

## Лабораторная работа № 1

### Корреляционный анализ дискретных сигналов

**Цель работы** — изучение принципов корреляционного анализа, свойств автокорреляционной функции (АКФ) и взаимокорреляционной функции (ВКФ) дискретных сигналов.

#### Теоретические сведения

Корреляционные функции дискретных сигналов также являются дискретными. Дискретная АКФ записывается так [1]:

$$\hat{B}_u(n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j u_{j-n}, \quad (1.1)$$

где  $u_j$  — значение дискретного сигнала на  $j$ -й позиции, которое может принимать значения  $\pm 1, 0$ ;

$u_{j-n}$  — значение копии дискретного сигнала, сдвинутой относительно дискретного сигнала на  $n$  позиций.

Эта функция целочисленного аргумента  $n$  обладает следующими свойствами:

— достигает максимума при  $n = 0$ ;

— является чётной, то есть  $\hat{B}_u(n) = \hat{B}_u(-n)$ .

Дискретная ВКФ записывается так [1]:

$$\hat{B}_{u_1 u_2}(n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u_{1j} u_{2j-n}, \quad (1.2)$$

где  $u_{1j}$  — значение первого дискретного сигнала на  $j$ -й позиции, которое может принимать значения  $\pm 1, 0$ ;

$u_{2j-n}$  — значение второго дискретного сигнала на  $j$ -й позиции, которое может принимать значения  $\pm 1, 0$ ; причём второй сигнал сдвинут относительно первого на  $n$  позиций.

Дискретная ВКФ обладает следующими свойствами:

— не является чётной функцией двух неодинаковых сигналов, то есть

$$\hat{B}_{u_1 u_2}(n) \neq \hat{B}_{u_1 u_2}(-n);$$

Таблица 1.1

	Вид сигнала									
	(1,-1,-1,1)					(1,-1,1,1)				
$ n $	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4
$\hat{B}_u(n)$										

Таблица 1.2

$n$	0	1	2	3	4	-1	-2	-3	-4
$\hat{B}_{u_1 u_2}(n)$									

— обязательно достигает максимума при  $n = 0$ ;

— выражение  $\hat{B}_{u_1 u_2}(n) = \hat{B}_{u_2 u_1}(-n)$  позволяет измерить АКФ и ВКФ при отрицательных значениях аргумента  $n$ .

### Подготовка к работе

1. Рассчитать дискретную АКФ четырёхпозиционного дискретного сигнала  $u_1 = (1, -1, -1, 1)$  и сигнала Баркера  $u_2 = (1, -1, 1, 1)$  по формуле (1.1).

Результаты расчётов свести в табл. 1.1.

По данным табл. 1.1 построить графики АКФ. Сравнить полученные графики.

2. Рассчитать дискретную АКФ пятипозиционного сигнала Баркера  $u_3 = (1, -1, 1, 1, 1)$ , используя формулу (1.1), и построить её график. Сравнить графики АКФ сигналов  $u_2$  и  $u_3$ .

3. Рассчитать дискретную ВКФ сигналов  $u_1$  и  $u_2$  по формуле (1.2).

Результаты расчётов свести в табл. 1.2. Используя данные табл. 1.2, построить ВКФ и сравнить её с АКФ, полученными в п. 1.

4. Рассчитать дискретную ВКФ сигналов  $u_2$  и  $u_1$  по формуле:

$$\hat{B}_{u_2 u_1}(n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u_{2j} u_{1j-n}.$$

Результаты расчётов свести в табл. 1.3. По данным табл. 1.3 построить

Таблица 1.3

$n$	0	1	2	3	4	-1	-2	-3	-4
$\hat{B}_{u_2u_1}(n)$									

ВКФ и сравнить её с ВКФ, полученной в п. 3.

### Контрольно-измерительная аппаратура

Прибор для исследования корреляционных характеристик.

Генератор сигналов низкочастотный.

Два осциллографа.

Лабораторный макет.

### Описание лабораторного макета

Лабораторный макет состоит из двух блоков — базового и сменного. В базовом блоке смонтирован источник питания и усилитель-ограничитель. В сменном блоке расположен генератор, вырабатывающий две синхронные последовательности восьми отчётных импульсов, а также импульсы синхронизации. Амплитуда и полярность отсчётных импульсов устанавливается с помощью ручек управления, расположенных на лицевой панели сменного блока. Запуск генератора отсчётных импульсов осуществляется синусоидальным сигналом внешнего генератора, подключаемого к гнезду Г1. С гнезд Г3, Г4 снимается синхронные последовательности пачек отсчётных импульсов, максимальное количество которых в пачке равно восьми. С гнезда Г5 снимаются импульсы для внешней синхронизации осциллографа.

### Порядок выполнения работы

1. Измерить АКФ четырёхпозиционного дискретного сигнала  $u_1 = (1, -1, -1, 1)$ .

1.1. Собрать лабораторную установку в соответствии с рис. 1.1.

После проверки преподавателем схемы соединений приборов и макета включить их питание.

1.2. Подготовить приборы и макет к измерениям следующим образом.

