МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

А. В. Самохин, Ю. И. Дементьев

МАТЕМАТИКА

ПОСОБИЕ
по выполнению контрольных работ
и варианты заданий

для студентов I курса
направлений 190700, 23.03.01
заочного обучения

Москва – 2014

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ (МГТУ ГА)

Кафедра высшей математики

А. В. Самохин, Ю. И. Дементьев

МАТЕМАТИКА

ПОСОБИЕ
по выполнению контрольных работ
и варианты заданий

для студентов I курса
направлений 190700, 23.03.01
заочного обучения

Москва – 2014

ВВЕДЕНИЕ

Пособие предназначено для студентов 1 курса 1 семестра направлений 190700, 23.03.01. В пособии содержатся варианты контрольных работ и образцы их решения.

Студенты заочного отделения направлений 190700, 23.01.01 дисциплину „Математика“ изучают в первом семестре.

Распределение часов по видам занятий и формы контроля

Период обучения	Часы на дисциплину				Форма контроля
	общие	самост. работа	лекции	практ. занятия	
Курс 1 Семестр 1	216	194	10	12	экзамен

Одно лекционное и практическое занятие длится 2 часа.

Контрольные работы

В первом семестре студенты должны выполнить контрольную работу № 1 и контрольную работу № 2.

Контрольная работа № 1 содержит следующие темы. Матрицы. Пределы. Производные. Интегралы.

Контрольная работа № 2 содержит следующие темы. Комплексные числа. Дифференциальные уравнения. Теория вероятностей.

В конце семестра перед экзаменом происходит собеседование по контрольным работам.

Указания по выполнению контрольных работ

При выполнении контрольных работ необходимо строго придерживаться указанных ниже правил. Работы, выполненные без соблюдения этих правил, не зачитываются и возвращаются студенту для переработки.

1. Каждая контрольная работа должна быть выполнена в отдельной тетради в клетку чернилами любого цвета, кроме красного. Необходимо оставлять поля для замечаний рецензента.

2. В заголовке работы на обложке тетради печатными буквами должны быть написаны фамилия, имя и отчество студента, учебный номер (шифр), название дисциплины, семестр или курс обучения, номер контрольной работы и номер варианта.

3. В работе необходимо решить все задания, указанные в контрольной работе. Тетради, содержащие не все задания контрольной работы, а также задания не своего варианта, не зачитываются.

4. Номера заданий, которые студент должен выполнить в контрольной работе, определяются по таблице вариантов (см. ниже). Номер варианта совпадает с последней цифрой учебного номера (шифра) студента, при этом цифра 0 соответствует варианту 10.

Номера заданий для выполнения контрольных работ

Вариант	Контрольная работа № 1	Контрольная работа № 2
1	1.1 2.1 3.1 4.1 5.1 6.1 7.1	8.1 9.1 10.1 11.1 12.1 13.1
2	1.2 2.2 3.2 4.2 5.2 6.2 7.2	8.2 9.2 10.2 11.2 12.2 13.2
3	1.3 2.3 3.3 4.3 5.3 6.3 7.3	8.3 9.3 10.3 11.3 12.3 13.3
4	1.4 2.4 3.4 4.4 5.4 6.4 7.4	8.4 9.4 10.4 11.4 12.4 13.4
5	1.5 2.5 3.5 4.5 5.5 6.5 7.5	8.5 9.5 10.5 11.5 12.5 13.5
6	1.6 2.6 3.6 4.6 5.6 6.6 7.6	8.6 9.6 10.6 11.6 12.6 13.6
7	1.7 2.7 3.7 4.7 5.7 6.7 7.7	8.7 9.7 10.7 11.7 12.7 13.7
8	1.8 2.8 3.8 4.8 5.8 6.8 7.8	8.8 9.8 10.8 11.8 12.8 13.8
9	1.9 2.9 3.9 4.9 5.9 6.9 7.9	8.9 9.9 10.9 11.9 12.9 13.9
10	1.10 2.10 3.10 4.10 5.10 6.10 7.10	8.10 9.10 10.10 11.10 12.10 13.10

5. Прорецензированные контрольные работы вместе со всеми исправлениями и дополнениями, сделанными по требованию рецензента, следует сохранять. Без предъявления прорецензированных контрольных работ студент не допускается к собеседованию по контрольной работе, к сдаче зачёта или экзамена.

6. Решения заданий надо располагать в порядке возрастания их номеров.

7. Перед решением каждого задания необходимо написать её номер и полностью переписать условие. В случае, если несколько заданий, из которых студент выбирает задания своего варианта, имеют общую формулировку, следует, переписывая условие задания, заменить общие данные конкретными, взятыми из своего варианта.

8. Решения заданий следует излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи.

9. После получения прорецензированной работы, как незачтённой, так и зачтённой, студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочёты и выполнить все рекомендации рецензента. Если рецензент предлагает внести в решения заданий те или иные исправления или дополнения и прислать их для повторной проверки, то это следует сделать в короткий срок. При высылаемых исправлениях должна обязательно находиться прорецензированная работа и рецензия на неё. Поэтому при выполнении контрольной работы рекомендуется оставлять в конце тетради несколько чистых листов для всех дополнений и исправлений в соответствии с указаниями рецензента. Вносить исправления в сам текст работы после её рецензирования запрещается.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

Задание 1. Даны матрицы A, B, C. Найти $2A-3B$, $A\cdot B$, $A\cdot C$.

1.1. $A=\begin{pmatrix}2&3&1\\3&1&4\\2&1&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&2&-1\\1&3&2\\2&1&-1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

1.2. $A=\begin{pmatrix}1&4&2\\2&3&1\\-4&-7&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&1&4\\1&2&3\\1&-4&-7\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$

1.3. $A=\begin{pmatrix}-2&1&2\\1&3&1\\-7&-4&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-2&2\\0&1&3\\4&-7&-4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$

1.4. $A=\begin{pmatrix}2&1&5\\-4&3&-4\\1&-1&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&-1&4\\-4&-2&1\\2&1&0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$

1.5. $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&4&2\\-4&1&7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&-1&4\\1&3&-4\\0&2&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-3\\2\\4\end{pmatrix}$

1.6. $A=\begin{pmatrix}2&-4&3\\1&-2&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-4&2\\0&3&1\\4&-7&5\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$

1.7. $A=\begin{pmatrix}4&3&1\\2&1&4\\1&1&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&3&0\\1&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix}$

1.8. $A=\begin{pmatrix}-1&2&-1\\4&3&7\\1&2&-4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2&-4\\3&1&1\\1&3&-7\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$

1.9. $A=\begin{pmatrix}2&3&-4\\3&2&-4\\-1&-1&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&2&1\\3&1&-7\\2&2&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-3\\2\\5\end{pmatrix}$

1.10. $A=\begin{pmatrix}5&2&4\\5&2&4\\-4&3&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-7&1\\15&3&-1\\3&2&4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$

Задание 2. Найти пределы.

2.1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+3x^2}{4-2x^2}$ б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x^2+4x-5}$

2.2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-6x+7x^2}{3-x^2}$ б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$

2.3. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^4+2x^2-3}{1-2x^4}$ б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-6x+5}{2x^2-x-1}$

2.4. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x^2+4x}{1+15x-x^3}$ б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$

2.5. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+4x+1}{3+x-2x^2}$ б) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-25}{x^2-4x-5}$

2.6. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-3x^3+2x^2}{5-2x^4}$ б) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-4x}{x^2-3x-4}$

2.7. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+2x+3x^2}{5-6x-2x^2}$ б) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+7x+10}$

2.8. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5+3x^3+x}{1+x^2-3x^5}$ б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-x-2}$

2.9. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-3x^2+2x^3}{5x^3-6x^2+3x+2}$ б) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+4x+3}$

2.10. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+3x^2+4}{6x^4-x^3+x^2}$ б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x^2-4x+3}$

Задание 3. Найти производные функций.

3.1. а) $y=e^x\cdot\arccos x$

б) $y=\dfrac{1-\cos x}{2^x+3}$

в) $y=\operatorname{arctg}(\ln x)$

г) $y=2\sqrt{4x+3}-\dfrac{3}{\sqrt{x^2+1}}$

д) $y=\dfrac{\sin 3x}{\cos^2 x}$

3.2. а) $y=\sqrt{x^5}\cdot\ln x$

б) $y=\dfrac{x^3-3}{\operatorname{arctg} x}$

в) $y=\cos^3 x\cdot 2^{\arcsin x}$

г) $y=\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x}}$

д) $y=\dfrac{1}{\operatorname{tg}^5 5x}$

3.3. а) $y=\log_3 x\cdot\arcsin x$

б) $y=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$

в) $y=\sqrt{x^3}\cdot\ln x+\dfrac{1}{x}$

г) $y=(e^{\cos x}+3)^4$

д) $y=5^{x+\operatorname{arctg} x}$

3.4. а) $y=\sqrt[3]{x^2}\cdot\cos x$

б) $y=\dfrac{x+e^x}{x-e^x}$

в) $y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

г) $y=3\operatorname{arctg}\dfrac{x}{3}+e^{\arcsin x}$

д) $y=3^{\sin\frac{1}{x}}$

3.5. а) $y = x^{10} \cdot \log_2 x$
б) $y = \dfrac{2^x}{\cos x + 5}$
в) $y = \dfrac{\sin^4 x}{\operatorname{ctg} x}$
г) $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$
д) $y = e^{-3x} \cdot \arcsin 2x$

3.6. а) $y = 3^x \cdot \operatorname{tg} x$
б) $y = \dfrac{2-x}{x^2 + \sqrt{x}}$
в) $y = \left(3 + 2x^2\right)^5$
г) $y = \sqrt[3]{\operatorname{ctg} \dfrac{1}{x}}$
д) $y = e^{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}$

3.7. а) $y = \sqrt[7]{x^3} \cdot \sin x$
б) $y = \dfrac{4 + x^3}{x - \operatorname{ctg} x}$
в) $y = \operatorname{tg}^2 x + \dfrac{1}{\cos x}$
г) $y = \sqrt{2x - x^2} + \dfrac{1}{3x^3}$
д) $y = e^{2x} \cdot \ln\left(1 + x^2\right)$

3.8. а) $y = \log_5 x \cdot \arccos x$
б) $y = \dfrac{e^x}{1 - x^2}$
в) $y = \left(x^5 + 3x + \dfrac{1}{x}\right)^{10}$
г) $y = 3 \sin 2x \cdot \cos^2 x$
д) $y = \sqrt{\ln\left(x^2+1\right)}$

3.9. а) $y = \sqrt[5]{x} \cdot 3^x$
б) $y = \dfrac{x^2 + 5x - 6}{\ln x}$
в) $y = \dfrac{1}{2\sin^2 x} + \ln\left(\operatorname{tg} x\right)$
г) $y = e^{\frac{1}{\cos x}}$
д) $y = \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

3.10. а) $y = \left(x^3 + 3x^4\right) \cdot \log_3 x$
б) $y = \dfrac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$
в) $y = \operatorname{ctg}^3 x - \dfrac{1}{\sin x}$
г) $y = \dfrac{\ln\left(x^2 + 2x\right)}{3x}$
д) $y = x \cdot 5^{\frac{1}{x}}$

Задание 4. Провести полные исследования функций и построить их графики.

