





## Введение

Естественные науки предполагают, что материя существует в двух формах – *поле* и *вещество*. *Видами ее существования* служат *движение* и *взаимодействие* различных частей окружающего мира. Традиционно считается, что *единой универсальной мерой* разных типов движения и взаимодействия указанных частей является *энергия*, основной единицей измерения которой в системе СИ служит “джоуль” [Дж].

Характерным свойством *движения* является *скорость*. Энергию, непосредственно связанную с движением, называют *кинетической*. Ее оценивают с помощью произведения  $m \cdot w^2 / 2$ , где  $m$  – масса, а  $w$  – скорость исследуемого объекта. Характерным свойством *взаимодействия* частей материального мира служит их *относительное расположение*. Энергию, связанную с взаимодействием и положением тел, называют *потенциальной*.

В зависимости от частных видов движения и взаимодействия различают: *ядерную* энергию, связанную с взаимодействием отдельных частей атомных ядер; *потенциальную химическую* энергию, описывающую взаимодействие электронных облаков атомов, входящих в молекулы; *тепловую* энергию, связанную с хаотическим движением молекул; *механическую* энергию, описывающую относительное движение макроскопических тел; *электрическую* энергию, связанную с направленным потоком движения заряженных частиц и взаимодействием последних между собой.

В окружающем мире непрерывно протекают процессы, сопровождающиеся взаимной передачей энергии от одних объектов к другим, а также преобразованиями энергии из одних форм в другие. *Передача* и *получение* энергии каким-либо объектом количественно оцениваются с помощью мер, которые называют *работа* и *теплота*. Единицей их измерения тоже является “джоуль”.

*Работа* – количественная мера переданной или полученной при протекании некоего процесса энергии, имеющей *организованную* форму. Следует отметить, что любая система (часть окружающего мира) не обладает запасом работы. В системе есть только запас энергии. Таким образом, *работа* – *часть* переданной (полученной) от одного тела к другому *энергии*. Практически все виды передачи энергии можно оценить посредством *количества работы*. Исключение представляет *тепловая энергия* – неорганизованная, хаотическая форма энергии. В последнем случае количество переданной энергии оценивается с помощью понятия *теплота*. *Теплота* – количественная мера переданной или преобразованной части энергии *хаотического движения молекул*. Итак, организованные виды энергии при ее передаче описываются работой, а единственный неорганизованный – теплотой. Забегая вперед, необходимо подчеркнуть, что с физической точки зрения *все виды энергии* в итоге *должны превратиться в теплоту*. Как таковой запас теплоты в системе

(теле) отсутствует. Там содержится запас энергии хаотического движения молекул (на бытовом уровне его называют запасом тепловой энергии).

Вопросы энергетических процессов, протекающих в материальном мире, изучает наука *термодинамика*. По характеру она является *феноменологической*, т.е. все ее закономерности получены на основе и систематизации соответствующих *опытно-экспериментальных результатов*. Название ее связано с первичными явлениями преобразования теплоты в механическое движение, полученными человеком (*Н. Карно*). К настоящему времени термин “термодинамика” приобрел всеобъемлющее энергетическое значение. Таким образом, *термодинамика* – наука, изучающая закономерности *преобразования и передачи* различных (*всех*) видов энергии.

Обычно различают следующие разделы термодинамики.

*Физическая термодинамика* рассматривает общие закономерности преобразования энергии. *Техническая термодинамика* изучает закономерности преобразования теплоты в механическую работу. Она является основой *теории* всех видов тепловых *машин*, включая *авиационные двигатели*, и служит теоретической базой *теплотехники*, инженерной дисциплины, рассматривающей способы получения, преобразования, передачи и использования теплоты, а также принципы действия и рабочие процессы тепловых машин. *Химическая термодинамика* изучает тепловые процессы, которыми сопровождаются химические реакции.

*Термодинамика* построена на трех фундаментальных законах (так называемых “началах”). Принципиально их суть состоит в следующем.

*Первый закон* является фактически одной из форм *всеобщего закона сохранения энергии*. *Второй закон* носит ограниченный характер и справедлив только для изолированной части материального мира. Он указывает направление естественного протекания энергетических процессов: всякая система стремится к такому состоянию, чтобы ее потенциальная энергия была минимальной. Формулировка второго закона связана с понятием *энтропии*, т.е. количественной меры неопределенности (хаотичности) вероятностной системы, состоящей из бесконечно большого числа элементов и не описываемой детерминированными законами. *Второе начало термодинамики* гласит, что *энтропия не должна убывать*. Естественные процессы могут протекать только в сторону, сопровождающуюся *возрастанием* энтропии. При достижении максимума энтропии система приходит в равновесное, устойчивое состояние. Согласно *третьему закону* нельзя достичь *абсолютного нуля температуры*.

Следует еще раз подчеркнуть, что закономерности термодинамики получены не теоретическим, а экспериментальным путем. К термодинамике тесно примыкает *теплопередача* – наука, изучающая законы *передачи теплоты* в пространстве *без ее преобразования* в другие виды энергии. Учебная дисциплина *теплофизика* рассматривает задачи как термодинамики, так и теплопередачи.

## РАЗДЕЛ 1. ТЕРМОДИНАМИКА

### 1. Основные понятия и определения термодинамики

#### 1.1. Термодинамическая система

*Термодинамической системой* (ТДС) называют совокупность материальных тел, выделенных из окружающего мира с целью их исследования. Часть материального мира, остающаяся за пределами ТДС, принято называть *окружающей средой* (ОС). ТДС и ОС разделены границей, которая может быть как реальной, так и мысленной. Тело ТДС, являющееся носителем энергии и обеспечивающее преобразование последней, считают *рабочим телом ТДС*.

В процессе преобразования и передачи энергии ТДС и ОС взаимодействуют, причем они могут обмениваться и энергией, и веществом. ТДС, не обменивающаяся с ОС ни веществом, ни энергией, является *полностью изолированной*. ТДС, обменивающаяся с ОС только веществом, называют *открытой* (в противном случае – *закрытой*). Если ТДС не обменивается с ОС энергией, ее считают *адиабатной*.

#### 1.2. Термодинамическое состояние системы

*Совокупность уровней физических свойств ТДС* в рассматриваемый момент времени называют *термодинамическим состоянием* системы. В процессе изменения состояния ТДС меняются и уровни ее физических свойств. Каждый из уровней принято оценивать значением исследуемого параметра (давления, температуры и т.д.).

*Совокупность термодинамических параметров*, полностью определяющая состояние ТДС, называется *совокупностью независимых параметров*. Остальные параметры относятся к группе зависимых. Практически каждый физический параметр (в зависимости от особенностей решаемой задачи) может быть отнесен как к независимым, так и к зависимым.

Чаще всего в качестве независимых выбирают наиболее простые параметры, легко измеряемые опытным путем. В технической термодинамике за независимые параметры принимают обычно давление  $p$ , температуру  $T$ , удельный объем  $v$ , плотность  $\rho$ , массу  $m$  и количество вещества  $n$ .

Необходимо отметить, что термодинамика изучает только *равновесные* ТДС, т.е. такие, в которых *значения физических параметров* по всему объему *одинаковы* (изменение состояния происходит мгновенно).

#### 1.3. Основные термодинамические параметры

*Давлением* называют физический параметр, характеризующий *силовое воздействие рабочего тела* (хаотически движущихся молекул) на границу ТДС. Основной единицей измерения давления в системе СИ служит “*паскаль*” [Па].

Иногда используется единица измерения  $[КГс/см^2]$  или “техническая атмосфера”. При проведении исследований необходимо различать такие типы (виды) давления, как абсолютное  $p_{аб}$ , манометрическое  $p_m$ , барометрическое  $p_б$  и вакуумированное  $p_v$  (рис. 1).

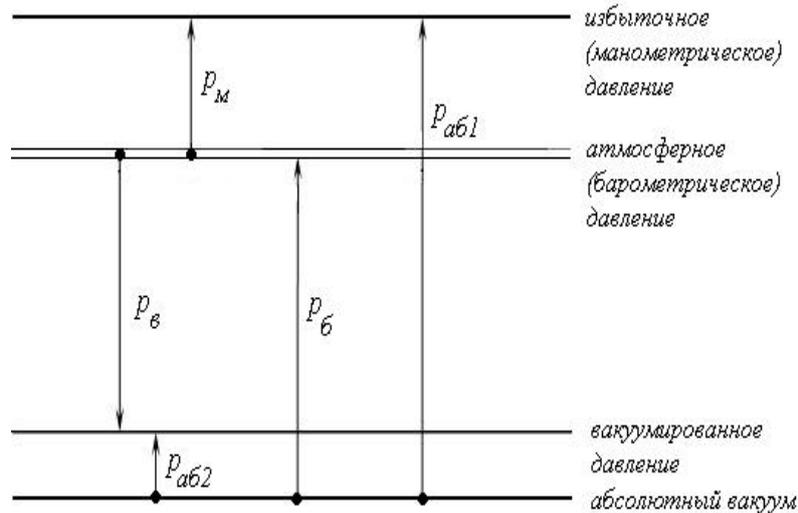


Рис. 1. Схема для определения абсолютного давления при работе на расширение ( $p_{аб1}$ ) и разрежение ( $p_{аб2}$ )

Принципиальная схема определения манометрического (избыточного) давления, измеряемого с помощью манометров, и барометрического (атмосферного) давления, измеряемого барометрами, ясна из рис. 2.

В формулах, выражающих закономерности термодинамики, используется только абсолютное давление. Как видно из рис. 1, при работе на расширение оно составляет

$$p_{аб} = p_б + p_m,$$

а при работе на разрежение

$$p_{аб} = p_б - p_v.$$

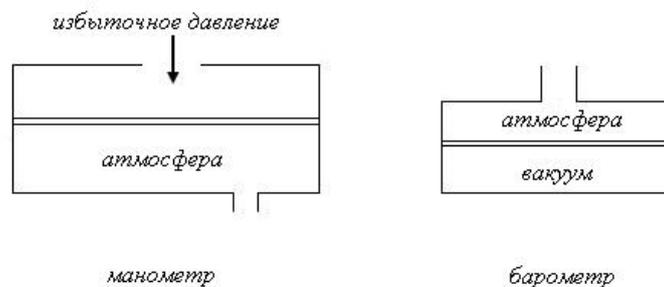


Рис. 2. Принципы действия манометров и барометров

При исследовании открытых ТДС следует различать так же *статическое* и *полное давление* потока рабочего тела. Статическое равно давлению, действующему на границу ТДС, параллельную вектору скорости потока. Полное включает динамическую составляющую, равную давлению, получаемому при торможении движущегося потока.

*Температура* характеризует степень нагретости тела. Этот параметр определяет кинематическую энергию движения молекул и фактически является ее косвенной мерой.

Единицами измерения температуры служат “градусы Кельвина” [K] и “Цельсия” [°C], численно равные между собой. В расчетных формулах термодинамики используется *только абсолютная температура* T, измеряемая в “градусах Кельвина” (рис. 3).

*Удельный объем* представляет собой отношение объема тела к его массе. Единицей измерения удельного объема в системе СИ служит [м<sup>3</sup>/кг].

*Плотность* – величина, обратная удельному объему, т.е. отношение массы тела к его объему,  $\rho = 1/v$ . Основной единицей измерения плотности является [кг/м<sup>3</sup>].

Единицей *количества вещества* n служит [моль], равный числу элементарных частиц вещества (атомов или молекул), когда оно соответствует *числу Авогадро*, т.е.  $6 \cdot 10^{23}$  частиц.

*Молярным объемом* V<sub>μ</sub> называют отношение объема рабочего тела к числу его молей. Единицей измерения молярного объема является [м<sup>3</sup>/моль].

*Атомной единицей массы* считают массу 1/12 части атома углерода. Единицей измерения ее служит [кг].

*Молекулярная масса* M представляет собой массу молекулы тела, выраженную в атомных единицах массы, и является величиной безразмерной.

*Молярная масса* μ – масса одного моля вещества. Единицей ее измерения служит [кг/моль]. Т.к. эта единица мала, чаще используют кратную ей единицу [кг/кмоль]. Молярная масса определяется через молекулярную соотношением –

$$M = \mu, \text{ [кг/кмоль].}$$

#### 1.4. Уравнение состояния рабочего тела

В качестве рабочих тел технологических машин могут использоваться газообразные, жидкие и твердые. В теплотехнических машинах, к которым относятся авиационные двигатели (поршневые, газотурбинные и др.), рабочим телом, как правило, служат газообразные смеси (например, воздух и продукты сгорания химических топлив). В ряде случаев (двигатели космических летательных аппаратов) в качестве рабочего тела применяется плазма, ионные потоки и т.д.

Различают так называемые “идеальные” и реальные рабочие тела. *Идеальным* называют такое *рабочее тело* (РТ), для которого не учитываются

силовое взаимодействие между его молекулами и объем последних, принимаемый равным нулю. При несоблюдении указанных условий РТ считается реальным.

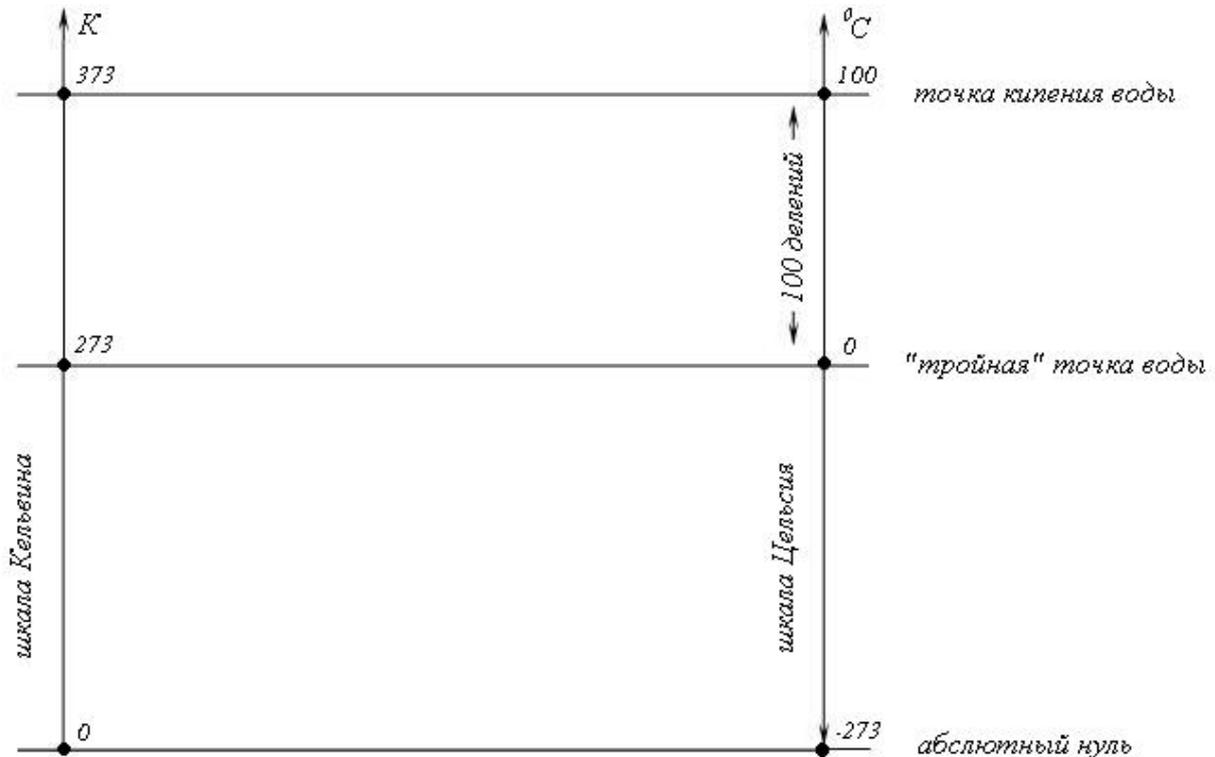


Рис. 3. Шкалы Кельвина и Цельсия (в "тройной" точке вода может одновременно существовать в трех фазах – твердой, жидкой и газообразной)

При расчетах большинства тепловых машин РТ можно полагать идеальным без существенной погрешности, т.к. и объем молекул, и силовое взаимодействие между ними пренебрежимо малы. Исключение составляют пары воды. Использование понятия идеального РТ значительно упрощает математические модели процессов, протекающих в тепловых машинах. Допущение об "идеальности" РТ принимается при исследовании большинства реактивных двигателей и двигателей внутреннего сгорания.

Из физики известно уравнение состояния идеального газа, полученное экспериментальным путем

$$p \cdot V_{\mu} / T = \text{const},$$

где  $p$  – давление;  $V_{\mu}$  – молярный объем;  $T$  – абсолютная температура.

Различают понятия *универсальной газовой постоянной*  $R_{\mu}$  и *газовой постоянной*  $R$ . Первая относится к единице количества вещества "киломолю", а вторая – к единице массы "килограмму".

Универсальная газовая постоянная является *единой* для всех видов РТ, как идеальных, так и реальных газов, жидкостей и твердых тел. Ее значение можно

вычислить, подставив в уравнение состояния *нормальные условия*, т.е.  $p = 1,013 \cdot 10^5$  [Па],  $T = 273$  [К],  $V_\mu = 22,4$  [м<sup>3</sup>/кмоль] (последнее значение установлено опытным путем). В результате получим

$$p \cdot V_\mu / T = \text{const} = R_\mu = 1,013 \cdot 10^5 \cdot 22,4 / 273 = 8,314, [\text{Дж}/(\text{кмоль} \cdot \text{К})]$$

Таким образом, уравнение состояния представимо в виде

$$p \cdot V_\mu / T = R_\mu = 8,314, [\text{Дж}/(\text{кмоль} \cdot \text{К})].$$

Газовая постоянная  $R$  выводится из универсальной  $R_\mu$  с помощью соотношения

$$R = R_\mu / \mu,$$

где  $\mu$  – молярная масса РТ в [кг/кмоль]. Размерностью  $R$ , что следует из последней формулы, служит [Дж/(кг·К)].

Для каждого РТ газовая постоянная имеет свое значение, поскольку зависит от молярной массы. Таким образом,  $R$  отражает природу РТ.

Физический смысл  $R_\mu$  и  $R$  достаточно прост. Они соответствуют работе, которую может совершить единица РТ (“киломоль”, “килограмм”) при изменении его температуры на 1 [К].

Основными единицами измерения в термодинамике служат [м/с], [кг], [К]. С учетом размерностей уравнение состояния идеального РТ можно записать в виде

$$p \cdot v = R \cdot T,$$

где  $[p] = [\text{Па}]$ ;  $[v] = [\text{м}^3/\text{кг}]$ ;  $[R] = [\text{Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})]$ ;  $[T] = [\text{К}]$ .

Необходимо подчеркнуть, что *все* термодинамические процессы обсчитываются *только* в приведенных здесь единицах. Применение при расчетах кратных единиц недопустимо.

Использование последней формулы ориентировано на исследование *не всей массы* РТ, а *лишь* ее единицы, “килограмма”. Для получения характеристик всего РТ, когда такое необходимо, нужно домножить результаты на общее количество [кг]. Тогда удельный объем  $v$  перейдет в полный  $V$  [м<sup>3</sup>].

Уравнения состояния для реальных рабочих тел обычно строятся путем введения поправок на объем и взаимодействие молекул в формулу, приведенную выше для идеального РТ. Например, для водяного пара широко используется уравнение Ван-дер-Ваальса

$$(p - a/v^2) \cdot (v + b) = RT.$$

Разработано достаточно много подобных уравнений для газов, жидкостей и твердых тел. Форма их может быть несколько отличной от уравнения Ван-дер-Ваальса. При решении чисто теоретических задач часто используется так называемое “верияльное” (возможное) уравнение состояния РТ

$$p \cdot v / R \cdot T = z \quad \text{или} \quad p \cdot v = z \cdot R \cdot T.$$

Здесь  $z = 1 + B \cdot p + C \cdot p^2 + \dots$  – полином, учитывающий взаимодействие одноатомных, двухатомных и т.д. молекул, а также их объем. Очевидно, что для идеального РТ  $z = 1$ .

### 1.5. Понятие о термодинамическом процессе

*Термодинамическим процессом* системы называют явление перехода РТ из начального равновесного состояния в конечное равновесное состояние через бесконечное множество промежуточных равновесных состояний. Таким образом, любой процесс можно описать графически через его параметры, изобразив его, например, в координатах  $\langle v, p \rangle$  (так называемая “рабочая диаграмма”).

При исследованиях необходимо знать, по какому пути проходит процесс (рис. 4). Выяснив это, можно построить его график, линия которого фактически описывает процесс. По своей сути она является совокупностью состояний, пройденных ТДС.

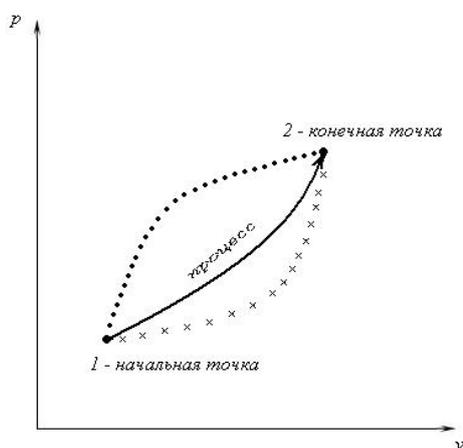


Рис. 4. Примеры рабочей диаграммы

Техническая термодинамика изучает особые виды процессов – *политропные*. Все такие процессы можно описать уравнением вида

$$p \cdot v^n = \text{const},$$

где  $p$  – давление,  $v$  – удельный объем. В развернутой форме уравнение политропного процесса записывается как  $p_i \cdot v_i^n = p_j \cdot v_j^n$ .

Каждый процесс характеризуется своим значением *коэффициента политропы*  $n$ . Для частных видов процессов этот коэффициент равен:

- изохорный процесс (рис. 5, а), протекающий при постоянном объеме,  $\rightarrow n = \pm \infty$ ;
  - изобарный процесс (рис. 5, б), протекающий при постоянном давлении,  $\rightarrow n = 0$ ;
  - изотермический процесс (рис. 5, в), протекающий при постоянной температуре,  $\rightarrow n = 1$ ;
  - адиабатный процесс, протекающий без обмена с ОС энергией,  $\rightarrow n = \gamma$ ,
- где  $\gamma$  – коэффициент Пуассона, в литературе иногда обозначаемый также  $\alpha$  или  $k$ . Коэффициент Пуассона представляет собой отношение

$$\gamma = c_p / c_v,$$

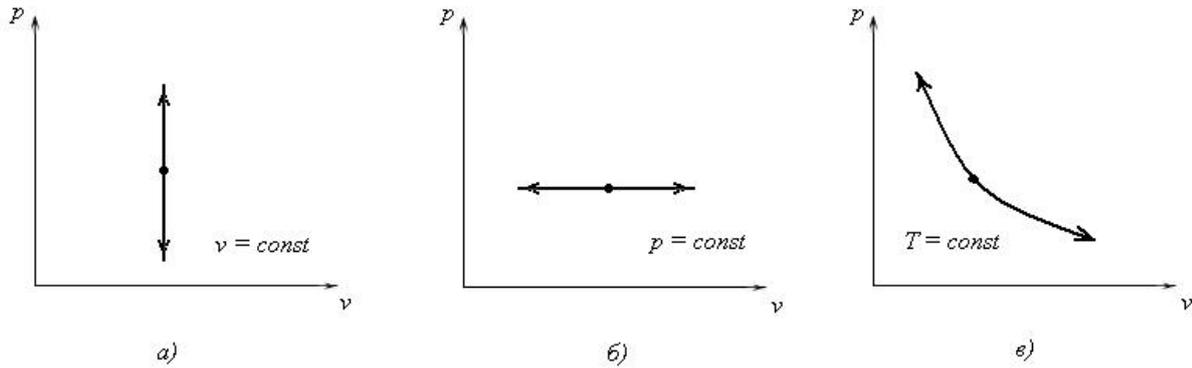


Рис. 5. Изохора (а), изобара (б) и изотерма (в) в координатах  $\langle v, p \rangle$

где  $c_p$  – теплоемкость тела при постоянном давлении, а  $c_v$  – теплоемкость при постоянном объеме (изобарная и изохорная теплоемкости соответственно).

*Теплоемкостью* называют количество теплоты, необходимое для нагревания единицы массы или объема тела на 1 [K]. Теплоемкость измеряют в [Дж/(кг·K)]. Поскольку в изобарном процессе теплота расходуется на нагрев тела и совершение им работы, а в изохорном – только на нагрев, очевидно, что

$$c_p > c_v, \gamma > 1.$$

Из уравнения Майера известно, что

$$c_p - c_v = R.$$

Итак, *политропным* называют такой *равновесный процесс*, который описывается уравнением  $p \cdot v^n = \text{const}$ , где  $n$  – коэффициент с постоянным значением для каждого исследуемого процесса, изменяющийся в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$

$$-\infty < n < +\infty.$$

Положение  $n = \text{const}$  фактически идентично тому, что теплоемкость любого изучаемого процесса так же является постоянной величиной, т.е.  $c = \text{const}$ . В связи с этим можно заключить, что *политропным* называется процесс, в котором  $PT$  характеризуется *постоянным значением теплоемкости*. На практике, однако, последнее утверждение не реализуется. Поэтому в прикладных расчетах прибегают к так называемым “средним значениям теплоемкости”  $P_T$  в рассматриваемых процессах.

## 2. Энергия термодинамического рабочего тела

### 2.1. Полная энергия рабочего тела

Коротко рассмотрим основные составляющие полной энергии РТ  $E_{\text{П}}$ . Укрупнено последняя включает внутреннюю и внешнюю энергии РТ.

Первая из них состоит из ядерной энергии  $E_{\text{я}}$ , химической энергии  $E_{\text{х}}$  и энергии молекул  $U$ . Вторая включает в себя кинетическую энергию  $E_{\text{к}}$ , потенциальную энергию гравитационного поля Земли  $E_{\text{р}}$ , энергию проталкивания  $E_{\text{пр}}$ , техническую работу  $L$  и т.д.

## 2.2. Внутренняя энергия термодинамической системы

Внутренняя энергия РТ определяется непосредственно его внутренней структурой. При этом ядерная энергия  $E_{\text{я}}$  характеризуется взаимодействием частей атомных ядер, химическая энергия  $E_{\text{х}}$  – взаимодействием электронных облаков или электрически заряженных частей молекулы. Особую роль играет третья составляющая внутренней энергии – *энергия взаимодействия и хаотического движения* молекул РТ, обозначаемая  $U$ .

При переходе РТ в термодинамическом процессе из начального состояния в конечное в общем случае изменяются количества составных частей внутренней энергии. Техническая термодинамика исследует только те явления, в которых изменяется лишь энергия взаимодействия и хаотического движения молекул  $U$ , а  $\Delta E_{\text{я}} = \Delta E_{\text{х}} \equiv 0$ . Таким образом, изменение энергии ТДС можно принять в виде

$$\Delta E_{\text{внут}} = U_2 - U_1 = \Delta U.$$

В технической термодинамике обычно рассчитывается не абсолютное значение внутренней энергии, связанное с определением, помимо  $U$ , еще и  $E_{\text{я}}$ ,  $E_{\text{х}}$ , а изменение  $E_{\text{внут}}$ ,  $\Delta E_{\text{внут}}$ , принимаемое равным  $\Delta U$ . Вызвано это тем, что практический интерес представляет то количество энергии, которое выделено (поглощено) при протекании процесса.

Энергия хаотического движения молекул включает три составляющие: *поступательного, вращательного и колебательного* движения молекул. Эта энергия по характеру является кинетической и зависит от средней скорости движения молекул, что в свою очередь определяется *температурой* тела. Именно поэтому рассматриваемую часть энергии на бытовом уровне называют тепловой.

Энергия взаимодействия молекул определяется их относительным положением, которое является функцией давления.

В общем случае для реального РТ справедливо

$$U = f(T, p).$$

Как уже отмечалось, в системе СИ основной единицей измерения энергии служит “джоуль” [Дж]. С термодинамической точки зрения удобнее исследовать не *все* РТ, а *единицу* его массы, [кг], т.е. оперировать *удельными характеристиками*. Удельную внутреннюю энергию обозначают  $u$ , а единицей ее измерения является [Дж/кг].

Вообще говоря, в технической термодинамике традиционно принято значения параметров всей массы РТ обозначать большими латинскими буквами, а удельные значения параметров, отнесенные к единице массы, – малыми. Если необходимо, переход от удельного значения параметра к полному осуществляется путем умножения первого на массу РТ  $m$ . Например, для внутренней энергии

$$U = m \cdot u.$$

При этом РТ по массе и объему полагается *однородным*.

Кроме того, в технической термодинамике большинство рассматриваемых задач *идеализируется*. В частности, используется понятие *идеального* РТ, молекулы которого не имеют объема, причем взаимодействие между ними, исключая абсолютно упругие соударения, отсутствует.

Для идеального РТ внутренняя энергия состоит только из энергии хаотического движения молекул и является функцией одной температуры

$$u = f(T).$$

### 2.3. Составляющие внешней энергии термодинамической системы

К указанным в заголовке темы составляющим относятся части полной энергии, *целиком определяемые условиями ОС*.

Главными составляющими внешней энергии ТДС являются:

- *кинетическая* энергия ТДС

$$E_k = m \cdot w^2 / 2 \text{ [Дж]}; \quad e_k = w^2 / 2 \text{ [Дж/кг]};$$

- *потенциальная* энергия ТДС в гравитационном поле Земли

$$E_p = m \cdot g \cdot h \text{ [Дж]}; \quad e_p = g \cdot h \text{ [Дж/кг]},$$

где  $g$  – ускорение свободного падения,  $g = 9,8 \text{ [м/с}^2\text{]}$ ;  $h$  – высота, [м];

- *потенциальная* энергия ТДС в поле давления

$E_{пр}$ . Определяется она следующим образом.

Рассмотрим сужающийся канал, через который проталкивается газ (рис. 6). В этом канале

выберем произвольное сечение площадью  $f$ .

Зафиксируем там текущие параметры потока

газа: скорость проталкивания  $w$ , давление газа

$p$ , плотность газа  $\rho$  и его удельный объем

$$v = 1/\rho.$$



Рис. 6. Схема для определения энергии в поле давления

Определим выражение для работы, совершаемой над газом в единицу времени относительно выбранного сечения. Ясно, что эта работа соответствует мощности потока газа в сечении

$$N = f \cdot w \cdot p \text{ [Дж/с]}.$$

Здесь произведение  $[f \cdot w] = [m^3/c]$  представляет собой так называемую “объемную скорость”. Ее величина говорит о том, сколько кубических метров газа прошло через сечение в единицу времени.