Прибор для исследования корреляционных характеристик:

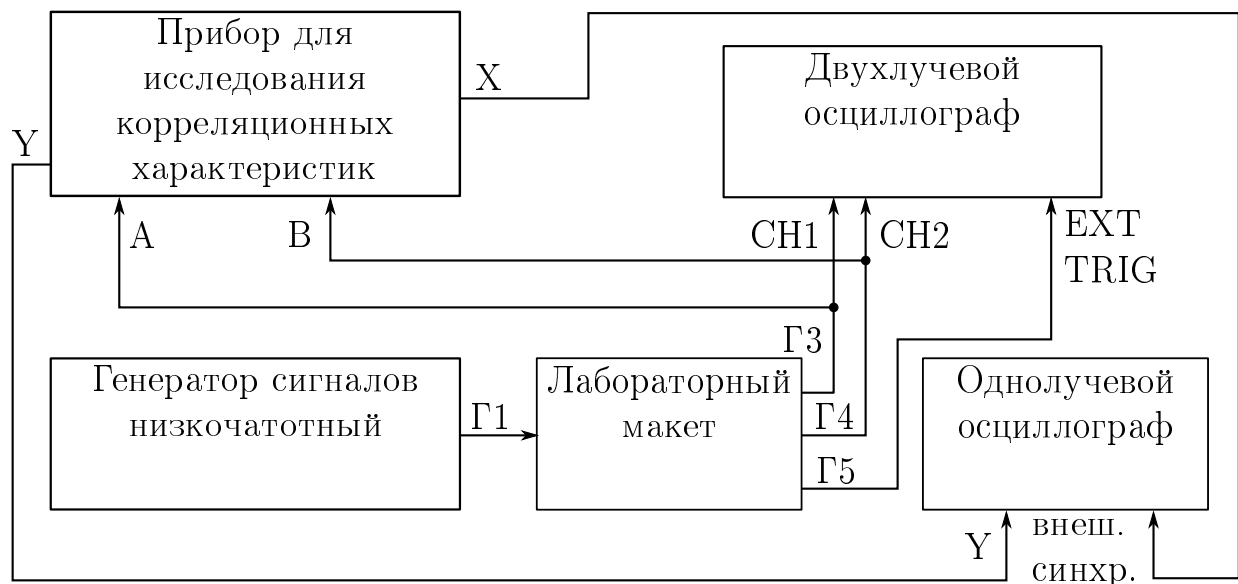


Рис. 1.1. Структурная схема лабораторной установки

- нажать кнопки переключателей «A1V» и «B1V»;
  - нажать кнопку переключателя «ВСПОМОГ. СИГНАЛ ВЫКЛ.»;
  - нажать кнопку переключателя «УСРЕДНЕНИЕ СУММ»;
  - нажать кнопку переключателя «ЗАДЕРЖКА» «10 mS»;
  - нажать кнопку  $\times 10$ ;
  - нажать кнопки переключателя «КОЛИЧЕСТВО ВЫБОРОК» « $2^7$ » и « $2^1$ »;
  - нажать кнопки « $\sim$ » и «РАЗВЕРТКА».
- Генератор сигналов низкочастотный:
- установить выходное напряжение, равное 0,2 В;
  - установить частоту, равную 10 кГц.
- Двухлучевой осциллограф:
- установить переключатели «CH 1», «CH 2» и «VOLT/DIV» в положение «1»;
  - установить переключатель «TIME/DIV» в положение «0,1 mS»;
  - установить переключатель «СИНХРОНИЗАЦИЯ» в положение «ВНЕШ».
- Однолучевой осциллограф:
- установить переключатель «УСИЛЕНИЕ V/ДЕЛ» в положение «0,2»;
  - установить тумблер «РАЗВЕР.» в верхнее положение, переключатель развёртки в положение «1 mS/ДЕЛ.», тумблер «СИНХР.» в нижнее положение.
- Лабораторный макет.

Для получения с гнезд Г3 и Г4 двух одинаковых пачек отсчётных импульсов, соответствующих дискретному сигналу  $u_1 = (1, -1, -1, 1)$ , установить:

- амплитуды первого и четвёртого отсчётных импульсов равными и максимальными, полярность этих импульсов сделать положительной;
- амплитуды второго и третьего отсчётных импульсов равными и максимальными, полярность этих импульсов сделать отрицательной;
- амплитуды остальных отсчётных импульсов равными нулю.

Зарисовать в масштабе осциллограммы полученных сигналов.

1.3. Нажать кнопку переключателя «РЕЖИМ  $R_{ab}$ », а затем кнопку «ПУСК». На экране однолучевого осциллографа наблюдать АКФ дискретного сигнала  $u_1$  при положительных значениях аргумента  $n$ .

Зарисовать в масштабе полученную осциллограмму.

1.4. Нажать кнопку «СБРОС», а затем кнопку «РЕЖИМ  $R_{ba}$ » и кнопку «ПУСК». Наблюдать на экране осциллографа АКФ дискретного сигнала  $u_1$  при отрицательных знаменаниях аргумента  $n$ .

Зарисовать в масштабе полученную осциллограмму.

1.5. Нарисовать в масштабе АКФ сигнала  $u_1$  по результатам п.п. 1.3, 1.4 и сравнить её с расчётной АКФ, полученной в п. 1 подготовки к работе.