4.1. а) $y = \dfrac{x^2}{4}(x^2 - 8)$ б) $y = \dfrac{x^3+4}{x^2}$

4.2. а) $y = 3x^4 - 4x^3$ б) $y = \dfrac{2}{x^2+2x}$

4.3. а) $-\dfrac{1}{16}(x^2-4)^2$ б) $y = \dfrac{x^2 - 4x + 1}{x - 4}$

4.4. а) $\dfrac{x^3}{27}(x-4)$ б) $y = \dfrac{4x}{(x+1)^2}$

4.5. а) $\dfrac{x^2}{64}(32 - x^2)$ б) $y = \dfrac{3x^4+1}{x^3}$

4.6. а) $y = \dfrac{x^3}{16}(8 - 3x)$ б) $y = \dfrac{4}{3 + 2x - x^2}$

4.7. а) $y=\dfrac{1}{9}(x^2-3)^2$ б) $y=\dfrac{3x-2}{x^3}$

4.8. а) $y=\dfrac{x^2}{27}(x^2-18)$ б) $y=\dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$

4.9. а) $y=3x^5-5x^3$ б) $y=\dfrac{8(x-1)}{(x+1)^2}$

4.10. а) $y=\dfrac{x^4}{64}(x-5)$ б) $y=\dfrac{x}{x^2-4}$

Задание 5. Найти неопределённые интегралы. В пунктах а) и в) результат проверить дифференцированием.

5.1. а) $\displaystyle\int\left(\frac{x^3}{3}-\frac{3}{x\sqrt{x}}+5^x+2\right)dx$

б) $\displaystyle\int\frac{x^2-1}{x^2+16}\,dx$ в) $\displaystyle\int x\cos\frac{x}{2}\,dx$

5.2. а) $\displaystyle\int\left(\frac{\sqrt{x}}{3}-\frac{1}{x^3}+\frac{8}{x^2+9}+1\right)dx$

б) $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{\sqrt{3-x^2}}$ в) $\displaystyle\int(2x+1)\,e^{2x}\,dx$

5.3. а) $\displaystyle\int\left(1-\frac{4}{\sqrt{x}}+\frac{4}{x^2}+e^x\right)dx$

б) $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{(x^2+4)^3}$ в) $\displaystyle\int\frac{\ln x}{x^2}\,dx$

5.4. а) $\displaystyle\int\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{2x^2}{3}+1\right)dx$

б) $\displaystyle\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$ в) $\displaystyle\int x^2\ln x\,dx$

5.5. а) $\displaystyle\int\left(7+\frac{1}{x}-2\sqrt{x}+\frac{2}{x^2+9}\right)dx$

б) $\displaystyle\int(3-10x)^9\,dx$ в) $\displaystyle\int\ln\left(x^2+1\right)dx$

5.6. а) $\displaystyle\int\left(\frac{x}{2}-4+\frac{4}{x}-\frac{3}{3-x^2}\right)dx$

б) $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos^2 x\,\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$ в) $\displaystyle\int x\,e^{\frac{x}{2}}\,dx$

5.7. а) $\displaystyle\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{3x}+\frac{4}{x^2}+2\right)dx$

б) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt[3]{2x+5}}$ в) $\displaystyle\int x\,3^x\,dx$

5.8. а) $\displaystyle\int \left(5\sqrt{x} + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2+1} + 8\right) dx$

б) $\displaystyle\int \frac{1+\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$ в) $\displaystyle\int x\,\cos 4x\,dx$

5.9. а) $\displaystyle\int \left(x\sqrt{x} - 7^x + \frac{2}{x^2} - 3\right) dx$

б) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}\,dx$ в) $\displaystyle\int x^3\,\ln x\,dx$

5.10. а) $\displaystyle\int \left(3x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x} + 6\right) dx$

б) $\displaystyle\int \frac{3-x}{x^2+4}\,dx$ в) $\displaystyle\int \frac{x}{\sin^2 x}\,dx$

Задание 6. Вычислить определённые интегралы.

6.1. а) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^4\,dx}{x^{10}+3}$ б) $\displaystyle\int_1^e x^2\,\ln x\,dx$

6.2. а) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\sin x}\,\cos x\,dx$ б) $\displaystyle\int_2^{e^2} \ln x\,dx$

6.3. а) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln^2 x}$ б) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\,\cos\left(\frac{x}{4}\right) dx$

6.4. а) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x\,dx}{16+x^4}$ б) $\displaystyle\int_0^1 x\,\operatorname{arctg} x\,dx$

6.5. а) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^4}}$ б) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\sin 4x\,dx$

6.6. а) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx$ б) $\displaystyle\int_0^1 x\,e^{-2x}\,dx$

6.7. а) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+3}}$ б) $\displaystyle\int_0^1 x\,3^x\,dx$

6.8. а) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x+1}\,dx$ б) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

6.9. а) $\int\limits_2^6 \sqrt{x-2}\,dx$ б) $\int\limits_0^\pi x\sin\left(\dfrac{x}{6}\right)dx$

6.10. а) $\int\limits_1^e \dfrac{dx}{x(\ln x+2)}$ б) $\int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx$

Задание 7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми. Сделать чертёж.

7.1. $y=2x-x^2,\quad y=-x$

7.2. $y=\dfrac{4}{x},\quad y=5-x$

7.3. $y=x^2,\quad y=2-x^2$

7.4. $y=4-x^2,\quad y=x^2-2x$

7.5. $y=(x-2)^2,\quad x=0,\quad y=0$

7.6. $y=x^2-4x,\quad y=x$

7.7. $y=\dfrac{x^2}{4},\quad y=5-x^2$

7.8. $y=1-x^2,\quad y=x-1$

7.9. $y=(x-2)^2,\quad y=x$

7.10. $y=\dfrac{1}{x},\quad y=x,\quad x=2$

ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 1

Задача 1. Матрицы

Матрица — это прямоугольная таблица чисел, заключённая в круглые скобки. Основные операции с матрицами:

— произведением числа k на матрицу A называется матрица, элементы которой получены из элементов матрицы A умножением их на число k;

— суммой (разностью) матриц A и B называется матрица, каждый элемент которой равен сумме (разности) соответствующих элементов матриц A и B;

— произведением матрицы A на матрицу B называется матрица, элемент которой, стоящий в i-ой строке и j-ом столбце, равен сумме произведений соответствующих элементов i-й строки матрицы A и j-го столбца матрицы B.

Задание 1. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&-2\\-3&0&4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&3&-2\\1&4&0\\1&5&1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}3\\-1\\7\end{pmatrix}.$$

Найти матрицы $4\cdot A$, $A+B$, $A-B$, $A\cdot B$, $A\cdot C$.

Решение.

$$4\cdot A=4\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&-2\\-3&0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\cdot1&4\cdot2&4\cdot3\\4\cdot0&4\cdot1&4\cdot(-2)\\4\cdot(-3)&4\cdot0&4\cdot4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&8&12\\0&4&-8\\-12&0&16\end{pmatrix},$$

$$A+B=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&-2\\-3&0&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&3&-2\\1&4&0\\1&5&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1+2&2+3&3+(-2)\\0+1&1+4&-2+0\\-3+1&0+5&4+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&5&1\\1&5&-2\\-2&5&5\end{pmatrix},$$

$$A-B=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&-2\\-3&0&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&3&-2\\1&4&0\\1&5&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1-2&2-3&3-(-2)\\0-1&1-4&-2-0\\-3-1&0-5&4-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1&5\\-1&-3&-2\\-4&-5&3\end{pmatrix},$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&-2\\-3&0&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&3&-2\\1&4&0\\1&5&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot2+2\cdot1+3\cdot1&1\cdot3+2\cdot4+3\cdot5&1\cdot(-2)+2\cdot0+3\cdot1\\0\cdot2+1\cdot1+(-2)\cdot1&0\cdot3+1\cdot4+(-2)\cdot5&0\cdot(-2)+1\cdot0+(-2)\cdot1\\-3\cdot2+0\cdot1+4\cdot1&(-3)\cdot3+0\cdot4+4\cdot5&(-3)\cdot(-2)+0\cdot0+4\cdot1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2+2+3&3+8+15&-2+0+3\\0+1-2&0+4-10&0+0-2\\-6+0+4&-9+0+20&6+0+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&26&1\\-1&-6&-2\\-2&11&10\end{pmatrix},$$

$$A\cdot C=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&-2\\-3&0&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\\7\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot3+2\cdot(-1)+3\cdot7\\0\cdot3+1\cdot(-1)+(-2)\cdot7\\-3\cdot3+0\cdot(-1)+4\cdot7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-2+21\\0-1-14\\-9+0+28\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}22\\-15\\19\end{pmatrix}.$$

Задача 2. Пределы

При выполнении заданий на вычисление пределов вместо переменной x ставится число (или символ), к которому стремится переменная x. В зависимости от получившейся неопределённости делают вывод о способе её раскрытия. Часто на конечном этапе вычисления пределов используют следующие формулы:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0,\qquad \lim_{x\to0}\frac{1}{x}=\infty.$$

Задание 2а. Вычислить предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+7x^2-5}{2x^2-9x^3+8x}.$$

Решение. При подстановке в числитель вместо переменной x символа ∞, получаем ∞. При подстановке в знаменатель вместо переменной x символа ∞, тоже получаем ∞. Следовательно, имеем неопределённость вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Старшей степенью числителя и знаменателя является x^3. Для вычисления предела, в числителе и в знаменателе выносим x^3 за скобку. Далее сокращаем вынесенные x^3. Устремляя переменную x к ∞, получаем, что все дробные слагаемые стремятся к нулю, а оставшееся выражение является ответом.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+7x^2-5}{2x^2-9x^3+8x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3(4+\dfrac{7}{x}-\dfrac{5}{x^3})}{x^3(\dfrac{2}{x}-9+\dfrac{8}{x^2})}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\dfrac{7}{x}-\dfrac{5}{x^3}}{\dfrac{2}{x}-9+\dfrac{8}{x^2}}=\frac{4+0-0}{0-9+0}=-\frac{4}{9}.$$

Ответ: $-\dfrac{4}{9}$.

Задание 2б. Вычислить предел

$$\lim_{x\to-3}\frac{2x^2+3x-9}{9-x^2}.$$

Решение. При подстановке в числитель вместо переменной x числа -3, получаем 0. При подстановке в знаменатель вместо переменной x числа -3, тоже получаем 0. Следовательно, имеем неопределённость вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Для вычисления данного предела раскладываем числитель и знаменатель на множители. Затем сокращаем на одинаковый множитель $(x+3)$ и вместо переменной x подставляем число -3.

$$\lim_{x\to-3}\frac{2x^2+3x-9}{9-x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to-3}\frac{(x+3)(2x-3)}{(3-x)(3+x)}=$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{2x-3}{3-x}=\frac{2(-3)-3}{3-(-3)}=\frac{-9}{6}=-\frac{3}{2}.$$

Ответ: $-\dfrac{3}{2}$.