Фактически получена работа, совершенная внешней средой для проталкивания газа через сечение. Поэтому рассматриваемый вид энергии ТДС часто называют *энергией проталкивания* и обозначают  $E_{пр}$ . Удельную работу можно вычислить с помощью уравнения неразрывности потока

$$m' = f \cdot w \cdot \rho = f \cdot w / v, [кг / с],$$

где  $\rho = 1/v$ , а  $m'$  – *массовый расход* газа. Это уравнение характеризует *расход* РТ в единицу времени через произвольное сечение.

Чтобы определить искомую энергию в поле давления, необходимо взять отношение мощности к массовому расходу

$$e_{пр} = N/m' = (f \cdot w \cdot p / f \cdot w) \cdot v = p \cdot v, [Дж/кг].$$

Таким образом,

$$e_{пр} = p \cdot v = p/\rho, [Дж/кг].$$

Очевидно, что

$$E_{пр} = m \cdot e_{пр} = m \cdot p \cdot v = m \cdot p/\rho, [Дж].$$

#### 2.4. Энтальпия рабочего тела термодинамической системы

РТ ТДС характеризуется как внутренней, так и внешней составляющими энергии. Выше было показано, что внутренняя энергия является функцией параметров состояния ТДС (температуры  $T$  и давления  $p$ ). Таким образом, сама внутренняя энергия представляет собой *функцию состояния*. Это означает, что *не важно, каким именно путем* РТ попало из начального состояния 1 в конечное 2. В каждом из этих состояний значение внутренней энергии РТ и будет строго определенным, т.к. там строго определены значения температуры  $T$  и давления  $p$ . *Функция состояния не зависит от пути.*

Из внешних составляющих энергии РТ подобным свойством обладает энергия проталкивания, которая зависит от давления  $p$  и удельного объема  $v$

$$e_{пр} = f(p, v).$$

Таким образом, энергия проталкивания тоже является функцией состояния.

В прикладных расчетах внутреннюю энергию и энергию проталкивания обычно объединяют, а их сумму называют *энтальпией РТ (ТДС)*

$$i = u + p \cdot v \quad [Дж/кг]; \quad I = U + p \cdot V, [Дж],$$

где  $U = u \cdot m$ ; а объем  $V = v \cdot m$ .

Внутренняя энергия и энергия проталкивания имеют различную физическую природу. Поэтому по меньшей мере *некорректно* называть

энтальпию *теплосодержанием* РТ. К сожалению, подобное утверждение часто встречается в справочной и учебной литературе. Нужно помнить, что теплосодержание фактически характеризуется только внутренней энергией РТ.

*Энтальпия*, как внутренняя энергия и энергия проталкивания, является *функцией состояния*, т.е. для ее определения требуется знать лишь параметры состояния РТ. В термодинамических расчетах абсолютное значение энтальпии (как и внутренней энергии) не вычисляют. Находят только ее изменение  $\Delta i$  при переходе РТ (ТДС) из начального состояния 1 в конечное 2

$$\Delta i = i_2 - i_1, [\text{Дж/кг}].$$

## 2.5. Формы передачи энергии в явлениях и процессах

Термодинамические процессы характеризуются передачей и преобразованием энергии. Существуют две основные формы передачи энергии. Последнюю можно передать *организованно*. Такой вид передачи называют *работой*. Работу принято обозначать  $L$  (удельную –  $l$ ). Единицей ее измерения в системе СИ служит  $[\text{Дж}]$  (удельной –  $[\text{Дж/кг}]$ ). Кроме того, энергия часто передается в *хаотической* форме. Этот вид передачи называют *теплотой*. Теплоту принято обозначать  $Q$  (удельную –  $q$ ). Единицей ее измерения также является  $[\text{Дж}]$  (удельной –  $[\text{Дж/кг}]$ ).

Любой вид работы (механической, химической, электрической) может так или иначе быть полностью превращен в теплоту и рассеян в мировом пространстве. Что касается теплоты, то ее *нельзя* целиком преобразовать в какой-либо вид работы.

## 2.6. Первый закон термодинамики

Как уже отмечалось, первый закон термодинамики представляет собой специфическую форму фундаментального закона сохранения энергии. При математической записи первого закона слева от знака равенства ставится теплота процесса, а справа – внутренняя энергия и все виды работ.

Рассмотрим ТДС из цилиндра с поршнем, определяющих ее рабочий объем (рис. 7). Пусть в конечном положении 2 РТ характеризуется внутренней энергией  $U_2$ , а в начальном –  $U_1$ . Изменение внутренней энергии ТДС произойдет в формах обмена теплотой с ОС и совершения системой работы  $L$  над ОС. Очевидно, что

$$\Delta U = Q - L, [\text{Дж}]$$

(к ТДС было подведено тепло).

Необходимо указать, что *положительной теплотой* считается *подводимая* к РТ (тело нагревается). Положительной работой полагается *работа тела над ОС* (тело расширяется, например, толкая поршень, как показано на рис. 7).

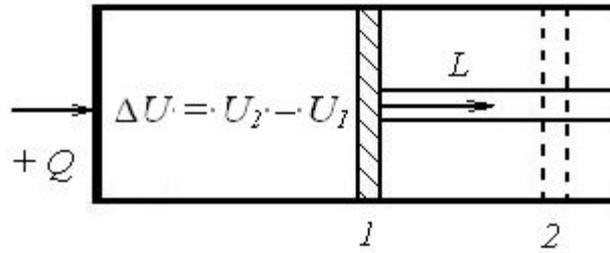


Рис. 7. Схема, поясняющая вывод первого закона термодинамики

Из последней формулы можно получить математическую запись первого закона термодинамики

$$Q = \Delta U + L.$$

Классическая формулировка этого закона такова: *теплота, подводимая к системе, расходуется на изменение внутренней энергии тела и совершение работы над окружающей средой.*

В удельных величинах первый закон термодинамики имеет вид

$$q = \Delta u + l, [\text{Дж/кг}]$$

а в бесконечно малых (элементарное выражение)

$$dq = du + dl, [\text{Дж/кг}].$$

Последняя форма записи закона является *основной* в технической термодинамике.

Далее будет показано, что, в отличие от внутренней энергии, теплота и работа представляют собой не функции состояния, а *функции процесса*. Чтобы их рассчитывать, *необходимо знать* ход термодинамического процесса из начального положения в конечное. В связи с этим часто первый закон термодинамики в бесконечно малых величинах записывают не в полных дифференциалах, а в частных, т.е.

$$\partial q = du + \partial l.$$

### 3. Виды работ. Обобщенное выражение работы

#### 3.1. Комментарий к понятию “работа”

Работа является количественной мерой энергии, переданной или полученной РТ в процессе взаимодействия с ОС. Следует подчеркнуть, что здесь идет речь об организованной форме передачи энергии, которая может и преобразовываться РТ в ходе термодинамического процесса.

### 3.2. Работа перемещения тела

В элементарных величинах уравнение работы перемещения тела имеет вид

$$dL = P \cdot ds, [Дж],$$

где  $P$  – сила, действующая на тело, [ $H$ ];  $ds$  – элементарное перемещение тела под действием силы, [ $м$ ].

Графически эта работа выражается выделенным на рис. 8 элементом под кривой  $f = P(s)$ , построенной в координатах <путь, сила>. Полная работа  $L$  определяется площадью фигуры, ограниченной осью  $s$ , графиком  $f = P(s)$  и двумя абсциссами –  $1_s$  и  $2_s$ , т.е.

$$\int_0^{L_k} dL = \int_{s_{нач.}}^{s_{кон}} P \cdot ds.$$

Отсюда

$$L = \int_{s_{нач.}}^{s_{кон}} P \cdot ds, [Дж].$$

Записанное выражение работы в технике является основным. Часто другие виды работ сводят к рассмотренному. График, приведенный на рис. 8, показывает, что работа интерпретируется площадью под кривой  $f = P(s)$ . Таким образом, для расчета работы нужно знать функцию  $f$ , поскольку работа по перемещению тела из начального положения в конечное может быть осуществлена различными путями. Если при этом площадь под кривой окажется меньшей, то процесс совершения работы будет экономичней. Значит, работа является функцией процесса, а не состояния.

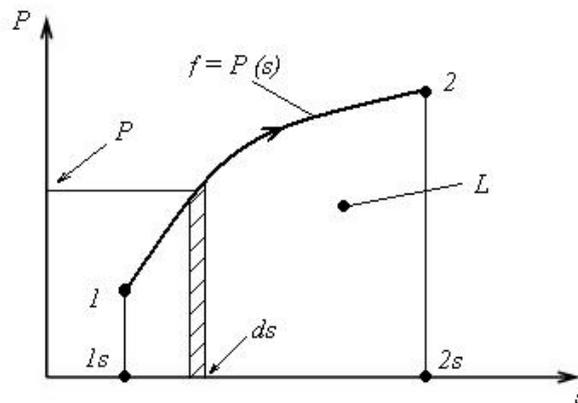


Рис. 8. Определение работы перемещения тела: 1 – начальное положение тела; 2 – конечное;  $ds$  – бесконечно малый путь

### 3.3. Работа изменения объема рабочего тела

Рассмотрев систему “цилиндр-поршень-рабочее тело” (рис. 9), можно получить соотношение для работы изменения объема РТ. Пусть давление внутри цилиндра равно  $p$ , а площадь поршня составляет  $f$ . Отметим на схеме (рис.9) начальное и конечное положения поршня. РТ (газ), расширяясь, совершает над поршнем работу, продвигая его на  $ds$ . Тогда элементарная работа расширения будет равна

$$dL = P \cdot ds = p \cdot f \cdot ds,$$

где произведение  $f \cdot ds$  представляет собой элементарный объем, на который увеличился объем РТ. Следовательно

$$dL = p \cdot dV, \text{ [Дж]}.$$

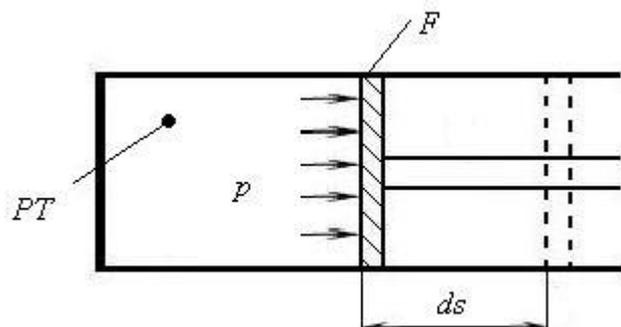


Рис. 9. Система “цилиндр-поршень-рабочее тело”

В элементарной записи это соотношение имеет вид –

$$dl = p \cdot dv, \text{ [Дж/кг]}.$$

Полученная формула является выражением основного вида работы в технической термодинамике, т.к. большинство тепловых машин использует работу расширения газа.

### 3.4. Рабочая диаграмма термодинамического процесса

Диаграмма, указанная в названии темы, строится в системе координат  $\langle v, p \rangle$ . Для ее изображения используется выражение, описывающее работу расширения газа. Выше был получен результат

$$dl = p \cdot dv.$$

Отсюда следует, что

$$l = f(p, v).$$

Из диаграммы, приведенной на рис. 10, ясно, что общая удельная работа определяется интегрированием выражения для  $dl$  в пределах  $v_H, v_K$

$$\int_0^l dl = \int_{v_H}^{v_K} p \cdot dv = \int_{v_H}^{v_K} p(v) \cdot dv.$$

Рабочая диаграмма применяется для наглядного представления количества работы в изучаемом термодинамическом процессе. *Любой*

политропный процесс можно графически интерпретировать в координатах  $\langle v, p \rangle$ .

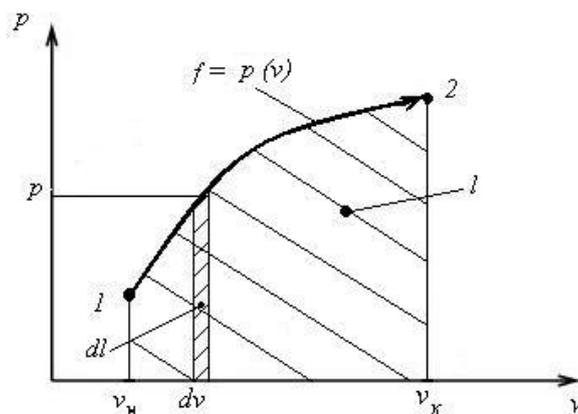


Рис. 10. Пример рабочей диаграммы термодинамического процесса

### 3.5. Выражение первого закона термодинамики для работы расширения газа

Учитывая равенство для элементарной работы расширения газа

$$dl = p \cdot dv,$$

первый закон термодинамики легко можно записать в виде

$$dq = du + p \cdot dv.$$

Необходимо отметить, что последнее уравнение в соответствующих эквивалентных формах применимо для количественных оценок *любых энергетических процессов*.

### 3.6. Работа изменения давления (располагаемая работа рабочего тела)

Работа изменения давления РТ непосредственно связана с энергией проталкивания. Элементарное выражение указанной работы записывается в виде

$$dl_p = -v \cdot dp, [Дж/кг].$$

Нужно подчеркнуть, что здесь знак “минус” соответствует *положительному значению работы*. Действительно, этот знак говорит об уменьшении давления РТ, что эквивалентно увеличению его объема; таким образом, расширяясь, РТ совершает работу над ОС. Очевидно (рис. 11), что

$$l_p = \int_{p_n}^{p_k} v \cdot dp, [Дж/кг]$$

### 3.7. Модифицированный вид первого закона термодинамики

При исследовании проталкиваемого РТ удобнее использовать не основной вид первого закона термодинамики

$$dq = du + p \cdot dv,$$

а модифицированный. Чтобы его получить, нужно найти дифференциал энергии проталкивания

$$e_{\text{пр}} = p \cdot v.$$

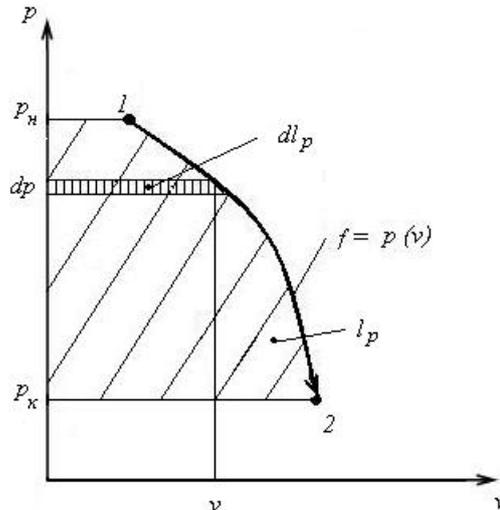


Рис. 11. Иллюстрация к выводу формулы для располагаемой работы РТ

Этот дифференциал равен

$$d(p \cdot v) = p \cdot dv + v \cdot dp.$$

Последнее уравнение можно разрешить относительно работы расширения газа

$$p \cdot dv = d(p \cdot v) - v \cdot dp.$$

Подставив найденный ответ в уравнение для первого закона термодинамики, получим

$$dq = du + d(p \cdot v) - v \cdot dp.$$

Известно, что энтальпия рабочего тела равна

$$i = u + p \cdot v.$$

Тогда

$$dq = d(u + p \cdot v) - v \cdot dp$$

и окончательно

$$dq = di - v \cdot dp, [\text{Дж/кг}].$$

Естественно, что оба уравнения, основное и модифицированное, описывающие первый закон термодинамики, равноценны. Но требуется отметить, что с методической точки зрения первое удобнее применять к *неподвижному газу* (РТ), а второе – к *подвижному*.

Вспомним, что элементарное выражение положительной располагаемой работы имеет вид

$$dl_p = -v \cdot dp.$$

Таким образом, модифицированное уравнение первого закона термодинамики можно преобразовать в форму

$$dq = di + dl_p.$$

### 3.8. Примеры выражения элементарных работ других видов

#### 1. Работа гравитационного поля Земли.

Для потенциальной энергии тела в этом поле справедливо (см. выше)

$$e_p = g \cdot h,$$

где  $g = \text{const}$ . Поэтому элементарная работа гравитационного поля составляет

$$dl_p = d(g \cdot h) = g \cdot dh.$$

#### 2. Работа электростатического поля.

Рассмотрим работу электростатического поля напряженностью  $E$  по перемещению электрического заряда  $q = \text{const}$ . Со стороны поля на постоянный заряд по определению действует сила, равная  $q \cdot E$ . Отсюда для рассматриваемого вида элементарной работы легко получить

$$dl_{\text{эл}} = d(q \cdot E) = q \cdot dE.$$

#### 3. Элементарная работа химической реакции выражается формулой

$$dl_x = \mu \cdot dn,$$

где  $\mu$  – молярная масса вещества,  $n$  – количество вещества.

#### 4. Обобщенное выражение любого вида работы.

Рассмотренные примеры позволяют записать *обобщенное уравнение* для *любого вида работы*. Чтобы это сделать, необходимо ввести понятие обобщенных координат (абсциссы  $x$  и ординаты  $Y$ ). Тогда для элементарной работы справедливо

$$dl = Y \cdot dx.$$

## 4. Теплота и методы ее расчета

### 4.1. Основные определения

Напомним, что *теплотой* называют *количественную меру передачи* (получения, преобразования) *энергии хаотического движения молекул* рабочего тела. Теплота представляет собой функцию процесса, а не состояния, единицами же ее измерения служат [Дж] и [Дж/кг].

### 4.2. Сведения о методах расчета теплоты

В технической термодинамике используются три принципиальных подхода для расчета теплоты термодинамических процессов.

Если изучаемый процесс не является изотермическим ( $T \neq \text{const}$ ), расчеты ведутся на основе понятия “теплоемкость”.

В случае изотермического процесса необходимо применять так называемые “скрытые теплоты фазовых превращений” и теплоты химических реакций.

Чаще используется *универсальный* метод, который основан на применении понятия “*энтропия*”.

### 4.3. Теплоемкость и удельная теплоемкость тела

Под *теплоемкостью* понимают *способность тела при нагреве или охлаждении изменять температуру*. Теплоемкость оценивается отношением количества подведенной (отданной) теплоты к изменению температуры, которым сопровождается процесс. Обозначают теплоемкость отношением  $Q/\Delta T$ , а единицей ее измерения служит [Дж/К].

*Удельной теплоемкостью* тела называют количество теплоты, которое необходимо подвести к единице массы  $P_T$ , чтобы повысить температуру тела на один градус. Удельную теплоемкость обозначают  $c$ , а измеряют в [Дж/(кг·К)]. Нужно отметить, что в справочной литературе удельную теплоемкость часто называют просто теплоемкостью. Это, конечно, некорректно.

### 4.4. Средняя и истинная удельная теплоемкости

*Средняя удельная теплоемкость* определяется выражением

$$\bar{c} = q/\Delta T, [\text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})]$$

*Истинная удельная теплоемкость*  $P_T$  равна

$$c = dq/dT, [\text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})]$$

и является *переменной* величиной. Она зависит от текущей температуры тела, а также от характера процесса передачи-получения теплоты, т.е. от того,

протекает он при постоянном давлении или постоянном объеме. Обычно зависимость удельной теплоемкости от температуры принимают в форме полинома

$$c = a + b \cdot T + c \cdot T^2 + \dots$$

где коэффициенты  $a, b, c$ , определяются экспериментальным путем. В простейшем случае такая зависимость является линейной (рис. 12)

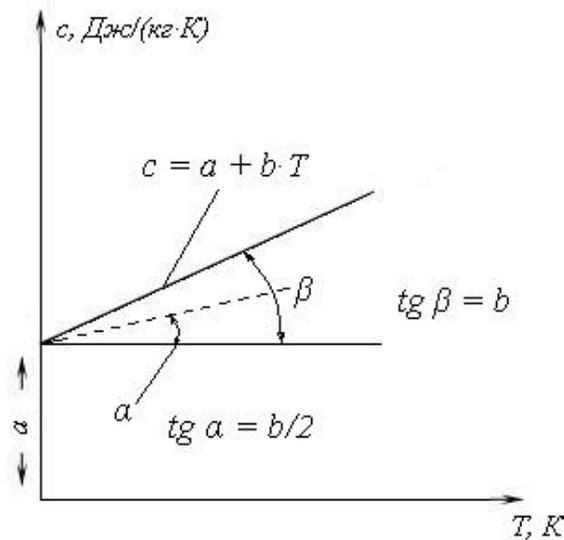


Рис. 12. График зависимости  $c = a + b \cdot T$

Между средней удельной теплоемкостью в интервале  $\Delta T$  и истинной удельной теплоемкостью существует вполне определенная связь. Рассмотрим ее для случая

$$c = a + b \cdot T.$$

Задача сводится к тому, чтобы найти функцию  $\bar{c} = f(a, b, T)$ . С одной стороны,

$$q = \bar{c} \cdot \Delta T = \bar{c} \cdot (T_2 - T_1).$$

С другой

$$dq = c \cdot dT.$$

Проинтегрируем последнее уравнение с учетом принятой гипотезы ( $c = a + b \cdot T$ )

$$\int_0^q dq = \int_{T_1}^{T_2} c \cdot dT \rightarrow q = \int_{T_1}^{T_2} (a + b \cdot T) \cdot dT \rightarrow$$

$$q = a \cdot T \Big|_{T_1}^{T_2} + b \cdot T^2/2 \Big|_{T_1}^{T_2} = a \cdot (T_2 - T_1) + b \cdot (T_2^2 - T_1^2)/2.$$

Приравняем полученные выражения для  $q$

$$\bar{c} \cdot (T_2 - T_1) = a \cdot (T_2 - T_1) + b \cdot (T_2^2 - T_1^2)/2.$$

Отсюда легко получить

$$\bar{c} = f(a, b, T) = a + (T_2^2 + T_1^2) \cdot b/2.$$

На диаграмме (рис. 12) график  $f(a, b, T)$  показан пунктирной линией.

#### 4.5. Понятие об изохорной и изобарной удельных теплоемкостях

На практике значительную роль играют *удельные теплоемкости* при постоянных *объеме*  $c_v$  и *давлении*  $c_p$ . Эти характеристики для большинства рабочих тел исследованы, т.е. получены зависимости  $c = f(T)$  и  $\bar{c} = f(\Delta T)$ , которые приведены в справочной литературе. По известным значениям изохорной и изобарной удельных теплоемкостей можно определить удельную теплоемкость  $c$  для любого вида политропного процесса.

Изохорную удельную теплоемкость РТ определяют из эксперимента, при проведении которого не меняется удельный объем РТ  $v$ , а изобарную – из опыта, когда давление РТ  $p$  остается постоянным.

#### 4.6. Связь между изохорной и изобарной удельными теплоемкостями

Рассмотрим изохорный и изобарный процессы нагрева РТ в ТДС “цилиндр-поршень-рабочее тело” (рис. 13).

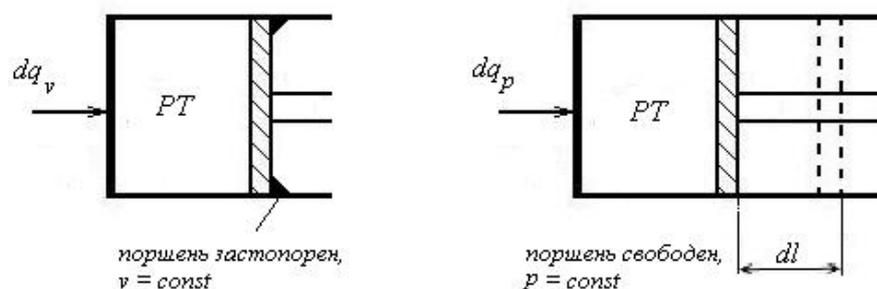


Рис. 13. Изохорный и изобарный процессы нагрева РТ

В том случае, когда  $v = \text{const}$ , при нагревании растут давление и температура РТ

$$c_v = dq_v/dT, [\text{Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})].$$

Если  $p = \text{const}$ , при нагревании возрастают температура и удельный объем РТ, а поршень движется, т.е. совершается еще и работа  $dL$ . Здесь –

$$c_p = dq_p/dT, [\text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})].$$

Из условия проведения опытов следует, что удельная теплота  $dq_v$  расходуется только на нагрев РТ на величину  $dT$ , а  $dq_p$  – на нагрев на ту же величину  $dT$  (изменение внутренней энергии РТ) и совершение работы  $dL$ . Таким образом, в первом и втором случаях нагрев *неэквивалентен*, причем всегда  $dq_p > dq_v$ . Иными словами,  $c_p > c_v$ , как уже отмечалось выше.

Связь между  $c_p$  и  $c_v$  выражается не только упоминавшимся и приводившимся уравнением Майера

$$c_p - c_v = R,$$

но и через коэффициент Пуассона  $\gamma = c_p/c_v$ .

Выразим  $c_p$  через  $c_v$  и  $\gamma$

$$c_p = \gamma \cdot c_v,$$

а результат подставим в уравнение Майера.

Получим

$$\gamma \cdot c_v - c_v = R.$$

Отсюда можно вывести два равенства, которые широко используются в термодинамических расчетах

$$c_v = R/(\gamma - 1) \quad \text{и} \quad c_p = \gamma \cdot R/(\gamma - 1).$$

#### 4.7. Общее расчетное выражение удельной теплоемкости

Для каждого политропного процесса его удельная теплоемкость является функцией показателя политропы  $n$ , коэффициента Пуассона  $\gamma$  и удельной изохорной теплоемкости, т.е.  $c = f(n, \gamma, c_v)$ . Можно показать, что

$$c = c_v \cdot (n - \gamma)/(n - 1), [\text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})].$$

#### 4.8. Теплоемкость сложного рабочего тела (смеси)

Удельная теплоемкость является *аддитивной* величиной, т.е. обладает свойством *независимости*. Соответственно суммарную теплоемкость смеси газов (например, воздуха и продуктов сгорания авиационного топлива) можно определить как алгебраическую сумму, учитывающую долю каждого компонента изучаемой смеси.

Массовую долю суммы принято обозначать  $g$

$$g = \sum_{i=1}^n g_i = 1,$$

где  $n$  – количество компонентов смеси,  $g_i$  – массовая доля каждого компонента.

Расчетное выражение для суммарной теплоемкости сложного РТ имеет вид

$$c_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n c_i \cdot g_i,$$

где  $c_i$  – удельная теплоемкость  $i$ -го компонента смеси. Размерностью  $c_{\Sigma}$  служит  $[Дж/(кг \cdot K)]$ .

Иногда в справочной литературе наряду со значениями  $c$  удельных теплоемкостей рабочих тел, приведенных к единице массы, указываются величины, отнесенные к единице количества вещества ( $[моль]$ ,  $[кмоль]$ ). В этих случаях теплоемкость обозначают большой латинской буквой  $C$ , а единицами ее измерения являются  $[Дж/(моль \cdot K)]$  и  $[Дж/(кмоль \cdot K)]$ . Учитывая размерности, от  $C$  легко перейти к  $c$

$$c = C/\mu,$$

где  $\mu$  – молярная масса РТ.

В практических расчетах необходимо принимать во внимание, относятся справочные данные к изобарной или изохорной теплоемкости РТ, истинной или средней теплоемкости? При решении задач необходимо переходить к средней удельной теплоемкости, отнесенной к единице массы.

#### 4.9. Расчет количества теплоты процесса с использованием теплоемкости

Указанный в заголовке темы расчет производится на основании определения удельной теплоемкости

$$c = dq/dT, [Дж/(кг \cdot K)].$$

Из последней формулы следует, что

$$dq = c \cdot dT.$$

Чтобы найти количество теплоты  $q$ , достаточно выполнить интегрирование

$$\int_0^q dq = \int_{T_1}^{T_2} c \cdot dT.$$

Отсюда

$$q = \int_{T_1}^{T_2} c \cdot dT, [\text{Дж/кг}],$$

где  $c = f(T)$ . Фактически получена основная формула для расчета теплоты термодинамического процесса.

При изучении *политропных процессов* зависимостью удельной теплоемкости от температуры можно пренебречь и считать  $c = \text{const} = \bar{c}$ , где  $\bar{c}$  – средняя удельная теплоемкость РТ. Тогда

$$q = \bar{c} \cdot \int_{T_1}^{T_2} dT = \bar{c} \cdot (T_2 - T_1). [\text{Дж/кг}].$$

Последнее равенство справедливо для *любого вида* политропного процесса.

#### 4.10. Расчет изменения внутренней энергии при изменении состояния системы

В соответствии с первым законом термодинамики подводимая к ТДС теплота расходуется на увеличение внутренней энергии системы и совершение системой работы, т.е.

$$dq = du + dl.$$

Очевидно, что при выводе расчетного соотношения для изменения внутренней энергии следует исключить ту часть теплоты  $q_l$ , которая идет на совершение работы, т.е. предположить, что процесс проходит без совершения последней. Воспользуемся основной формой записи первого закона термодинамики

$$dq = du + p \cdot dv,$$

где  $dq = dq_u + dq_l$ ,  $q_u$  – часть теплоты, идущая на увеличение внутренней энергии ТДС.

Работа при прохождении процесса не совершается, если процесс протекает *при постоянном объеме*. Действительно,  $v = \text{const} \rightarrow dv = 0 \rightarrow dl = p \cdot dv = 0$ . При этом  $dq_u = dq_v$ . По определению изохорной удельной теплоемкости

$$c_v = dq_v/dT,$$

откуда

$$dq_v = c_v \cdot dT.$$

Используя основную форму записи первого закона термодинамики и учитывая, что  $p \cdot dv = 0$ , можно окончательно получить

$$dq_v = du \quad \text{или} \quad du = c_v \cdot dT.$$

Это дифференциальное выражение описывает изменение внутренней энергии ТДС для любого процесса.

Проинтегрируем записанное равенство

$$\int_{u_1}^{u_2} du = \int_{T_1}^{T_2} c_v \cdot dT.$$

В результате получим

$$\Delta u = u_2 - u_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_v \cdot dT, \quad [\text{Дж/кг}]$$

где  $c_v = f(T)$ . Последняя формула является *основной* для расчета изменения внутренней энергии ТДС.