2. Измерить АКФ четырёхпозиционного дискретного сигнала Баркера  $u_2 = (1, -1, 1, 1)$ .

2.1. Для получения с гнезд Г3 и Г4 двух одинаковых пачек отсчётных импульсов, соответствующих дискретному сигналу  $u_2$ , установить:

- амплитуды первого, третьего и четвёртого отсчётных импульсов равными и максимальными, полярность этих импульсов сделать положительной;
- амплитуду второго отсчётного импульса максимальной и полярность отрицательной;
- амплитуды остальных отсчётных импульсов равными нулю.

Зарисовать в масштабе полученную осциллограмму.

2.2. Измерить АКФ дискретного сигнала  $u_2$  по методике, изложенной в п.п. 1.3, 1.4, и сравнить её с расчётной АКФ, полученной в п. 1 подготовки к работе.

3. Измерить АКФ пятипозиционного сигнала Баркера  $u_3 = (1, -1, 1, 1, 1)$ .

3.1. Для получения с гнезд Г3 и Г4 двух одинаковых пачек отсчётных импульсов, соответствующих дискретному сигналу  $u_3$ , установить:

- амплитуды первого, третьего и четвёртого и пятого отсчётных импульсов равными и максимальными, полярность этих импульсов сделать положительной;

— амплитуду второго отсчётного импульса максимальной и полярность отрицательной;

— амплитуды остальных отсчётных импульсов равными нулю.

Зарисовать в масштабе полученную осциллограмму.

3.2. Измерить АКФ дискретного сигнала  $u_3$  по методике, изложенной в п.п. 1.3, 1.4, сравнить её с расчётной АКФ, полученной в п. 2 подготовки к работе, и с измеренной АКФ сигнала  $u_2$ , полученной в п.п. 2.2.

4. Измерить ВКФ  $\hat{B}_{u_1 u_2}(n)$  дискретных сигналов  $u_1 = (1, -1, -1, 1)$  и  $u_2 = (1, -1, 1, 1)$ .

4.1. Получить с гнезда Г3 пачку отсчётных импульсов, соответствующих дискретному сигналу  $u_1$ , а с гнезда Г4 — сигналу  $u_2$ .

Зарисовать в масштабе полученную осциллограмму.

4.2. Нажать кнопку переключателя «РЕЖИМ  $R_{ab}$ », а затем кнопку «ПУСК». На экране однолучевого осциллографа наблюдать ВКФ  $B_{u_1 u_2}(n)$  дискретных сигналов  $u_1$  и  $u_2$  при положительных значениях аргумента  $n$ . Зарисовать в масштабе полученную осциллограмму.

4.3. Нажать кнопку «СБРОС», а затем кнопку «РЕЖИМ  $R_{ba}$ » и кнопку «ПУСК». Наблюдать на экране осциллографа ВКФ  $\hat{B}_{u_1 u_2}(n)$  дискретных сигналов  $u_1$  и  $u_2$  при отрицательных значениях аргумента  $n$ . Зарисовать в масштабе полученную осциллограмму.

4.4. Нарисовать в масштабе ВКФ  $\hat{B}_{u_1 u_2}(n)$  сигналов  $u_1$  и  $u_2$  по результатам п.п. 4.2, 4.3 и сравнить её с расчётной ВКФ, полученной в п. 3 подготовки к работе.

5. Измерить ВКФ  $\hat{B}_{u_2 u_1}(n)$  дискретных сигналов  $u_2 = (1, -1, 1, 1)$  и  $u_1 = (1, -1, -1, 1)$ .

5.1. Получить с гнезда Г3 пачку отсчётных импульсов, соответствующих дискретному сигналу  $u_2$ , а с гнезда Г4 — сигналу  $u_1$ .

Зарисовать в масштабе полученную осциллограмму.

5.2. Измерить ВКФ  $\hat{B}_{u_2 u_1}(n)$  по методике, изложенной в п.п. 4.2, 4.3.

5.3. Нарисовать в масштабе ВКФ  $\hat{B}_{u_2 u_1}(n)$  сигналов  $u_2$  и  $u_1$ , сравнить её с расчётной ВКФ, полученной в п. 4 подготовки к работе, и с измеренной (п. 4) ВКФ  $\hat{B}_{u_1 u_2}(n)$ .

## Содержание отчёта

Результаты расчётов и построений, полученных при подготовке к работе.

Структурная схема лабораторной установки.  
Осциллограммы сигналов и графики корреляционных функций.  
Анализ полученных результатов и выводы.

### **Контрольные вопросы**

Дайте определение дискретного сигнала. Приведите примеры этих сигналов.

Дайте определение дискретной АКФ дискретного сигнала. Перечислите её свойства.

В чём состоит достоинство сигналов Баркера по сравнению с другими дискретными сигналами?

Дайте определение дискретной ВКФ двух дискретных сигналов. Перечислите её свойств.

## Лабораторная работа № 2

### Аппроксимация сигнала рядом Котельникова

**Цель работы** — изучение принципов восстановления непрерывного сигнала по его отсчётным значениям в дискретные моменты времени.