Задача 3. Производные

При решении данного номера применяются *формулы производных основных элементарных функций*:

$$(c)'=0 \quad (c \text{ — число}), \qquad x'=1, \qquad (x^n)'=nx^{n-1},$$
$$(e^x)'=e^x, \qquad (\sin x)'=\cos x, \qquad (\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$
$$(a^x)'=a^x\ln a, \qquad (\cos x)'=-\sin x, \qquad (\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$
$$(\ln x)'=\frac{1}{x}, \qquad (\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2},$$
$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}, \qquad (\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}, \qquad (\operatorname{arcctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2},$$

и *формулы производных суммы, разности, произведения и частного двух функций*:

$$(u+v)'=u'+v', \qquad (u-v)'=u'-v', \qquad (cu)'=cu' \ (\text{c — число}),$$
$$(uv)'=u'v+uv', \qquad \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

и *правило взятия производной сложной функции*:

Пусть функция $u=g(x)$ имеет производную в некоторой точке $x=x_0$, а функция $y=f(u)$ имеет производную в точке $u_0=g(x_0)$. Тогда, сложная функция $f(g(x))$ имеет производную в точке $x=x_0$, которая вычисляется по формуле $[f(g(x_0))]'=f'(u_0)\cdot g'(x_0)$. Для краткости используется следующая запись последней формулы:

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x. \tag{1}$$

Задание 3а. Найти производные следующих выражений:

$$5, \quad \ln\operatorname{tg}\frac{3}{7}, \quad 6^x, \quad \log_3 x.$$

Решение. Производная постоянной функции равна нулю, поэтому

$$5'=0, \quad \left(\ln\operatorname{tg}\frac{3}{7}\right)'=0.$$

Для нахождения производных функций 6^x и $\log_3 x$ воспользуемся табличными формулами для производных показательной (при $a=6$) и логарифмической (при $a=3$) функций, имеем:

$$(6^x)'=6^x\ln 6, \quad (\log_3 x)'=\frac{1}{x\ln 3}.$$

Задание 3б. Вычислить производные следующих функций:

$$x^{17}, \quad \frac{1}{x}, \quad \sqrt{x}, \quad \sqrt[3]{x^2}, \quad \frac{1}{\sqrt[5]{x^7}}.$$

Решение. Каждая из данных функций является степенной функцией, поэтому все производные находятся по формуле $(x^n)' = nx^{n-1}$. Имеем:

$$\left(x^{17}\right)' = 17x^{17-1} = 17x^{16};$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2};$$

$$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$\left(\sqrt[3]{x^2}\right)' = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}};$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt[5]{x^7}}\right)' = \left(\frac{1}{x^{\frac{7}{5}}}\right)' = \left(x^{-\frac{7}{5}}\right)' = -\frac{7}{5}x^{-\frac{7}{5}-1} = -\frac{7}{5}x^{-\frac{12}{5}} = -\frac{7}{5} \cdot \frac{1}{x^{\frac{12}{5}}} = -\frac{7}{5\sqrt[5]{x^{12}}}.$$

Задание 3в. Найти производные функций:

$$\frac{1}{x^3} - 5\ln x, \quad \frac{2\operatorname{tg} x}{3} + \frac{\operatorname{ctg} x}{4}, \quad (x^2+x)\cos x, \quad \frac{x^3+2x^2+5x+1}{x^2+2^x}, \quad \frac{x^{13}\operatorname{arcctg} x}{\lg x}.$$

Решение.

$$\left(\frac{1}{x^3} - 5\ln x\right)' = \left(\frac{1}{x^3}\right)' - (5\ln x)' = \left(x^{-3}\right)' - 5\,(\ln x)' =$$

$$= -3x^{-4} - 5\frac{1}{x} = -\frac{3}{x^4} - \frac{5}{x} = -\frac{3+5x^3}{x^4}.$$

$$\left(\frac{2\operatorname{tg} x}{3} + \frac{\operatorname{ctg} x}{4}\right)' = \left(\frac{2\operatorname{tg} x}{3}\right)' + \left(\frac{\operatorname{ctg} x}{4}\right)' = \left(\frac{2}{3} \cdot \operatorname{tg} x\right)' + \left(\frac{1}{4} \cdot \operatorname{ctg} x\right)' =$$

$$= \frac{2}{3}(\operatorname{tg} x)' + \frac{1}{4}(\operatorname{ctg} x)' = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = \frac{2}{3\cos^2 x} - \frac{1}{4\sin^2 x}.$$

$$\left((x^2+x)\cos x\right)' = (x^2+x)'\cos x + (x^2+x)(\cos x)' =$$

$$= (2x+1)\cos x + (x^2+x)(-\sin x).$$

$$\left(\frac{x^3+2x^2+5x+1}{x^2+2^x}\right)' =$$

$$= \frac{(x^3+2x^2+5x+1)'(x^2+2^x) - (x^3+2x^2+5x+1)(x^2+2^x)'}{(x^2+2^x)^2} =$$

$$= \frac{(3x^2+4x+5)(x^2+2^x)-(x^3+2x^2+5x+1)(2x+2^x\ln 2)}{(x^2+2^x)^2}.$$

Функция $\lg x$ — это десятичный логарифм, то есть $\lg x = \log_{10} x$. Применим формулы производных частного и произведения:

$$\left(\frac{x^{13}\operatorname{arcctg} x}{\lg x}\right)' = \frac{\left(x^{13}\operatorname{arcctg} x\right)'\cdot \lg x - \left(x^{13}\operatorname{arcctg} x\right)\cdot(\lg x)'}{(\lg x)^2} =$$

$$= \frac{\left(\left(x^{13}\right)'\operatorname{arcctg} x + x^{13}\left(\operatorname{arcctg} x\right)'\right)\cdot \lg x - \left(x^{13}\operatorname{arcctg} x\right)\cdot \dfrac{1}{x\ln 10}}{\lg^2 x} =$$

$$= \frac{\left(13x^{12}\operatorname{arcctg} x + x^{13}\left(-\dfrac{1}{1+x^2}\right)\right)\cdot \lg x - x^{13}\operatorname{arcctg} x \dfrac{1}{x\ln 10}}{\lg^2 x} =$$

$$= \frac{13x^{12}\operatorname{arcctg} x \lg x - \dfrac{x^{13}\lg x}{1+x^2} - \dfrac{x^{12}\operatorname{arcctg} x}{\ln 10}}{\lg^2 x}.$$

Задание 3г. Найти производные функций: $\ln\sin x$, e^{x^2}.

Решение. Найдем производную функции $\ln\sin x$. Обозначим

$$y = \ln u, \quad u = \sin x, \text{ тогда } y = \ln\sin x.$$

По формуле (1) для вычисления производной сложной функции находим:

$$y'_u = (\ln u)'_u = \frac{1}{u}, \qquad u'_x = (\sin x)'_x = \cos x,$$

откуда

$$(\ln\sin x)' = y'_x = y'_u\cdot u'_x = \frac{1}{u}\cdot\cos x = \frac{1}{\sin x}\cdot\cos x = \operatorname{ctg} x.$$

Часто более удобно непосредственно находить производные промежуточных функций:

$$(\ln\sin x)' = \frac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)' = \frac{1}{\sin x}\cdot\cos x = \operatorname{ctg} x.$$

Найдем производную функции e^{x^2}. Обозначим

$$y = e^u, \quad u = x^2, \text{ тогда } y = e^{x^2}.$$

По формуле (1) для вычисления производной сложной функции находим:

$$y'_u = (e^u)'_u = e^u, \qquad u'_x = \left(x^2\right)'_x = 2x,$$

откуда

$$y'_x = \left(e^{x^2}\right)' = y'_u \cdot u'_x = e^u \cdot 2x = e^{x^2} \cdot 2x = 2xe^{x^2}.$$

Теперь найдем ту же производную в компактном виде:

$$y'(x) = \left(e^{x^2}\right)' = e^{x^2} \cdot (x^2)' = e^{x^2} \cdot 2x = 2xe^{x^2}.$$

Задание 3д. Найти производные функций:

$$e^{-x}, \quad (\operatorname{tg}\sqrt{x})^3, \quad \operatorname{arctg}^2 e^{-x}, \quad \cos\log_6 5x - \log_6 \cos 5.$$

Решение.

$$\left(e^{-x}\right)' = e^{-x} \cdot (-x)' = e^{-x} \cdot (-1) = -e^{-x}.$$

$$\left((\operatorname{tg}\sqrt{x})^3\right)' = 3(\operatorname{tg}\sqrt{x})^2(\operatorname{tg}\sqrt{x})' = 3(\operatorname{tg}\sqrt{x})^2\frac{1}{\cos^2\sqrt{x}}(\sqrt{x})' =$$

$$= 3(\operatorname{tg}\sqrt{x})^2\frac{1}{\cos^2\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3\operatorname{tg}^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}.$$

$$\left(\operatorname{arctg}^2 e^{-x}\right)' = \left(\left(\operatorname{arctg} e^{-x}\right)^2\right)' = 2\operatorname{arctg} e^{-x} \cdot \left(\operatorname{arctg} e^{-x}\right)' =$$

$$= 2\operatorname{arctg} e^{-x} \cdot \frac{1}{1 + \left(e^{-x}\right)^2} \cdot \left(e^{-x}\right)' = 2\operatorname{arctg} e^{-x} \cdot \frac{1}{1 + e^{-2x}} \cdot e^{-x} \cdot (-x)' =$$

$$= 2\operatorname{arctg} e^{-x} \cdot \frac{1}{1 + e^{-2x}} \cdot e^{-x} \cdot (-1) = -\frac{2e^{-x}\operatorname{arctg} e^{-x}}{1 + e^{-2x}}.$$

$$(\cos\log_6 5x - \log_6\cos 5)' = (\cos\log_6 5x)' - (\log_6\cos 5)' = (\cos\log_6 5x)' - 0 =$$

$$= -\sin\log_6 5x \cdot (\log_6 5x)' = -\sin\log_6 5x \cdot \frac{1}{(5x)\ln 6} \cdot (5x)' =$$

$$= -\sin\log_6 5x \cdot \frac{1}{5x\ln 6} \cdot 5 = -\frac{\sin\log_6 5x}{x\ln 6}.$$

Выражение $\log_6\cos 5$ является числом, поэтому $(\log_6\cos 5)' = 0$.

Задача 4. Полное исследование функции и построение её графика

Полное исследование функции и построение её графика рекомендуется проводить по следующей схеме.

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать функцию на периодичность.
3. Исследовать функцию на чётность и нечётность.
4. Найти точки пересечения графика функции с осями координат и определить интервалы знакопостоянства функции.
5. Найти точки разрыва функции и установить характер разрыва; исследовать поведение функции на границе области определения; найти асимптоты.

6. Найти промежутки возрастания и убывания функции, точки экстремума.

7. Исследовать направления выпуклости графика функции, найти точки перегиба.

8. Используя все полученные результаты, построить график функции.

В процессе исследования функции необязательно строго придерживаться приведённой схемы, иногда удобнее изменить порядок исследования.

Задание 4а. Провести полное исследование и построить график функции $y = x(x+1)(x-1)$.

Решение.

Раскроем скобки и запишем исходную функцию в виде

$$y = x(x+1)(x-1) = x(x^2-1) = x^3 - x.$$

1. Область определения — вся числовая ось.

2. Функция не является периодической.

3. Функция является нечётной.

4. Функция имеет три точки пересечения с осью Ox: $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$. С осью Oy функция пересекается только при $y = 0$.

Функция положительна на интервалах $(-1; 0)$ и $(1; +\infty)$ и отрицательна на интервалах $(-\infty; -1)$ и $(0; 1)$.

5. Точек разрыва нет.

Поведение функции на границе области определения:

$$\lim_{x\to+\infty} x(x+1)(x-1) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} x(x+1)(x-1) = -\infty.$$

Найдём угловой коэффициент наклонной асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} (x+1)(x-1) = \infty.$$

Значит, наклонных, а, следовательно, и горизонтальных асимптот нет. Вертикальных асимптот тоже нет, так как отсутствуют точки разрыва и функция определена на всей числовой оси.

6. Найдём производную: $y' = 3x^2 - 1$. Приравнивая производную нулю, находим критические точки первого рода: $3x^2 - 1 = 0$, откуда $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Таким образом, на интервалах $\left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ и $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$ функция монотонно возрастает, а на интервале $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ — монотонно убывает.

Из схемы (рис. 1) следует, что в точке $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ функция имеет максимум, а в точке $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ — минимум.