Для политропных процессов можно считать  $c_v = \text{const}$ . Тогда

$$\Delta u = u_2 - u_1 = c_v \cdot \int_{T_1}^{T_2} dT = c_v \cdot (T_2 - T_1), \quad [\text{Дж/кг}].$$

При решении практических задач часто используются другие виды полученного выражения. Известно, что

$$c_v = R/(\gamma - 1) \quad \text{и} \quad p \cdot v = R \cdot T.$$

С учетом этого

$$\Delta u = R \cdot (T_2 - T_1)/(\gamma - 1), \quad [\text{Дж/кг}]$$

или

$$\Delta u = (p_2 \cdot v_2 - p_1 \cdot v_1)/(\gamma - 1), \quad [\text{Дж/кг}].$$

#### 4.11. Расчетное выражение для определения изменения энтальпии процесса

Рассматриваемое выражение можно получить аналогично тому, как выше была выведена формула для расчета изменения внутренней энергии ТДС. Воспользуемся модифицированной формой записи первого закона термодинамики через энтальпию и располагаемую работу РТ

$$dq = di - v \cdot dp.$$

Чтобы определить изменение энтальпии  $di$ , нужно положить, что процесс протекает *при постоянном давлении*.

Если принять  $p = \text{const}$ , то  $dp = 0 \rightarrow -v \cdot dp = 0$ . В таком случае  $dq = dq_p$ , причем

$$c_p = dq_p/dT.$$

Из перечисленных соображений следует, что

$$di = c_p \cdot dT, [\text{Дж/кг}].$$

Фактически получено дифференциальное уравнение, описывающее изменение энтальпии ТДС в *произвольном* процессе. Проинтегрируем последнее равенство

$$\int_{i_1}^{i_2} di = \int_{T_1}^{T_2} c_p \cdot dT.$$

В результате получим

$$\Delta i = i_2 - i_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_p \cdot dT, [\text{Дж/кг}],$$

где  $c_p = f(T)$ . Записана формула, являющаяся *основной* для расчета изменения энтальпии ТДС при *любом* процессе.

Для политропных процессов можно считать  $c_p = \text{const}$ . Тогда

$$\Delta i = i_2 - i_1 = c_p \cdot (T_2 - T_1), [\text{Дж/кг}].$$

#### 4.12. Понятие о теплотах фазовых превращений

Ряд процессов (*изотермических*) характеризуется постоянством температуры при подводе теплоты к РТ. Такие процессы являются *процессами фазового перехода*. К ним относятся плавление, испарение, отверждение, конденсация и т.д. С энергетической точки зрения указанные процессы характеризуются так называемыми “скрытыми теплотами”.

*Скрытой теплотой* называют количество теплоты, отнесенное к единице массы РТ, необходимое для перехода тела из одного фазового состояния в другое (например, из жидкого в газообразное). Скрытые теплоты принято обозначать  $q_i$ , а единицей их измерения служит  $[\text{Дж/кг}]$ . Значения  $q_i$  для различных РТ ( $q_{i\text{ТАБЛ}}$ ) приведены в справочных таблицах.

Нужно отметить, что подобно скрытым теплотам определяются и теплоты химических реакций, как экзо-, так и эндотермических.

### 4.13. Расчет теплоты при изотермических процессах

Удельное количество теплоты фазового перехода можно найти из тождества

$$q \equiv q_{i\text{ТАБЛ.}}, [\text{Дж/кг}].$$

Общее количество теплоты фазового перехода (для всей массы РТ) рассчитывается с помощью очевидного равенства

$$Q_i = m_i \cdot q_{i\text{ТАБЛ.}}, [\text{Дж}]$$

## 5. Энтропия

### 5.1. Понятие об энтропии

*Энтропией* называют *количественную меру* неопределенности (хаотичности) вероятностной системы. Такие системы состоят из множества элементов. Их параметры подчиняются вероятностным законам. Вероятностную систему нельзя описать детерминированными соотношениями, дающими однозначный ответ.

С вероятностной точки зрения изучаемое макросостояние системы определяется числом микросостояний, через которые оно реализуется. При значительном количестве элементов, образующих систему, каждое ее макросостояние характеризуется астрономическим числом микросостояний. Таким образом, при решении практических задач удобнее использовать не абсолютное значение указанного числа, а его *логарифм*.

*Энтропия* является характеристикой состояния системы, определяемой через логарифм. Расчетное соотношение для энтропии имеет вид –

$$S = \sum k \cdot \ln W_i,$$

где  $k$  – постоянная Больцмана;  $W_i$  –  $i$ -е микросостояние системы.

*Термодинамическое РТ* состоит из молекул, т.е. представляет собой *вероятностную систему*. Необходимо подчеркнуть, что любая система в ходе протекания естественных процессов стремится перейти в *наиболее вероятное состояние*, такое равновесное состояние, которое соответствует *максимальной энтропии*, т.е. большему беспорядку (хаосу).

Состояние термодинамического РТ характеризуется энтропией, а ее дифференциал определяется отношением

$$ds = dq/T, [\text{Дж}/(\text{кг} \cdot \text{K})],$$

где  $q$  – теплота процесса,  $T$  – температура РТ, при которой происходит процесс, энтропия  $s$  – функция микросостояний, зависящих от скоростей  $w_i$  и местоположений молекул РТ  $x_i$ , т.е.  $s = f(w_i, x_i)$ .

Нужно прокомментировать разницу между теплотой  $q = f(w)$  и энтропией  $s = f(w, x)$ . Как видно из приведенных формул, первая характеризует изменение энергии хаотического движения молекул системы, а вторая – ее состояние.

С качественной точки зрения из отношения

$$ds = dq/T$$

следует, что энтропия отражает ценность теплоты процесса в смысле способности последней самопроизвольно перетекать от одного тела к другому. Теплота, которой соответствует относительно меньшая энтропия, т.е. большая организованность, ценнее для самопроизвольных процессов. При их протекании *энтропия может только увеличиваться*.

## 5.2. Расчетные соотношения для изменения энтропии

Из определения энтропии следует, что

$$ds = dq/T.$$

Однако

$$dq = c \cdot dT.$$

Поэтому

$$ds = c \cdot dT/T,$$

откуда

$$\Delta s = s_2 - s_1 = \int_{s_1}^{s_2} ds = \int_{T_1}^{T_2} c \cdot dT/T.$$

Для политропных процессов удельная теплоемкость  $c = \text{const}$ . В этом случае

$$s = s_2 - s_1 = c \cdot \int_{T_1}^{T_2} dT/T = c \cdot \ln(T_2/T_1), \quad [\text{Джс}/(\text{кг} \cdot \text{К})]$$

Итак,

$$\Delta s = c \cdot \ln(T_2/T_1).$$

Полученная формула не является универсальной. Ей нельзя пользоваться при расчетах изотермических процессов, когда  $c = \pm \infty$ .

Запишем выражение для первого закона термодинамики

$$dq = du + dl$$

и разделим обе части равенства на температуру  $T$

$$dq/T = (du/T) + (dl/T).$$

Вспомним, что

$$ds = dq/T, \quad du = c_v \cdot dT, \quad dl = p \cdot dv.$$

Тогда

$$ds = c_v \cdot (dT/T) + p \cdot (dv/T).$$

Поскольку  $p \cdot v = R \cdot T$

$$p = R \cdot T/v.$$

Подстановка позволяет получить

$$ds = c_v \cdot (dT/T) + R \cdot (dv/v).$$

Интегрируя последнее равенство и считая процесс политропным, имеем

$$\int_{s_1}^{s_2} ds = c_v \cdot \int_{T_1}^{T_2} (dT/T) + R \cdot \int_{v_1}^{v_2} (dv/v),$$

откуда

$$\Delta s = s_2 - s_1 = c_v \cdot \ln(T_2/T_1) + R \cdot \ln(v_2/v_1).$$

Получена основная расчетная формула для изменения энтропии, из которой следует, что  $s = f(T, v)$ .

### 5.3. Дифференциальная форма уравнения состояния

Известно, что  $p \cdot v = R \cdot T$ , где  $R = \text{const}$ . Найдём дифференциал записанного выражения

$$d(p \cdot v) = d(R \cdot T) \rightarrow p \cdot dv + v \cdot dp = R \cdot dT.$$

Разделим последнее равенство на уравнение состояния

$$(p \cdot dv)/(p \cdot v) + (v \cdot dp)/(p \cdot v) = (R \cdot dT)/(R \cdot T).$$

Дифференциальная форма уравнения состояния имеет вид

$$(dv/v) + (dp/p) = dT/T.$$

Выразим из последней формулы отношение  $(dv/v)$

$$dv/v = (dT/T) - (dp/p).$$

Выше было получено, что для политропного процесса справедливо

$$\int_{s_1}^{s_2} ds = c_v \cdot \int_{T_1}^{T_2} (dT/T) + R \cdot \int_{v_1}^{v_2} (dv/v).$$

С учетом выражения для  $dv/v$  из дифференциальной формы уравнения состояния можно записать

$$\int_{s_1}^{s_2} ds = c_v \cdot \int_{T_1}^{T_2} (dT/T) + R \cdot \int_{T_1}^{T_2} (dT/T) - R \cdot \int_{p_1}^{p_2} (dp/p) = (c_v + R) \int_{T_1}^{T_2} (dT/T) - R \cdot \int_{p_1}^{p_2} (dp/p).$$

Известно, что  $c_v + R = c_p$ . Тогда

$$\int_{s_1}^{s_2} ds = c_p \cdot \int_{T_1}^{T_2} (dT/T) - R \cdot \int_{p_1}^{p_2} (dp/p).$$

Интегрируя это равенство, получаем расчетное выражение для энтропии как функции температуры и давления ( $s = f(T, p)$ )

$$\Delta s = s_2 - s_1 = c_p \cdot \ln(T_2/T_1) - R \cdot \ln(p_2/p_1).$$

Наряду с формулой  $s = f(T, v)$ , последняя часто используется для определения изменения энтропии  $\Delta s$  при решении практических задач. Можно вывести так же соотношение  $s = f(p, v)$ . Для этого нужно выразить из дифференциальной формы уравнения состояния отношение  $dT/T$

$$dT/T = (dp/p) + (dv/v).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{s_1}^{s_2} ds &= c_v \cdot \int_{T_1}^{T_2} (dT/T) + R \cdot \int_{v_1}^{v_2} (dv/v) = c_v \cdot \int_{p_1}^{p_2} (dp/p) + c_v \cdot \int_{v_1}^{v_2} (dv/v) + R \cdot \int_{v_1}^{v_2} (dv/v) = \\ &= c_v \cdot \int_{p_1}^{p_2} (dp/p) + (c_v + R) \cdot \int_{v_1}^{v_2} (dv/v) = c_v \cdot \int_{p_1}^{p_2} (dp/p) + c_p \cdot \int_{v_1}^{v_2} (dv/v). \end{aligned}$$

Таким образом, для политропных процессов

$$\Delta s = s_2 - s_1 = c_v \cdot \ln(p_2/p_1) + c_p \cdot \ln(v_2/v_1).$$

Эта формула тоже применяется при решении прикладных задач.

#### 5.4. Абсолютное значение энтропии

За *абсолютный нуль* энтропии принято считать *энтропию* РТ, имеющего абсолютно правильное строение кристаллической решетки и абсолютную температуру  $T$ , равную нулю.

Согласно третьему закону термодинамики абсолютного нуля достичь *нельзя*, следовательно, *как таковой нулевой энтропии не существует*. Ее понятие носит умозрительный, чисто теоретический характер.

Для большинства веществ на практике проведены расчеты абсолютной энтропии до уровня  $T = 298 [K]$ . Эту величину энтропии принято обозначать  $\underline{s}_0^{298}$ .

Вообще, для абсолютной энтропии справедливо

$$\underline{s} = \sum \Delta \underline{s}_i,$$

где каждое  $\Delta \underline{s}_i$  соответствует последовательной части термодинамического процесса.

Пусть при *нормальных условиях* ( $T_0 = 273 [K]$ ,  $p_0 = 1,013 \cdot 10^5 [Па]$ ,  $v_0 = R \cdot T_0 / p_0$ ) РТ газообразно.

Тогда для него

$$\underline{s}_0^{298} = \sum \Delta \underline{s}_i,$$

где  $\Delta \underline{s}_i$  соответствуют нагреву от нуля до плавления, плавлению, дальнейшему нагреву, испарению, нагреву газообразной фазы до  $T = 298 [K]$ .

Абсолютное значение энтропии для любого вещества определяется по формуле

$$\underline{s} = \underline{s}_0^{298} + \sum_{298}^T \Delta \underline{s}_i.$$

На практике часто используется *условное абсолютное значение* энтропии, обозначаемое  $s$ . Принято считать, что при нормальных условиях  $s_0 \equiv 0$ .

#### 5.5. Расчетная формула для определения условной абсолютной энтропии

Соотношение для вычисления условной абсолютной энтропии легко получить, если подставить в выведенные ранее формулы для  $\Delta s$  параметры  $T_0$ ,  $p_0$ ,  $v_0$ , соответствующие нормальным условиям. Полагаем, что

$$s_1 = s_0 = f(T_0, p_0, v_0) \equiv 0, \quad s_2 = s.$$

Рассмотрим в качестве примера неизотермический процесс, для которого

$$\Delta s = s_2 - s_1 = c \cdot \ln(T_2/T_1).$$

Отсюда

$$s = c \cdot \ln(T/T_0) = c \cdot \ln(T/273),$$

где  $T$  – конечная температура процесса.

Условное значение абсолютной энтропии широко используется для построения графиков различных термодинамических процессов.

### 5.6. Тепловая диаграмма термодинамического процесса

*Тепловой* называют диаграмму процесса, построенную в системе координат  $\langle s, T \rangle$ , где  $s$  – удельная энтропия.

По определению

$$ds = dq/T, [Дж/(кг \cdot K)]$$

Разрешим это выражение относительно  $dq$

$$dq = T \cdot ds.$$

Получено дифференциальное соотношение для удельной теплоты через энтропию. Проинтегрируем его –

$$\int_0^q dq = \int_{s_1}^{s_2} T \cdot ds \rightarrow q = \int_{s_1}^{s_2} T \cdot ds.$$

Записанная формула является *основной* для расчета теплот термодинамических процессов. С ее помощью строятся тепловые диаграммы (рис. 14). Площадь под кривой  $f = T(s)$  представляет собой графическую интерпретацию теплоты, отведенной или подведенной к РТ в процессе его перехода из начального состояния 1 в конечное 2. Тепловая диаграмма применяется для наглядного представления количества теплоты, характеризующей изучаемый процесс.

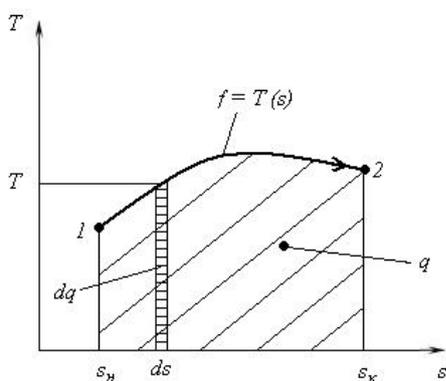


Рис. 14. Пример тепловой диаграммы термодинамического процесса

## 6. Политропные процессы

### 6.1. Комментарий к определению политропного процесса

При решении практических задач *политропным* можно считать термодинамический процесс, протекающий при *постоянной теплоемкости PT* ( $c = \text{const}$ ).

### 6.2. Уравнение политропного процесса в координатах $\langle s, T \rangle$

Искомое выражение можно получить, используя понятие условной абсолютной энтропии и формулу

$$ds = dq/T.$$

Поскольку

$$dq = c \cdot dT, \text{ то } ds = c \cdot dT/T.$$

Проинтегрируем последнее равенство

$$\int_0^s ds = c \cdot \int_{T_0}^T (dT/T),$$

где  $T_0 = 273 [K]$ . Отсюда

$$s = c \cdot \ln(T/T_0) \text{ и } s/c = \ln(T/T_0).$$

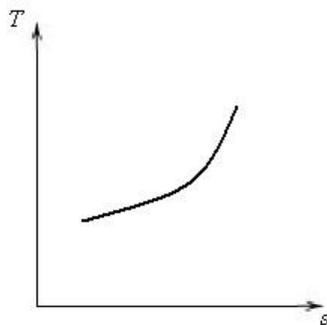
Потенцируя, имеем

$$T/T_0 = e^{s/c}.$$

Тогда уравнение политропного процесса в координатах  $\langle s, T \rangle$  запишется как

$$T = f(s) = T_0 \cdot e^{s/c}.$$

Пример графика  $T = f(s)$  приведен на рис 15. Полученное уравнение описывает любой политропный процесс, характеризующийся вполне определенным значением теплоемкости  $c$ , которое лежит в пределах  $-\infty < c < +\infty$ .



*Рис. 15. Пример графика политропного процесса (экспоненциальная зависимость)*

### 6.3. Уравнение политропного процесса в координатах $\langle v, p \rangle$

Как подчеркивалось выше, любой политропный процесс *по определению* описывается уравнением

$$p \cdot v^n = \text{const},$$

где  $n$  – показатель политропы, причем  $-\infty < n < +\infty$ .

#### 6.4. Расчетное выражение показателя политропы

Рассмотрим общее уравнение для удельной теплоемкости политропного процесса

$$c = c_v \cdot (n - \gamma) / (n - 1),$$

где коэффициент Пуассона  $\gamma = c_p / c_v$ . С учетом этого можно получить –

$$c \cdot (n - 1) = c_v \cdot (n - c_p / c_v).$$

Отсюда

$$c \cdot n - c = c_v \cdot n - c_p.$$

Разрешим последнее соотношение относительно показателя политропы  $n$

$$c \cdot n - c_v \cdot n = c - c_p, \quad n \cdot (c - c_v) = c - c_p,$$

откуда

$$n = (c - c_p) / (c - c_v).$$

#### 6.5. Экспериментальный метод определения показателя политропы

Для нахождения показателя политропы наиболее удобен опытный способ. Уравнение политропы можно представить в виде

$$p_1 \cdot v_1^n = p_2 \cdot v_2^n.$$

Отсюда легко получить

$$p_2 / p_1 = (v_1 / v_2)^n.$$

Прологарифмируем последнее равенство

$$\ln(p_2 / p_1) = n \cdot \ln(v_1 / v_2).$$

Таким образом, для показателя политропы справедливо

$$n = \ln(p_2 / p_1) / \ln(v_1 / v_2),$$

где значения  $p_1, p_2, v_1, v_2$  определяются экспериментальным путем.

#### 6.6. Разновидности политропных процессов

На практике *особое значение* имеют *частные случаи* политропных процессов, протекающих при вполне определенных условиях:

- *изохорный* (изохорический) процесс, проходящий при постоянном объеме ( $v = \text{const}, dv = 0$ );
- *изобарный* (изобарический) процесс, проходящий при постоянном давлении ( $p = \text{const}, dp = 0$ );

- *изотермический* процесс, проходящий при постоянной температуре ( $T = \text{const}$ ,  $dT = 0$ );

- *адиабатный* (адиабатический) процесс, протекающий без теплообмена с окружающей средой (здесь  $dq_{\text{внеш}} = 0$ );

- *изоэнтروпный* процесс, протекающий как без внешних, так и без внутренних источников теплоты ( $s = \text{const}$ ,  $ds = 0$ ,  $dq_{\text{внеш}} + dq_{\text{внут}} = 0$ ).

Следует *подчеркнуть*, что в учебной и справочной литературе *очень часто*, причем *ошибочно* отождествляют адиабатные и изоэнтропные процессы. Техническая термодинамика изучает *только* изоэнтропные процессы.

### 6.7. Общая методика исследования политропного процесса (на примере изохорного)

*Типовой алгоритм* изучения термодинамического процесса включает следующие операции.

1. Определение исходных условий процесса (для изохорного  $\rightarrow v = \text{const}$ ,  $dv = 0$ ).

2. Нахождение удельной теплоемкости процесса

$$c = dq/dT$$

(для изохорного  $\rightarrow c = dq_v/dT = c_v$ ).

3. Определение показателя политропы процесса

$$n = (c - c_p)/(c - c_v)$$

(для изохорного  $\rightarrow n = (c_v - c_p)/(c_v - c_v) = -R/0 = \pm \infty$ ; итак,  $n = n_v = \pm \infty$ ).

4. Запись уравнения процесса в координатах  $\langle v, p \rangle$

$$p \cdot v^n = \text{const}$$

(для изохорного  $\rightarrow p^{1/n} \cdot v = \text{const}^{1/n} = \text{const}^* \rightarrow p^{1/\pm\infty} \cdot v = \text{const}^* \rightarrow p^0 \cdot v = \text{const}^* \rightarrow v = \text{const}^*$ ) и построение рабочей диаграммы (для изохорного см. рис. 16).

5. Запись уравнения процесса в координатах  $\langle s, T \rangle$

$$T = T_0 \cdot e^{s/c}$$

(для изохорного  $\rightarrow T = T_0 \cdot e^{s/c_v}$ ) и построение тепловой диаграммы (для изохорного, рис. 17).

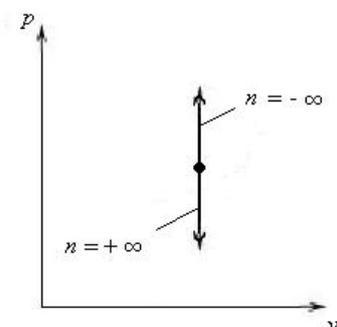


Рис. 16. Рабочая диаграмма изохорного процесса

6. Анализ уравнения состояния процесса

$$p \cdot v = R \cdot T$$

(для изохорного, при  $v = \text{const} \rightarrow p_1 \cdot v = R \cdot T_1$ ;  $p_2 \cdot v = R \cdot T_2 \rightarrow T_2/T_1 = p_2/p_1$ ).

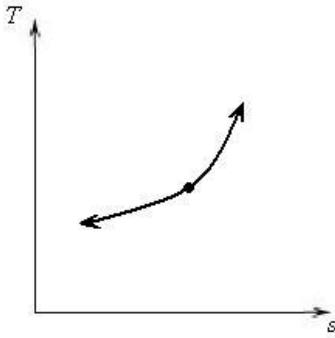


Рис. 17. Тепловая диаграмма  
изохорного процесса

### 7. Расчет работы процесса

$$dl = p \cdot dv \rightarrow \int_0^l dl = \int_{v_1}^{v_2} p \cdot dv$$

(для изохорного  $\rightarrow dv = 0 \rightarrow l = l_v \equiv 0$ ).

### 8. Определение теплоты процесса

$$dq = c \cdot dT$$

(для изохорного  $\rightarrow q = c_v \cdot (T_2 - T_1)$ , т.к.  $dq = du + p \cdot dv$ ,  $dv = 0$ ,  $dq = du$ ,  $q = \Delta u$ ).

### 9. Вычисление изменений функций состояния процесса

$$\Delta u = u_2 - u_1 = c_v \cdot (T_2 - T_1)$$

(для изохорного  $\rightarrow \Delta u = c_v \cdot (T_2 - T_1)$ );

$$\Delta i = i_2 - i_1 = c_p \cdot (T_2 - T_1)$$

(для изохорного  $\rightarrow \Delta i = c_p \cdot (T_2 - T_1)$ );

$$\Delta s = s_2 - s_1 = c_v \cdot \ln(T_2/T_1) + R \cdot \ln(v_2/v_1)$$

(для изохорного  $\rightarrow \Delta s = c_v \cdot \ln(T_2/T_1)$ , т.к.  $v = \text{const}$  и  $\ln(v/v) = \ln 1 = 0$ ).

## 6.8. Изоэнтропный процесс

С точки зрения расчета тепловых машин, к которым относятся и авиационные двигатели, важнейшим является изоэнтропный процесс, эквивалентный адиабатному в том случае, когда последний протекает при отсутствии внутренних источников теплоты.

Проведем исследование изоэнтропного процесса в соответствии с алгоритмом, изложенным в предыдущем параграфе.

#### 1. Условия процесса

$$dq = dq_{\text{внеш}} + dq_{\text{внут}} = 0.$$

#### 2. Удельная теплоемкость процесса

$$c = dq/dT = 0/dT \equiv 0.$$

#### 3. Показатель политропы

$$n = (c - c_p)/(c - c_v) = -c_p/-c_v = c_p/c_v = \gamma,$$

где  $\gamma$  – коэффициент Пуассона, который иногда называют *показателем адиабаты* (считая  $dq_{\text{внут}} = 0$ ).

#### 4. Уравнение процесса в координатах $\langle v, p \rangle$

$$p \cdot v^n = \text{const} \rightarrow p \cdot v^\gamma = \text{const}.$$

Для большинства РТ  $\gamma = 1,1 \dots 1,67$ . Например, для продуктов сгорания химических топлив он составляет  $1,1 \dots 1,3$ ; для воздуха  $\gamma = 1,4$ ; для водяного пара  $\gamma = 1,67$ . Нужно сделать важное замечание. Если процесс является изотермическим ( $T = \text{const}$ ),  $n = 1$ . Уравнение такого процесса представляется в виде

$$p = \text{const}/v,$$

откуда следует, что изотерма идет более полого, чем адиабата (изоэнтропа), рис. 18.

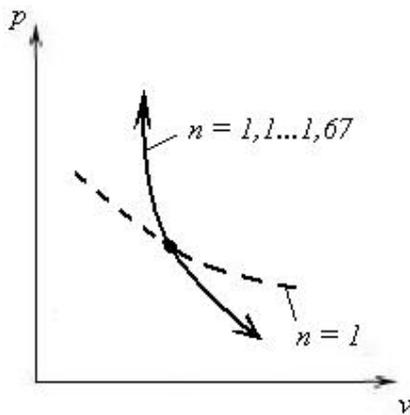


Рис. 18. Рабочая диаграмма изоэнтропного процесса (гиперболическая зависимость)

5. Уравнение процесса в координатах  $\langle s, T \rangle$  –

$$T = T_0 \cdot e^{s/c} \rightarrow s = \text{const}.$$

Графики для изоэнтропного и изотермического (показан пунктирной линией) процессов в  $\langle s, T \rangle$  координатах представлены на рис. 19.

6. Уравнение состояния процесса –

$$p \cdot v = R \cdot T.$$

Очевидно, что  $p_2 \cdot v_2 = R \cdot T_2$ ;  $p_1 \cdot v_1 = R \cdot T_1$ , откуда можно получить

$$(p_2 \cdot v_2)/(p_1 \cdot v_1) = T_2/T_1.$$

Поскольку для изоэнтропного процесса  $n = \gamma$ , справедливо

$$p_2 \cdot v_2^\gamma = p_1 \cdot v_1^\gamma,$$

из чего следует, что

$$(v_2/v_1)^\gamma = p_1/p_2 \quad \text{или} \quad v_2/v_1 = (p_2/p_1)^{-1/\gamma}.$$

Последнее равенство позволяет исключить из уравнения состояния удельный объем  $v$

$$(p_2/p_1) \cdot (p_2/p_1)^{-1/\gamma} = T_2/T_1.$$

Отсюда

$$T_2/T_1 = (p_2/p_1)^{1-1/\gamma} = (p_2/p_1)^{(\gamma-1)/\gamma}.$$

Полученное уравнение состояния изоэнтропного процесса является одним из важнейших в технической термодинамике.

7. Работа расширения в изоэнтропном процессе

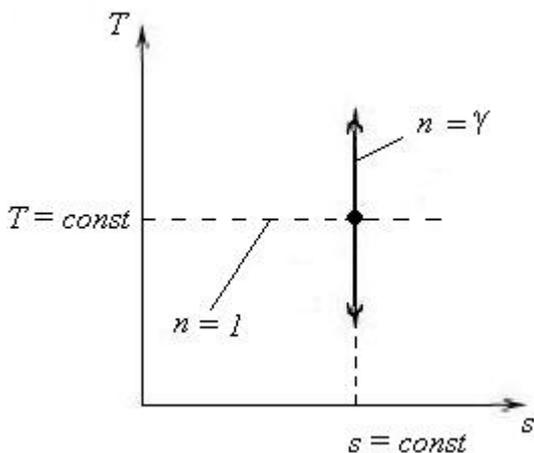


Рис. 19. Тепловая диаграмма изоэнтропного процесса

$$l = \int_{v_1}^{v_2} p \cdot dv.$$

Интегрирования общего выражения для работы можно избежать, если использовать первый закон термодинамики

$$dq = du + p \cdot dv \quad \text{или} \quad q = \Delta u + l.$$

Поскольку рассматривается изоэнтропный процесс, то  $q = 0$ , следовательно

$$l = -\Delta u.$$

Это означает, что в изучаемом случае работа совершается за счет уменьшения внутренней энергии РТ ТДС.

Итак,

$$l = \int_{v_1}^{v_2} p \cdot du = -\Delta u.$$

Однако

$$\Delta u = u_2 - u_1 = c_v \cdot (T_2 - T_1).$$

Очевидно, что для изоэнтропного процесса

$$l = c_v \cdot (T_1 - T_2).$$

При решении практических задач для вычисления работы изоэнтропного процесса *удобнее* применять другое равенство. Вспомним, что

$$p \cdot v = R \cdot T \quad \text{и} \quad c_v = R/(\gamma - 1).$$

Тогда

$$l = (T_1 - T_2) \cdot R/(\gamma - 1) = R \cdot T_1 \cdot (1/(\gamma - 1)) \cdot (1 - T_2/T_1) = (1/(\gamma - 1)) \cdot$$

$$R \cdot T_1 \cdot (1 - (p_2/p_1)^{(\gamma-1)/\gamma}), \quad [\text{Дж/кг}].$$

8. Теплота изоэнтропного процесса – по условию  $dq = 0 \rightarrow q = \int dq \equiv 0$ .