#### Теоретические сведения

Ряд Котельникова записывается следующим образом [1]:

$$S(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_k \frac{\sin \omega_{\epsilon} \left( t - \frac{k\pi}{\omega_{\epsilon}} \right)}{\omega_{\epsilon} \left( t - \frac{k\pi}{\omega_{\epsilon}} \right)}, \quad (2.1)$$

где  $S(t)$  — произвольный сигнал, спектральная плотность которого отлична от нуля лишь в полосе частот  $-\omega_{\epsilon} \leq \omega \leq \omega_{\epsilon}$ ;

$\omega_{\epsilon}$  — верхняя частота в спектре сигнала  $S(t)$ ;

$S_k$  — мгновенное значение сигнала  $S(t)$  в  $k$ -й отсчётной точке  $t_k = \frac{k\pi}{\omega_{\epsilon}}$ .

На основании выражения (2.1) принято формулировать теорему Котельникова так: произвольный сигнал, спектр которого не содержит частот выше  $\omega_{\epsilon}$ , может быть полностью восстановлен, если известны отсчётные значения этого сигнала, взятые через равные промежутки времени  $\frac{\pi}{\omega_{\epsilon}} = \frac{1}{2f_{\epsilon}}$ .

На основании теоремы Котельникова непрерывный сигнал  $S(t)$  необходимо превратить в дискретизованный сигнал  $S_{\partial}(t)$ , математическая модель которого задаётся выражением [1]:

$$S_{\partial}(t) = \Delta \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_k \delta(t - k\Delta), \quad (2.2)$$

где  $\Delta = \frac{\pi}{\omega_{\epsilon}} = \frac{1}{2f_{\epsilon}}$  — интервал (шаг) дискретизации, то есть сигнал  $S_{\partial}(t)$  представляет собой модулированную импульсную последовательность, образованную бесконечно короткими импульсами.



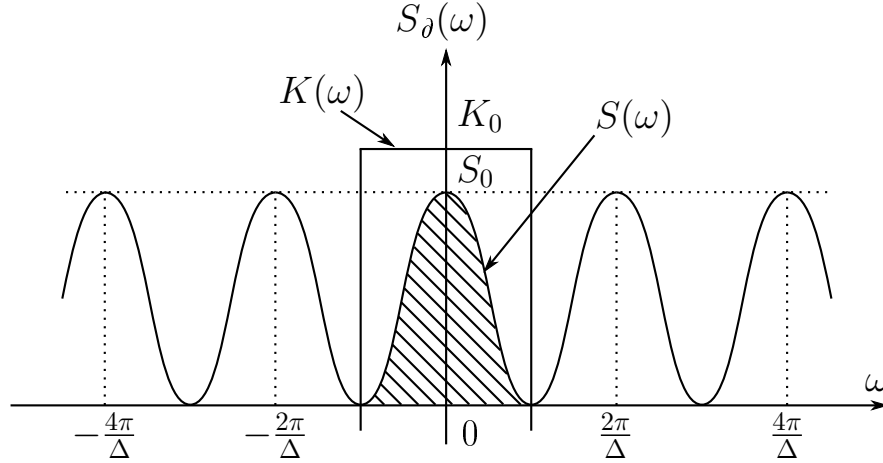


Рис. 2.1. Спектральная плотность дискретизированного сигнала  $S_\Delta(t)$

Спектральная плотность сигнала  $S_\Delta(t)$  задаётся выражением [1]:

$$S_\Delta(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S\left(\omega - \frac{2\pi n}{\Delta}\right), \quad (2.3)$$

где  $S(\omega)$  — получаемая из выражения (2.3) при  $n = 0$  спектральная плотность сигнала  $S(t)$ .

Таким образом, спектр дискретизированного сигнала  $S_\Delta(t)$  представляет собой сумму спектра исходного сигнала  $S(t)$  и бесконечного числа его «копий», которые располагаются на оси частот через одинаковые интервалы  $\frac{2\pi}{\Delta}$  (рис. 2.1).

Из выражения (2.3) и рис. 2.1 ясно, что сигнал  $S(t)$  может быть совершенно точно восстановлен с помощью идеального фильтра нижних частот (ФНЧ), на вход которого подан сигнал  $S_\Delta(\omega)$  (выражение (2.2)).

Комплексная частотная характеристика идеального ФНЧ записывается так:

$$K(j\omega) = \begin{cases} K_0, & -\omega_\epsilon \leq \omega \leq \omega_\epsilon; \\ 0, & -\omega_\epsilon > \omega > \omega_\epsilon. \end{cases}$$

Амплитудно-частотная характеристика  $K(\omega)$  этого фильтра изображена на рис. 2.1. Дискретизация непрерывных сигналов с использованием бесконечно коротких импульсов и идеальной ФНЧ физически нереализуемы. Это ведёт к возникновению погрешностей при восстановлении исходного сигнала.