Находим значения функции в экстремальных точках: если $x_{max} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, то $y_{max} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$; если $x_{min} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, то $y_{min} = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

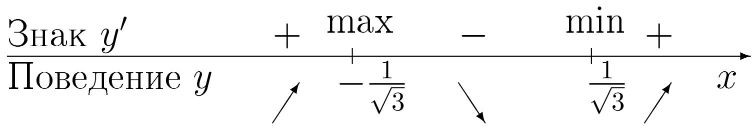

Рис. 1. Схема исследования поведения функции по первой производной.

7. Находим вторую производную: $y'' = 6x$. Приравнивая вторую производную нулю, найдём критическую точку второго рода: $6x = 0$, откуда $x = 0$.

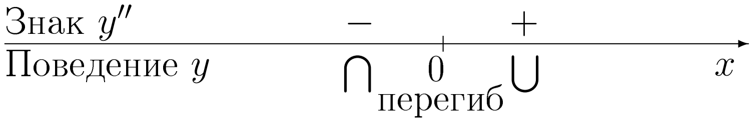

Рис. 2. Схема исследования поведения функции по второй производной.

Рисуем схему (рис. 2), из которой следует, что в точке $x = 0$ функция имеет перегиб. На интервале $(-\infty; 0)$ функция выпукла вверх, а на интервале $(0; +\infty)$ — выпукла вниз. Находим ординату точки перегиба: $y_{пер} = 0$.

8. График функции изображён на рис. 3. При построении пользуемся симметрией графика относительно начала координат (т.к. функция является нечётной).

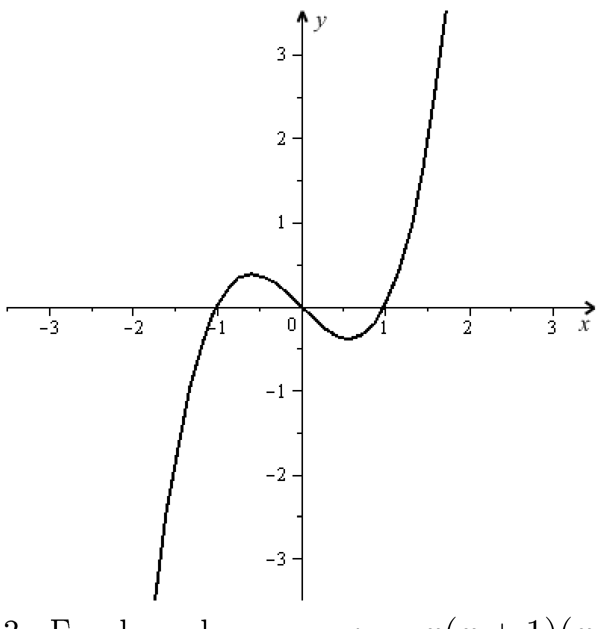

Рис. 3. График функции $y = x(x+1)(x-1)$.

Задание 4б. Провести полное исследование и построить график функции $y = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$.

Решение.

1. Область определения — вся числовая ось, кроме точки $x = -1$.

2. Функция не является периодической.

3. Функция не является ни чётной, ни нечётной.

4. Функция имеет одну точку пересечения с осями координат — точку $(0;0)$. Функция положительна при $x > 0$ и отрицательна при $x < 0$.

5. Функция имеет разрыв в точке $x = -1$.

Поведение функции на границе области определения:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{2(x+1)^2} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to-1-}\frac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty, \quad \lim_{x\to-1+}\frac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty.$$

Отсюда следует, что в точке $x = -1$ функция имеет разрыв второго рода. Прямая $x = -1$ является вертикальной асимптотой.

Найдём параметры наклонной асимптоты $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{2x(x+1)^2} = \frac{1}{2},$$
$$b = \lim_{x\to\infty}(y - kx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2(x+1)^2} - \frac{1}{2}x\right) = -1.$$

Уравнение наклонной асимптоты: $y = \dfrac{1}{2}x - 1$.

6. Найдём производную: $y' = \dfrac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}$. Приравнивая производную нулю, находим критические точки первого рода: $x = 0$, $x = -3$. Первая производная положительна на интервалах $(-\infty;\,-3) \cup (-1;\,0) \cup (0;\,+\infty)$ и отрицательна на интервале $(-3;-1)$.

Из схемы (рис. 4) следует, что в точке $x = -3$ функция имеет максимум, а в точке $x = 0$ экстремума нет. Найдём ординату точки максимума: $y_{max} = -3\dfrac{3}{8}$. На интервалах $(-\infty;-3)$, $(-1;0)$ и $(0;+\infty)$ функция монотонно возрастает, на интервале $(-3;-1)$ — монотонно убывает.

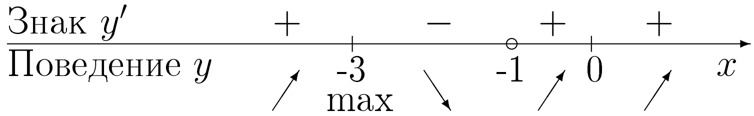

Рис. 4. Схема исследования поведения функции по первой производной.

7. Находим вторую производную: $y'' = \dfrac{3x}{(x+1)^4}$. Приравнивая вторую производную нулю, находим критическую точку второго рода: $x = 0$. Вторая производная положительна на интервале $(0;+\infty)$ и отрицательна на интервалах $(-\infty;-1)$ и $(-1;0)$.

Из схемы (рис. 5) следует, что в точке $x = 0$ функция имеет перегиб. Ордината точки перегиба $y_{пер} = 0$. На интервалах $(-\infty; -1)$ и $(-1; 0)$ функция выпукла вверх, а на интервале $(0; +\infty)$ — выпукла вниз.

Знак y''	$-$		$-$		$+$	
Поведение y	$\bigcap$	-1	$\bigcap$	0 перегиб	$\bigcup$	x

Рис. 5. Схема исследования поведения функции по второй производной.

8. График функции изображён на рис. 6.

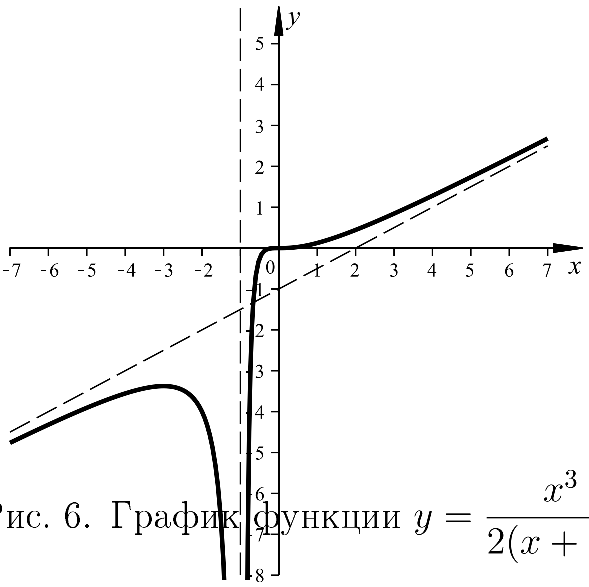

Рис. 6. График функции $y = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$.

Задача 5. Неопределённые интегралы

Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$, если для любого допустимого значения x выполнено равенство $F'(x) = f(x)$.

Если функция $f(x)$ имеет первообразную $F_0(x)$, то множество всех первообразных функции $f(x)$ совпадает с множеством функций $F(x) = F_0(x) + C$, где C — любое число.

Неопределённым интегралом от функции $f(x)$ называется множество всех первообразных $F(x)$ функции $f(x)$. Неопределённый интеграл от функции $f(x)$ обозначается символом $\displaystyle\int f(x)\,dx$. Функция $f(x)$ называется при этом подынтегральной функцией.

Например, функция $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ есть первообразная для функции $f(x) =$

$= x^2$ на промежутке $(-\infty; +\infty)$, так как $\left(\dfrac{x^3}{3}\right)' = \dfrac{3x^2}{3} = x^2$. Поэтому

$$\int f(x)\,dx = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

Для подсчёта интегралов используется *таблица основных неопределённых интегралов.*

$$\int 0\,dx = C, \qquad \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1),$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \qquad \int dx = \int 1\,dx = x + C,$$

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C, \qquad \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C, \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C, \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C,$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\,\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C,$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\,\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \ln|x + \sqrt{x^2 + k}| + C.$$

В процессе вычисления интегралов часто применяется *таблица основных дифференциалов.*

$$dx = d(x \pm a), \qquad dx = -d(-x),$$

$$dx = b\,d\left(\frac{x}{b}\right), \qquad dx = \frac{1}{b}\,d(bx),$$

$$x^n\,dx = \frac{d\left(x^{n+1}\right)}{n+1} \quad (n \neq -1), \qquad \frac{dx}{x} = d\left(\ln x\right),$$

$$x\,dx = \frac{1}{2}d\left(x^2\right), \qquad \frac{dx}{x^2} = -d\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\,d\left(\sqrt{x}\right), \qquad \cos x\,dx = d\left(\sin x\right),$$

$$\sin x\,dx = -d\left(\cos x\right), \qquad a^x\,dx = \frac{d\left(a^x\right)}{\ln a},$$

$$e^x\,dx = d\left(e^x\right), \qquad \frac{dx}{\sin^2 x} = -d\left(\operatorname{ctg} x\right),$$

$$\frac{dx}{\cos^2 x} = d\left(\operatorname{tg} x\right), \qquad \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} = d\left(\ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)\right),$$

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d\left(\arcsin x\right), \qquad \frac{dx}{1+x^2} = d\left(\operatorname{arctg} x\right),$$
$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -d\left(\arccos x\right), \qquad \frac{dx}{1+x^2} = -d\left(\operatorname{arcctg} x\right).$$

Формулы таблицы дифференциалов следуют из следующей часто используемой при вычислении интегралов формулы

$$df(x) = (f(x))'\,dx. \tag{2}$$

Пусть функции $u(x)$, $v(x)$ имеют непрерывные производные $u'(x)$, $v'(x)$, тогда справедливо равенство, называемое *формулой интегрирования по частям*

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx$$

С учётом формулы (2) последнее равенство можно записать в компактном виде

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Необходимо заметить, что применение метода интегрирования по частям приводит к частичному интегрированию, так как и правая часть формулы содержит интеграл. Однако при правильном применении метода интеграл из правой части будет табличным интегралом или легко сводящимся к табличному интегралу. При вычислении некоторых интегралов метод интегрирования по частям может применяться несколько раз. Правило интегрирования по частям имеет более ограниченную область применения, чем замена переменной. Но есть целые классы интегралов, например:

$$\int x^k \ln^m x\,dx, \quad \int x^k \sin ax\,dx, \quad \int x^k \cos ax\,dx, \quad \int x^k e^{ax}\,dx,$$
$$\int x^k \arcsin ax\,dx, \quad \int x^k \arccos ax\,dx, \quad \int x^k \operatorname{arctg} ax\,dx$$

и другие, которые вычисляются именно с помощью интегрирования по частям.