9. Расчет изменений функций состояния:

а) изменение внутренней энергии РТ

$$\Delta u = u_2 - u_1 = c_v \cdot (T_2 - T_1);$$

б) изменение энтальпии РТ

$$\Delta i = i_2 - i_1 = c_p \cdot (T_2 - T_1);$$

в) изменение энтропии ( по определению)

$$\Delta s \equiv 0.$$

### 6.9. Исследование изобарного процесса

1. Условия процесса

$$p = \text{const}, dp = 0.$$

2. Удельная теплоемкость процесса

$$c = dq/dT = dq_p/dT = c_p.$$

3. Показатель политропы

$$n = (c - c_p)/(c - c_v) = (c_p - c_p)/(c_p - c_v) \equiv 0.$$

4. Уравнение процесса в координатах  $\langle v, p \rangle$  (график см. на рис. 20)

$$p \cdot v^n = \text{const} \rightarrow p \cdot v^0 = \text{const}, p = \text{const}.$$

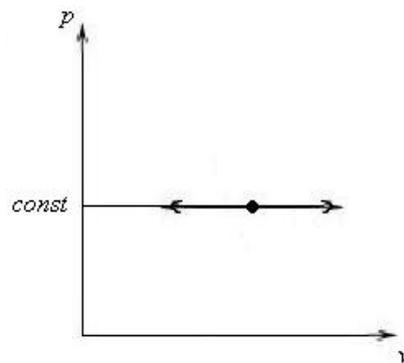


Рис. 20. Рабочая диаграмма изобарного процесса

5. Уравнение процесса в координатах  $\langle s, T \rangle$  (график см. на рис. 21)

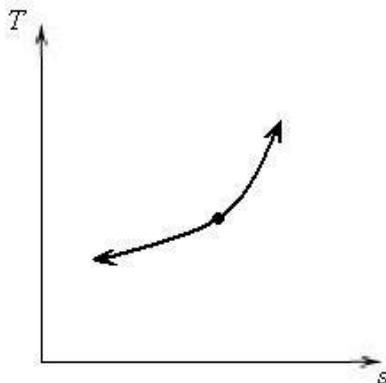


Рис. 21. Тепловая диаграмма изобарного процесса (экспоненциальная зависимость)

$$T = T_0 \cdot e^{s/c} = T_0 \cdot e^{s/c_p}.$$

6. Уравнение состояния процесса

$$p \cdot v = R \cdot T.$$

Отсюда

$$p \cdot v_1 = R \cdot T_1 \text{ и } p \cdot v_2 = R \cdot T_2.$$

Очевидно, что

$$v_2/v_1 = T_2/T_1.$$

## 7. Работа расширения

$$l = \int_{v_1}^{v_2} p \cdot dv = p \cdot \int_{v_1}^{v_2} dv = p \cdot (v_2 - v_1), \text{ т.к. } p = \text{const.}$$

8. Теплота процесса (с учетом модифицированной формы записи первого закона термодинамики)  $= di + dl_p$ ,

где  $dl_p = -v \cdot dp$ . В случае изобарного процесса  $dp \equiv 0$ , откуда  $dl_p = 0$  и  $dq = di$ , т.е.

$$q = \Delta i = c_p \cdot (T_2 - T_1).$$

## 9. Расчет изменений функций состояния –

$$\Delta u = u_2 - u_1 = c_v \cdot (T_2 - T_1);$$

$$\Delta i = i_2 - i_1 = c_p \cdot (T_2 - T_1);$$

$$\Delta s = s_2 - s_1 = c_p \cdot \ln(T_2/T_1).$$

## 6.10. Исследование изотермического процесса

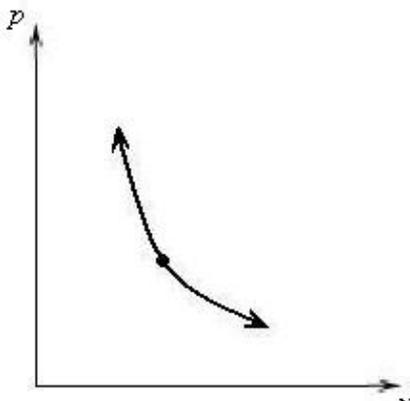


Рис. 22. Рабочая диаграмма изотермического процесса (гиперболическая зависимость)

1. Условия процесса  $\rightarrow T = \text{const}, dT = 0$ .

2. Удельная теплоемкость процесса  $\rightarrow c = dq/dT \rightarrow c_T = dq/0 = \pm \infty$ .

3. Показатель политропы  $\rightarrow n = (c - c_p)/(c - c_v) = (c_T - c_p)/(c_T - c_v) = \infty/\infty = 1$ .

4. Уравнение процесса в координатах  $\langle v, p \rangle$

$$p \cdot v^n = \text{const} \rightarrow p \cdot v = \text{const} \text{ или } p = \text{const}/v$$

(график см. на рис. 22).

5. Уравнение процесса в координатах  $\langle s, T \rangle$

$$T = T_0 \cdot e^{s/c} \rightarrow T = \text{const}$$

(график см. на рис. 23).

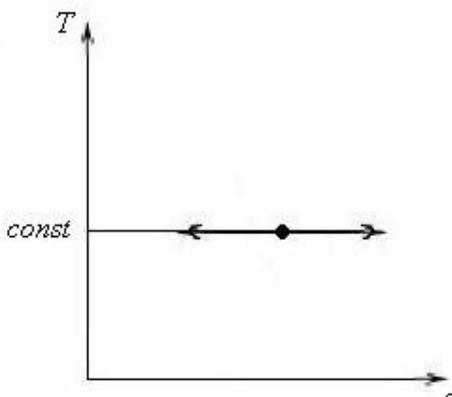


Рис. 23. Тепловая диаграмма изотермического процесса

6. Уравнение состояния процесса

$$p \cdot v = R \cdot T \rightarrow p_1 \cdot v_1 = R \cdot T; p_2 \cdot v_2 = R \cdot T, \text{ откуда}$$

$$p_2 \cdot v_2 / p_1 \cdot v_1 = 1.$$

Таким образом,

$$p_1/p_2 = v_2/v_1.$$

### 7. Работа расширения

$$l = \int_{v_1}^{v_2} p \cdot dv = R \cdot T \cdot \int_{v_1}^{v_2} (dv/v) = R \cdot T \ln(v_2/v_1),$$

т.к. (по условию)  $T = \text{const}$ , а  $p = R \cdot T/v$ .

### 8. Теплота процесса

$$dq = du + dl; q = \Delta u + l.$$

В рассматриваемом случае ( $T = \text{const}$ )  $\Delta u = 0$ , а

$$q = l.$$

### 9. Расчет изменений функций состояния

$$\Delta u = u_2 - u_1 = c_v \cdot (T_2 - T_1) = 0;$$

$$\Delta i = i_2 - i_1 = c_p \cdot (T_2 - T_1) = 0;$$

$$\Delta s = s_2 - s_1 = c_v \cdot \ln(p_2/p_1) + c_p \cdot \ln(v_2/v_1).$$

## 6.11. Обобщенные графики политропных процессов

Указанные в заголовке темы диаграммы представлены на рис. 24. Их изучение крайне важно, т.к. они наглядно иллюстрируют важнейшие принципы, лежащие в основе работы тепловых машин.

Согласно первому закону термодинамики

$$dq = du + dl.$$

Кроме того, по определению

$$dq = T \cdot ds, \quad du = c_v \cdot dT, \quad \text{а} \quad dl = p \cdot dv.$$

Используя четыре записанных уравнения, на обобщенных диаграммах можно легко выявить положительные и отрицательные области для теплоты  $q$ , внутренней энергии  $u$  и работы  $l$ .

Чтобы проанализировать изучаемый термодинамический процесс, достаточно знать показатель его политропы, а также принимать во внимание, уменьшается или увеличивается при его протекании удельный объем  $Pv$ .

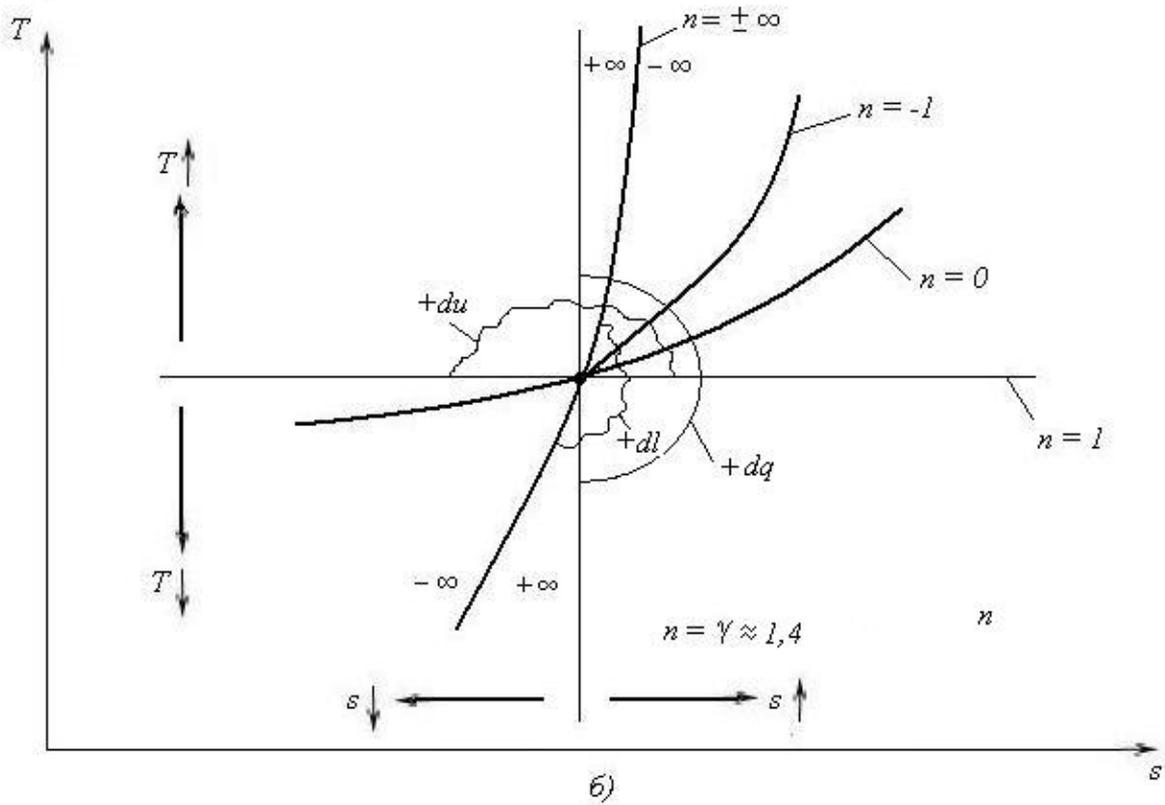
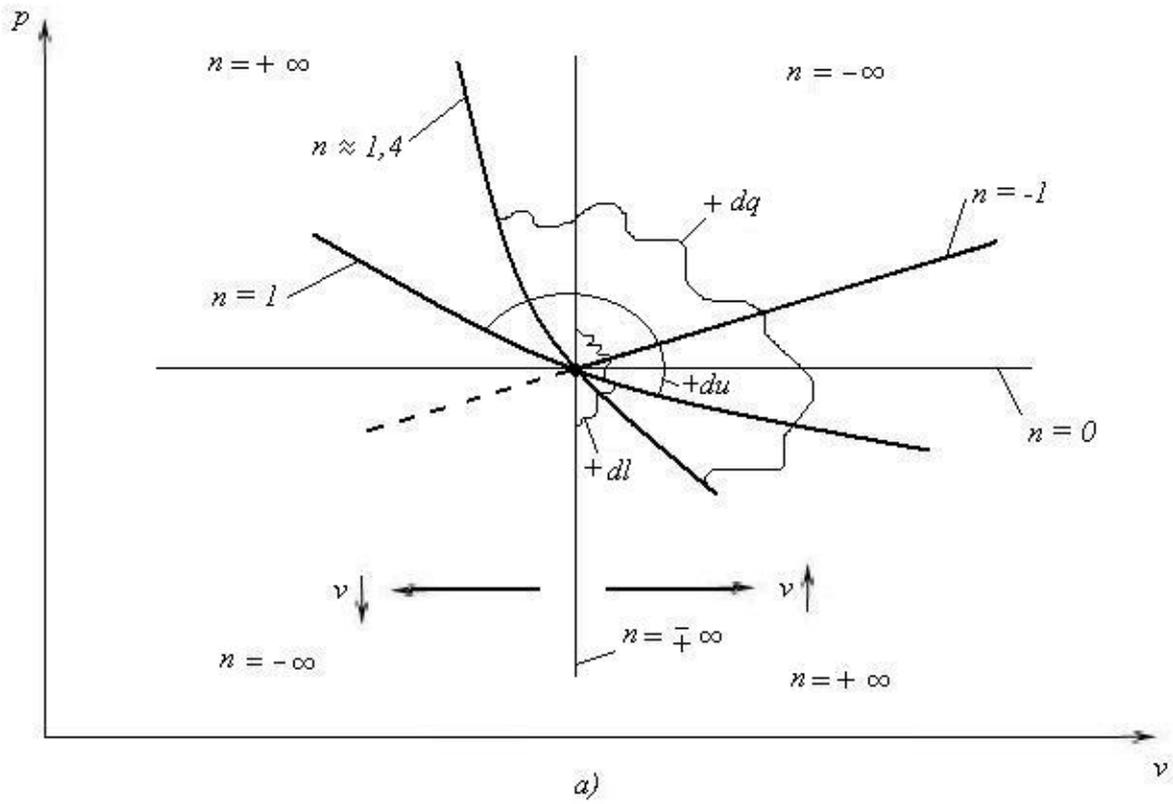


Рис. 24. Рабочая (а) и тепловая (б) обобщенные диаграммы политропных процессов

Пусть показатель политропы  $n = -1$ , а в ходе процесса удельный объем увеличивается, т.е.  $dv > 0$ . Тогда к ТДС подводится теплота ( $dq > 0$ ), РТ нагревается, его внутренняя энергия растет ( $du > 0$ ), кроме того, оно расширяется, совершая работу над ОС ( $dl > 0$ ). В рассмотренном случае к ТДС подводится столько теплоты, что за ее счет увеличивается внутренняя энергия системы, а также совершается работа расширения.

Предположим, что процесс, характеризующийся значением  $n = -1$ , протекает с уменьшением удельного объема, т.е.  $dv < 0$ . При этом ОС совершает работу над РТ, сжимая его, таким образом,  $dl < 0$ . Кроме того, падает внутренняя энергия ( $du < 0$ ), а ТДС отдает теплоту ОС ( $dq < 0$ ).

Обобщенные диаграммы позволяют без громоздких расчетов качественно анализировать термодинамические процессы и давать экспертное заключение о том, в каких тепловых машинах они могут использоваться на практике.

## 7. Термодинамика изэнтропного потока рабочего тела

### 7.1. Уравнение энергии (первый закон термодинамики) для потока рабочего тела

Рассмотрим трубопровод с турбиной (рис. 25), через который течет газ. Выберем в потоке два сечения.

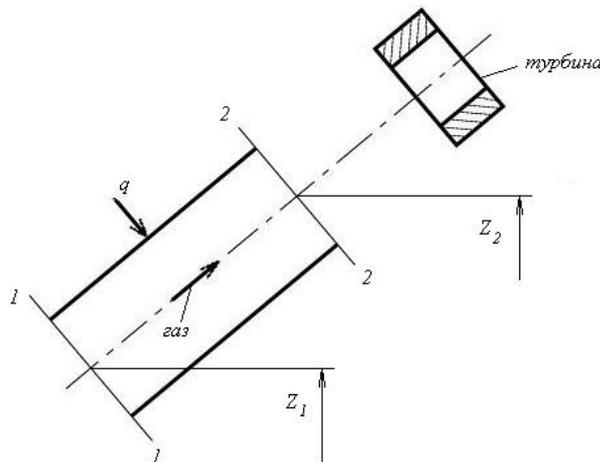


Рис. 25. Поток газа в трубопроводе с турбиной

Предположим, что в сечении 1, расположенном на высоте  $Z_1$ , газ имеет давление  $p_1$ , удельный объем  $v_1$ , внутреннюю энергию  $u_1$  и скорость течения  $w_1$ , а во втором (высота  $Z_2$ ) – соответственно  $p_2$ ,  $v_2$ ,  $u_2$  и  $w_2$ . Пусть к трубопроводу подводится теплота  $q$ .

Запишем первый закон термодинамики

$$dq = du + p \cdot dv.$$

Чему соответствует в исследуемом случае работа расширения  $p \cdot dv$ ? Очевидно, что при движении от сечения 1 к сечению 2 изменяются давление и удельный объем газа, за счет подводимой теплоты поток поднимается на

высоту  $h$  (от  $z_1$  к  $z_2$ ), совершает работу над турбиной  $l_{\text{тех}}$ , а скорость газа  $w$  возрастает. Тогда

$$p \cdot dv = d(p \cdot v) + d(g \cdot h) + d(w^2/2) + dl_{\text{тех}}.$$

Значит, для энергии потока РТ справедливо –

$$dq = du + d(p \cdot v) + d(g \cdot h) + d(w^2/2) + dl_{\text{тех}}.$$

Запишем модифицированное уравнение первого закона термодинамики

$$dq = di - v \cdot dp = d(u + p \cdot v) - v \cdot dp.$$

Отсюда

$$d(u + p \cdot v) = du + d(p \cdot v).$$

Таким образом, для располагаемой работы РТ в рассматриваемом случае можно получить

$$-v \cdot dp = d(g \cdot h) + d(w^2/2) + dl_{\text{тех}}.$$

## 7.2. Уравнение энергии изоэнтропного потока в коротких каналах

Для изоэнтропного потока справедливо условие

$$dq = 0.$$

Поскольку исследуется поток в коротком канале, работой гравитационного поля можно пренебречь, считая

$$d(g \cdot h) = 0.$$

Т.к. внешний элемент (турбина и пр.) отсутствует,  $l_{\text{тех}} = 0$  и

$$dl_{\text{тех}} = 0.$$

С учетом перечисленных замечаний общее уравнение для энергии потока РТ преобразуется к виду –

$$0 = di + d(w^2/2).$$

Фактически получено дифференциальное уравнение энергии изоэнтропного потока в коротких каналах. Можно без труда найти его интегральный вид. Действительно

$$d(i + w^2/2) = 0.$$

Когда дифференциал некоторой величины равен нулю, она является постоянной

$$i + w^2/2 = \text{const}, [\text{Дж/кг}].$$

Последнее уравнение показывает, что при течении изоэнтропного потока газа в коротких каналах сумма энтальпии и кинетической энергии РТ остается постоянной.

### 7.3. Уравнение неразрывности потока

Указанное в заголовке соотношение можно получить из геометрических соображений (рис. 26). Рассмотрим трубу, через которую течет газ. Выберем два сечения – 1 и произвольное, имеющее площадь  $f$ . Пусть плотность газа в нем составляет  $\rho$ . Очевидно, условие неразрывности потока заключается в том, что через каждое сечение трубы проходит точно такое же количество РТ, как и через любое предыдущее или последующее. С физической точки зрения это означает, что массовый расход газа в единицу времени не изменяется, т.е. –

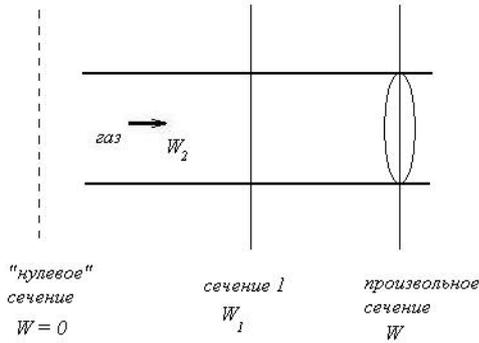


Рис. 26. Течение потока газа через трубу

$$m' = \text{const}, [кг/с].$$

Легко убедиться, что массовый расход в произвольном сечении, где скорость газа равна  $w$ , составляет –

$$m' = f \cdot w \cdot \rho = \text{const}.$$

### 7.4. Уравнение скорости звука в потоке

Скоростью звука в среде называют быстроту распространения там акустических колебаний.

Из физики известна формула Лапласа, согласно которой скорость звука равна

$$a = (\gamma \cdot R \cdot T)^{1/2}, [м/с]$$

где  $\gamma$  – коэффициент Пуассона.

### 7.5. Число (критерий) Маха

Критерий Маха представляет собой отношение скорости потока к скорости звука в этом потоке –

$$M = w/a.$$

Безразмерное число Маха фактически является выражением скорости через количество скоростей звука.

## 8. Уравнения термодинамики изоэнтропного потока

### 8.1. Температура в произвольном сечении потока

В технической термодинамике за аргумент чаще всего принимают отношение давлений  $p/p_1$ , где  $p_1$  – давление в исходном сечении потока, а  $p$  – в произвольном.

Отношение соответствующих температур  $T/T_1$  легко найти, если воспользоваться уравнением состояния для изоэнтропного процесса –

$$T/T_1 = (p/p_1)^{(\gamma-1)/\gamma}.$$

### 8.2. Плотность рабочего тела в произвольном сечении потока

Расчетное соотношение для плотности  $\rho T$  в изоэнтропном потоке можно получить, рассмотрев уравнения

$$p \cdot v^\gamma = \text{const} \quad \text{и} \quad v = 1/\rho.$$

Отсюда

$$\rho/\rho_1 = (p/p_1)^{1/\gamma}.$$

### 8.3. Удельный объем в произвольном сечении потока

Удельный объем и плотность  $\rho T$  – обратные величины. С учетом этого легко записать, используя предыдущую формулу, что

$$v_1/v = (p/p_1)^{1/\gamma}.$$

### 8.4. Скорость потока в произвольном сечении

Расчетное соотношение для скорости изоэнтропного потока является одним из важнейших в технической термодинамике и теории авиационных двигателей. Его можно вывести на основании уравнения энергии изоэнтропного потока в коротких каналах

$$i + w^2/2 = \text{const}.$$

Для исходного 1 и произвольного сечений потока справедливо

$$i_1 + w_1^2/2 = i + w^2/2.$$

Разрешим последнее равенство относительно искомой скорости  $w$ . Для этого перенесем исходное сечение 1 в положение “нулевого” сечения, где скорость потока равна нулю (рис. 26). Тогда

$$i_0 = i + w^2/2,$$

откуда

$$w^2 = 2 \cdot (i_0 - i)$$

и окончательно

$$w = [2 \cdot (i_0 - i)]^{1/2}.$$

На практике удобнее использовать другое выражение для расчета скорости потока, определяя ее не через энтальпию, а через температуру и давление.

Вспомним, что

$$i = c_p \cdot T \quad \text{и} \quad c_p = \gamma \cdot R / (\gamma - 1).$$

Тогда

$$i = \gamma \cdot R \cdot T / (\gamma - 1).$$

Подставим этот результат в формулу для  $w$

$$w = [2 \cdot \gamma \cdot R \cdot (T_0 - T) / (\gamma - 1)]^{1/2}.$$

Учитывая, что давление  $pT$  измерять удобнее, чем температуру, продолжим преобразования.

$$w = [2 \cdot \gamma \cdot R \cdot T_0 \cdot (1 - T/T_0) / (\gamma - 1)]^{1/2}.$$

Однако

$$T/T_0 = (p/p_0)^{(\gamma-1)/\gamma}.$$

Тогда

$$w = [2 \cdot \gamma \cdot R \cdot T_0 \cdot (1 - (p/p_0)^{(\gamma-1)/\gamma}) / (\gamma - 1)]^{1/2}.$$

В общем случае, когда исходное сечение не совпадает с “нулевым”, для скорости справедливо

$$w = \{ [2 \cdot \gamma \cdot R \cdot T_1 \cdot (1 - (p/p_1)^{(\gamma-1)/\gamma}) / (\gamma - 1)] + w_1^2 \}^{1/2}.$$

### 8.5. Скорость звука в произвольном сечении потока

Скорость звука в произвольном сечении изоэнтропного потока определяется по формуле Лапласа

$$a = (\gamma \cdot R \cdot T)^{1/2}.$$

## 9. Заторможенные и критические параметры потока

### 9.1. Параметры заторможенного потока (параметры торможения)

Поток газа в произвольном сечении характеризуется давлением  $p$ , температурой  $T$ , скоростью  $w$ , скоростью звука  $a$ , плотностью  $\rho$  и удельным объемом  $v$ .

*Параметры*, свойственные  $pT$ , которое имеет скорость  $w_0 = 0$ , при отсутствии всякого рода потерь, называют *параметрами заторможенного потока* (торможения). Их принято обозначать добавлением нижнего индекса “0”. Если потери имели место, параметры  $pT$  с нулевой скоростью называют *параметрами восстановления*.

Определим температуру торможения  $T_0$ , считая температуру  $T$  в произвольном сечении потока известной. Вспомним, что для изоэнтропного потока

$$i + w^2/2 = \text{const} \quad \text{и} \quad i_0 = i + w^2/2.$$

Кроме этого,

$$i = c_p \cdot T = \gamma \cdot R \cdot T / (\gamma - 1).$$

Отсюда

$$\gamma \cdot R \cdot T_0 / (\gamma - 1) = [\gamma \cdot R \cdot T / (\gamma - 1)] + w^2 / 2.$$

Заметим, что скорость звука

$$a = (\gamma \cdot R \cdot T)^{1/2}, \text{ т.е. } a^2 = \gamma \cdot R \cdot T.$$

Помимо прочего,

$$M = w/a, \text{ т.е. } M^2 = w^2/a^2.$$

Вернемся к уравнению

$$\gamma \cdot R \cdot T_0 / (\gamma - 1) = [\gamma \cdot R \cdot T / (\gamma - 1)] + w^2 / 2$$

и разделим обе его части на отношение  $\gamma \cdot R \cdot T / (\gamma - 1)$

$$T_0/T = 1 + w^2 \cdot (\gamma - 1) / 2 \cdot \gamma \cdot R \cdot T.$$

Но  $\gamma \cdot R \cdot T = a^2$ , а  $w^2/a^2 = M^2$ .

Отсюда

$$T_0/T = 1 + w^2 \cdot (\gamma - 1) / 2 \cdot a^2$$

и окончательно

$$T_0/T = 1 + (\gamma - 1) \cdot M^2 / 2 \quad \text{или} \quad T_0 = T \cdot [1 + (\gamma - 1) \cdot M^2 / 2].$$

По аналогичной формуле можно определить температуру восстановления  $T_B$ . Потери энергии при этом учитываются с помощью коэффициента  $r$  ( $r = 0,8 \dots 0,95$ )

$$T_B = T \cdot [1 + r \cdot (\gamma - 1) \cdot M^2 / 2].$$

Таким образом, температура торможения всегда больше температуры восстановления, т.е.  $T_0 > T_B$ .

Определим давление торможения  $p_0$ , полагая давление  $p$  в произвольном сечении потока известным. Для изоэнтропного потока справедливо

$$T_0/T = (p_0/p)^{(\gamma-1)/\gamma}.$$

Отсюда

$$p_0/p = (T_0/T)^{\gamma/(\gamma-1)}.$$

С учетом соотношения  $T_0/T$ , полученного выше, можно записать

$$p_0/p = [1 + (\gamma - 1) \cdot M^2 / 2]^{\gamma/(\gamma-1)} \quad \text{или} \quad p_0 = p \cdot [1 + (\gamma - 1) \cdot M^2 / 2]^{\gamma/(\gamma-1)}.$$

Определим далее плотность заторможенного потока  $\rho_0$ , считая  $\rho$  в произвольном сечении известной. Для изоэнтропного потока

$$\rho_0/\rho = (p_0/p)^{1/\gamma}.$$

Тогда, учитывая отношение  $p_0/p$ , записанное чуть выше, получим

$$\rho_0/\rho = [1 + (\gamma - 1) \cdot M^2/2]^{1/(\gamma - 1)}$$

и окончательно

$$\rho_0 = \rho \cdot [1 + (\gamma - 1) \cdot M^2/2]^{1/(\gamma - 1)}.$$

Принимая во внимание, что плотность и удельный объем являются обратными величинами, удельный объем заторможенного потока можно определить из равенства

$$v/v_0 = [1 + (\gamma - 1) \cdot M^2/2]^{1/(\gamma - 1)},$$

принимая удельный объем  $v$  в произвольном сечении известным.

Что касается скорости заторможенного потока  $w_0$ , то она тождественно равна нулю по определению. Скорость звука  $a_0$  в заторможенном потоке вычисляется по уравнению Лапласа

$$a_0 = (\gamma \cdot R \cdot T_0)^{1/2}.$$

## 9.2. Критические параметры потока

*Критическими* называются *параметры* потока в том сечении, где *скорость потока равна скорости звука*, т.е.

$$w \equiv a.$$

Такие параметры принято обозначать, добавляя к соответствующему символу нижний индекс “\*”, например,  $T^*$ .

Экспериментальным путем установлено, что параметры потока достигают критических значений в каналах конусообразных форм, причем в наиболее узких сечениях (рис. 27).

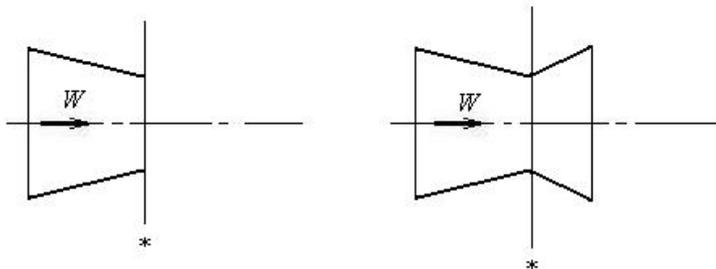


Рис. 27. Критические сечения (\*) конусообразных каналов

Эти сечения также называют *критическими*. Определим критическую температуру  $T^*$ . Запишем равенство, полученное выше

$$T_0/T = 1 + (\gamma - 1) \cdot M^2/2.$$

Примем за произвольное сечение критическое, т.е.  $T = T^*$ ,  $w_* = a_*$ ,  $M = M_* = w_*/a_*$ .

Очевидно, что в критическом сечении число Маха равно единице. Тогда

$$T_0/T_* = 1 + (\gamma - 1)/2.$$

Преобразуем правую часть последнего равенства

$$1 + (\gamma - 1)/2 = (2 + \gamma - 1)/2 = (\gamma + 1)/2.$$

Тогда

$$T_0/T_* = (\gamma + 1)/2,$$

откуда

$$T_*/T_0 = 2/(\gamma + 1).$$

Окончательно

$$T_* = 2 \cdot T_0/(\gamma + 1).$$

Определим критическое давление  $p_*$ . Для изоэнтропного потока

$$p_*/p_0 = (T_*/T_0)^{\gamma/(\gamma-1)}.$$

Отсюда легко получить искомый результат –

$$p_* = p_0 \cdot [2/(\gamma + 1)]^{\gamma/(\gamma-1)}.$$

Определим критическую плотность  $\rho_*$ . Для изоэнтропного потока

$$\rho_*/\rho_0 = (p_*/p_0)^{1/\gamma}.$$

Но

$$p_*/p_0 = [2/(\gamma + 1)]^{\gamma/(\gamma-1)}.$$

Отсюда

$$\rho_*/\rho_0 = [2/(\gamma + 1)]^{1/(\gamma-1)}$$

и окончательно

$$\rho_* = \rho_0 \cdot [2/(\gamma + 1)]^{1/(\gamma-1)}.$$

Критический удельный объем  $v_*$  нетрудно определить из равенства

$$v_0/v_* = [2/(\gamma + 1)]^{1/(\gamma-1)},$$

т.к.  $v = 1/\rho$ .