Таблица 2.1

	Интервал дискретизации	
	$\Delta_1 = \frac{t_u}{6} = 50 \text{ мкс}$	$\Delta_2 = \frac{t_u}{12} = 25 \text{ мкс}$
$t, \text{ мкс}$		
$u_{\text{ап}}(t), \text{ В}$		

### Подготовка к работе

1. Рассчитать напряжение  $u_{\text{ап}}(t)$ , аппроксимирующее прямоугольный видеоимпульс

$$u(t) = \begin{cases} U_m, & 0 \leq t \leq t_u; \\ 0, & 0 > t > t_u \end{cases}$$

рядом Котельникова по семи отсчётным значениям  $\Delta_1 = \frac{\pi}{\omega_{\theta_1}} = \frac{t_u}{6}$  и по тринадцати отсчётным значениям  $\Delta_2 = \frac{\pi}{\omega_{\theta_2}} = \frac{t_u}{12}$ .

При этом использовать формулу:

$$u_{\text{ап}}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} U_k \frac{\sin \omega_{\theta}(t - k\Delta)}{\omega_{\theta}(t - k\Delta)}, \quad (2.4)$$

где  $U_k$  — мгновенное значение прямоугольного видеоимпульса в  $k$ -й отсчётной точке;

$\Delta$  — интервал дискретизации;

$N$  — число отсчётов.

Вычисления произвести в интервале  $t$  от  $-t_u$  до  $2t_u$  при следующих значениях параметров видеоимпульса: амплитуда  $U_m = 1 \text{ В}$ , длительность  $t_u = 300 \text{ мкс}$ . Результаты расчётов свести в табл. 2.1.

Используя данные табл. 2.1, построить аппроксимирующее напряжение  $u_{\text{ап}}(t)$  для двух значений интервала дискретизации. В тех же осях координат изобразить исходный прямоугольный видеоимпульс. Сделать вывод о влиянии интервала дискретизации (о влиянии выбора верхней частоты спектра прямоугольного видеоимпульса) на качество аппроксимации.

$t$ , мкс	
$u_{\text{ап}}(t)$ , В	

2. Рассчитать используя выражение (2.4), напряжение  $u_{\text{ан}}(t)$ , аппроксимирующее прямоугольный радиоимпульс

$$u(t) = \begin{cases} U_m \sin \omega_0 t, & 0 \leq t \leq t_u; \\ 0, & 0 > t > t_u \end{cases}$$

рядом Котельникова по шести отличным от нуля значениям сигнала, взятым в момент времени  $t_k = k\Delta = k\frac{T_0}{4}$ ,  $k = 1, 3, 5, 7, 9, 11$ ,

где  $T_0$  — период высокочастотного заполнения радиоимпульса.

Вычисления произвести в интервале  $t$  от  $-t_u$  до  $2t_u$  при следующих значениях параметров радиоимпульса:

- амплитуда  $U_m = 1$  В,
- длительность  $t_u = 300$  мкс.

Результаты расчётов свести в табл. 2.2.

По данным табл. 2.2 построить аппроксимирующее напряжение  $u_{\text{ан}}(t)$ , в тех же осях координат изобразить исходный прямоугольный радиоимпульс. Сделать заключение о правильности выбора интервала дискретизации.

## Контрольно-измерительная аппаратура

Генератор сигналов низкочастотный.

Осциллограф.

Двухлучевой осциллограф.

Милливольтметр переменного тока.

Лабораторный макет.

## Описание лабораторного макета

Лабораторный макет состоит из базового и сменного блоков, а также макета фильтра нижних частот (ФНЧ). В базовом блоке смонтирован источник питания, усилитель—ограничитель. В сменном блоке смонтирован генератор,

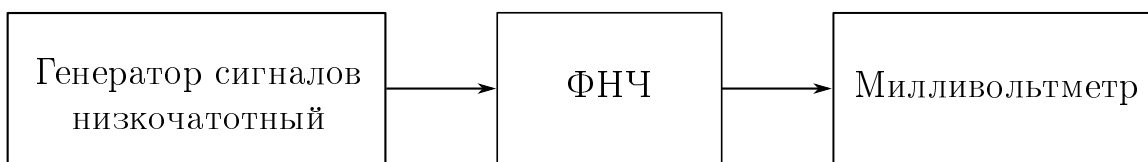


Рис. 2.2. Структурная схема лабораторной установки

вырабатывающий последовательность пачек отсчётных импульсов, максимальное количество которых в пачке может быть либо 16, либо 20, а также импульсы синхронизации. Амплитуда и полярность отсчётных импульсов устанавливается с помощью ручек управления, расположенных на лицевой панели сменного блока. Запуск генератора отсчётных импульсов осуществляется синусоидальным сигналом внешнего генератора, подключаемого к гнезду Г1. С гнезда Г4 снимается последовательность пачек отсчётных импульсов, с гнезда Г5 — импульсы для внешней синхронизации осциллографа.

Макет ФНЧ выполнен на операционном усилителе с использованием резисторов и конденсаторов, меняя параметры которых можно получать различные полосы пропускания ФНЧ.

### Порядок выполнения работы

1. Снять амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) фильтра нижних частот.

1.1. Структурная схема лабораторной установки приведена на рис. 2.2, а на рис. 2.3 — принципиальная схема ФНЧ.

1.2. Собрать лабораторную установку в соответствии с рис. 2.2. На макете ФНЧ переключатели S2, S4 поставить в положение «1», S3, S5 — в положение «2».