Задание 5а. Найти неопределённый интеграл. Результат проверить дифференцированием.

$$\int \left(x^4 - 5 + 3\sqrt[7]{x} + \frac{1}{2x^3} - \frac{2}{3\sqrt[4]{x^5}}\right)dx.$$

Решение. Раскладываем интеграл в сумму и разность нескольких интегралов, выносим константы за знаки интегралов и применяем табличные формулы.

$$\int\left(x^4-5+3\sqrt[7]{x}+\frac{1}{2x^3}-\frac{2}{3\sqrt[4]{x^5}}\right)dx=$$
$$=\int x^4\,dx-\int 5\,dx+\int 3\sqrt[7]{x}\,dx+\int\frac{1}{2x^3}\,dx-\int\frac{2}{3\sqrt[4]{x^5}}\,dx=$$
$$=\int x^4\,dx-5\int dx+3\int\sqrt[7]{x}\,dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^3}\,dx-\frac{2}{3}\int\frac{1}{\sqrt[4]{x^5}}\,dx=$$
$$=\int x^4\,dx-5\int dx+3\int x^{1/7}\,dx+\frac{1}{2}\int x^{-3}\,dx-\frac{2}{3}\int x^{-5/4}\,dx=$$
$$=\frac{x^5}{5}-5\cdot x+3\cdot\frac{x^{8/7}}{8/7}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^{-2}}{-2}-\frac{2}{3}\cdot\frac{x^{-1/4}}{-1/4}+C=$$
$$=\frac{x^5}{5}-5x+\frac{21}{8}\sqrt[7]{x^8}-\frac{1}{4x^2}+\frac{8}{3\sqrt[4]{x}}+C.$$

Проверка дифференцированием.

$$\left(\frac{x^5}{5}-5x+\frac{21}{8}\sqrt[7]{x^8}-\frac{1}{4x^2}+\frac{8}{3\sqrt[4]{x}}+C\right)'=$$
$$=\left(\frac{x^5}{5}\right)'-(5x)'+\left(\frac{21}{8}\sqrt[7]{x^8}\right)'-\left(\frac{1}{4x^2}\right)'+\left(\frac{8}{3\sqrt[4]{x}}\right)'+C'=$$
$$=\frac{1}{5}\left(x^5\right)'-5x'+\frac{21}{8}\left(x^{8/7}\right)'-\frac{1}{4}\left(x^{-2}\right)'+\frac{8}{3}\left(x^{-1/4}\right)'+0=$$
$$=\frac{1}{5}\cdot 5x^4-5\cdot 1+\frac{21}{8}\cdot\frac{8}{7}x^{1/7}-\frac{1}{4}\cdot(-2)\cdot x^{-3}+\frac{8}{3}\cdot(-\frac{1}{4})\cdot x^{-5/4}=$$
$$=x^4-5+3\sqrt[7]{x}+\frac{1}{2x^3}-\frac{2}{3\sqrt[4]{x^5}}.$$

Задание 5б. Найти неопределённые интегралы

$$\int\frac{dx}{\sqrt{5x+2}},\quad\int\frac{dx}{2x-6},\quad\int\frac{\ln x}{x}\,dx,\quad\int\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\,dx,\quad\int\frac{x\,dx}{5x^2-3}.$$

Решение. В первом интеграле сделаем замену $t=5x+2$.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{5x+2}}=\frac{1}{5}\int\frac{d(5x+2)}{\sqrt{5x+2}}=\frac{1}{5}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=\frac{1}{5}\cdot 2\sqrt{t}+C=\frac{2}{5}\sqrt{5x+2}+C.$$

Во втором интеграле делаем замену $t=2x-6$.

$$\int\frac{dx}{2x-6}=\frac{1}{2}\int\frac{d(2x-6)}{2x-6}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln|t|+C=\frac{1}{2}\ln|2x-6|+C.$$

В третьем интеграле обозначаем $t = \ln x$.

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int \ln x\,d\ln x = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{1}{2}\,\ln^2 x + C.$$

В четвёртом интеграле вводим обозначение $t = e^{2x} + 1$.

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\,d2x = \frac{1}{2}\int \frac{e^{2x}\,d2x}{e^{2x}+1} = \frac{1}{2}\int \frac{de^{2x}}{e^{2x}+1} =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(e^{2x}+1)}{e^{2x}+1} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\,\ln|t| + C = \frac{1}{2}\,\ln(e^{2x}+1) + C.$$

В пятом интеграле делаем замену $t = 5x^2 - 3$.

$$\int \frac{x\,dx}{5x^2-3} = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{5x^2-3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\int \frac{d(5x^2-3)}{5x^2-3} =$$
$$= \frac{1}{10}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{10}\,\ln|t| + C = \frac{1}{10}\,\ln|5x^2-3| + C.$$

Задание 5в. Найти неопределённые интегралы

$$\int x\sin 3x\,dx, \qquad \int xe^{-4x}\,dx.$$

Результат проверить дифференцированием.

Решение. При решении первого интеграла применяем табличные дифференциалы

$$dx = \frac{1}{3}\,d\,(3x)\,, \qquad \sin x\,dx = -d\,(\cos x)\,.$$

Тогда

$$\int x\sin 3x\,dx = \frac{1}{3}\int x\sin 3x\,d3x = -\frac{1}{3}\int x\,d\cos 3x =$$
$$= -\frac{1}{3}\left(x\cos 3x - \int \cos 3x\,dx\right) = -\frac{1}{3}\,x\cos 3x + \frac{1}{3}\int \cos 3x\,dx =$$
$$= -\frac{1}{3}\,x\cos 3x + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\int \cos 3x\,d3x = -\frac{1}{3}\,x\cos 3x + \frac{1}{9}\,\sin 3x + C.$$

Проверка дифференцированием.

$$\left(-\frac{1}{3}\,x\cos 3x+\frac{1}{9}\,\sin 3x+C\right)'=-\frac{1}{3}(x\cos 3x)'+\frac{1}{9}(\sin 3x)'+C'=$$
$$=-\frac{1}{3}\left(x'\cos 3x+x(\cos 3x)'\right)+\frac{1}{9}\cos 3x(3x)'+0=$$
$$=-\frac{1}{3}\left(\cos 3x-x\sin 3x(3x)'\right)+\frac{1}{9}\cos 3x\cdot 3=-\frac{1}{3}\left(\cos 3x-x\sin 3x\cdot 3\right)+\frac{1}{3}\cos 3x=$$
$$=-\frac{1}{3}\cos 3x+\frac{1}{3}x\sin 3x\cdot 3+\frac{1}{3}\cos 3x=x\sin 3x.$$

При решении второго интеграла применяем табличные дифференциалы

$$dx=-\frac{1}{4}\,d(-4x),\quad e^{x}dx=d\left(e^{x}\right).$$

Тогда

$$\int xe^{-4x}\,dx=-\frac{1}{4}\int xe^{-4x}\,d(-4x)=-\frac{1}{4}\int x\,de^{-4x}=$$

$$=-\frac{1}{4}\left(x\cdot e^{-4x}-\int e^{-4x}\,dx\right)=-\frac{1}{4}\,xe^{-4x}+\frac{1}{4}\int e^{-4x}\,dx=$$
$$=-\frac{1}{4}\,xe^{-4x}-\frac{1}{16}\int e^{-4x}\,d(-4x)=-\frac{1}{4}\,xe^{-4x}-\frac{1}{16}\,e^{-4x}+C.$$

Проверяем вычисление дифференцированием.

$$\left(-\frac{1}{4}\,xe^{-4x}-\frac{1}{16}\,e^{-4x}+C\right)'=-\frac{1}{4}\left(xe^{-4x}\right)'-\frac{1}{16}\left(e^{-4x}\right)'+C'=$$
$$=-\frac{1}{4}\left(x'e^{-4x}+x(e^{-4x})'\right)-\frac{1}{16}e^{-4x}(-4x)'+0=$$
$$=-\frac{1}{4}\left(e^{-4x}+xe^{-4x}(-4x)'\right)-\frac{1}{16}e^{-4x}(-4)=-\frac{1}{4}\left(e^{-4x}+xe^{-4x}(-4)\right)+\frac{1}{4}e^{-4x}=$$
$$=-\frac{1}{4}e^{-4x}-\frac{1}{4}xe^{-4x}(-4)+\frac{1}{4}e^{-4x}=xe^{-4x}.$$

Задача 6. Определённые интегралы

Методы вычисления определённых интегралов аналогичны методам вычисления неопределённых интегралов. Все правила и формулы, применяемые в неопределённых интегралах, справедливы и для определённых интегралов. Лишь несколько правил имеют специфику в случае определённых интегралов. Приведём их.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $F(x)$ — первообразная от функции $f(x)$ на этом отрезке. Тогда справедлива *формула Ньютона-Лейбница*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы на отрезке $[a, b]$, а их производные $u'(x)$ и $v'(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$. Тогда справедлива *формула интегрирования по частям для определённого интеграла*

$$\int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\cdot u'(x)\,dx.$$

Последнюю формулу можно записать в компактном виде

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

Задание 6а. Вычислить определённые интегралы

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \int_0^{2\pi} \sin x\,dx, \quad \int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x\cos x^2 dx.$$

Решение. В первых двух интегралах сразу применяем формулу Ньютона-Лейбница для табличных интегралов. При вычислении интеграла по формуле Ньютона-Лейбница в первообразную сначала подставляется верхний предел, затем нижний предел, и из первого выражения вычитается второе.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x+\sqrt{1+x^2})\Big|_0^1 = \ln(1+\sqrt{2}) - \ln 1 = \ln(1+\sqrt{2}).$$

$$\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^{2\pi} = -(\cos 2\pi - \cos 0) = 0.$$

В следующем интеграле применяем табличный дифференциал $xdx = \dfrac{1}{2}dx^2$.

$$\int\limits_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x\cos x^2 dx = \int\limits_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \cos x^2 x dx = \frac{1}{2}\int\limits_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \cos x^2 dx^2 = \frac{1}{2}\sin x^2\Big|_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^2 - \sin\left(\sqrt{\frac{\pi}{6}}\right)^2\right) = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

Задание 6б. Вычислить определённый интеграл $\displaystyle\int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x\, dx$.

Решение. Применяем формулу интегрирования по частям.

$$\int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x\, dx = x\cdot\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 x\, d\operatorname{arctg} x = x\cdot\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{x\, dx}{1+x^2} =$$

$$= 1\cdot\operatorname{arctg} 1 - 0\cdot\operatorname{arctg} 0 - \int\limits_0^1 \frac{\frac{1}{2}dx^2}{1+x^2} = \operatorname{arctg} 1 - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.$$

В процессе нахождения интеграла использовали следующее вычисление

$$d(\operatorname{arctg} x) = (\operatorname{arctg} x)' dx = \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{dx}{1+x^2}.$$

Задача 7. Площади

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$, $x = b$ (см. рис. 7), вычисляется по формуле

$$S = \int\limits_a^b f(x)\, dx.$$

Пусть фигура ограничена сверху и снизу кривыми, уравнения которых $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x \in [a, b]$, $f_1(x) \geqslant f_2(x)$ (см. рис. 8). Тогда площадь фигуры вычисляется по формуле:

$$S = \int\limits_a^b (f_1(x) - f_2(x))\, dx.$$

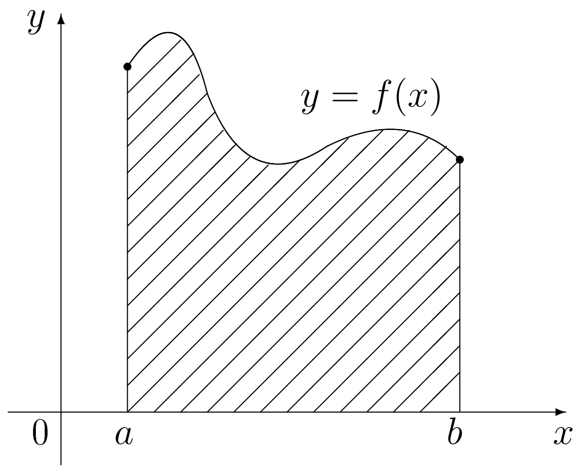

Рис. 7. Криволинейная трапеция.