Определим скорость  $w_*$  в критическом сечении потока. По определению она равна скорости звука, т.е.  $w_* = a_*$ . Согласно формуле Лапласа

$$w_* = a_* = (\gamma \cdot R \cdot T_*)^{1/2}.$$

На практике для расчета  $w_*$  используется другое равенство. Преобразуем полученное выражение с учетом формулы для  $T_*$ , т.е.

$$T_* = 2 \cdot T_0/(\gamma + 1).$$

Домножим обе ее части на произведение  $\gamma \cdot R$

$$\gamma \cdot R \cdot T_* = 2 \cdot \gamma \cdot R \cdot T_0/(\gamma + 1).$$

Возьмем квадратный корень, и тогда

$$w_* = (\gamma \cdot R \cdot T_*)^{1/2} = [2 \cdot \gamma \cdot R \cdot T_0 / (\gamma + 1)]^{1/2}.$$

Необходимо сделать важное замечание. Последнее равенство при решении практических задач *нельзя* путать с формулой для вычисления максимальной скорости течения потока. Ранее было получено, что

$$w = [2 \cdot \gamma \cdot R \cdot T_0 \cdot (1 - T/T_0) / (\gamma - 1)]^{1/2},$$

где  $T$  – температура газа в произвольном сечении. Если за критическим сечением канал расширяется, а температура потока падает, то скорость истечения  $w$  возрастает. Приведенное соотношение отражает закон преобразования тепловой энергии в кинетическую. Очевидно, что поток достигнет максимальной скорости, когда его температура  $T$  станет равной нулю, т.е.

$$w_{\max} = [2 \cdot \gamma \cdot R \cdot T_0 / (\gamma - 1)]^{1/2}.$$

Согласно третьему закону термодинамики абсолютного нуля температуры достичь нельзя. Таким образом, практически невозможно добиться и максимальной скорости течения потока  $w$ . Значит, всегда справедливо неравенство

$$w_* < w_{\max}.$$

## 10. Процесс истечения рабочего тела

### 10.1. Вывод основного расчетного соотношения

Получим зависимость площади сечения изоэнтропного потока от скорости  $w$  и числа Маха  $M$ , т.е.

$$f = f(w, M).$$

За основу выкладок возьмем уравнение неразрывности потока

$$f \cdot w \cdot \rho = f \cdot w / v = m' = \text{const}, [кг/с]$$

Прологарифмируем отношение  $f \cdot w / v$

$$\ln f + \ln w - \ln v = \text{const}.$$

Продифференцируем полученный результат

$$df/f + dw/w - dv/v = 0.$$

Отсюда выразим отношение  $df/f$

$$df/f = dv/v - dw/w.$$

Далее исключим параметр  $v$ . Для этого запишем уравнение изоэнтропного процесса, считая его частным случаем политропного, т.е.

$$p \cdot v^\gamma = \text{const.}$$

Прологарифмируем последнее равенство

$$\ln p + \gamma \cdot \ln v = \text{const.}$$

Продифференцируем результат

$$dp/p + \gamma \cdot (dv/v) = 0.$$

Отсюда выразим отношение  $dv/v$

$$dv/v = - (1/\gamma) \cdot dp/p.$$

Из этой формулы теперь необходимо исключить параметр  $p$ . Воспользуемся модифицированной формой записи первого закона термодинамики

$$dq = di - v \cdot dp,$$

где  $dq = 0$ , т.к. рассматривается изоэнтропный процесс. Полагая канал коротким, запишем

$$0 = di + d(w^2/2) = di + w \cdot dw$$

(меняются энтальпия и скорость течения РТ). Из последних двух формул следует, что

$$- v \cdot dp = w \cdot dw \quad \text{или} \quad - dp = w \cdot dw/v.$$

Тогда

$$dv/v = w \cdot dw / \gamma \cdot p \cdot v.$$

Поскольку  $p \cdot v = R \cdot T$ , для скорости звука справедливо

$$a = (\gamma \cdot R \cdot T)^{1/2} = (\gamma \cdot p \cdot v)^{1/2}.$$

Домножим правую часть равенства

$$dv/v = w \cdot dw / \gamma \cdot p \cdot v$$

на отношение  $w/w$ . В итоге, учитывая  $a = (\gamma \cdot p \cdot v)^{1/2}$ , получим

$$dv/v = (w/a)^2 \cdot dw/w.$$

Этот результат подставим в формулу

$$df/f = dv/v - dw/w,$$

исключив из нее параметр  $v$

$$df/f = (w/a)^2 \cdot dw/w - dw/w.$$

Учтем, что  $(w/a)^2 = M^2$ . Тогда –

$$df/f = (M^2 - 1) \cdot dw/w.$$

Фактически получено уравнение течения изоэнтропного потока, выражающее площадь его сечения через местную скорость РТ и число Маха, т.е. –

$$f = f(w, M).$$

По существу оно является модифицированным уравнением неразрывности потока и устанавливает закон изменения площади проходного сечения канала в зависимости от скорости потока, а также позволяет оптимально подбирать сечения выходных устройств авиационных газотурбинных двигателей.

## 10.2. Анализ уравнения $f = f(w, M)$

Одним из важнейших агрегатов современных авиационных двигателей (реактивных и турбореактивных) служат сопла, через которые истекает РТ (рис. 28).

Для изоэнтропного потока РТ выше было получено уравнение

$$df/f = (M^2 - 1) \cdot dw/w.$$

Проанализируем его, переписав в виде

$$dw/w = df/f \cdot (M^2 - 1).$$

Этот анализ позволит ответить на вопрос: какую форму должен иметь канал (тракт) сопла, чтобы выполнялось распределение скоростей потока, показанное на рис. 28?

Очевидно, что и слева, и справа от критического сечения скорость потока  $w$  и ее дифференциал  $dw$  больше нуля. Отсюда следует, что и  $dw/w > 0$ , т.е. поток ускоряется, что позволяет реализовать на практике принцип реактивного движения.

Сначала рассмотрим канал слева от критического сечения, где скорость потока  $w$  меньше скорости звука  $a$ . Таким образом, здесь число Маха  $M < 1$ . Значит,  $M^2 < 1$ , а  $(M^2 - 1) < 0$ . Диаметр (и, естественно, площадь  $f$ ) канала – величина положительная. Поскольку  $f > 0$ ,  $(M^2 - 1) < 0$ , а  $dw/w > 0$ , из уравнения

$$dw/w = df/f \cdot (M^2 - 1)$$

следует, что должно соблюдаться условие  $df < 0$ . Таким образом, до критического сечения канал *сужается* (рис. 28).

Теперь рассмотрим канал справа от критического сечения, где скорость потока  $w$  превышает скорость звука  $a$ . Здесь число Маха  $M > 1$ . Отсюда  $M^2 > 1$ , а  $(M^2 - 1) > 0$ . Поскольку  $f > 0$ ,  $dw/w > 0$ , из приведенного выше уравнения

следует, что  $df > 0$ , т.е. *после* критического сечения канал *расширяется* (рис. 28).

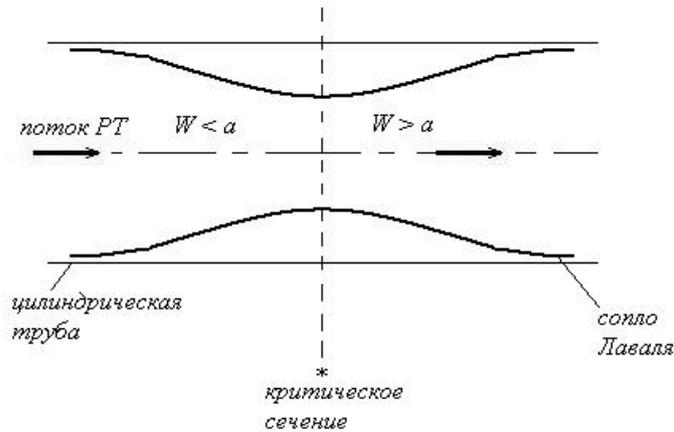


Рис. 28. Принципиальная схема сопла Лавая

Анализ показывает, что, используя только сужающийся канал сопла, максимально можно получить лишь звуковую скорость истечения потока РТ (двигатели с такими соплами установлены на большинстве современных гражданских воздушных судов). Чтобы добиться сверхзвуковой скорости истечения, после критического сечения канала необходимо расширять тракт сопла (двигатели с *регулируемыми* соплами устанавливались на самолетах Ту-144 и “Конкорд”).

### 10.3. Физическое пояснение формы сопла Лавая

*Соплом Лавая* (рис. 28) называют *соплом*, позволяющее ускорить поток РТ до *сверхзвуковых* скоростей. Рассмотрим распределение скорости  $w$ , давления  $p$  и плотности  $\rho$  РТ вдоль тракта сопла (рис. 29). При этом воспользуемся известными соотношениями

$$w = [2 \cdot \gamma \cdot R \cdot T_0 (1 - (p/p_0)^{(\gamma-1)/\gamma}) / (\gamma - 1)]^{1/2}, \quad \rho = \rho_0 \cdot (p/p_0)^{1/\gamma} \quad \text{и} \quad m' = f \cdot w \cdot \rho = \text{const.}$$

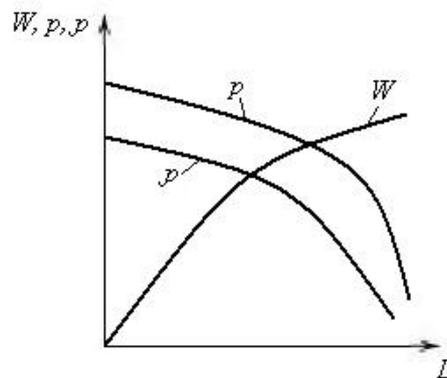


Рис. 29. Качественное изменение скорости, давления и плотности потока РТ по тракту сопла Лавая

Из уравнения расхода следует, что площадь канала

$$f = \text{const}/w \cdot \rho.$$

В дозвуковой части тракта плотность РТ меняется мало, оставаясь практически постоянной, а вот скорость потока быстро растет, т.е. площадь канала должна суживаться. В сверхзвуковой части тракта скорость увеличивается менее значительно, зато плотность потока стремительно падает, т.е. площадь канала должна расширяться.

Итак, при ускорении потока РТ на значение площади проходного сечения канала  $f$  влияет произведение  $w \cdot \rho$ . В дозвуковой части влияние скорости превалирует над влиянием плотности, т.е. форма канала как бы отслеживает увеличение скорости. В сверхзвуковой части ситуация меняется, на значение произведения  $w \cdot \rho$  в большей степени влияет уменьшение плотности потока.

Кроме того, проведенный анализ позволяет сделать вывод, что сверхзвуковые потоки сжимаемы, а дозвуковые – практически нет.

#### 10.4. Критическое сечение потока

Вспомним, что *критическим* принято называть сечение потока, в котором достигается равенство  $w/a = M = 1$ . Критическое сечение соотносится с сечением канала, имеющим наименьшую площадь  $f$ .

Равенство  $w = a$ , как правило, реализуется для потоков РТ, когда выполняется условие  $p_k/p_n > 2$ , где  $p_k$  – давление в канале, а  $p_n$  – давление снаружи (давление ОС). При достижении в критическом сечении равенства скоростей потока  $w$  и звука а дальнейшее увеличение давления  $p_k$  на ускорение потока не влияет.

#### 10.5. Уравнение расхода рабочего тела при сверхкритическом (сверхзвуковом) истечении

В общем случае массовый расход описывается известным уравнением

$$m' = f \cdot w \cdot \rho.$$

В критическом сечении

$$m'_* = f_* \cdot w_* \cdot \rho_*, \quad w_* = [2 \cdot \gamma \cdot R \cdot T_0 / (\gamma + 1)]^{1/2}, \quad \rho_* = \rho_0 \cdot [2 / (\gamma + 1)]^{1/(\gamma - 1)}.$$

Из уравнения состояния  $p \cdot v = R \cdot T$ , поскольку  $\rho = 1/v$ , следует

$$\rho = p/R \cdot T,$$

откуда

$$\rho_0 = p_0/R \cdot T_0.$$

Подставим записанные соотношения в уравнение для массового расхода

$$m'_* = f_* \cdot [2 \cdot \gamma / (\gamma + 1)]^{1/2} \cdot (R \cdot T_0)^{1/2} \cdot (p_0 / R \cdot T_0) \cdot [2 / (\gamma + 1)]^{1/(\gamma - 1)} =$$

$$= f_* \cdot p_0 \cdot (1 / R \cdot T_0)^{1/2} \cdot [2 \cdot \gamma / (\gamma + 1)]^{1/2} \cdot [2 / (\gamma + 1)]^{1/(\gamma - 1)}.$$

Введем обозначение

$$b = f(\gamma) = [2 \cdot \gamma / (\gamma + 1)]^{1/2} \cdot [2 / (\gamma + 1)]^{1/(\gamma - 1)}.$$

Тогда

$$m'_* = f_* \cdot p_0 \cdot b / (R \cdot T_0)^{1/2}.$$

Для большинства РТ коэффициент Пуассона  $\gamma = 1,1 \dots 1,67$ . Таким образом, значения функции  $b = f(\gamma)$  лежат в области  $0,63 \dots 0,66$ .

## 11. Круговые термодинамические процессы

### 11.1. Типы круговых процессов

*Круговым* называют термодинамический процесс, при завершении которого РТ возвращается в исходное состояние. Очень часто такие процессы именуют *циклами*. Принципиально различают три типа циклов – *нулевой*, *холодильный* и *цикл тепловых машин* (двигателей).

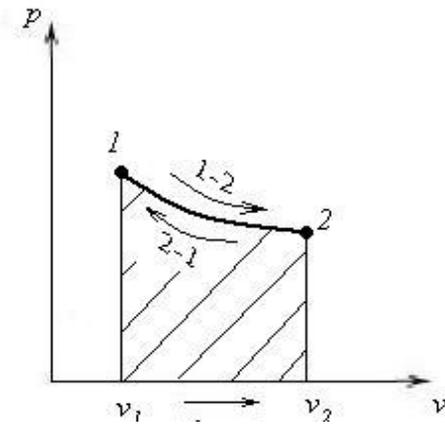


Рис. 30. Рабочая диаграмма нулевого цикла

Рабочая диаграмма нулевого цикла представлена на рис. 30. Такой цикл характеризуется тем, что РТ при протекании процессов 1–2 и 2–1 проходит через одни и те же состояния. При этом работа  $l_{1-2}$  положительна, а  $l_{2-1}$  – отрицательна. Из рис. 30 видно, что по модулю они равны. Тогда для полезной работы справедливо –

$$l_{\text{пол}} = l_{1-2} - l_{2-1} \equiv 0.$$

Таким образом, при нулевом цикле *полезной работы не совершается*.

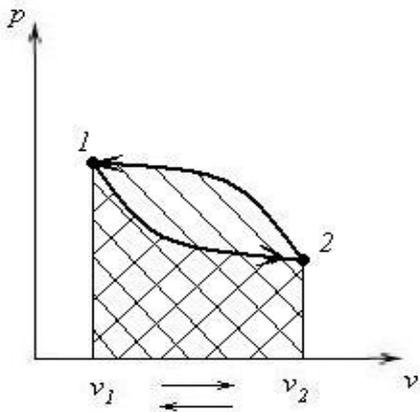


Рис. 31. Рабочая диаграмма холодильного цикла

Рабочая диаграмма холодильного цикла показана на рис. 31. В этом случае при протекании процесса 1–2 работа положительна, поскольку объем РТ возрастает, а при протекании процесса 2–1 – отрицательна. Из графика (рис. 31) видно, что по модулю  $|l_{2-1}| > |l_{1-2}|$ , т.к. диаграмма процесса 2–1 лежит выше, чем 1–2. Итак, по модулю отрицательная работа больше. Значит, полезная работа  $l_{\text{пол}} < 0$ .

Рассмотренный цикл лежит в основе работы холодильных машин.

Рабочая диаграмма цикла тепловых машин представлена на рис. 32. В

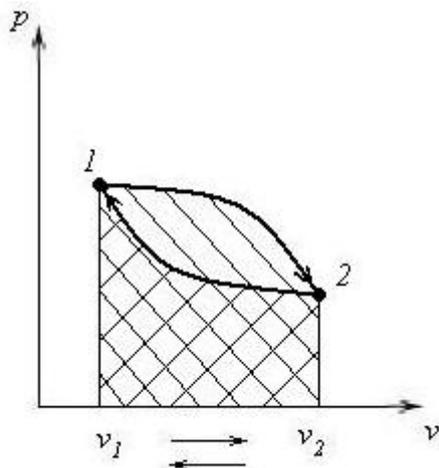


Рис. 32. Рабочая диаграмма цикла тепловых машин

этом случае при протекании процесса 1–2 работа тоже положительна, а при протекании процесса 2–1 – отрицательна, однако, из графика ясно, что здесь по модулю работа  $l_{1-2}$  больше, чем  $l_{2-1}$  (кривая 1–2 лежит выше, чем 2–1). Таким образом, полезная работа тоже положительна –

$$l_{\text{пол}} = l_{1-2} - l_{2-1} > 0.$$

Рассмотренный цикл лежит в основе работы всех тепловых машин, к которым относятся и авиационные двигатели.

## 11.2. Схема простейшей тепловой машины

Рассмотрим для примера простейший электрогенератор, принципиальная схема которого показана на рис. 33.

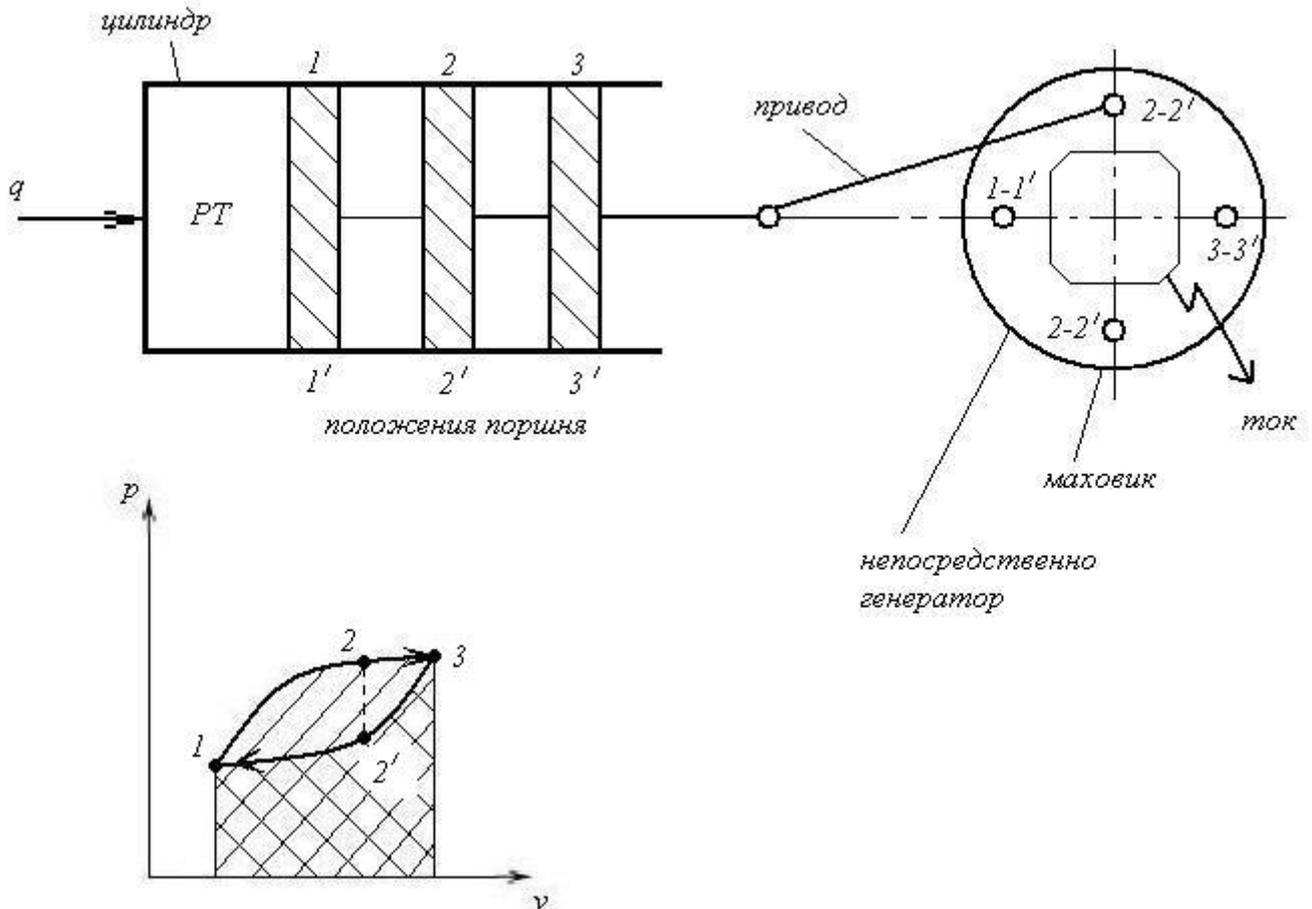
Длительно действующую тепловую машину можно создать, если положить в основу ее функционирования режим кругового термодинамического процесса, когда в ходе цикла подводимая к РТ энергия частично возвращается РТ для того, чтобы вернуть его в исходное состояние. При этом желательно добиться, чтобы по возможности большая доля подводимой энергии преобразовывалась в полезную работу РТ над ОС.

В рассматриваемом примере первично подводимая к РТ энергия  $q$  при расширении РТ через систему “поршень-привод” передается маховику и ротору электрогенератора. В дальнейшем энергия, накопленная при вращении маховиком, расходуется на возвращение РТ в исходное состояние. Затем описанный цикл непрерывно повторяется на протяжении необходимого промежутка времени.

## 11.3. Воздушно-реактивный двигатель и его цикл

Исследование любой тепловой машины начинают с составления и описания ее цикла. Вообще говоря, процесс работы всех тепловых машин можно привести к тому или иному циклу, правда, делая некоторые исходные допущения.

Рассмотрим простейший воздушно-реактивный авиационный двигатель (ВРД), в изучаемом случае – газотурбинный, т.е. ГТД, – и составим цикл его работы. С большой степенью достоверности можно считать, что цикл ВРД включает в себя четыре частных термодинамических процесса (рис. 34).



$$l_{\text{пол}} = l_{1-3} - l_{3-1}$$

Рис. 33. Принципиальная схема простейшей тепловой машины и рабочая диаграмма ее цикла

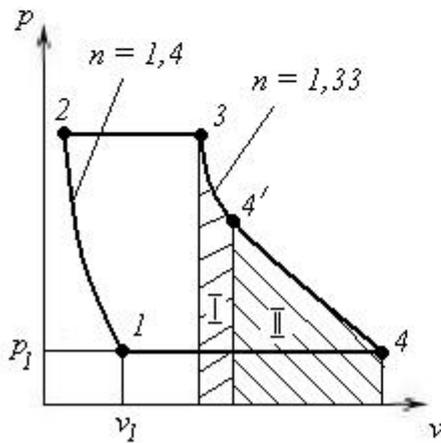
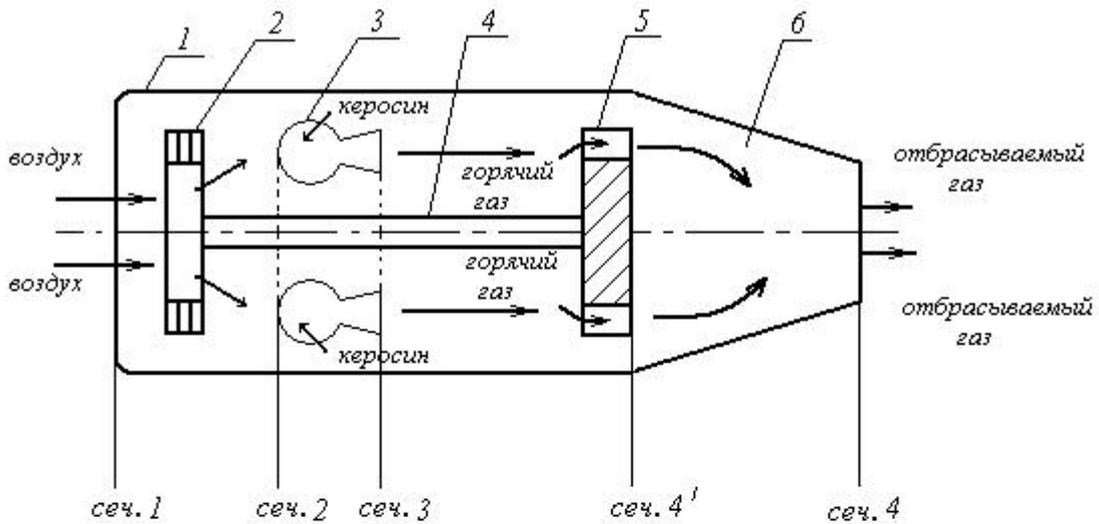
Процесс 1–2 – адиабатное (без теплообмена с ОС) сжатие воздуха (он является как составной частью РТ ВРД, так и компонентом горючего – за счет содержащегося в нем кислорода-окислителя), поступающего из ОС, компрессором.

Процесс 2–3 – изобарный подогрев РТ в камере сгорания вследствие горения керосина (топлива) в кислороде воздуха.

Процесс 3–4 – адиабатное расширение нагретого РТ (воздуха и продуктов сгорания керосина) сначала на лопатках турбины, а затем – в канале сопла.

Процесс 4–1 – изобарное охлаждение истекшего из сопла РТ в окружающей атмосфере. Теоретически полагается, что остывший до температуры ОС воздух можно снова подать на вход тракта ВРД и использовать опять, чего, конечно, в реальности не происходит.

ВРД является открытой ТДС. Цикл работы ГТД называют *циклом Брайтона*.



1 - корпус

2 - компрессор

3 - камера сгорания

4 - вал (опоры условно не показаны)

5 - турбина

6 - дозвуковой сопловой блок

Рис. 34. Схема простейшего ВРД (входное устройство условно не обозначено) и его рабочая диаграмма: **I** – работа газа над турбиной; **II** – преобразование тепловой энергии РТ в кинетическую энергию потока (реактивной струи); 1–2 – адиабатное сжатие РТ; 2–3 – изобарное нагревание РТ; 3–4 – адиабатное расширение РТ; 4–1 – изобарное охлаждение РТ

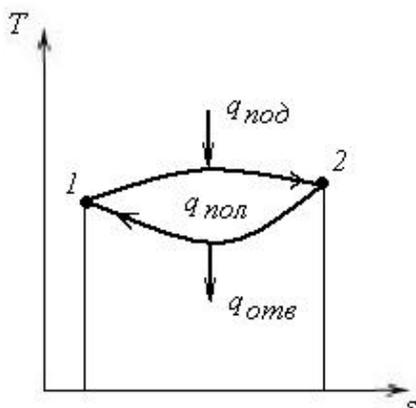


Рис. 35. Тепловая диаграмма произвольного цикла

#### 11.4. Коэффициент полезного действия цикла

Рассмотрим тепловую диаграмму произвольного цикла (рис. 35). Предположим, что количество подведенной в ходе цикла к ТДС теплоты  $q_{\text{под}}$  больше, чем отведенной  $q_{\text{отв}}$ . Тогда количество полезной теплоты  $q_{\text{пол}}$  будет равно –

$$q_{\text{пол}} = q_{\text{под}} - q_{\text{отв}}.$$

Коэффициентом полезного действия (КПД) цикла называют отношение количества полезной теплоты (полезной работы) к общему количеству теплоты (энергии), подведенной к РТ, т.е.

$$\eta_T = (q_{\text{под}} - q_{\text{отв}})/q_{\text{под}} = q_{\text{пол}}/q_{\text{под}}$$

Записанное выражение является универсальным для определения *термического* КПД тепловых машин. Чтобы найти значение общего КПД машины, необходимо учитывать так же потери энергии на преодоление сил механического трения, газодинамические потери (в ГТД) и т.д.

### 11.5. Предельное значение термического КПД. Цикл Карно

Определение предельного значения термического КПД указывает пути совершенствования цикла тепловой машины и говорит о возможности такого совершенствования.

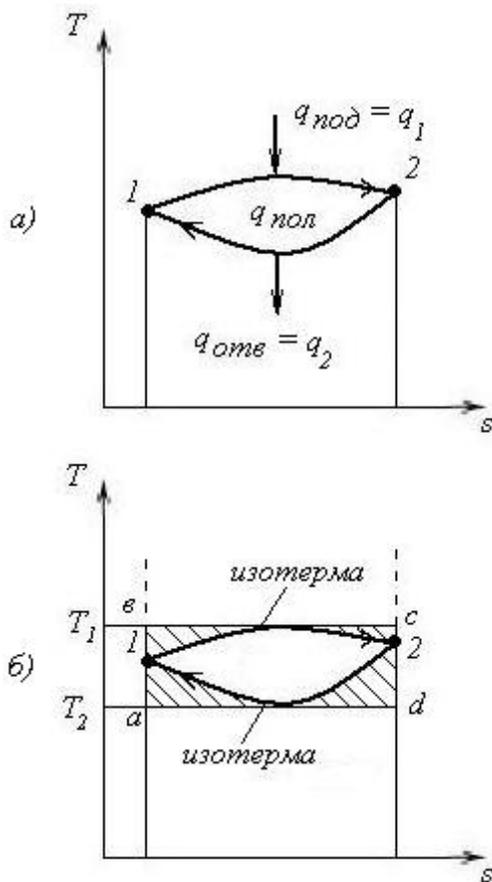


Рис. 36. Иллюстрация к определению предельного значения КПД цикла (штриховкой выделены “прибавки”)

Рассмотрим тепловую диаграмму произвольного цикла (рис. 36, а). Установим подведенное  $q_1$  и отведенное  $q_2$  количества теплоты в цикле. Очевидно, что процесс подведения к ТДС теплоты 1–2 не является оптимальным. Его реализация приводит к дополнительным потерям энергии.

Наилучшим процессом подвода к ТДС теплоты служит изотермический. Оптимален такой процесс и при возвращении ТДС теплоты. Таким образом, если заменить произвольный процесс 1–2 процессом а–b–с–d (рис. 36, б), можно получить положительные энергетические “прибавки”.

Цикл а–b–с–d проходит через крайние (предельные) значения температуры и энтропии:  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $s_1$ ,  $s_2$ . Он состоит из последовательности процессов:

1. а–b – изоэнтропное сжатие;
2. b–с – изотермическое расширение;
3. с–d – изоэнтропное расширение;
4. d–а – изотермическое сжатие.

С энергетической точки зрения практическая реализация цикла а–b–с–d при прочих равных условиях позволяет получить максимальный термический

КПД  $\eta_T$ . Цикл, подобный a–b–c–d (рис. 36, б), называют *циклом Карно*. В своем роде он является *идеальным*, т.е. реализовать его практически невозможно.