После проверки преподавателем схемы соединений приборов и макета ФНЧ включить их питание.

Установить выходное напряжение генератора, используя его вольтметр, равное 1 В, установить предел измерения милливольтметра равным 10 В.

1.3. Измерить амплитудно-частотную характеристику ФНЧ в диапазоне частот от 20 до 10000 Гц.

Результаты измерений свести в табл. 2.3.

1.4. На макете ФНЧ переключатели S2, S4 поставить в положение «2». Измерить амплитудно-частотную характеристику ФНЧ в диапазоне частот от 20 до 30000 Гц.

Результаты измерений свести в табл. 2.3.

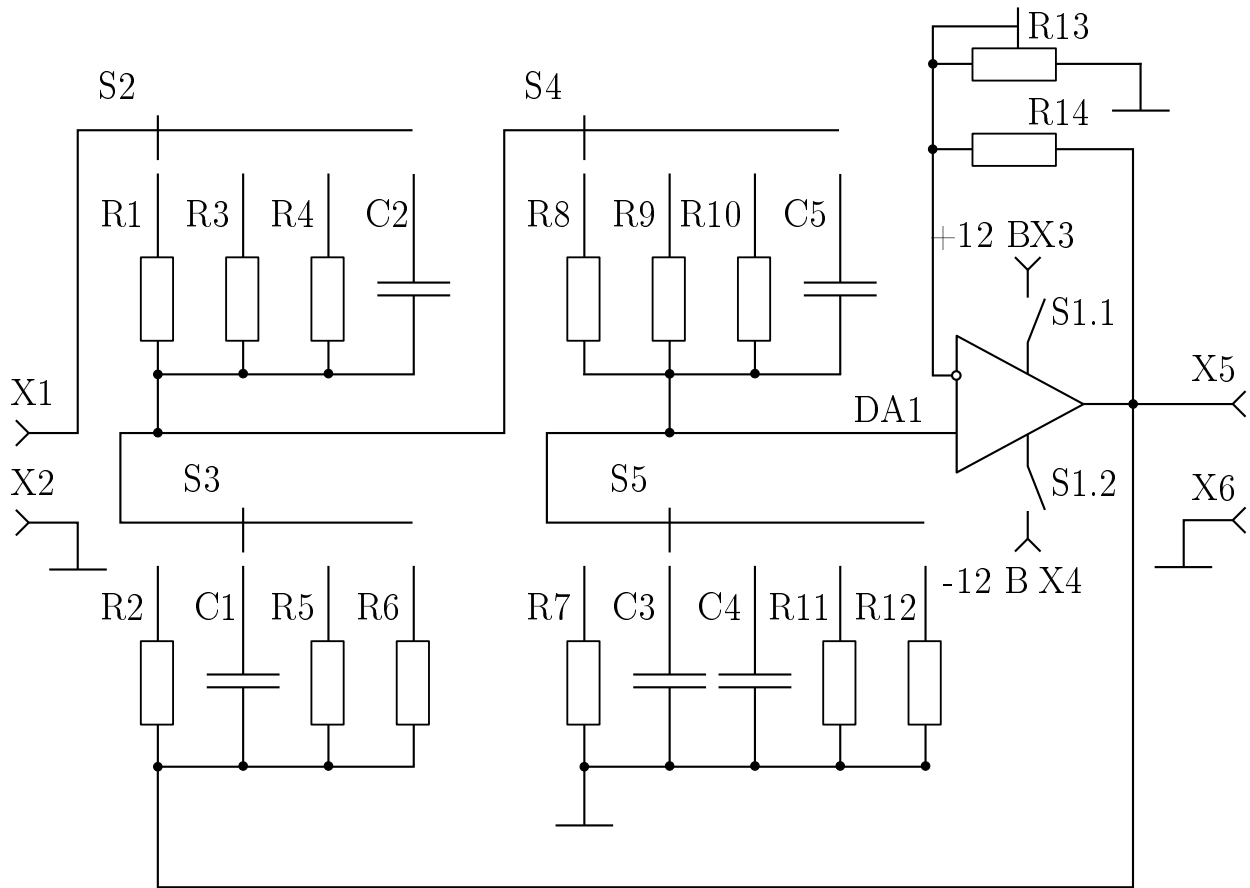


Рис. 2.3. Принципиальная схема ФНЧ

Таблица 2.3

$F, \Gamma\text{Ц}$		
S2, S4 — в положение «1»	$U_{\text{вых.}}, \text{В}$	
	$K = U_{\text{вых.}}/U_{\text{вх.}}$	
S2, S4 — в положение «2»	$U_{\text{вых.}}, \text{В}$	
	$K = U_{\text{вых.}}/U_{\text{вх.}}$	
S2 — в положение «1», S4 — в положение «2»	$U_{\text{вых.}}, \text{В}$	
	$K = U_{\text{вых.}}/U_{\text{вх.}}$	

