скорость полученного каскадного кода оказывается равной:

$$R=\frac{K}{N}=\frac{k_1k_2}{n_1n_2}=r_1r_2,$$

где r_1, r_2 -кодовые скорости составляющих кодеров, минимальное кодовое расстояние каскадного кода будет равно $D=d_1d_2$, где d_1 и d_2 - кодовые расстояния составляющих кодов.

Турбо коды образуются при параллельном каскадировании двух или более составляющих систематических кодов. Общая схема кодера турбо кода:



Контрольные задачи и вопросы по теме

14.1. Принцип каскадного кодирования.

14.2. Что позволяет снизить сложность декодирования каскадных кодов по сравнению с сопоставимыми декодерами некаскадных кодов?

14.3. Смысл использования устройств перемежения в кодерах/декодкрах каскадных кодов.

14.4. Принцип работы турбо кодов.

14.5. Схема кодера турбо кода.

14.6. Как организована процедура декодирования турбо кода?

Литература

Кудряшов Б.Д. Теория информации: учебник для вузов. - СПб.:ИД «Питер», 2009.

Сердюков П.Н., Бельчиков А.В., Дронов А.Е., Григорьев А.С., Волков С.С. Радиосистемы цифровой передачи информации. – М.: АСТ, 2006.

Золотарев В.В., Овечкин Г.В.Помехоустойчивое кодирование. Методы и алгоритмы: Справочник - М.: Горячая линия–Телеком, 2004.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Подписано в печать 15.01.2015 г.

Печать офсетная	Формат 60x84/16	1,49 уч.-изд. л.
1,63 усл.печ.л.	Заказ № 1939/	Тираж 100 экз.

Московский государственный технический университет ГА
125993 Москва, Кронштадтский бульвар, д.20
Редакционно-издательский отдел
125493 Москва, ул. Пулковская, д.6а