При приближении реального цикла к циклу Карно увеличивается количество теплоты  $q_1$ , подводимое к ТДС, и уменьшается количество теплоты  $q_2$ , возвращаемое ТДС ОС, т.е. возрастает количество полезной теплоты  $q_{\text{пол}} = q_1 - q_2$  до предельно возможного значения в заданном интервале температуры  $\Delta T = T_1 - T_2$ . Значит, повышается и термический КПД тепловой машины.

Получим формулу для расчета предельного термического КПД тепловой машины. Очевидно, что

$$\eta_T = q_{\text{пол}}/q_1 = (q_1 - q_2)/q_1 = 1 - q_2/q_1.$$

Для изотермических процессов справедливо

$$ds = dq/T \rightarrow dq = T \cdot ds \rightarrow$$

$$\int_0^q dq = \int_{s_1}^{s_2} T \cdot ds \rightarrow q = T \cdot (s_2 - s_1) = T \cdot \Delta s.$$

Таким образом, для *цикла Карно* можно получить

$$\eta_{\text{TK}} = 1 - q_2/q_1 = 1 - (T_2 \cdot \Delta s / T_1 \cdot \Delta s) = 1 - T_2/T_1.$$

Достичь на практике такого значения КПД невозможно, т.к. нельзя реализовать протекание самого цикла Карно. Это связано с тем, что не удастся обеспечить прохождение идеальных изотермических процессов, поскольку *абсолютной термоизоляции* не существует.

Однако значение  $\eta_{\text{TK}}$  служит показателем совершенства цикла изучаемой тепловой машины. Всегда соблюдается неравенство

$$\eta_{\text{TK}} > \eta_T,$$

т.е.  $\eta_{\text{TK}} - \eta_T = \Delta\eta > 0$ . Чем *меньше* величина  $\Delta\eta$ , тем тепловая машина *совершеннее*. КПД цикла Карно показывает, можно ли ее усовершенствовать.

### 11.6. Различные формулировки второго закона термодинамики

В широком смысле слова *второй закон* термодинамики указывает *направление протекания* энергетических процессов *естественным путем*. Обычно второй закон термодинамики формулируют следующим образом: теплота в ходе естественных процессов самопроизвольно передается только от более горячих к менее нагретым телам. Нужно еще раз отметить, что этот

закон, как и другие законы термодинамики, установлен не теоретически, а феноменологически.

Помимо приведенной формулировки второго закона термодинамики, есть еще и ряд других, эквивалентных ей и следующих из выражения предельного термического КПД цикла (цикла Карно)

$$\eta_{\text{TK}} = 1 - T_2/T_1.$$

Отсюда, во-первых, следует, что *нельзя создать непрерывно действующий двигатель с  $\eta_{\text{TK}} = 1$* , т.к.  $\eta_{\text{TK}} = 1$  либо при  $T_1 \equiv \infty$ , либо при  $T_2 \equiv 0$ , т.е. нужно иметь или источник теплоты с бесконечно высокой температурой, или приемник теплоты с температурой, равной абсолютному нулю, чего невозможно достичь практически. *Всю энергию РТ нельзя превратить в полезную работу.*

Во-вторых, *невозможно построить вечный двигатель (второго рода), имеющий только один источник теплоты, т.е. без так называемого “холодильника” (приемника теплоты).* В реальных тепловых машинах таким “холодильником” является ОС, а ее температура  $T_2$  всегда больше абсолютного нуля. Если даже считать ОС изотермической, непроизводительное (не идущее на совершение полезной работы) количество теплоты равно

$$q_2 = T_2 \cdot \Delta s = T_{\text{OC}} \cdot \Delta s.$$

Последнее количество теплоты никак нельзя превратить в полезную работу, т.е. с практической точки зрения оно расходуется впустую.

### 11.7. Математическое выражение второго закона термодинамики

Математическое выражение второго закона термодинамики базируется на понятии “энтропия”, непосредственно связанном с температурой РТ.

Сперва рассмотрим равновесный обратимый процесс (цикл), т.е. такой, который в прямом и обратном направлениях протекает без каких-либо потерь энергии через одни и те же промежуточные равновесные состояния. Возьмем изолированную систему двух тел, характеризующихся температурами  $T_1$  и  $T_2$ , и исследуем процесс теплообмена между ними. Для равновесных процессов справедливо

$$dT \rightarrow 0, \text{ т.е. } T_1 = T_2.$$

Рассчитаем изменение энтропии системы изучаемых тел

$$ds = ds_1 + ds_2,$$

где  $ds_1 = dq/T_1$ ;  $ds_2 = dq/T_2$ .

Т.к.  $T_1 = T_2$ , а  $dq$  для рассматриваемых тел одно и то же, то

$$|ds_1| = |ds_2|.$$

Предположим, что  $ds_1 > 0$ , а  $ds_2 < 0$ . Тогда

$$ds = 0.$$

Таким образом, при протекании равновесного обратимого процесса в изолированной ТДС естественным путем изменение энтропии системы равно нулю.

Теперь рассмотрим изменение энтропии в изолированной системе для неравновесного и необратимого процесса, протекающего с потерями энергии. Пусть систему составляют два тела с температурами  $T_1$  и  $T_2$  соответственно, причем  $T_1 > T_2$ . Естественно, здесь  $dT \neq 0$ . Рассчитаем изменение энтропии в этом случае. Как и прежде

$$ds = ds_1 + ds_2,$$

где  $ds_1 = dq/T_1$ ;  $ds_2 = dq/T_2$ , но  $|ds_1| \neq |ds_2|$ . Т.к. (согласно сделанному предположению)  $T_1 > T_2$ , по модулю  $|ds_1| < |ds_2|$ , причем дифференциал  $ds_1$  отрицателен, а  $ds_2$  положителен. Таким образом, изменение энтропии системы рассматриваемых тел

$$ds = -|ds_1| + |ds_2| > 0.$$

Значит, при протекании неравновесного и необратимого процесса в изолированной ТДС ее энтропия возрастает.

Проведенный анализ позволяет сделать вывод: при протекании естественных термодинамических процессов в изолированных системах *энтропия остается постоянной или возрастает*

$$ds \geq 0.$$

Эта формула является математическим выражением второго закона термодинамики.

## РАЗДЕЛ 2. ТЕПЛОПЕРЕДАЧА

### 1. Общие сведения о процессах теплообмена

#### 1.1. Способы передачи теплоты

Вспомним, что *теплопередача* – наука, изучающая закономерности *переноса теплоты* без учета ее преобразования в работу (другие формы энергии).

Различают три способа передачи теплоты: *теплопроводностью*, *конвекцией* и посредством *лучистого теплообмена*.

*Теплопроводностью* называют процесс передачи теплоты в теле или среде на уровне молекул при их непосредственном взаимодействии. К *телам* относят твердые объекты, а к *средам* – жидкие и газообразные системы.

Под *конвекцией* понимают передачу теплоты на макроуровне, т.е. ее перенос с помощью некоторого теплоносителя. Обычно таким теплоносителем служат жидкости или газы. Совокупность явлений теплопроводности и конвекции называют *конвективным теплообменом*.

Конвекция бывает *естественной* и *вынужденной*. В первом случае движение теплоносителя осуществляется за счет природных сил (гравитации, Архимедовой), а во втором – посредством искусственных (например, с помощью насоса).

*Лучистый теплообмен* – сложный вид теплообмена между телами и средами, когда энергия от одного тела к другому через пространство переносится электромагнитным полем (чаще всего – инфракрасными лучами).

## 1.2. Формы теплообмена

Различают три формы теплообмена: *теплопроводность*, *теплоотдачу* и *теплопередачу* (рис. 37).

При теплопроводности передача теплоты внутри тел и сред осуществляется от одного слоя молекул к другому (рис. 37, а). Теплоотдача заключается в процессе передачи теплоты от тела к среде (или наоборот) на их границе (рис. 37, б). Теплопередачей называют процесс передачи теплоты от одной среды к другой через твердую преграду (рис. 37, в).

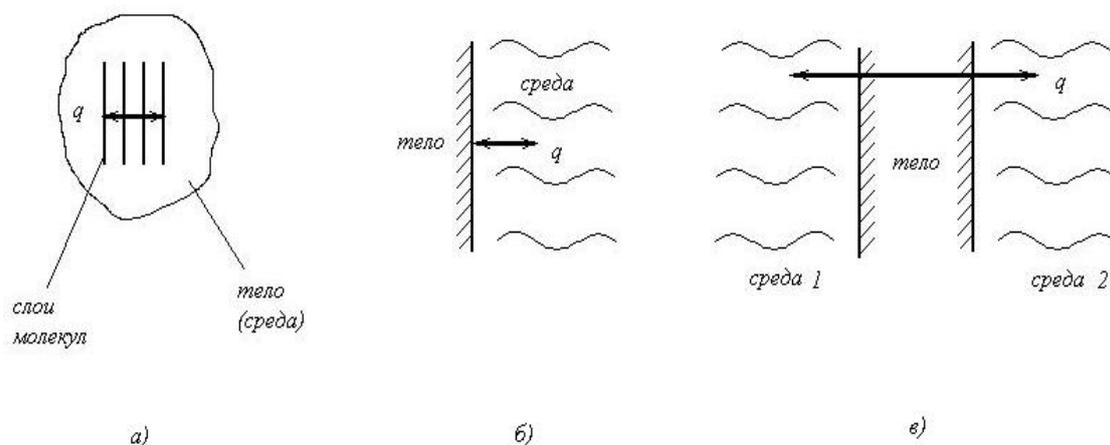


Рис. 37. Схемы, поясняющие формы теплообмена

## 1.3. Основные параметры теплообмена

К важнейшим параметрам теплообмена относятся:

- температура тела (среды)  $T$ , измеряемая в “градусах Кельвина”  $[K]$ ;
- количество передаваемой теплоты  $Q$  (единицей ее измерения служит  $[Дж]$ );
- тепловой поток  $q$ , измеряемый в  $[Дж/с] = [Вт]$ ;
- плотность теплового потока  $q^*$ , измеряемая в  $[Вт/м^2]$ .

### 1.4. Закон теплопроводности (Фурье)

Математически закон теплопроводности выражается уравнением

$$q^* = -\lambda \cdot (dT/dn),$$

где  $q^*$  – плотность теплового потока;  $dT/dn$  – градиент температуры по направлению распространения потока, измеряемый в  $[K/m]$ ;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности материала тела (среды), формально равный отношению  $q^*/(dT/dn)$  и измеряемый в  $[Wm/(K \cdot m)]$ ;  $n$  – координата, совпадающая с направлением распространения теплового потока.

Таким образом, закон Фурье утверждает, что плотность теплового потока в теле или среде пропорциональна коэффициенту теплопроводности вещества и градиенту температуры по направлению распространения теплового потока.

### 1.5. Закон конвективного теплообмена (Ньютона)

Для процесса теплоотдачи закон конвективного теплообмена имеет вид

$$q^* = \alpha \cdot (T_B - T_{CT}),$$

где  $q^*$  – плотность теплового потока на границе “тело-среда” (“стенка-воздух”), см. рис. 37, б;  $T_B$  – температура восстановления среды (воздуха) на границе с телом (стенкой), причем

$$T_B = T \cdot [1 + r \cdot (\gamma - 1) \cdot M^2/2];$$

здесь  $r$  – коэффициент потерь энергии;  $\gamma$  – коэффициент Пуассона среды;  $M$  – число Маха;  $T$  – температура потока в произвольном сечении;  $T_{CT}$  – температура тела (стенки), которая при практическом решении задач конвективного теплообмена, осуществляемого методом итераций, в первом приближении задается как ожидаемая;  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи, измеряемый в  $[Wm/(K \cdot m^2)]$  и формально равный отношению  $q^*/(T_B - T_{CT})$ .

Для процесса теплопередачи справедливо равенство

$$q^* = K \cdot (T_B - T_{CT}),$$

где коэффициент теплопередачи  $K = f(\alpha_1, \alpha_2, \lambda)$ . Здесь  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – коэффициенты теплоотдачи первой и второй сред соответственно, а  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности материала преграды (рис. 37, в). Если она многослойная, то  $K = f(\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2, \dots)$ .

Таким образом, согласно закону Ньютона плотность конвективного теплового потока пропорциональна разности температур среды и тела на их границе, а также коэффициенту теплоотдачи (теплопередачи).

### 1.6. Расчет процесса конвективного теплообмена

При решении задач конвективного теплообмена главное внимание уделяется определению коэффициента теплоотдачи  $\alpha$ . Он, как правило,

находится из экспериментально полученных критериальных уравнений теплообмена, характерных для исследуемого случая.

Например, для теплообмена между РТ (воздухом и продуктами сгорания топлива) и конструктивными элементами сопла ГТД, где  $T_{ст} \approx 0,8 \cdot T_{в}$ , при вычислении  $\alpha$  можно использовать соотношение

$$Nu = 0,0296 \cdot Re^{0,8} \cdot Pr^{1/3}.$$

В этом уравнении критерий Нуссельта, величина безразмерная, составляет  $Nu = \alpha \cdot d / \lambda_{газа}$ , где  $d$  – диаметр изучаемого сечения потока РТ (газа), и фактически представляет собой безразмерный эквивалент искомого коэффициента теплоотдачи  $\alpha$ . Значение коэффициента теплопроводности РТ  $\lambda_{газа}$  выбирают из справочных таблиц. Критерий Рейнольдса  $Re$ , безразмерный эквивалент массовой скорости потока РТ, определяемой произведением  $w \cdot \rho_{газа}$ , равен

$$Re = w \cdot \rho_{газа} \cdot d / \eta_{газа},$$

где  $w$ , [м/с] – локальная скорость потока РТ в изучаемом сечении;  $\rho_{газа}$ , [кг/м<sup>3</sup>] – плотность РТ;  $\eta_{газа}$ , [Па/с] – динамическая вязкость потока РТ, выбираемая из справочных таблиц. Безразмерный комплекс физических параметров потока, критерий Прандтля, составляет

$$Pr = c_p \cdot \eta_{газа} / \lambda_{газа},$$

где  $c_p$  – удельная изобарная теплоемкость РТ, [Дж/кг].

Таким образом, в рассматриваемом случае искомым коэффициент теплоотдачи  $\alpha$  при известных параметрах потока РТ можно рассчитать по соотношению

$$\alpha = \lambda_{газа} \cdot 0,0296 \cdot Re^{0,8} \cdot Pr^{1/3} / d.$$

Далее легко найти плотность теплового потока

$$q^* = \alpha \cdot (T_{в} - T_{ст}).$$

### 1.7. Закон лучистого теплообмена (Стефана-Больцмана)

Согласно закону Стефана-Больцмана плотность теплового потока при лучистом теплообмене пропорциональна степени черноты излучающего тела и разности температур теплоносителя и этого тела, возведенных в четвертую степень. Математически закон Стефана-Больцмана выражается равенством

$$q_{л}^* = 5,67 \cdot \varepsilon_{эф} \cdot [(T_{г}/100)^4 - (T_{ст}/100)^4],$$

где 5,67 – эмпирический коэффициент;  $T_{г}$  – температура теплоносителя (газа), причем  $T_{г} = T^*$  ( $T^*$  – критическая температура потока);  $T_{ст}$  – температура излучающего тела (стенки);  $\varepsilon_{эф}$  – коэффициент эффективности процесса лучистого теплообмена. Значение  $\varepsilon_{эф}$  составляет

$$\varepsilon_{\text{эф}} = (1 + \varepsilon_{\text{ст}})/2.$$

Здесь  $\varepsilon_{\text{ст}} \approx 0,8$  – коэффициент, показывающий соотношение интенсивностей излучения исследуемого тела и абсолютно черного, для которого  $\varepsilon_{\text{ст}} = 1$ . Таким образом,  $\varepsilon_{\text{ст}}$  характеризует *степень черноты* излучающего тела.

При решении практических задач лучистого теплообмена обычно используют понятие эквивалентного коэффициента теплоотдачи лучеиспусканием

$$\alpha_{\text{л}} = q_{\text{л}}^*/(T_{\text{в}} - T_{\text{ст}}),$$

где  $T_{\text{в}}$  – температура восстановления теплоносителя.

Следует заметить, что в том случае, когда перенос теплоты осуществляется одновременно посредством процессов конвективного и лучистого теплообмена, суммарное значение коэффициента теплоотдачи определяется по формуле

$$\alpha_{\text{сум}} = \alpha + \alpha_{\text{л}}.$$

Коэффициент  $\alpha_{\text{сум}}$  используется при расчетах нагрева элементов различных конструкций.

## 2. Теплопроводность тел и сред

### 2.1. Температурное поле и температурный градиент

Под *температурным полем* понимают совокупность значений температур, присущих точкам исследуемого тела (среды).

В общем случае температура  $T$  представляет собой функцию координат точек тела, времени процесса теплообмена  $\tau$  и мощности внутренних источников теплоты  $W$  (при их наличии)

$$T = f(x, y, z, \tau, W).$$

Общее уравнение теплопроводности тела (среды) имеет вид

$$dT/d\tau = a \cdot [(\partial^2 T/\partial x^2) + (\partial^2 T/\partial y^2) + (\partial^2 T/\partial z^2)] + W/c \cdot \rho,$$

где  $T$  – температура;  $\tau$  – время процесса;  $x, y, z$  – координаты точки;  $W$  – мощность внутренних источников теплоты;  $c$  – удельная теплоемкость тела;  $\rho$  – его плотность,  $a$  – *температуропроводность*, равная отношению

$$a = \lambda/c \cdot \rho.$$

Здесь  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности материала тела.

При решении практических задач часто рассматриваются частные случаи общего уравнения теплопроводности.

*Нульмерной* принято считать задачу, когда температура одинакова во всем объеме тела и является функцией только времени, т. е.

$$T = f(\tau).$$

Различают два типа *одномерных* задач, *стационарную* и *нестационарную*. Здесь температура зависит от продольной координаты  $x$ , т.е. изменяется лишь по длине тела (стержня). В стационарном случае от времени температура не зависит: как установилась, так и держится. Тогда температура является функцией одной продольной координаты

$$T = f(x).$$

В нестационарном случае справедливо

$$T = f(x, \tau).$$

По аналогичному принципу (“стационарность-нестационарность”) разделяют *двумерные* и *трехмерные* задачи при отсутствии внутренних источников теплоты. Для таких задач соответственно

$$T = f(x, y) \text{ или } T = f(x, y, \tau);$$

$$T = f(x, y, z) \text{ или } T = f(x, y, z, \tau).$$

Особый класс задач теплопроводности образуют те, которые предполагают наличие внутри изучаемого тела (среды) источника теплоты. Например, внутри тела при его нагреве могут протекать химические реакции, сопровождающиеся выделением или поглощением теплоты. Подобные процессы в общем уравнении теплопроводности учитываются слагаемым, включающим значение  $W$  – мощность внутренних источников теплоты.

Внутри исследуемого тела (среды) можно наблюдать линии и поверхности, характеризующиеся одинаковым значением температуры. Подобные линии (поверхности) называют *изотермическими*. Очевидно, что изотермы не пересекаются.

Теплота в теле (среде) самопроизвольно распространяется от более нагретых к менее нагретым точкам (слоям молекул), причем *интенсивнее* вдоль местных нормалей к изотермам (рис. 38).

Помимо понятия “тепловой поток”, тепловое состояние тела характеризуется так же *градиентом температуры* внутри этого тела. Градиент температуры, обозначаемый  $\text{grad}T_n$  или просто  $\text{grad}T$ , определяется отношением

$$\text{grad}T = \lim_{\Delta n \rightarrow 0} (\Delta T / \Delta n),$$

откуда следует, что  $\text{grad}T = dT/dn$ .

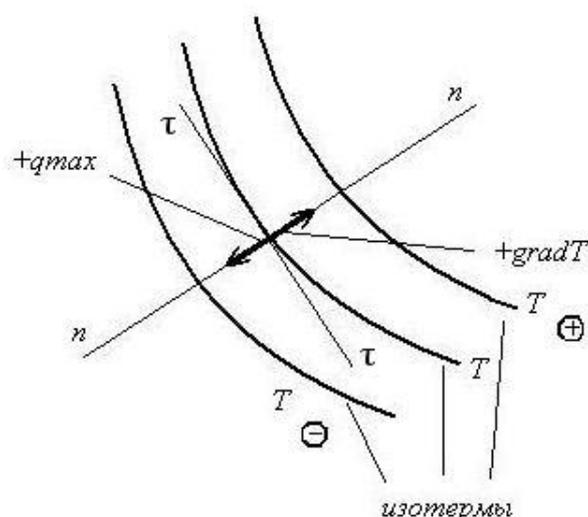


Рис. 38. Схема самопроизвольного распространения теплоты в теле  
( $n$  – нормаль,  $\tau$  – касательная к изо терме)

Необходимо подчеркнуть, что положительное значение градиента температуры отсчитывается в сторону ее повышения, противоположную распространению теплового потока  $q$ . Это обстоятельство объясняет, почему в уравнении теплопроводности (Фурье) правая часть содержит знак “минус” –

$$q^* = -\lambda \cdot (dT/dn).$$

При решении ряда задач теплопроводности температурное поле и его изменение определяются не в направлении нормалей к изо термам, а вдоль осей системы декартовых координат  $\langle x, y, z \rangle$ . Естественно, что направления координатных осей и нормалей не совпадают. Поэтому приходится вычислять градиент температуры через его проекции на координатные оси, т.е.  $\text{grad}T_x$ ,  $\text{grad}T_y$  и  $\text{grad}T_z$ .

## 2.2. Постановка задачи о решении уравнения теплопроводности для тел и сред

В общем случае ставится задача об определении температурного поля тела (среды) во всех его точках для каждого из значений текущих моментов времени. При решении такой задачи требуется составить ее математическую модель, включающую уравнение теплопроводности тела и условия однозначности решения задачи.

При записи уравнения теплопроводности нужно учитывать *размерность* и *стационарность* исследуемого случая. В общем случае задача является трехмерной и нестационарной, т.е.

$$T = f(x, y, z, \tau).$$

Решение подобного уравнения нельзя найти, если не знать условий однозначности, справедливых для изучаемого случая.

На практике различают следующие группы условий однозначности.

1. *Геометрические*, учитывающие форму тела (шар, пластина, стержень и т.д.) и его размеры.

2. *Физические*, характеризующие теплопроводность, теплоемкость, плотность и т.п. тела (среды), а также зависимость перечисленных свойств от других параметров и времени.

3. *Начальные временные*, т.е. значения параметров тела (среды) в исходном состоянии, когда время  $\tau = 0$ .

4. *Граничные*, подразделяющиеся на *четыре рода*.

Граничные условия первого рода состоят в том, что задается температура поверхности  $T_{\text{п}}$  изучаемого тела

$$T_{\text{п}} = f(x, y, z, \tau).$$

Граничные условия второго рода соответствуют тому, что на поверхности исследуемого тела задается плотность теплового потока –

$$q_{\text{п}}^* = -\lambda \cdot (dT/dn).$$

Граничные условия третьего рода заключаются в том, что задается тепловой поток к изучаемому телу со стороны ОС

$$q^* = \alpha \cdot (T_{\text{в}} - T_{\text{п}}),$$

где  $q^*$  – плотность указанного теплового потока;  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи;  $T_{\text{п}}$  – температура поверхности тела;  $T_{\text{в}}$  – температура восстановления среды.

Исходя из условия неразрывности теплового потока, последнее равенство можно переписать в виде

$$\alpha \cdot (T_{\text{в}} - T_{\text{п}}) = -\lambda \cdot (dT/dn).$$

Приведенное граничное условие широко используется для решения задач конвективного теплообмена.

При решении задач, связанных с теплообменом между двумя контактирующими твердыми телами, применяют граничные условия четвертого рода. Они состоят в том, что на границе тел тепловые потоки от одного тела к другому равны, т.е.

$$q^* = q_1^* = q_2^*,$$

где  $q_1^* = -\lambda_1 \cdot (dT/dn_1)$  и  $q_2^* = -\lambda_2 \cdot (dT/dn_2)$ .

Отсюда

$$\lambda_1 \cdot (dT/dn_1) = \lambda_2 \cdot (dT/dn_2).$$

Таким образом, чтобы решить теплофизическую задачу, необходимо записать уравнение теплопроводности и соответствующие условия однозначности, причем из граничных условий выбирается какое-либо *одно*, а вот прочие условия однозначности формулируются *все*. В итоге для определения температурного поля тела (среды) и тепловых потоков получается

система дифференциальных уравнений с наложенными на них начальными условиями (задача Коши). Решение такой системы может проводиться аналитическим путем, посредством численных методов, с использованием *теории подобия* (см. ниже), а также методов размерностей с последующим переходом на критериальные соотношения. Кроме того, возможен экспериментальный путь решения, основанный на гидро- или электро моделировании процесса нагрева тела (среды).

### 2.3. Решение некоторых задач теплопроводности тел

Рассмотрим задачу о нестационарной теплопроводности тела в нульмерной постановке. В этом случае температура всех точек тела в один и тот же момент времени одинакова и изменяется только в зависимости от времени  $\tau$

$$T = f(\tau).$$

Такую задачу можно решить, используя соотношение теплового баланса между телом и ОС при их взаимодействии.

Выделим на поверхности исследуемого тела бесконечно малый элемент в форме параллелепипеда с высотой (толщиной), равной  $\delta$ . Пусть его площадь, взаимодействующая с ОС, составляет  $f$ . Положим температуру тела равной  $T$ , коэффициент теплопроводности –  $\lambda$ , удельную теплоемкость –  $c$ , плотность –  $\rho$ . Пусть от ОС (газа) к телу идет тепловой поток с плотностью  $q^*$ , ОС имеет температуру  $T_{ос} = T_B$  (восстановления), а процесс теплообмена характеризуется коэффициентом теплоотдачи  $\alpha$ .

Составим уравнение теплового баланса. Очевидно, что от ОС к телу в каждый момент времени поступает элементарное количество теплоты  $dQ$

$$dQ_{среды} = q^* \cdot \alpha \cdot d\tau = \alpha \cdot (T_B - T) \cdot f \cdot d\tau. \quad [Дж]$$

С другой стороны, за тот же момент времени тело приобретает элементарное количество теплоты

$$dQ_{тела} = c \cdot m \cdot dT, \quad [Дж]$$

где  $m$  – масса выделенного элемента тела. Для нее справедливо

$$m = V \cdot \rho,$$

где  $V$  – объем элемента. Он равен  $V = f \cdot \delta$ . Отсюда масса  $m = f \cdot \delta \cdot \rho$ , а

$$dQ_{тела} = c \cdot f \cdot \delta \cdot \rho \cdot dT.$$

*Тепловой баланс* состоит в том, что количества теплоты, поступающей от ОС и приобретаемой телом, равны между собой, т.е.

$$dQ_{среды} = dQ_{тела}.$$

Отсюда

$$c \cdot f \cdot \delta \cdot \rho \cdot dT = \alpha \cdot (T_B - T) \cdot f \cdot d\tau \quad \text{или} \quad c \cdot \delta \cdot \rho \cdot dT = \alpha \cdot (T_B - T) \cdot d\tau.$$

Последнее уравнение разрешим относительно температуры тела  $T$ .

$$dT/(T_B - T) = (\alpha/c \cdot \rho \cdot \delta) \cdot d\tau.$$

Проинтегрируем полученное соотношение

$$\int_{T_B - T_0}^{T_B - T} \frac{dT}{T_B - T} = \int_0^{\tau} (\alpha/c \cdot \rho \cdot \delta) \cdot d\tau.$$

Здесь начальный момент времени процесса  $\tau_0$  принят равным нулю, а  $T_0$  – начальная температура тела – считается известной, как и  $T_B$ . Итак,

$$\begin{aligned} -\ln[(T_B - T)/(T_B - T_0)] &= (\alpha/c \cdot \rho \cdot \delta) \cdot \tau, \\ \ln[(T_B - T)/(T_B - T_0)] &= -(\alpha/c \cdot \rho \cdot \delta) \cdot \tau, \\ (T_B - T)/(T_B - T_0) &= e^{-(\alpha/c \cdot \rho \cdot \delta) \cdot \tau}. \end{aligned}$$

Решение рассматриваемой задачи фактически получено. Однако в теории теплопроводности исторически принято представлять расчетные формулы, используя безразмерные критерии. Приведем записанное соотношение к критериальному виду. Для этого выделим комплекс величин

$$(\alpha/c \cdot \rho \cdot \delta) \cdot \tau.$$

Домножим и разделим его на произведение

$$(\lambda/\lambda) \cdot (\delta/\delta).$$

Тогда

$$(\lambda/\lambda) \cdot (\alpha/c \cdot \rho \cdot \delta) \cdot (\delta/\delta) \cdot \tau.$$

Переобъединим параметры комплекса величин

$$(\alpha \cdot \delta/\lambda) \cdot (\lambda/c \cdot \rho \cdot \delta^2) \cdot \tau.$$

Вспомним, что температуропроводность  $a$  составляет

$$a = \lambda/c \cdot \rho.$$

Таким образом, комплекс преобразовался к виду

$$(\alpha \cdot \delta/\lambda) \cdot (a/\delta^2) \cdot \tau.$$

Первый множитель  $(\alpha \cdot \delta/\lambda)$  принято обозначать  $Bi$  и называть критерием Био

$$Bi = \alpha \cdot \delta/\lambda.$$

Следует отметить, что критерий Био является аналогом критерия Нуссельта

$$Nu = \alpha \cdot d / \lambda_{\text{газа}}.$$

В критерий Био входят  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи,  $\delta$  – геометрический параметр, характеризующий тело, и  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности тела.

Оставшиеся множители комплекса называют критерием Фурье

$$Fo = (a/\delta^2) \cdot \tau = a \cdot \tau / \delta^2.$$

Он представляет собой безразмерное время процесса.

Итак,

$$(\alpha/c \cdot \rho \cdot \delta) \cdot \tau = Bi \cdot Fo.$$

Отношение температур  $(T_b - T)/(T_b - T_0)$  принято обозначать  $\theta$

$$\theta = (T_b - T)/(T_b - T_0).$$

Фактически  $\theta$  – безразмерная температура.

Критерии  $\theta$ ,  $Bi$  и  $Fo$  являются основными в теории теплопроводности, причем вид критерия  $\theta$  может варьироваться (например,  $\theta = T/T_0$ ). Этот критерий показывает отношение искомой температуры к какой-либо базовой.