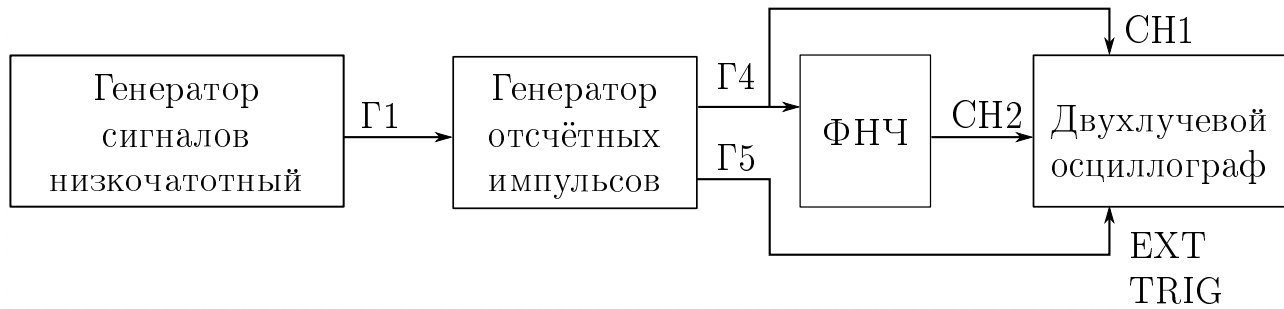


Рис. 2.4. Структурная схема лабораторной установки

1.5. На макете ФНЧ переключатель S2 поставить в положение «1». Измерить АЧХ ФНЧ в диапазоне частот от 20 до 15000 Гц. Результаты измерений свести в табл. 2.3.

По данным табл. 2.3 построить в одних осях координат амплитудно-частотные характеристики ФНЧ, определить полосы пропускания.

2. Синтезировать прямоугольный видеоимпульс длительностью  $t_u = 300$  мкс.

2.1. Собрать лабораторную установку в соответствии с рис. 2.4.

После проверки преподавателем схемы соединений приборов и лабораторного макета включить их питание.

Установить выходное напряжение генератора низкочастотных сигналов равное 1 В, а частоту — 40 кГц. На макете ФНЧ переключатели S2, S4 поставить в положение «1», S3, S5 — в положение «2». На осциллографе переключатель «V/ДЕЛ.» поставить в положение «0,2», а переключатель «ВРЕМЯ/ДЕЛ.» — в положение «0,1 мС». Сигнальный провод кабеля канала Y осциллографа подключить на вход ФНЧ. Наблюдая на экране осциллографа отсчётные импульсы с помощью ручек управления на лицевой панели генератора отсчётных импульсов установить амплитуды первого, третьего, пятого, седьмого, девятого, одиннадцатого и тринадцатого импульсов равными 1 В, полярность этих импульсов сделать положительной, амплитуды остальных импульсов сделать нулевыми.

Зарисовать в масштабе осциллограмму полученного сигнала.

Сигнальный провод кабеля канала Y осциллографа подключить к выходу ФНЧ.

Зарисовать в масштабе осциллограмму сигнала на выходе ФНЧ и сравнить её с графиком  $u_{an}(t)$  для интервала дискретизации  $\Delta_1 = \frac{t_u}{6} = 50$  мкс (п. 1).

2.2. Сигнальный провод кабеля канала Y осциллографа подключить на вход ФНЧ. Установить амплитуды с 1-го по 13-й импульсов равными 1 В, поляр-

ность этих импульсов сделать положительной, амплитуды остальных импульсов сделать нулевыми.

Зарисовать в масштабе осциллограмму сигнала.

На макете ФНЧ переключатель S4 поставить в положение «2».

Сигнальный провод кабеля канала Y осциллографа подключить к выходу ФНЧ.

Зарисовать в масштабе осциллограмму сигнала на выходе ФНЧ и сравнить её с осциллограммой (п. 2.1) и с графиком  $u_{\text{ап}}(t)$  для интервала дискретизации  $\Delta_2 = \frac{t_u}{12} = 25 \text{ мкс}$  (п. 1).

2.3. На макете ФНЧ переключатель S2 поставить в положение «2».

Зарисовать в масштабе осциллограмму сигнала на выходе ФНЧ и сравнить её с осциллограммой, полученной в п. 2.2. Сделать заключение о влиянии полосы пропускания фильтра на качество синтезирования прямоугольного видеоимпульса.

2.4. На макете ФНЧ переключатель S2, S4 поставить в положение «1».

Зарисовать в масштабе осциллограмму сигнала на выходе ФНЧ и сравнить её с осциллограммой, полученной в п. 2.2. Сделать заключение о влиянии полосы пропускания фильтра на качество синтезирования прямоугольного видеоимпульса.

3. Синтезировать прямоугольный радиоимпульс с длительностью  $t_u = 300 \text{ мкс}$  и частотой заполнения  $f_0 = 10 \text{ кГц}$ .

3.1. На входе ФНЧ получить последовательность пачек отсчётных импульсов, состоящих из второго, шестого, десятого импульсов положительной полярности и четвёртого, восьмого, двенадцатого импульсов отрицательной полярности.

На макете ФНЧ переключатель S2 поставить в положение «1», а S4 — в положение «2».

3.2. Зарисовать в масштабе и одну под другой осциллограмму полученного сигнала и радиоимпульса на выходе ФНЧ.