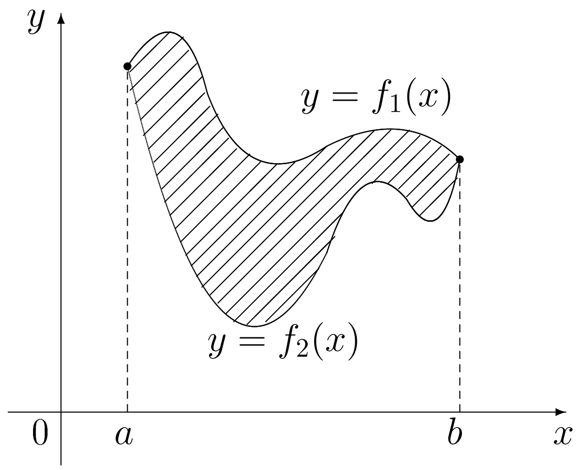

Рис. 8. Плоская фигура.

Задание 7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной данными кривыми $y = \sqrt{6x}$ и $y = \dfrac{x^2}{6}$.

Решение. Заданная фигура изображена на рис. 9.

Найдём точки пересечения графиков функций, решив уравнение

$$\sqrt{6x} = \frac{x^2}{6} \Rightarrow 6^3 x = x^4 \Rightarrow 6^3 x - x^4 = 0 \Rightarrow x(6^3 - x^3) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ и } x = 6.$$

Найдем ординаты точек пересечения графиков функций:

$$x = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ и } x = 6 \Rightarrow y = 6.$$

Вычисляем площадь заданной фигуры

$$S = \int\limits_0^6 \left(\sqrt{6x} - \frac{x^2}{6}\right)\, dx = \left(\frac{2}{3}\sqrt{6}\, x^{3/2} - \frac{x^3}{18}\right)\Bigg|_0^6 = \left(\frac{2}{3}\sqrt{6}\cdot 6^{3/2} - \frac{6^3}{18}\right) - 0 = 12.$$

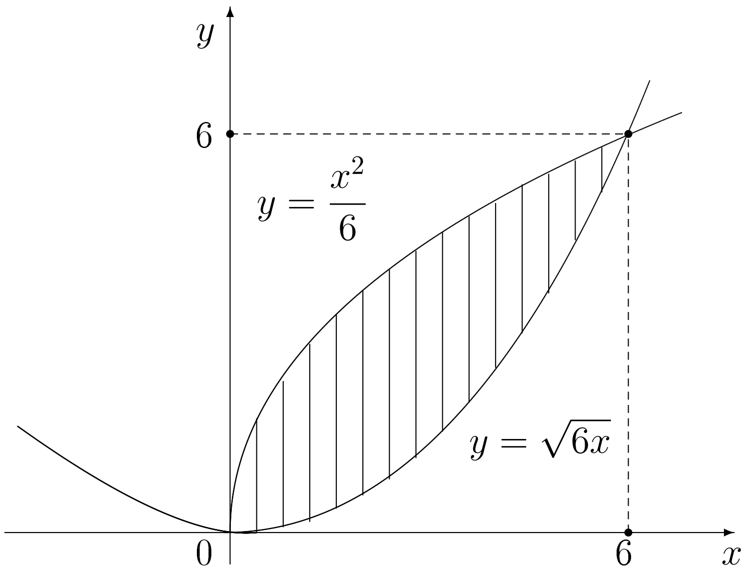

Рис. 9. Фигура, ограниченная кривыми $y = \sqrt{6x}$ и $y = \dfrac{x^2}{6}$.

Ответ: 12.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

Задание 8. Даны числа z_1 и z_2. Изобразить их на комплексной плоскости. Найти $2z_1+3z_2$, $z_1\cdot\overline{z_2}$, $\dfrac{z_1}{z_2}$.

8.1. $z_1=-2+i$, $z_2=2+5i$
8.2. $z_1=-5-8i$, $z_2=1+10i$
8.3. $z_1=-7+2i$, $z_2=2-i$
8.4. $z_1=3+2i$, $z_2=1-i$
8.5. $z_1=-1+4i$, $z_2=3+3i$
8.6. $z_1=-8+5i$, $z_2=2+i$
8.7. $z_1=1-4i$, $z_2=5+2i$
8.8. $z_1=2+6i$, $z_2=-1-3i$
8.9. $z_1=3+4i$, $z_2=4-3i$
8.10. $z_1=-2-5i$, $z_2=2-3i$

Задание 9. Найти общее решение дифференциального уравнения.

9.1. $x^2\,y'=y^2+1$
9.2. $\left(x^2+1\right)\,y\,y'=y^2+1$
9.3. $y'=\dfrac{x+1}{x}\,y^3$
9.4. $x\,y'=y^2\left(2x^2+1\right)$
9.5. $y\,y'\left(1+x^2\right)+1+y^2=0$
9.6. $y'=x^2y+3x^2$
9.7. $y'=(\sqrt{x}-3x+1)\,\sqrt{y}$
9.8. $\left(x+xy^2\right)=y'\left(y+x^2y\right)$
9.9. $x^5\,y'=(x+1)\,\sqrt{y}$
9.10. $xy\,y'=1+y^2$

Задание 10. В коробке лежат девять карточек, на которых написаны цифры от 1 до 9. Последовательно, одну за другой, вынимают две карточки и кладут их рядом — получают двузначное число. Например, вынуты карточки с числами 1 и 3 — получили число 13, вынуты карточки с числами 3 и 1 — получили число 31. Найдите вероятность события A.

10.1. A — число является полным квадратом;
10.2. A — число четное;
10.3. A — число меньше сорока пяти;
10.4. A — сумма цифр числа меньше восьми;
10.5. A — число не содержит четных цифр;
10.6. A — цифры числа отличаются на единицу;
10.7. A — сумма цифр числа больше двенадцати;
10.8. A — одна из цифр числа равна единице;
10.9. A — первая цифра числа больше второй;
10.10. A — число делится на девять.

Задание 11. В урне a белых и b черных шаров. Наугад вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что:

1) оба шара белые;
2) ровно один из вынутых шаров белый;
3) хотя бы один из вынутых шаров белый.

11.1. $a = 4,\ b = 5$;
11.2. $a = 6,\ b = 4$;
11.3. $a = 7,\ b = 3$;
11.4. $a = 5,\ b = 3$;
11.5. $a = 3,\ b = 6$;
11.6. $a = 7,\ b = 4$;
11.7. $a = 6,\ b = 5$;
11.8. $a = 5,\ b = 7$;
11.9. $a = 4,\ b = 6$;
11.10. $a = 3,\ b = 7$;

Задание 12.

12.1. На складе имеется 20 телефонных аппаратов корейского производства и 30 — немецкого. В среднем, 5% корейских аппаратов и 2% немецких имеют брак.

1) Найти вероятность того, что случайно выбранный аппарат бракованный.

2) Случайно выбранный аппарат бракованный. С какой вероятностью этот аппарат был немецким?

12.2. Упаковка сосисок производится двумя автоматами с одинаковой производительностью. Доля брака, допускаемого первым автоматом, равна 5%, а вторым автоматом — 7%.

1) Найти вероятность того, что наудачу взятая упаковка окажется бракованной.

2) Наудачу взятая упаковка оказалась бракованной. С какой вероятностью эта упаковка произведена первым автоматом?

12.3. Из 10 стрелков три стрелка попадают в мишень с вероятностью $0,8$, пять стрелков — с вероятностью $0,7$, два стрелка — с вероятностью $0,6$.

1) Найти вероятность того, что случайно выбранный стрелок попал в цель.

2) Случайно выбранный стрелок попал в цель. С какой вероятностью этот стрелок принадлежит второй группе?

12.4. В сеансе одновременной игры в шахматы с гроссмейстером играют 10 перворазрядников, 15 второразрядников и 20 третьеразрядников. Вероятность того, что перворазрядник выиграет у гроссмейстера равна $0,2$, для второразрадника эта вероятность равна $0,1$, а для третьеразрядника — $0,05$.

1) Найти вероятность того, что случайно выбранный участник выиграет.

2) Случайно выбранный участник выиграл. С какой вероятностью это был третьеразрядник?

12.5. В цехе фабрики 30% продукции производится на первом станке, на втором — 25%, а остальная продукция — на третьем станке. Первый станок дает 1% брака, второй — 2%, третий — 3%.

1) Найти вероятность того, что случайно выбранная единица продукции оказалась бракованной.

2) Случайно выбранная единица продукции оказалась бракованной. Найти вероятность того, что она произведена на третьем станке.

12.6. В специализированную больницу поступают больные с тремя болезнями: в среднем 50% больных с первой болезнью, 30% — со второй, 20% — с третьей. Вероятности излечения первой, второй и третьей болезни равны $0,7$, $0,8$, $0,9$ соответственно.

1) Найти вероятность того, что поступивший в больницу больной выздоровел.

2) Поступивший в больницу больной выздоровел. Найти вероятность того, что он болел первой болезнью.

12.7. По каналу связи с вероятностью $0,4$ передается сигнал «0», и с вероятностью $0,6$ передается сигнал «1». Из-за помех возможны ошибки. Вероятность принять «1», когда передавался сигнал «0» равна $0,05$. Вероятность принять «0», когда передавался сигнал «1» равна $0,1$.

1) Найти вероятность приема сигнала «1».

2) Принят сигнал «1». Найти вероятность того, что действительно передавался сигнал «1».

12.8. В первой урне содержится 5 белых и 6 черных шаров, во второй урне содержится 5 белых и 3 черных шара. Из первой урны наугад вынимают один шар и перекладывают его во вторую урну. Затем из второй урны вынимают один шар.

1) Найти вероятность того, что этот шар белый.

2) Вынутый шар оказался белым. Найти вероятность того, что из первой урны во вторую был переложен черный шар.

12.9. Из деталей высокого качества собирается 60% всех телевизоров, при этом вероятность благополучной эксплуатации телевизора в течение времени T равна $0,95$. Для телевизора, собранного из обычных деталей, эта вероятность равна $0,7$.

1) Найти вероятность того, что наугад выбранный телевизор проработает без поломок в течение времени T.

2) Найти вероятность того, что телевизор, проработавший без поломок в течение времени T, собран из деталей высокого качества.

12.10. ОТК проводит контроль выпускаемых приборов. Приборы содержат скрытые дефекты с вероятностью $0,15$. При проверке наличие дефекта обнаруживается с вероятностью $0,9$. Кроме того, с вероятностью $0,05$ исправный прибор может быть ошибочно признан дефектным. При обнаружении дефекта прибор бракуется.

1) Найти вероятность того, что наугад выбранный прибор будет забракован.

2) Найти вероятность того, что забракованный прибор действительно имеет дефект.

Задание 13. Дан закон распределения дискретной случайной величины.

1) Найти вероятность p.

2) Найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

3) Вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

13.1.

x_i	-1	0	1	2	3
p_i	0,2	0,1	p	0,3	0,2

13.2.

x_i	0	1	3	5	6
p_i	0,1	0,3	p	0,2	0,1

13.3.

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,1	p	0,1	0,2	0,3

13.4.

x_i	-2	0	2	4	6
p_i	0,1	0,2	p	0,2	0,1

13.5.

x_i	1	2	4	5	6
p_i	0,2	0,1	p	0,2	0,3

13.6.

x_i	-2	-1	1	3	4
p_i	0,3	0,1	0,2	p	0,1

13.7.

x_i	1	2	4	6	8
p_i	0,2	0,3	p	0,2	0,1

13.8.

x_i	-2	2	3	5	6
p_i	0,2	0,4	p	0,2	0,1

13.9.

x_i	2	4	5	7	8
p_i	0,1	0,2	p	0,3	0,2

13.10.

x_i	-1	1	2	4	6
p_i	0,2	0,3	0,3	p	0,1

ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 2

Задача 8. Комплексные числа

Комплексными числами (в алгебраической форме) называются выражения вида

$$z = x + i\,y,$$

где i — символ, называемый мнимой единицей, x и y — произвольные действительные числа. $x = \operatorname{Re} z$ называется действительной частью числа z, $y = \operatorname{Im} z$ называется мнимой частью числа z.