С учетом введенных обозначений решение рассматриваемой задачи принимает вид

$$\theta = e^{-Bi \cdot Fo}.$$

Записанное уравнение справедливо только для нульмерных нестационарных задач, когда неравномерностью распределения температуры  $T$  по объему тела можно пренебречь. Анализ уравнения позволяет сделать вывод, что в таких случаях теплопроводность тела должна быть высока, а значение критерия Био, напротив, мало.

Далее рассмотрим задачу о стационарной теплопроводности плоской пластины в одномерной постановке (рис. 39).

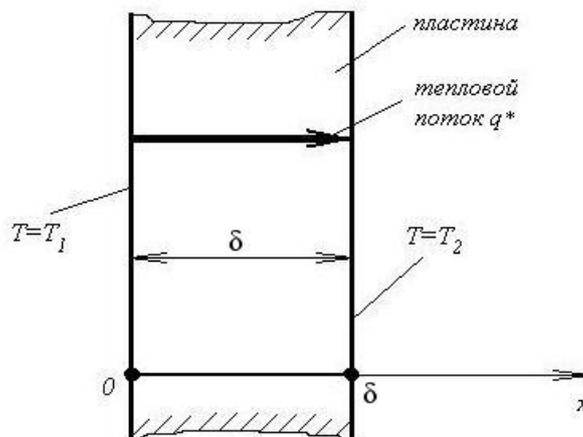


Рис. 39. Расчетная схема задачи о стационарной теплопроводности пластины в одномерной постановке

Сначала посмотрим математическую модель задачи. По условию (стационарность, одномерность) температурное поле не зависит от времени  $\tau$  и координат  $y, z$ . В этом случае уравнение теплопроводности примет вид –

$$d^2T/dx^2 = 0.$$

Теперь определим геометрические условия однозначности. Они состоят в том, что рассматривается пластина толщиной  $\delta$ .

При записи физических условий однозначности предположим, что коэффициент теплопроводности пластины  $\lambda = \text{const}$ .

Начальные временные условия однозначности заключаются в том, что в исходном состоянии (при  $\tau = 0$ ) температура левой стороны пластины ( $x = 0$ )  $T = T_1$ , а правой ( $x = \delta$ ) –  $T = T_2$  (рис. 39).

В качестве граничных используем условия первого рода, т.е. будем считать известной температуру на сторонах пластины (поверхности тела), причем  $T_1 = \text{const}$ ;  $T_2 = \text{const}$ .

Таким образом, математическая модель задачи построена полностью. При решении требуется определить распределение температур по толщине пластины (стенки) и плотность теплового потока  $q^*$ , проходящего через пластину.

Проинтегрируем дифференциальное уравнение

$$d^2T/dx^2 = 0.$$

Отсюда

$$dT/dx = \text{const} = C_1.$$

Далее

$$\int dT = \int C_1 \cdot dx.$$

Таким образом,

$$T = C_1 \cdot x + C_2, \quad C_2 = \text{const}.$$

Чтобы определить значения произвольных постоянных  $C_1$  и  $C_2$ , используем условия однозначности. Т.к. при  $x = 0$   $T = T_1$ , то  $C_2 = T_1$ . Поскольку при  $x = \delta$   $T = T_2$ , то

$$T_2 = C_1 \cdot \delta + C_2 \rightarrow T_2 = C_1 \cdot \delta + T_1 \rightarrow C_1 = (T_2 - T_1)/\delta.$$

Итак,  $C_2 = T_1$ ;  $C_1 = -(T_1 - T_2)/\delta$ , т.к.  $T_1 > T_2$  (рис. 39, направление теплового

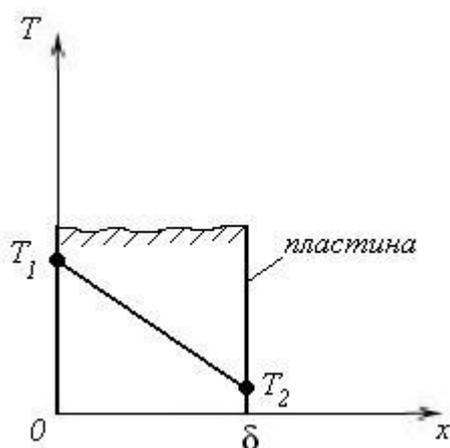


Рис. 40. График изменения температуры по толщине пластины

потока). Для температуры справедлива линейная зависимость от  $x$

$$T = [-(T_1 - T_2)/\delta] \cdot x + T_1.$$

Плотность теплового потока найдем, применив закон Фурье

$$q^* = -\lambda \cdot (dT/dn) = -\lambda \cdot (dT/dx)$$

(направление координаты  $x$  совпадает с нормалью).

$$dT/dx = C_1 = -(T_1 - T_2)/\delta.$$

Тогда

$$q^* = -\lambda \cdot C_1 = \lambda \cdot (T_1 - T_2)/\delta.$$

Поставленная задача фактически решена (определены  $T = T(x)$  и  $q^*$ ). Можно, кроме того, без труда построить график (рис. 40), иллюстрирующий изменение температуры по толщине пластины (стенки).

Несколько усложним рассмотренную задачу, представив, что пластина является многослойной (условия стационарности и одномерности постановки сохраняются). В простейшем случае (рис. 41) пластина состоит из двух слоев. Решим новую задачу, приняв граничные условия первого рода, т.е. считая известными температуры на поверхностях пластины. Для решения этой задачи можно использовать соотношения, полученные в предыдущем случае.

Для двухслойной стенки справедливы соотношения

$$q^* = \lambda_1 \cdot (T_1 - T_2)/\delta_1 \quad (1\text{-й слой}), \quad q^* = \lambda_2 \cdot (T_2 - T_3)/\delta_2 \quad (2\text{-й слой}).$$

Эти два уравнения можно разрешить относительно разности температур ( $T_1 - T_3$ )

$$T_1 - T_2 = q^* \cdot \delta_1/\lambda_1; \quad T_2 - T_3 = q^* \cdot \delta_2/\lambda_2,$$

откуда

$$T_1 - T_2 + T_2 - T_3 = T_1 - T_3 = q^* \cdot [(\delta_1/\lambda_1) + (\delta_2/\lambda_2)].$$

Последнее равенство легко расширить на общий случай, когда пластина состоит из  $n$  слоев

$$T_1 - T_{n+1} = q^* \cdot \sum_{i=1}^n (\delta_i/\lambda_i).$$

Полученное уравнение можно разрешить относительно плотности исходного теплового потока

$$q^* = (T_1 - T_{n+1}) / \sum_{i=1}^n (\delta_i/\lambda_i).$$

Далее выведем соотношение для расчета поля температур многослойной стенки (внутри каждого слоя температура меняется по линейному закону). Из равенства

$$T_1 - T_2 = q^* \cdot \delta_1 / \lambda_1$$

следует, что

$$T_2 = T_1 - q^* \cdot \delta_1 / \lambda_1.$$

Т.к.

$$T_2 - T_3 = q^* \cdot \delta_2 / \lambda_2,$$

то

$$T_3 = T_2 - q^* \cdot \delta_2 / \lambda_2.$$

Подставим сюда выражение для  $T_2$

$$T_3 = T_1 - (q^* \cdot \delta_1 / \lambda_1) - (q^* \cdot \delta_2 / \lambda_2).$$

Тогда

$$T_3 = T_1 - q^* \cdot [(\delta_1 / \lambda_1) + (\delta_2 / \lambda_2)].$$

Полученная формула справедлива для двухслойной пластины. Ее можно без труда расширить на общий случай

$$T_{n+1} = T_1 - q^* \cdot \sum_{i=1}^n (\delta_i / \lambda_i).$$

Записанная формула используется для расчета температур на границах слоев многослойных пластин.

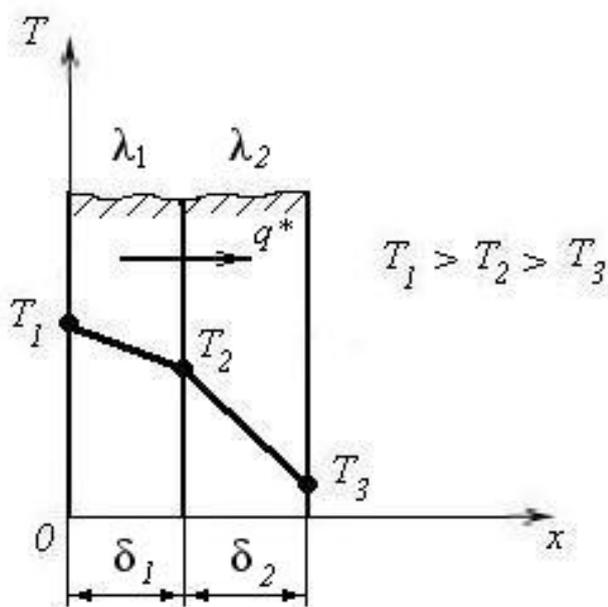


Рис. 41. Иллюстрация к задаче о стационарной теплопроводности двухслойной пластины

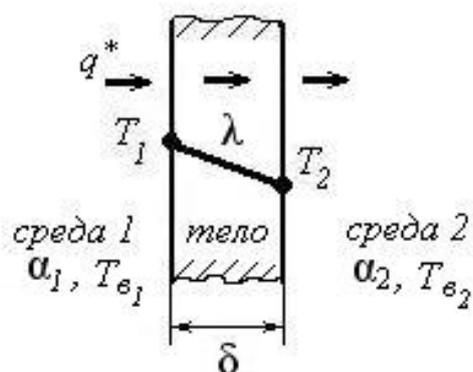


Рис. 42. Теплопередача через однослойную преграду

#### 2.4. Решение теплофизической задачи при процессе теплопередачи

Вспомним, что *теплопередачей* называют процесс передачи теплоты от одной среды к другой через твердую преграду (рис. 37, в).

Сначала определим параметры теплопередачи через однослойную стенку (рис. 42), имеющую толщину  $\delta$ , а также коэффициент теплопроводности  $\lambda$ . Найдем

расчетные соотношения для плотности теплового потока  $q^*$  и температур на поверхности преграды ( $T_1$  и  $T_2$ ), полагая известными параметры обеих сред, контактирующих с телом (температуры восстановления  $T_{в1}$  и  $T_{в2}$ ; коэффициенты теплоотдачи  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ ).

Для этого запишем три уравнения тепловых потоков, используя уравнения Ньютона и Фурье

$$q^* = \alpha_1 \cdot (T_{в1} - T_1); q^* = \alpha_2 \cdot (T_2 - T_{в2}); q^* = \lambda \cdot (T_1 - T_2) / \delta.$$

Разрешим эти уравнения относительно температур

$$T_{в1} - T_1 = q^* / \alpha_1; T_2 - T_{в2} = q^* / \alpha_2; T_1 - T_2 = q^* \cdot \delta / \lambda$$

и сложим полученные результаты

$$T_{в1} - T_{в2} = q^* \cdot [(1/\alpha_1) + (1/\alpha_2) + (\delta/\lambda)].$$

Отсюда для плотности теплового потока справедливо

$$q^* = (T_{в1} - T_{в2}) / [(1/\alpha_1) + (1/\alpha_2) + (\delta/\lambda)].$$

Обозначим коэффициент теплопередачи  $K = f(\alpha_1, \alpha_2, \lambda) -$

$$K = 1 / [(1/\alpha_1) + (1/\alpha_2) + (\delta/\lambda)].$$

Тогда

$$q^* = K \cdot (T_{в1} - T_{в2}).$$

По форме записи равенство для плотности теплового потока  $q^*$  аналогично уравнению конвективного теплообмена Ньютона

$$q^* = \alpha \cdot (T_{в} - T_{ст}).$$

Теперь получим расчетные соотношения для температур поверхностей преграды. Из формулы

$$T_{в1} - T_1 = q^* / \alpha_1$$

следует, что

$$T_1 = T_{в1} - q^* / \alpha_1,$$

а из

$$T_1 - T_2 = q^* \cdot \delta / \lambda \rightarrow T_2 = T_1 - (q^* \cdot \delta / \lambda).$$

Таким образом, можно получить

$$T_2 = T_{в1} - (q^* / \alpha_1) - (q^* \cdot \delta / \lambda) \quad \text{или} \quad T_2 = T_{в1} - q^* \cdot [(1/\alpha_1) + (\delta/\lambda)].$$

Нужно отметить, что в уравнении для вычисления  $T_1$  тепловое сопротивление первой среды учитывается с помощью коэффициента теплоотдачи  $\alpha_1$  (множитель  $1/\alpha_1$ ). В уравнении для определения  $T_2$ , кроме того, принимается во внимание и тепловое сопротивление материала преграды (множитель  $\delta/\lambda$ ).

Перечислим порядок расчета параметров процесса теплопередачи при решении практических задач:

- по известным характеристикам сред и тела вычисляется коэффициент теплопередачи  $K$ ;

- далее определяется плотность теплового потока  $q^*$ ;

- находится температура преграды на ее границе с первой средой  $T_1$ ;

- наконец, вычисляется температура второй поверхности стенки  $T_2$ .

Усложним рассмотренную задачу, полагая преграду многослойной (количество слоев примем равным  $n$ ). Очевидно, что выражение для плотности теплового потока не изменится

$$q^* = K \cdot (T_{в1} - T_{в2}).$$

Для коэффициента теплопередачи  $K$  (см. предыдущий параграф) можно легко получить

$$K = 1 / [(1/\alpha_1) + (1/\alpha_2) + \sum_{i=1}^n (\delta_i/\lambda_i)],$$

где  $\delta_i$  – толщина  $i$ -го слоя стенки, а  $\lambda_i$  – его коэффициент теплопроводности.

Температуры на границах слоев в этом случае определяются из равенства (расчет производится со стороны более нагретой среды, т.е.  $T_{в1} > T_{в2}$ )

$$T_{n+1} = T_{в1} - q^* \cdot [(1/\alpha_1) + \sum_{i=1}^n (\delta_i/\lambda_i)].$$

При выполнении расчета со стороны холодной среды

$$T_{n+1} = T_{в2} + q^* \cdot [(1/\alpha_2) + \sum_{i=1}^n (\delta_i/\lambda_i)].$$

### 3. Сведения о теории подобия

#### 3.1. Практическое значение теории подобия

Рассмотрим геометрическую задачу определения высоты недостижимого объекта (рис. 43). Например, чтобы вычислить высоту отвесного обрыва  $H$ , достаточно знать длину шеста  $h$  и длины двух теней – от обрыва и шеста. Тогда искомая высота  $H$  легко находится из условия подобия двух соответствующих треугольников (рис. 43)

$$H/A = h/a \rightarrow H = A \cdot (h/a).$$

Итак, значение *реальной* высоты получено с помощью предварительной модели на местности. Обобщая результат, можно утверждать, что данные,

определенные во время эксперимента на модели, позволяют вычислять искомые параметры реального объекта.

Таким образом, для определения характеристик исследуемых объектов непосредственные испытания последних можно не проводить. Искомые параметры можно получить путем экспериментов на моделях. При этом необходимо, чтобы модель была *подобна* изучаемому объекту. Строить подобные модели позволяет *теория подобия*. На ее основании определяются *критерии подобия* моделей и объектов, а также *классы* подобных объектов.

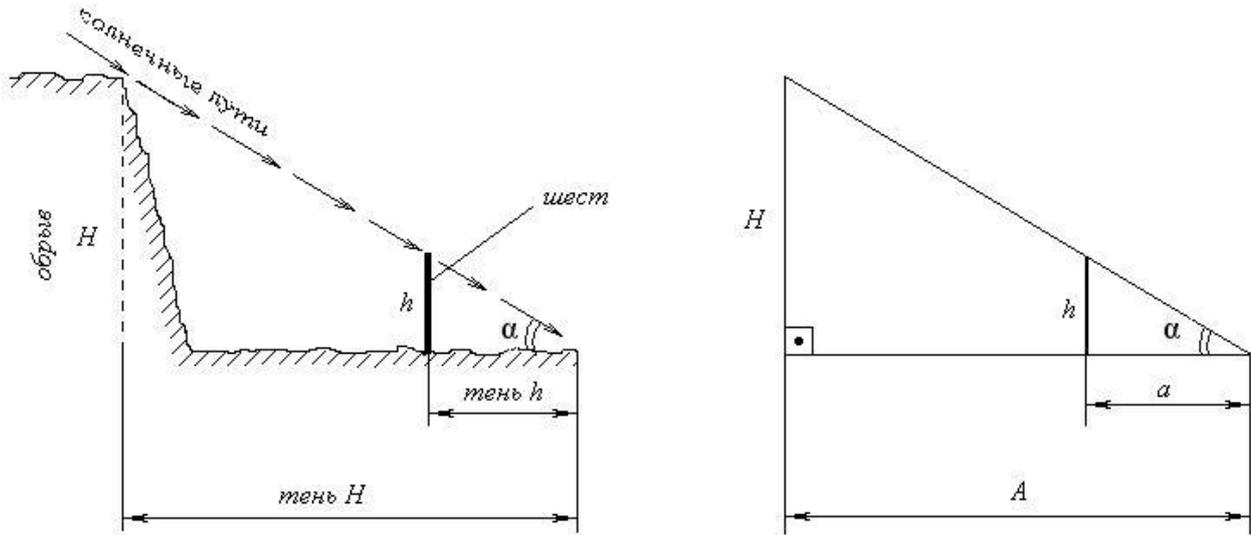


Рис. 43. Одна из простейших задач геометрического подобия

Для выявления таких классов необходимо учитывать, что они должны описываться одинаковыми математическими моделями. Кроме того, критерии подобия классов подобных объектов равняются *одним и тем же числам*.

### 3.2. Метод установления числа и вида критериев подобия

Алгоритм определения критериев подобия рассмотрим на простейшем примере подобия прямоугольных треугольников (рис. 44). Выявим вид и число критериев подобия указанных объектов.

Типовая схема такого исследования включает следующие этапы:

- математическое описание объектов;
- определение констант подобия;
- выявление *индикаторов* подобия;
- нахождение числа и вида критериев подобия.

В случае прямоугольных треугольников объекты математически описываются теоремой Пифагора

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

*Константой подобия* называют отношение сходственных параметров. Количество констант равно числу параметров, присущих изучаемому объекту.

В рассматриваемом случае треугольник характеризуется тремя известными длинами сторон –  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Констант подобия тоже будет три

$$K_a = a_i/a; \quad K_b = b_i/b; \quad K_c = c_i/c.$$

*Индикаторы подобия* находятся из условия, что любой из подобных объектов описывается одной и той же математической моделью. Таким образом, при подстановке в *базовое* уравнение параметров каждого  $i$ -го объекта новое соотношение должно быть тождественным базовому.

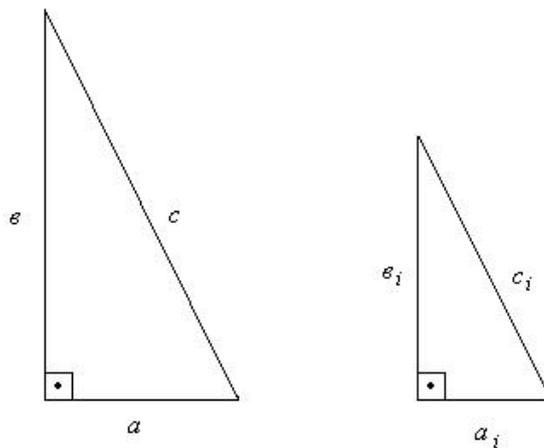


Рис. 44. Подобие прямоугольных треугольников

Определим для рассматриваемого случая  $i$ -е параметры через константы подобия и базовые значения

$$a_i = K_a \cdot a; \quad b_i = K_b \cdot b; \quad c_i = K_c \cdot c.$$

Теперь подставим значения  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  в базовое уравнение

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

В итоге получим новое соотношение, куда входят параметры  $i$ -го объекта

$$a_i^2 + b_i^2 = c_i^2 \rightarrow (K_a \cdot a)^2 + (K_b \cdot b)^2 = (K_c \cdot c)^2.$$

Чтобы базовое и  $i$ -е уравнения оказались тождественными, необходимо подчинение констант подобия равенству

$$K_a^2 = K_b^2 = K_c^2 \rightarrow K_a = K_b = K_c.$$

Отсюда следуют два очевидных тождества

$$K_a \equiv K_b \quad \text{и} \quad K_b \equiv K_c.$$

Отношения констант подобия

$$K_a/K_b = 1 \quad \text{и} \quad K_b/K_c = 1.$$

Полученные отношения принято называть *индикаторами подобия*. Число последних определяет количество *критериев подобия*. Кроме того, индикаторы устанавливают закон выбора констант подобия.

Критерии подобия определяются на основании выражений индикаторов подобия путем замены констант подобия отношениями параметров изучаемого объекта. В рассматриваемом случае

$$K_a/K_b = (a_i/a)/(b_i/b) = 1 \rightarrow (a_i/b_i) = (a/b) = \text{idem};$$

$$K_b/K_c = (b_i/b)/(c_i/c) = 1 \rightarrow (b_i/c_i) = (b/c) = \text{idem}$$

(idem означает “тот же самый”). Полученные равенства и являются критериями подобия для прямоугольных треугольников.

В общем случае, чтобы выявить на основании индикаторов подобия вид одноименных критериев, необязательно делать подстановку (заменять константы отношениями параметров). Можно записать вид критерия подобия непосредственно по виду соответствующего индикатора. При этом в индикаторе нужно отбросить обозначения констант подобия  $K$ , оставив подстрочные индексы, а вместо “1” в правой части равенства поставить слово “idem”.

Только что рассмотрена общая методика выявления критериев подобия на основании математической модели исследуемых объектов. Такая методика распространяется на изучение *любых* явлений и процессов в природе, а также – *всех* технических объектов.

### 3.3. Исследование механического движения тел

Определим критерии подобия механического движения тел. Пусть на ряд тел действуют силы  $(F, F_i, \dots)$ . Требуется из всей совокупности тел выделить, например, шары, имеющие подобие в движении.

Построим математическую модель изучаемого явления. Как известно, движение тел подчиняется второму закону Ньютона

$$F = m \cdot (dw/d\tau),$$

где  $m$  – масса тела,  $w$  – его скорость,  $\tau$  – время.

Выявим константы подобия

$$K_F = F_i/F; \quad K_m = m_i/m; \quad K_w = w_i/w; \quad K_\tau = \tau_i/\tau.$$

Теперь определим индикаторы подобия. Имеем –

$$F_i = K_F \cdot F; \quad m_i = K_m \cdot m; \quad w_i = K_w \cdot w; \quad \tau_i = K_\tau \cdot \tau.$$

Подставим эти равенства в исходное базовое уравнение

$$K_F \cdot F = (K_m \cdot m) \cdot (K_w \cdot dw / K_\tau \cdot d\tau).$$

Получено новое уравнение

$$K_F \cdot F = (K_m \cdot K_w / K_\tau) \cdot m \cdot (dw/d\tau).$$

Разделим его на базовое

$$K_F = K_m \cdot K_w / K_\tau.$$

Отсюда

$$K_F \cdot K_\tau / K_m \cdot K_w = 1.$$

Получен один индикатор подобия, значит, в рассматриваемом случае необходим и один критерий подобия. Используя общую методику его определения, имеем

$$F \cdot \tau / m \cdot w = \text{idem}.$$

### 3.4. Исследование теплофизических задач с помощью теории подобия

В качестве примера выявим критерии подобия процесса конвективного теплообмена, при котором изучаемое тело нагревается, считая задачу нестационарной и одномерной.

Математическая модель имеет вид

$$\partial T / \partial \tau = a \cdot (\partial^2 T / \partial x^2),$$

причем,  $\alpha \cdot (T_B - T_{ст}) = -\lambda \cdot (\partial T / \partial x)$ ,  $T = T_{ст}$  (смысл параметров см. выше).

Найдем константы подобия

$$K_T = T_i / T; K_x = x_i / x; K_{T_{ст}} = T_{стi} / T_{ст}; K_\tau = \tau_i / \tau; K_\alpha = \alpha_i / \alpha; K_\lambda = \lambda_i / \lambda; K_a = a_i / a; K_{T_B} = T_{Bi} / T_B.$$

Получим индикаторы подобия. Запишем

$$T_i = K_T \cdot T; x_i = K_x \cdot x; T_{стi} = K_{T_{ст}} \cdot T_{ст}; \tau_i = K_\tau \cdot \tau; \alpha_i = K_\alpha \cdot \alpha; \lambda_i = K_\lambda \cdot \lambda; a_i = K_a \cdot a; T_{Bi} = K_{T_B} \cdot T_B.$$

Эти равенства подставим в базовое уравнение

$$K_T \cdot \partial T / K_\tau \cdot \partial \tau = (K_a \cdot a) \cdot (K_T \cdot \partial^2 T / K_x^2 \cdot \partial x^2).$$

Отсюда (разделив последнее уравнение на базовое) можно получить

$$K_T / K_\tau = K_a \cdot (K_T / K_x^2).$$

Далее

$$K_\alpha \cdot \alpha \cdot (K_{T_B} \cdot T_B - K_{T_{ст}} \cdot T_{ст}) = -K_\lambda \cdot \lambda \cdot (K_T \cdot \partial T / K_x \cdot \partial x)$$

и

$$K_\alpha \cdot K_{T_B} = K_\alpha \cdot K_{T_{ст}} = K_\lambda \cdot K_T / K_x.$$

В итоге индикаторы подобия имеют вид

$$K_x^2 / (K_\alpha \cdot K_\tau) = 1; K_{T_B} / K_{T_{ст}} = 1; (K_\alpha \cdot K_{T_{ст}} \cdot K_x) / (K_\lambda \cdot K_T) = 1.$$

Отсюда можно получить три критерия подобия

$$x^2 / a \cdot \tau = \text{idem}; T_B / T_{ст} = \text{idem}; (\alpha \cdot T_{ст} \cdot x) / (\lambda \cdot T) = \text{idem}.$$

Вспомним, что при решении задач теплопроводности расчетные формулы принято записывать, используя безразмерные параметры. Поменяем в полученных равенствах местами числители и знаменатели, принимая во внимание, что по условию  $T = T_{ст}$ . Тогда

$$a \cdot \tau / x^2 = \text{idem}; \quad T / T_{ст} = \text{idem}; \quad \alpha \cdot x / \lambda = \text{idem}.$$

Первое из приведенных равенств фактически представляет собой критерий Фурье  $Fo$  (безразмерное время процесса), второе – критерий  $\theta$  (безразмерная температура процесса), а третье – критерий Био  $Bi$  (аналог критерия Нуссельта или безразмерного коэффициента теплоотдачи  $\alpha$ ).

Таким образом, теория подобия на основании математической модели исследуемого процесса позволяет без операций интегрирования и дифференцирования выявить критерии подобия процесса и их количество, что значительно упрощает решение теплофизических задач. Правда, теория подобия не указывает на конкретную аналитическую связь между упомянутыми критериями. Чтобы ее найти, необходима постановка экспериментов на моделях изучаемого процесса. В качестве примера выявления такой связи рассмотрим подробнее исследование процесса конвективного теплообмена.

## 4. Конвективный теплообмен

### 4.1. Математическая модель конвективного теплообмена

Обычно *конвективным теплообменом* называют совокупность процессов переноса теплоты посредством конвекции (теплоносителем) с последующей передачей теплопроводностью (рис. 45). Такой процесс описывается системой

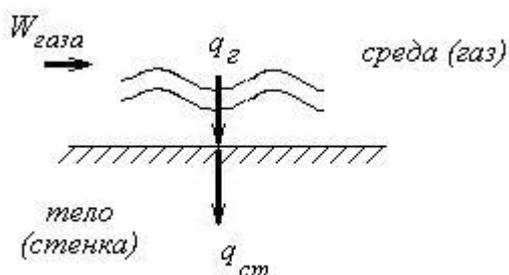


Рис. 45. Схематичное изображение процесса конвективного теплообмена

уравнений, включающей уравнение энергии, т.е. соотношение, характеризующее перенос теплоты теплопроводностью в пограничном слое теплоносителя ( $q_{г}$ ); уравнение движения теплоносителя; уравнение неразрывности потока теплоносителя и условия однозначности (геометрические, физические, начальные, граничные).

### 4.2. Методы решения задач конвективного теплообмена

Целью решения таких задач является определение параметров теплообмена: плотности теплового потока  $q^*$ , коэффициента теплоотдачи  $\alpha$  и т.д. Различают три принципиальных подхода к решению.

Классический метод состоит в решении системы соответствующих уравнений аналитическим или численным (чаще) способом. При этом, как правило, уравнения записывают по отношению не ко всему потоку теплоносителя, а лишь к его пограничному слою, который оказывает основное влияние на теплообмен. Таким образом, решается задача для пограничного слоя потока.

Метод теории подобия заключается в том, что строится математическая модель процесса, выявляются количество и виды критериев подобия процесса, а далее экспериментально находятся связи между критериями в форме так называемого “критериального уравнения”.

Наконец, применяется метод экспериментального определения параметров теплообмена на гидро- и электроинтеграторах. Построение последних основано на идентичности систем уравнений, описывающих тепловые, гидравлические и электрические явления.

Необходимо подчеркнуть, что на практике чаще всего используется второй подход.

### **4.3. Методика решения задачи конвективного теплообмена с помощью теории подобия**

При указанном в заголовке подходе к решению задачи алгоритм последнего включает этапы:

- составление математической модели процесса;
- определение числа и видов критериев подобия;
- выявление общего вида критериального уравнения;
- создание модели экспериментальной установки для решения критериального уравнения;
- проведение опытов на модели, обработка результатов и выявление конкретного вида искомого уравнения.

Чтобы пояснить изложенное, рассмотрим простейший пример, начиная со второго этапа (считаем, что математическая модель процесса уже построена). На основе системы уравнений для процесса конвективного теплообмена (см. выше) в общем случае можно получить ряд критериев:

1. Рейнольдса, безразмерный эквивалент массовой скорости потока теплоносителя, характеризующий *вынужденную* конвекцию

$$Re = w \cdot \rho_{\text{газа}} \cdot d / \eta_{\text{газа}}$$

2. Грасгофа

$$Gr = (g \cdot d^3 \cdot \rho_{\text{газа}}^2 \cdot \Delta T) / (\eta_{\text{газа}} \cdot T),$$

где  $g$  – для неподвижного тела ускорение свободного падения в гравитационном поле Земли,  $\Delta T$  – перепад температур между теплоносителем и телом. Этот критерий характеризует *естественную* конвекцию.