Рассмотрим два комплексных числа $z_1 = x_1 + i\,y_1$ и $z_2 = x_2 + i\,y_2$.

Два комплексных числа z_1 и z_2 называются равными

$$z_1 = z_2, \text{ если } x_1 = x_2 \text{ и } y_1 = y_2.$$

Суммой комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число

$$z_3 = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2).$$

Произведением комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число

$$z_3 = z_1 \cdot z_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + i\,(x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1).$$

Умножение комплексных чисел производится по правилу умножения двучленов.

Из определения произведения комплексных чисел следует, что

$$i^2 = i \cdot i = (0 + 1i) \cdot (0 + 1i) = -1.$$

Итак,

$$i = \sqrt{-1}, \quad i^2 = -1.$$

Комплексное число $\bar{z} = x - i\,y$ называется сопряжённым комплексному числу $z = x + i\,y$.

Операция деления комплексного числа z_1 на комплексное число z_2, если $z_2 \neq 0$, определяется как обратная к умножению, т.е.

$$z = \frac{z_1}{z_2}, \quad \text{если } z_1 = z \cdot z_2.$$

Из последнего равенства следует, что

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \cdot \frac{x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Заметим, что эту формулу удобнее записать в виде

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2}.$$

Комплексное число $z = x + i\,y$ изображается на плоскости Oxy точкой M с координатами (x, y) либо вектором, начало которого находится в точке $O(0, 0)$, а конец в точке $M(x, y)$.

Задание 8. Изобразить на комплексной плоскости числа $z_1 = -2 + 3i$ и $z_2 = 4 + 5i$. Вычислить

$$5z_1, \qquad \bar{z}_1, \qquad z_1 + z_2, \qquad z_1 - z_2, \qquad z_1 \cdot z_2, \qquad \frac{z_1}{z_2}.$$

Решение. На комплексной плоскости изображаем числа z_1 и z_2 (см. рис. 10). По правилам действий с комплексными числами получаем

$$5z_1 = 5 \cdot (-2 + 3i) = -10 + 15i,$$

$$\bar{z}_1 = \overline{-2 + 3i} = -2 - 3i,$$

$$z_1 + z_2 = (-2 + 3i) + (4 + 5i) = (-2 + 4) + i\,(3 + 5) = 2 + 8i,$$

$$z_1 - z_2 = (-2 + 3i) - (4 + 5i) = (-2 - 4) + i\,(3 - 5) = -6 - 2i,$$

$$z_1 \cdot z_2 = (-2 + 3i) \cdot (4 + 5i) = -8 + 12i - 10i - 15 = -23 + 2i,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-2 + 3i}{4 + 5i} = \frac{(-2 + 3i) \cdot (4 - 5i)}{(4 + 5i) \cdot (4 - 5i)} = \frac{7 + 22i}{41} = \frac{7}{41} + \frac{22}{41}\,i.$$

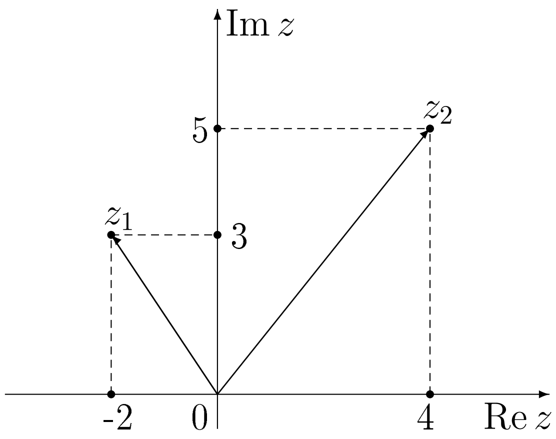

Рис. 10. Изображение чисел на комплексной плоскости.

Задача 9. Дифференциальные уравнения

Одним из основных видов дифференциальных уравнений являются уравнения с разделяющимися переменными.

Дифференциальное уравнение вида

$$y' = f(x)g(y) \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

(применили формулу $y' = \dfrac{dy}{dx}$), в котором правая часть есть произведение функции, зависящей только от x, на функцию, зависящую только от y, интегрируется следующим образом: мы „разделяем переменные“, то есть при помощи умножения и деления приводим уравнение к такой форме, чтобы в одну часть входила только функция от x и дифференциал dx, а в другую часть — функция от y и дифференциал dy.

В уравнении надо обе части уравнения умножить на dx и разделить на $g(y)$. Получаем

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx.$$

Если дифференциалы равны, то их неопределенные интегралы могут различаться только постоянным слагаемым.

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx + C.$$

Если уравнение с разделяющимися переменными задано в виде

$$M(x)N(y)\,dx + P(x)Q(y)\,dy = 0,$$

то достаточно разделить обе части на $N(y)P(x)$:

$$\frac{M(x)\,dx}{P(x)} + \frac{Q(y)\,dy}{N(y)} = 0.$$

Откуда получаем общий интеграл уравнения

$$\int \frac{M(x)\,dx}{P(x)} + \int \frac{Q(y)\,dy}{N(y)} = C,$$

который остаётся вычислить.

Задание 9. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y\,dx + \operatorname{ctg} x\,dy = 0.$$

Решение. Данное уравнение — уравнение с разделяющимися переменными. Разделяем переменные.

$$y\,dx + \operatorname{ctg} x\,dy = 0 \Rightarrow \operatorname{ctg} x\,dy = -y\,dx \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{\operatorname{ctg} x} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{\operatorname{ctg} x} \Rightarrow \ln|y| = \ln|\cos x| + \ln C.$$

Потенцируем

$$\ln|y| = \ln|\cos x| + \ln C \Rightarrow \ln|y| = \ln(|\cos x| \cdot C) \Rightarrow y = C\cos x \text{ —}$$

общее решение.

Ответ: $y = C\cos x$.

Задача 10. События. Классическое определение вероятности

Пусть проводится некоторый эксперимент, исход которого предсказать заранее нельзя. Такие эксперименты называют случайными.

Случайным событием (или просто событием) называется любой исход эксперимента, который может произойти или не произойти. Случайные события обозначаются буквами A, B, C и так далее.

Событие, которое обязательно наступает в данном эксперименте, называется достоверным. Событие, которое заведомо не наступает в данном эксперименте, называется невозможным.

Суммой двух событий A, B называется событие $C = A + B$, состоящее в наступлении хотя бы одного из них, то есть A или B, или их обоих вместе.

Произведением двух событий A и B называется событие $C = AB$, состоящее в одновременном появлении и события A и события B.

Два события A и B называются несовместными, если появление одного из них исключает появление другого в одном и том же эксперименте (испытании).

Противоположным для события A называется событие $\overline{A}$, состоящее в том, что событие A не произошло. События A и $\overline{A}$ являются несовместными.

События A_1, A_2, …, A_k образуют полную группу, если в результате эксперимента обязательно произойдет хотя бы одно из них.

Пусть результат эксперимента можно представить в виде полной группы событий (исходов) $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, которые попарно несовместны и равновозможны. Эти исходы называют элементарными событиями. Множество всех элементарных событий называется пространством элементарных событий и обозначается $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$.

Пусть событие A происходит при осуществлении каких-то m элементарных исходов $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ из множества Ω. Тогда говорят, что вероятность события A равна отношению числа m исходов, благоприятствующих этому событию, к общему числу n всех равновозможных, попарно несовместных исходов:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{3}$$

Следствие. Вероятность достоверного события равна единице (так как $m = n$), вероятность невозможного события равна нулю (так как $m = 0$), а для всех остальных событий A выполнено неравенство $0 < P(A) < 1$. Таким образом, вероятность любого случайного события A удовлетворяет неравенству $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

Подсчет вероятности события сводится к подсчету числа благоприятствующих ему исходов. Делают это обычно комбинаторными способами. Многие комбинаторные задачи могут быть решены с помощью двух важных правил, называемых правилом сложения и умножения.

Правило умножения: если из некоторого конечного множества первый объект можно выбрать n_1 способами и после каждого такого выбора второй объект можно выбрать n_2 способами, то оба объекта можно выбрать $n_1 \cdot n_2$ способами.

Правило умножения: если из некоторого конечного множества первый объект можно выбрать n_1 способами и после каждого такого выбора второй объект можно выбрать n_2 способами, то любой из этих объектов можно выбрать $n_1 + n_2$ способами.

Задание 10. В коробке лежат девять карточек, на которых написаны цифры от 1 до 9. Последовательно, одну за другой, вынимают две карточки и кладут их рядом — получают двузначное число. Например, вынуты карточки с числами 1 и 3 — получили число 13, вынуты карточки с числами 3 и 1 — получили число 31. Найдите вероятность события A — полученное число является полным кубом.

Решение: Все числа (исходы), которые могут быть получены в результате такого испытания, образуют пространство элементарных исходов

$$\Omega = \{12, 13, 14, \ldots, 19, 21, 23, 24, \ldots, 29, \ldots, 91, 92, \ldots, 98\}.$$

Первую цифру двузначного числа можно выбрать девятью способами. После того, как первая цифра выбрана, вторую можно выбрать восемью способами. По правилу произведения множество Ω содержит $n = 9 \cdot 8 = 72$ числа. Так как появление всех элементов множества Ω равновозможно, то применим формулу классической вероятности (3).

В нашем случае благоприятные исходы — это числа $\{27,\, 64\}$, то есть $m = 2$, следовательно, вероятность события А равна

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{72} = \frac{1}{36}.$$

Задача 11. Несовместные события. Условная вероятность

Для несовместных событий A и B вероятность их одновременного появления равна нулю, то есть $P(AB) = 0$.

Если события A и B несовместны, то вероятность суммы двух событий равна сумме их вероятностей

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \tag{4}$$

Аналогичная формула справедлива для любого числа несовместных событий.

Для совместных событий

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \tag{5}$$

События A_1, A_2, $\ldots$, A_k образуют полную группу попарно несовместных событий, если они попарно несовместны и при осуществлении данного эксперимента обязательно произойдет одно из них.

Сумма вероятностей попарно несовместных событий, образующих полную группу, равна 1.

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_k) = 1.$$

Следствие. События A и $\overline{A}$ несовместные, значит они образуют полную группу, поэтому их вероятности связаны соотношением $P(A)+P(\overline{A}) = 1$.

Вероятность события B, вычисленная в предположении, что имело место некоторое другое событие A, называется условной вероятностью и обозначается $P(B|A)$.

Если появление события A не влияет на вероятность события B, то есть $P(B|A) = P(B)$, то события A и B называются независимыми.

Для зависимых событий выполняется следующее соотношение

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B). \tag{6}$$

Для независимых событий

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{и} \quad P(AB) = P(A)P(B).$$

Это равенство представляет теорему умножения вероятностей независимых событий. Оно распространяется на любое число независимых событий.

Задание 11. В урне 5 белых и 6 черных шаров. Наугад вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что:

1) оба шара белые;

2) ровно один из вынутых шаров белый;

3) хотя бы один из вынутых шаров белый.

Решение: При решении задачи можно считать, что шары вынимают из урны последовательно. Обозначим события: K_1 — первый вынутый шар белый, M_1 — первый вынутый шар черный, K_2 — второй вынутый шар белый, M_2 — второй вынутый шар черный. Заметим, что события K_1 и M_1, а также события K_2 и M_2 являются несовместными и взаимно противоположными, т.е.

$$P(K_1) = P(\overline{M_1}) = 1 - P(M_1) \text{ и } P(K_2) = P(\overline{M_2}) = 1 - P(M_2).$$

Поскольку в урне всего 11 шаров, из которых 5 белых, то

$$P(K_1) = \frac{m}{n} = \frac{5}{11}, \quad P(M_1) = \frac{6}{11}.$$

Событие K_2 можно рассматривать в двух ситуациях: когда первый вынутый шар белый и когда первый вынутый шар черный. Найдем вероятности этих событий.

Пусть первый вынутый шар белый. Поскольку перед выниманием второго шара в урне осталось 10 шаров, из которых 4 белых, вероятность вынуть белый шар равна

$$P(K_2|K_1) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

Кроме того, вероятность вынуть черный шар равна

$$P(M_2|K_1) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

Пусть первый вынутый шар черный. Поскольку перед выниманием второго шара в урне осталось 10 шаров, из которых 5 белых. Значит, вероятность вынуть белый шар равна

$$P(K_2|M_1) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

Кроме того, вероятность вынуть черный шар равна

$$P(M_2|M_1) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

Тогда требуемые события можно представить как комбинацию, приведенных выше событий.

1) Событие A — оба шара белые — и первый шар белый и второй шар белый. Т.е. $A = K_1K_2$. По теореме об произведении вероятностей событий (6), имеем

$$P(A) = P(K_1K_2) = P(K_1)P(K_2|K_1) = \frac{5}{11} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{11}.$$

2) Событие B — ровно один из вынутых шаров белый — или первый шар белый, второй шар черный или первый шар черный, второй шар белый. Т.е. $B = K_1M_2 + M_1K_2$. События K_1M_2 и M_1K_2 несовместны, поэтому, согласно формулам (4) и (6) имеем

$$P(B) = P(K_1M_2 + M_1K_2) = P(K_1M_2) + P(M_1K_2) =$$
$$= P(K_1)P(M_2|K_1) + P(M_1)P(K_2|M_1) = \frac{5}{11} \cdot \frac{3}{5} + \frac{6}{11} \cdot \frac{1}{2} = \frac{6}{11}.$$

3) Событие C — хотя бы один из вынутых шаров белый — событие, противоположное событию «вынули два черных шара». Т.е. $C = \overline{M_1M_2}$. Таким образом, $P(C) = P(\overline{M_1M_2}) = 1 - P(M_1M_2)$. Поскольку,

$$P(M_1M_2) = P(M_1) \cdot P(M_2|M_1) = \frac{6}{11} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{11},$$

то

$$P(C) = 1 - \frac{3}{11} = \frac{8}{11}.$$

Задача 12. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Если событие A может произойти вместе с одним из событий H_1, H_2, ..., H_n, образующих полную группу несовместных событий, то событие A можно представить как

$$A = A(H_1 + H_2 + \ldots + H_n) = AH_1 + AH_2 + \ldots + AH_n$$

и вероятность события A можно определить по формуле полной вероятности

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + \ldots$$
$$\ldots + P(H_n) \cdot P(A|H_n) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_i). \quad (7)$$

Условная вероятность события H_i в предположении, что событие A имело место, определяется по так называемой формуле Байеса

$$P(H_i|A) = \frac{P(AH_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i) \cdot P(A|H_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A|H_i) \cdot P(H_i)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \quad (8)$$

Вероятности $P(H_i|A)$, вычисленные по формуле Байеса, часто называют вероятностями гипотез.

Задание 12. Известно, что 5% мужчин и $0,25\%$ женщин — дальтоники.

а) Найти вероятность того, что случайно выбранный человек — дальтоник, если выбор производится из группы, содержащей равное число мужчин и женщин?

б) Случайно выбранный человек оказался дальтоником. Какова вероятность, что это мужчина?

Решение: Рассмотрим два события: M — выбран мужчина, W — выбрана женщина. Так как в группе одинаковое число мужчин и женщин, то $P(M) = P(W) = \dfrac{1}{2}$. Поэтому события M и W образуют полную группу. Среди мужчин 5% дальтоники, то есть для события D — выбранный мужчина дальтоник — условная вероятность равна

$$P(D|M) = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}.$$

Аналогично, поскольку среди женщин $0,25\%$ дальтоники, то

$$P(D|W) = \frac{0,25}{100} = \frac{1}{400}.$$

а) Событие D — случайно выбранный человек — дальтоник. Вероятность этого события (если выбор производится из группы, содержащей равное число мужчин и женщин) найдем по формуле полной вероятности (7):

$$P(D) = P(M)\cdot P(D|M) + P(W)\cdot P(D|W) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{20} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{400} = \frac{21}{800} = 0,02625.$$

б) Событие K — случайно выбранный человек — дальтоник и при этом он оказался мужчиной. Вероятность этого события найдем по формуле Байеса (8):

$$P(K) = P(M|D) = \frac{P(M)P(D|M)}{P(D)} = \frac{0,5\cdot 0,05}{0,02625} = \frac{20}{21}.$$

Задача 13. Дискретная случайная величина и её характеристики

Случайные величины, имеющие конечные множества возможных значений, называются дискретными. Дискретная случайная величина определена, если задан закон распределения — соотношение между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Закон распределения дискретной случайной величины может быть задан в виде ряда распределения или таблицы распределения

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
p_i	p_1	p_2	$\dots$	p_n

(9)

причем

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1,$$

графически в виде многоугольника распределения или функцией распределения

$$F(x) = P\{X < x\} = \sum_{x_i < x} p_i.$$

Здесь для каждого значения x суммируются вероятности тех значений x_i, которые лежат левее точки x. График функции распределения $F(x)$ дискретной случайной величины имеет ступенчатый вид. Важнейшие свойства $F(x)$:

1) $F(x)$ — неубывающая функция своего аргумента;
2) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$;
3) $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

Числовыми характеристиками случайной величины являются математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение.

Математичесое ожидание дискретной случайной величины, заданной конечным рядом распределения (9), обозначается $M[x]$ и определяется по формуле

$$M[X] = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i. \tag{10}$$

$M[X]$ представляет собой среднее ожидаемое значение случайной величины. Оно обладает следующими свойствами:

1) $M[c] = c$, где $c = const$;
2) $M[cX] = cM[X]$;
3) $M[X_1 + X_2] = M[X_1] + M[X_2]$ для любых X_1, X_2;
4) $M[X_1 X_2] = M[X_1] \cdot M[X_2]$, если X_1, X_2 — независимы.

Для оценки степени разбросанности значений случайной величины около её среднего значения $M[X] = a$ вводятся понятия дисперсии $D[X]$ и среднего квадратического отклонения $\sigma[X]$. Дисперсией называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания, то есть

$$D[X] = M\left[(X-a)^2\right] =$$

$$= (x_1 - a)^2 p_1 + (x_2 - a)^2 p_2 + \ldots + (x_n - a)^2 p_n = \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2 p_i,$$

или

$$D[X] = M\left[X^2\right] - (M[X])^2 = M\left[X^2\right] - a^2 =$$

$$= x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + \ldots + x_n^2 p_n - a^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - a^2. \tag{11}$$

Среднее квадратическое отклонение $\sigma[X]$ определяется формулой

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]}. \tag{12}$$

Свойства дисперсии:
1) $D[c] = 0$, где $c = const$;
2) $D[cX] = c^2 D[X]$;
3) $D[X_1 + X_2] = D[X_1] + D[X_2]$, если X_1 и X_2 независимы.
Заметим, что размерности $M[X]$, $\sigma[X]$ совпадают с размерностью самой случайной величины, а размерность $D[X]$ равна квадрату размерности X.

Задание 13. Дан закон распределения дискретной случайной величины X.

x_i	-2	-1	1	2	3
p_i	0,15	0,25	p	0,15	0,2

Найти: 1) вероятность p; 2) функцию распределения $F(x)$ и построить ее график; 3) $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Решение: 1) Согласно свойству закона распределения сумма всех вероятностей равна единице. Имеем

$$0,15 + 0,25 + p + 0,15 + 0,2 = 1,$$

поэтому $p = 0,25$. Следовательно, закон распределения имеет вид:

x_i	-2	-1	1	2	3
p_i	0,15	0,25	0,25	0,15	0,2

2) По данному закону распределения составим функцию распределения, учитывая, что:
если $x \leqslant -2$, то $F(x) = P(X < x) = 0$;
если $-2 < x \leqslant -1$, то $F(x) = P(X < x) = 0,15$;
если $-1 < x \leqslant 1$, то $F(x) = P(X < x) = 0,15 + 0,25 = 0,4$;
если $1 < x \leqslant 2$, то $F(x) = P(X < x) = 0,15 + 0,25 + 0,25 = 0,65$;
если $2 < x \leqslant 3$, то $F(x) = P(X < x) = 0,15 + 0,25 + 0,25 + 0,15 = 0,8$;
если $x > 3$, то $F(x) = 0,15 + 0,25 + 0,25 + 0,12 + 0,2 = 1$.
Итак, функция распределения определяется следующей формулой.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant -2 \\ 0,15 & \text{при } -2 < x \leqslant -1 \\ 0,4 & \text{при } -1 < x \leqslant 1 \\ 0,65 & \text{при } 1 < x \leqslant 2 \\ 0,8 & \text{при } 2 < x \leqslant 3 \\ 1 & \text{при } x > 3 \end{cases}$$

График функции распределения представлен на рис. 11.
3) Найдем числовые характеристики заданной случайной величины.

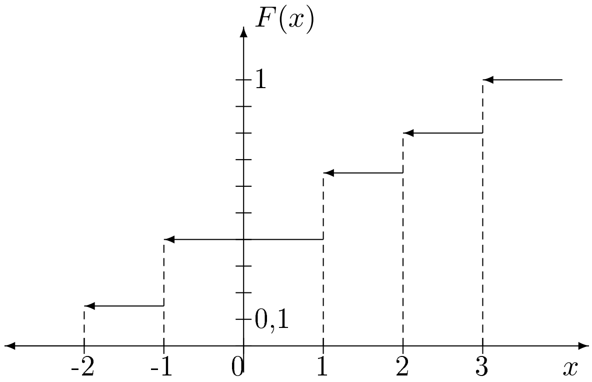

Рис. 11. График функции $F(x)$.

$$M(X) = \sum_{i=1}^{5} x_i p_i =$$
$$= -2 \cdot 0,15 + (-1) \cdot 0,25 + 1 \cdot 0,25 + 2 \cdot 0,15 + 3 \cdot 0,2 = 0,6,$$

$$D(X) = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 p_i - M^2(X) =$$
$$= (-2)^2 \cdot 0,15 + (-1)^2 \cdot 0,25 + 1^2 \cdot 0,25 + 2^2 \cdot 0,15 + 3^2 \cdot 0,2 - 0,6^2 =$$
$$= 0,6 + 0,25 + 0,25 + 0,6 + 1,8 - 0,36 = 3,14,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{3,14} = 1,77.$$

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс. Издательство Айрис-пресс, 2013.

2. Шипачёв В. С. Высшая математика. Учебное пособие для бакалавров. Издательство Юрайт, 2013.

3. Шипачёв В. С. Начала высшей математики. Издательство Лань, 2013.

4. Шипачёв В. С. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. Учебное пособие для бакалавров. Издательство Юрайт, 2013.

Содержание