3. Прандтля (безразмерный комплекс теплофизических параметров теплоносителя)

$$\text{Pr} = c_p \cdot \eta_{\text{газа}} / \lambda_{\text{газа}}.$$

4. Маха, определяющий режим течения теплоносителя (до- или сверхзвуковой)

$$\text{M} = w/a.$$

5. Нуссельта (безразмерный аналог коэффициента теплоотдачи)

$$\text{Nu} = \alpha \cdot d / \lambda_{\text{газа}}.$$

Определим общий вид критериального уравнения. Для этого на основании общей физической картины задачи нужно выделить неопределяющий и определяющие критерии. Под первым понимают искомый критерий (функцию), зависящий от всех остальных.

В случае конвективного теплообмена за функцию обычно принимают критерий Нуссельта, т.к. туда входит параметр  $\alpha$ . Значит, общий вид критериального уравнения можно представить как

$$\text{Nu} = f(\text{Re}, \text{Cr}, \text{Pr}, \text{M}).$$

При обработке полученные экспериментальные данные удобно аппроксимировать степенным уравнением

$$\text{Nu} = A \cdot \text{Re}^n \cdot \text{Cr}^m \cdot \text{Pr}^p \cdot \text{M}^k,$$

где  $A$ ,  $n$ ,  $m$ ,  $p$ ,  $k$  – постоянные коэффициенты, вычисляемые по результатам эксперимента.

В качестве примера определения перечисленных констант рассмотрим упрощенный случай критериального уравнения

$$\text{Nu} = A \cdot \text{Re}^n.$$

Прологарифмируем это равенство

$$\lg \text{Nu} = \lg A + n \cdot \lg \text{Re}.$$

Степенное уравнение преобразовалось в линейное. Далее, чтобы найти искомые постоянные  $A$  и  $n$ , требуется провести ряд экспериментов, измеряя параметры, входящие в  $\text{Nu}$  и  $\text{Re}$ , и рассчитывая  $\text{Nu}$  и  $\text{Re}$  для каждого опыта, после чего значения неизвестных констант  $A$  и  $n$  без труда определяются с помощью метода наименьших квадратов (рис. 46).

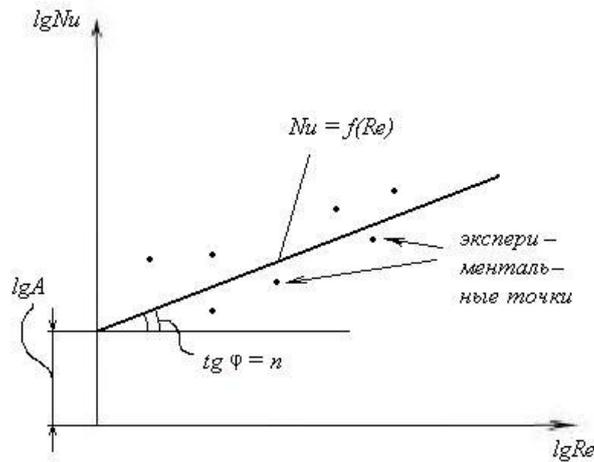


Рис. 46. Пояснение к процедуре нахождения постоянных критериального уравнения

## 5. Лучистый теплообмен

### 5.1. Основные сведения о лучистом теплообмене

Под *лучистым теплообменом* понимают совокупность явлений теплового излучения телом, переноса лучистой энергии посредством электромагнитных волн и поглощения этой энергии телом с преобразованием ее в энергию хаотического движения молекул тела.

Необходимо отметить, что основным носителем лучистой тепловой энергии служат волны *видимой* и *инфракрасной* областей спектра, имеющие длину  $\lambda = 0,4 \dots 40$  [мкм].

### 5.2. Энергетический баланс лучистой энергии

Рассмотрим тело, на которое падает лучистая энергия  $E_{\text{пад}}$  (рис. 47). Часть ее ( $E_{\text{погл}}$ ) поглощается телом, часть ( $E_{\text{отр}}$ ) – отражается, а еще часть ( $E_{\text{проп}}$ ) – проходит через тело. Очевидно, что

$$E_{\text{пад}} = E_{\text{погл}} + E_{\text{отр}} + E_{\text{проп}}.$$

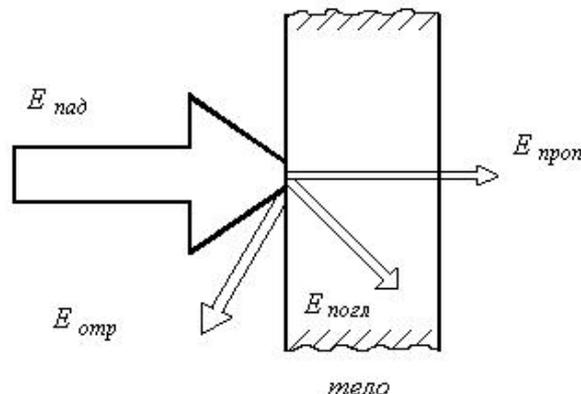


Рис. 47. Баланс лучистой энергии

Приведенное уравнение энергетического баланса принято записывать в относительных величинах, разделив все его слагаемые на  $E_{\text{пад}}$

$$E_{\text{пад}}/E_{\text{пад}} = (E_{\text{погл}}/E_{\text{пад}}) + (E_{\text{отр}}/E_{\text{пад}}) + (E_{\text{проп}}/E_{\text{пад}}).$$

Соответствующие отношения обозначают

$$A = E_{\text{погл}}/E_{\text{пад}}; R = E_{\text{отр}}/E_{\text{пад}}; D = E_{\text{проп}}/E_{\text{пад}}$$

и называют коэффициентами *поглощения*, *отражения* и *пропускания*. Естественно, что их сумма равна единице –

$$A + R + D = 1.$$

Такой вид имеет уравнение безразмерного энергетического баланса лучистой энергии. Как показано выше, его легко получить, рассмотрев явление взаимодействия тела с воспринимаемой этим телом лучистой энергией.

### 5.3. Виды тел

В зависимости от лучистых свойств различают следующие виды тел.

*Абсолютно черное тело* поглощает всю лучистую энергию. Для такого тела  $A = 1$ ,  $R = D = 0$ .

*Серое тело* поглощает лишь часть лучистой энергии. Для него справедливо

$$0 < A < 1; R \neq 0; D = 0.$$

Серое тело лучистую энергию не пропускает.

*Зеркальное (абсолютно белое) тело* отражает всю лучистую энергию. В этом случае  $R = 1$ ,  $A = D = 0$ .

*Абсолютно прозрачное тело* пропускает все лучи полностью. Для него  $D = 1$ ,  $A = R = 0$ .

В теории лучистого теплообмена важнейшую роль играет абсолютно черное тело (АЧТ). Все основные законы лучистого теплообмена сначала выводятся для АЧТ, а затем преобразуются для серых тел.

### 5.4. Закон Планка

Закон Планка описывает интенсивность излучения АЧТ в зависимости от длины волны, а также температуры тела. Таким образом, закон Планка определяет *спектральную интенсивность излучения* тела.

Очевидно, что при каждой конкретной температуре тело излучает все длины волн ( $0 < \lambda < \infty$ ), но излучение не является равномерным. Оно характеризуется как длиной волны, так и температурой тела.

Обозначим интенсивность излучения АЧТ  $E_0$  (подстрочный индекс “нуль” принято приписывать параметрам АЧТ). Найдем спектральную интенсивность излучения

$$E_{0\lambda} = dE_0/d\lambda,$$

где  $E_0$  измеряется в  $[Вт/м^2]$ ,  $E_{0\lambda}$  – в  $[Вт/м^3]$ ;  $\lambda$  – длина волны,  $[м]$ .

Решение последнего дифференциального уравнения, полученное Планком, имеет вид

$$E_{0\lambda} = C_1 \cdot \lambda^{-5} / [e^{C_2/\lambda \cdot T} - 1],$$

где значения констант  $C_1$  и  $C_2$  составляют:  $C_1 = 3,72 \cdot 10^{-16} [Вт \cdot м^2]$ ;  $C_2 = 1,43 \cdot 10^{-2} [м \cdot К]$ .

Закон Планка часто записывают как

$$E_{0\lambda} = f(\lambda, T).$$

### 5.5. Закон Вина

Закон Вина определяет *длину волны*  $\lambda_{\max}$ , на которой тело, имеющее известную температуру  $T$ , излучает наиболее интенсивно. Закон Вина имеет вид

$$\lambda_{\max} \cdot T = \text{const} = 2,9 \cdot 10^{-3}, [м \cdot К].$$

Отсюда следует, что, чем выше температура тела, тем меньше длина волны, излучаемой телом наиболее интенсивно.

### 5.6. Закон Стефана-Больцмана

Закон Стефана-Больцмана определяет *суммарную интенсивность излучения АЧТ* при известной температуре.

Очевидно, что такая интенсивность находится посредством интегрирования соотношения для спектральной интенсивности излучения тела при известной температуре в пределах длины волны  $0 < \lambda < \infty$ . Т.к.

$$E_{0\lambda} = dE_0/d\lambda,$$

то

$$dE_0 = E_{0\lambda} \cdot d\lambda.$$

Отсюда

$$\int_0^{\infty} dE_0 = \int_0^{\infty} E_{0\lambda} \cdot d\lambda.$$

Решение последнего уравнения имеет вид

$$E_0 = k \cdot T^4, [Вт/м^2],$$

где  $T$  – температура тела,  $k = 5,67 \cdot 10^{-8} [Вт/(м^2 \cdot К^4)]$  – постоянная Больцмана.

### 5.7. Уравнение суммарной интенсивности излучения серых тел

Излучение серых тел принято описывать с помощью их *степени черноты*  $\varepsilon$ , определяемой при постоянной температуре отношением

$$\varepsilon|_{T = \text{const}} = E/E_0,$$

где  $E$  и  $E_0$  – соответственно интенсивности излучения серого тела и АЧТ при температуре  $T$ . Отсюда следует, что

$$E = \varepsilon \cdot E_0.$$

Таким образом, для серых тел справедливо

$$E = \varepsilon \cdot k \cdot T^4.$$

При решении практических задач последнее равенство часто представляют в виде

$$E = \varepsilon \cdot c_0 \cdot (T/100)^4,$$

где постоянная  $c_0 = 5,67 \text{ [Вт/(м}^2 \cdot \text{К}^4)]$ .

### 5.8. Закон Кирхгофа

Закон Кирхгофа связывает явления *излучательной* и *поглощательной* способностей тел.

При известных законах излучения, рассмотренных выше, можно судить и о параметрах поглощения телом лучистой энергии.

Чтобы вывести закон Кирхгофа, необходимо изучить лучистый теплообмен между серым телом и АЧТ (рис. 48).

Рассмотрим установившийся режим, при котором температуры тел равны

$$T_{\text{ст}} = T_{\text{АЧТ}}.$$

В этом случае для теплового потока справедливо

$$q^* = q_{\text{АЧТ}}^* - q_{\text{ст}}^* = 0,$$

откуда

$$q_{\text{АЧТ}}^* = q_{\text{ст}}^*.$$

Однако

$$q_{\text{АЧТ}}^* = E_0; \quad q_{\text{ст}}^* = E + (1 - A) \cdot E_0,$$

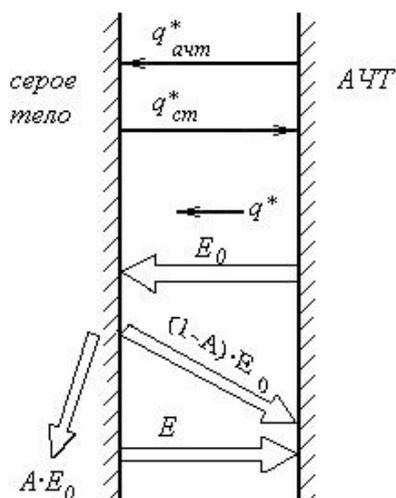


Рис. 48. Теплообмен между серым телом и АЧТ;  $q^* = q_{\text{АЧТ}}^* - q_{\text{ст}}^*$  – установившийся тепловой поток

где  $A$  – коэффициент поглощения.

Отсюда следует, что

$$E_0 = E + E_0 - A \cdot E_0,$$

т.е.

$$E = A \cdot E_0.$$

Окончательно

$$A = E/E_0.$$

Но отношение  $E/E_0$  равно  $\varepsilon$ , степени черноты тела (или коэффициенту эффективности излучения). Таким образом, получено равенство

$$\varepsilon = A.$$

Оно отражает закон Кирхгофа, который говорит о том, что *насколько интенсивно тело поглощает* лучистую энергию, *насколько интенсивно и излучает* ее. Естественно, наибольшей способностью “излучения-поглощения” обладает АЧТ. Для него

$$A = \varepsilon = 1.$$

### 5.9. Лучистый теплообмен между телами

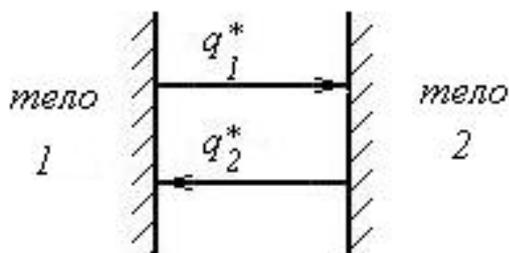


Рис. 49. Схема лучистого теплообмена между серыми телами ( $T_1 \neq T_2$ )

Рассмотрим лучистый теплообмен между двумя серыми телами (рис. 49). Обозначим плотность теплового потока от тела 1 к телу 2  $q_1^*$ , а плотность обратного потока  $q_2^*$ . Тогда плотность суммарного потока будет

$$q^* = q_1^* - q_2^*.$$

По закону Стефана-Больцмана получим –

$$q_1^* = \varepsilon_1 \cdot c_0 \cdot (T_1/100)^4; \quad q_2^* = \varepsilon_2 \cdot c_0 \cdot (T_2/100)^4,$$

где  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  – степени черноты тел 1 и 2.

Тогда

$$q^* = q_1^* - q_2^* = \varepsilon_{\text{пр}} \cdot c_0 \cdot [(T_1/100)^4 - (T_2/100)^4],$$

где приведенная степень черноты тел –

$$\varepsilon_{\text{пр}} = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 / (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2).$$

### 5.10. Лучистый теплообмен между телами при наличии экрана

На практике для снижения интенсивности теплообмена между различными техническими объектами часто используются экраны (например, в виде проставок из фольги). Рассмотрим влияние подобного экрана на интенсивность теплового потока между двумя серыми телами, имеющими

разную температуру (рис. 50). Для этого воспользуемся уравнением Стефана-Больцмана в виде

$$q^* = \varepsilon_{\text{пр}} \cdot k \cdot T^4.$$

Запишем выражение для плотности теплового потока без наличия экрана

$$q^* = \varepsilon_{\text{пр}} \cdot k \cdot (T_1^4 - T_2^4).$$

Аналогично при его наличии

$$q_{1\varepsilon}^* = \varepsilon_{\text{пр}} \cdot k \cdot (T_1^4 - T_\varepsilon^4); \quad q_{\varepsilon 2}^* = \varepsilon_{\text{пр}} \cdot k \cdot (T_\varepsilon^4 - T_2^4).$$

По очевидному закону сохранения плотности теплового потока должно соблюдаться равенство

$$q_\varepsilon^* = q_{1\varepsilon}^* = q_{\varepsilon 2}^*.$$

Отсюда

$$q_\varepsilon^* = \varepsilon_{\text{пр}} \cdot k \cdot (T_1^4 - T_\varepsilon^4) = \varepsilon_{\text{пр}} \cdot k \cdot (T_\varepsilon^4 - T_2^4).$$

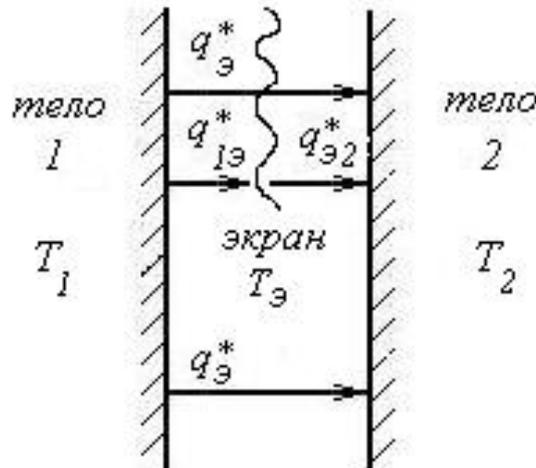


Рис. 50. Схема лучистого теплообмена между телами при наличии экрана ( $T_1 \neq T_2$ )

Разрешим полученное соотношение относительно температуры экрана  $T_\varepsilon$

$$2 \cdot T_\varepsilon^4 = T_1^4 + T_2^4,$$

т.е. окончательно

$$T_\varepsilon^4 = (T_1^4 + T_2^4)/2.$$

Подставим полученное равенство в уравнение для  $q_{1\varepsilon}^*$

$$q_{1\varepsilon}^* = q_\varepsilon^* = \varepsilon_{\text{пр}} \cdot k \cdot [T_1^4 - (T_1^4 + T_2^4)/2].$$

Отсюда

$$q_\varepsilon^* = \varepsilon_{\text{пр}} \cdot k \cdot (T_1^4 - T_2^4)/2.$$

Таким образом, определена плотность теплового потока при наличии экрана  $q_э^*$ . Она оказалась вдвое меньшей, чем в случае отсутствия экрана

$$q^* = \varepsilon_{пр} \cdot k \cdot (T_1^4 - T_2^4).$$

Выше рассмотрен простейший случай, когда количество экранов между телами  $n = 1$ . Однако выражение для  $q_э^*$  легко обобщить на случай, если число экранов составляет  $n$

$$q_э^* = \varepsilon_{пр} \cdot k \cdot (T_1^4 - T_2^4) / (n + 1).$$

Последнюю формулу можно представить в виде

$$q_э^* = q^* / (n + 1),$$

где  $q^* = \varepsilon_{пр} \cdot c_0 \cdot [(T_1/100)^4 - (T_2/100)^4]$ .

Таким образом, при наличии экранов между объектами плотность теплового потока можно определять по общей формуле, а затем разделить результат на  $(n + 1)$ , где  $n$  – количество экранов.

### 5.11. Особенности излучения газообразных рабочих тел

Излучение газообразных РТ значительно отличается от излучения твердых тел. Газообразным РТ и их излучению присущи многие специфические особенности.

Во-первых, одноатомные газы практически прозрачны для электромагнитных волн. Следовательно, для этих газов коэффициенты поглощения и излучения близки к нулю. Это заключение справедливо до температур порядка 10000 [K]. Таким образом, при практических расчетах излучением одноатомных газов можно обоснованно пренебречь. Учитывать процессы излучения и поглощения лучистой энергии необходимо только для многоатомных газов, например, паров воды  $H_2O$  и углекислого газа  $CO_2$ .

Во-вторых, твердые тела излучают весь спектр волн с длинами в диапазоне  $0 < \lambda < \infty$ . Излучение же каждого газа селективно и характеризуется ограниченным числом волн.

В-третьих, излучение твердых тел поверхностно, т.к. излучение их внутренних молекул поглощается самими телами. Излучение газообразных тел происходит со всего объема РТ.

Интенсивность излучения газообразных РТ описывается законом Стефана-Больцмана

$$q^* = \varepsilon_{газа} \cdot k \cdot T^4,$$

где  $\varepsilon_{газа} = f(l, p_n)$ ;  $l$  – длина свободного хода луча, определяемая геометрической формой РТ, табличная характеристика;  $p_n$  – парциальное давление исследуемого газа.

## 5.12. Лучистый теплообмен между твердым и газообразным телами

Расчет лучистого теплообмена между твердым телом (стенкой) и газом осуществляется по соотношению, аналогичному выражению для теплообмена между твердыми телами

$$q^* = \varepsilon_{\text{газа}} \cdot \varepsilon_{\text{эф}} \cdot c_0 \cdot [(T_{\text{Г}}/100)^4 - (T_{\text{СТ}}/100)^4],$$

где  $T_{\text{Г}}$  – температура газа;  $T_{\text{СТ}}$  – температура твердого тела; коэффициент эффективности процесса лучистого теплообмена учитывает обратную отдачу теплоты и равен (раздел 2, параграф 1.7)

$$\varepsilon_{\text{эф}} = (1 + \varepsilon_{\text{СТ}})/2.$$

В заключение необходимо отметить, что значение коэффициента эффективности излучения  $\varepsilon_{\text{газа}}$  для многоатомных газов составляет порядка 0,2...0,3.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Болгарский А.В. и др. Термодинамика и теплопередача. – М.: Высшая школа, 1975. - 495 с.
2. Жимолохин В.Г. Конспект лекций по технической термодинамике. – М.: МАТИ, 1986. - 160 с.
3. Жимолохин В.Г. Конспект лекций по теории авиационных и ракетных двигателей. – М.: МАТИ, 1989. - 140 с.
4. Михеев М.А., Михеева И.М. Краткий курс теплопередачи. – М.: Госэнергоиздат, 1961. - 208 с.
5. Стреляев Д.В., Москаленко Л.В., Валиев Р.Г. Основы теплотехники. – М.: МГТУ ГА, 2011.- 115 с.
6. Шулекин В.Т. Газодинамика и тепломассообмен: конспект лекций. – М.: МГТУ ГА, 2002.- 112 с.
7. Шулекин В.Т. Теплотехника: конспект лекций. – М.: МГТУ ГА, 2007. - 148 с.

## СОДЕРЖАНИЕ

|   |    |
|---|----|
| Введение.....   | 3  |
| Раздел 1. Термодинамика.....  | 5  |
| 1. Основные понятия и определения термодинамики.....                              | 5  |
| 1.1. Термодинамическая система.....   | 5  |
| 1.2. Термодинамическое состояние системы.....                                     | 5  |
| 1.3. Основные термодинамические параметры.....                                    | 5  |
| 1.4. Уравнение состояния рабочего тела.....                                       | 7  |
| 1.5. Понятие о термодинамическом процессе.....                                    | 10 |
| 2. Энергия термодинамического рабочего тела.....                                  | 11 |
| 2.1. Полная энергия рабочего тела.....  | 11 |
| 2.2. Внутренняя энергия термодинамической системы.....                            | 12 |
| 2.3. Составляющие внешней энергии термодинамической системы.....                  | 13 |
| 2.4. Энтальпия рабочего тела термодинамической системы.....                       | 14 |
| 2.5. Формы передачи энергии в явлениях и процессах.....                           | 15 |
| 2.6. Первый закон термодинамики.....  | 15 |
| 3. Виды работ. Обобщенное выражение работы.....                                   | 16 |
| 3.1. Комментарий к понятию “работа”.....  | 16 |
| 3.2. Работа перемещения тела.....   | 17 |
| 3.3. Работа изменения объема рабочего тела.....                                   | 18 |
| 3.4. Рабочая диаграмма термодинамического процесса.....                           | 18 |
| 3.5. Выражение первого закона термодинамики для работы<br>расширения газа.....    | 19 |
| 3.6. Работа изменения давления (располагаемая работа рабочего тела).....          | 19 |
| 3.7. Модифицированный вид первого закона термодинамики.....                       | 20 |
| 3.8. Примеры выражения элементарных работ других видов.....                       | 21 |
| 4. Теплота и методы ее расчета.....   | 22 |
| 4.1. Основные определения.....  | 22 |
| 4.2. Сведения о методах расчета теплоты.....                                      | 22 |
| 4.3. Теплоемкость и удельная теплоемкость тела.....                               | 22 |
| 4.4. Средняя и истинная удельная теплоемкости.....                                | 22 |
| 4.5. Понятие об изохорной и изобарной удельных теплоемкостях.....                 | 24 |
| 4.6. Связь между изохорной и изобарной удельными теплоемкостями.....              | 24 |
| 4.7. Общее расчетное выражение удельной теплоемкости.....                         | 25 |
| 4.8. Теплоемкость сложного рабочего тела (смеси).....                             | 25 |
| 4.9. Расчет количества теплоты процесса с<br>использованием теплоемкости.....     | 26 |
| 4.10. Расчет изменения внутренней энергии при изменении<br>состояния системы..... | 27 |
| 4.11. Расчетное выражение для определения изменения<br>энтальпии процесса.....    | 28 |
| 4.12. Понятие о теплотах фазовых превращений.....                                 | 29 |

|  |    |
|--|----|
| 4.13. Расчет теплоты при изотермических процессах.....                                 | 30 |
| 5. Энтропия.....   | 30 |
| 5.1. Понятие об энтропии.....  | 30 |
| 5.2. Расчетные соотношения для изменения энтропии.....                                 | 31 |
| 5.3 Дифференциальная форма уравнения состояния.....                                    | 32 |
| 5.4. Абсолютное значение энтропии.....   | 34 |
| 5.5. Расчетная формула для определения условной<br>абсолютной энтропии.....            | 34 |
| 5.6. Тепловая диаграмма термодинамического процесса.....                               | 35 |
| 6. Политропные процессы.....   | 35 |
| 6.1. Комментарий к определению политропного процесса.....                              | 35 |
| 6.2. Уравнение политропного процесса в координатах $\langle s, T \rangle$ .....        | 35 |
| 6.3. Уравнение политропного процесса в координатах $\langle v, p \rangle$ .....        | 36 |
| 6.4. Расчетное выражение показателя политропы.....                                     | 37 |
| 6.5. Экспериментальный метод определения показателя политропы.....                     | 37 |
| 6.6. Разновидности политропных процессов.....  | 37 |
| 6.7. Общая методика исследования политропного процесса<br>(на примере изохорного)..... | 38 |
| 6.8. Изоэнтропный процесс.....   | 39 |
| 6.9. Исследование изобарного процесса.....   | 42 |
| 6.10. Исследование изотермического процесса.....                                       | 43 |
| 6.11. Обобщенные графики политропных процессов.....                                    | 44 |
| 7. Термодинамика изоэнтропного потока рабочего тела.....                               | 46 |
| 7.1. Уравнение энергии (первый закон термодинамики) для потока<br>рабочего тела.....   | 46 |
| 7.2. Уравнение энергии изоэнтропного потока в коротких каналах.....                    | 47 |
| 7.3. Уравнение неразрывности потока.....   | 48 |
| 7.4. Уравнение скорости звука в потоке.....  | 49 |
| 7.5. Число (критерий) Маха.....  | 48 |
| 8. Уравнения термодинамики изоэнтропного потока.....                                   | 48 |
| 8.1. Температура в произвольном сечении потока.....                                    | 48 |
| 8.2. Плотность рабочего тела в произвольном сечении потока.....                        | 49 |
| 8.3. Удельный объем в произвольном сечении потока.....                                 | 49 |
| 8.4. Скорость потока в произвольном сечении.....                                       | 49 |
| 8.5. Скорость звука в произвольном сечении потока.....                                 | 50 |
| 9. Заторможенные и критические параметры потока.....                                   | 50 |
| 9.1. Параметры заторможенного потока (параметры торможения).....                       | 50 |
| 9.2. Критические параметры потока.....   | 52 |
| 10. Процесс истечения рабочего тела.....   | 54 |
| 10.1. Вывод основного расчетного соотношения.....                                      | 54 |
| 10.2. Анализ уравнения $f = f(w, M)$ .....   | 56 |
| 10.3. Физическое пояснение формы сопла Лаваля.....                                     | 57 |
| 10.4. Критическое сечение потока.....  | 58 |

|   |    |
|---|----|
| 10.5. Уравнение расхода рабочего тела при сверхкритическом (сверхзвуковом) истечении..... | 58 |
| 11. Круговые термодинамические процессы.....  | 59 |
| 11.1. Типы круговых процессов.....  | 59 |
| 11.2. Схема простейшей тепловой машины.....   | 60 |
| 11.3. Воздушно-реактивный двигатель и его цикл.....                                       | 60 |
| 11.4. Коэффициент полезного действия цикла.....   | 62 |
| 11.5. Предельное значение термического КПД. Цикл Карно.....                               | 63 |
| 11.6. Различные формулировки второго закона термодинамики.....                            | 64 |
| 11.7. Математическое выражение второго закона термодинамики.....                          | 65 |
| Раздел 2. Теплопередача.....  | 66 |
| 1. Общие сведения о процессах теплообмена.....  | 66 |
| 1.1. Способы передачи теплоты.....  | 66 |
| 1.2. Формы теплообмена.....   | 67 |
| 1.3. Основные параметры теплообмена.....  | 67 |
| 1.4. Закон теплопроводности (Фурье).....  | 68 |
| 1.5. Закон конвективного теплообмена (Ньютона).....                                       | 68 |
| 1.6. Расчет процесса конвективного теплообмена.....                                       | 68 |
| 1.7. Закон лучистого теплообмена (Стефана-Больцмана).....                                 | 69 |
| 2. Теплопроводность тел и сред.....   | 70 |
| 2.1. Температурное поле и температурный градиент.....                                     | 70 |
| 2.2. Постановка задачи о решении уравнения теплопроводности для тел и сред.....           | 72 |
| 2.3. Решение некоторых задач теплопроводности тел.....                                    | 74 |
| 2.4. Решение теплофизической задачи при процессе теплопередачи.....                       | 79 |
| 3. Сведения о теории подобия.....   | 81 |
| 3.1. Практическое значение теории подобия.....  | 81 |
| 3.2. Метод установления числа и вида критериев подобия.....                               | 82 |
| 3.3. Исследование механического движения тел.....   | 84 |
| 3.4. Исследование теплофизических задач с помощью теории подобия.....                     | 85 |
| 4. Конвективный теплообмен.....   | 86 |
| 4.1. Математическая модель конвективного теплообмена.....                                 | 86 |
| 4.2. Методы решения задач конвективного теплообмена.....                                  | 86 |
| 4.3. Методика решения задачи конвективного теплообмена с помощью теории подобия.....      | 87 |
| 5. Лучистый теплообмен.....   | 89 |
| 5.1. Основные сведения о лучистом теплообмене.....  | 89 |
| 5.2. Энергетический баланс лучистой энергии.....  | 89 |
| 5.3. Виды тел.....  | 90 |
| 5.4. Закон Планка.....  | 90 |
| 5.5. Закон Вина.....  | 91 |
| 5.6. Закон Стефана-Больцмана.....   | 91 |
| 5.7. Уравнение суммарной интенсивности излучения серых тел.....                           | 92 |

|  |    |
|--|----|
| 5.8. Закон Кирхгофа.....   | 92 |
| 5.9. Лучистый теплообмен между телами.....                         | 93 |
| 5.10. Лучистый теплообмен между телами при наличии экрана.....     | 93 |
| 5.11. Особенности излучения газообразных рабочих тел.....          | 95 |
| 5.12. Лучистый теплообмен между твердым и газообразным телами..... | 96 |
| Литература.....  | 96 |