## Содержание отчёта

Результаты расчётов и построений, полученные при подготовке к работе. Структурные схемы лабораторных установок.

Результаты измерений и выполненные по ним построения, осциллограммы.

Анализ полученных результатов и выводы.

## **Контрольные вопросы**

Приведите формулировку теоремы Котельникова.

Чем определяется частота повторения отсчётных импульсов?

Из каких соображений выбирается полоса пропускания ФНЧ?

Назовите возможные причины расхождения экспериментальных и расчётных данных в лабораторной работе.



## Анализ нерекурсивных цифровых фильтров

**Цель работы** — исследование влияния параметров нерекурсивных трансверсальных цифровых фильтров (ЦФ) 1-го и 2-го порядков на их частотные и временные характеристики.

### Теоретические сведения

**Нерекурсивным ЦФ** называется ЦФ, при формировании выходных отсчётов которого  $y_i$  используются лишь отсчётные значения входного сигнала в данный  $x_i$  и в некоторое число  $m$  предшествующих  $x_{i-1}, x_{i-2}, \dots, x_{i-m}$ , моментов времени. При этом целое число  $m$  определяет порядок ЦФ.

**Алгоритм работы** нерекурсивного ЦФ описывается разностным уравнением

$$y_i = a_0x_i + a_1x_{i-1} + a_2x_{i-2} + \dots + a_mx_{i-m}, \quad (3.1)$$

Интервал  $\Delta$  между отсчётами входного или выходного сигналов называется **интервалом (периодом) дискретизации**, а соответствующая частота  $\omega_d \frac{2\pi}{\Delta}$  — **частотой дискретизации**.

Для случая, когда значение коэффициента  $a_0 = 1$ , алгоритмы работы нерекурсивного ЦФ 1-го ( $m = 1$ ) и 2-го ( $m = 2$ ) порядков с учетом (3.1) записываются:

$$y_i = x_i + a_1x_{i-1}, \quad (3.2)$$

$$y_i = x_i + a_1x_{i-1} + a_2x_{i-2}, \quad (3.3)$$

Функциональные схемы ЦФ представлены на рис. 3.1 и 3.2.

Здесь обозначено:

$\Delta$  — элемент задержки на период дискретизации,

$\nabla$  — масштабный усилитель.

Комплексная частотная характеристика (КЧХ) ЦФ может быть вычислена через его передаточную (системную) функцию  $H(Z)$ , определяемую как отношение  $Z$ -преобразования выходной последовательности отсчётов  $y_i$  к

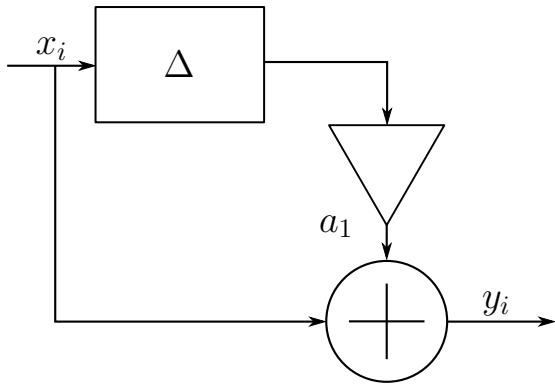


Рис. 3.1

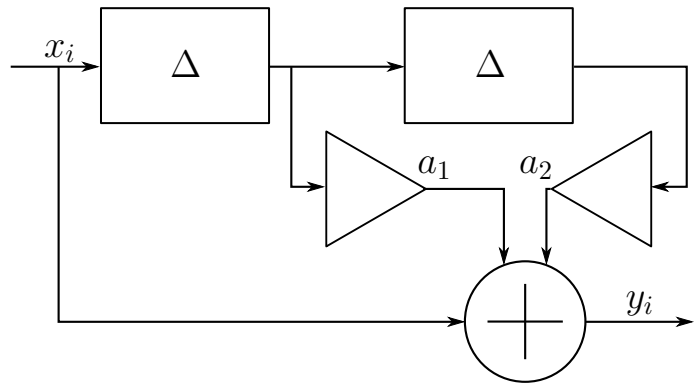


Рис. 3.2

$Z$ -преобразованию входной последовательности  $x_i$ , путём замены

$$K(i\omega) = H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} \Bigg|_{Z = e^{i\omega\Delta}}. \quad (3.4)$$

Для ЦФ 1-го и 2-го порядков при  $a_0 = 1$  передаточные функции и КЧХ с учётом (3.4) задаются, соответственно, выражениями:

$$H_1(Z) = 1 + a_1 Z^{-1} = \frac{Z + a_1}{Z}, \quad (3.5)$$

$$K_1(i\omega) = 1 + a_1 e^{-j\omega\Delta}, \quad (3.6)$$

$$H_2(Z) = 1 + a_1 Z^{-1} + a_2 Z^{-2} = \frac{Z^2 + a_1 Z + a_2}{Z^2}, \quad (3.7)$$

$$K_2(i\omega) = 1 + a_1 e^{-j\omega\Delta} + a_2 e^{-j2\omega\Delta}. \quad (3.8)$$

Амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) ЦФ 1-го и 2-го порядков с учётом (3.6) и (3.8), соответственно, записываются:

$$A_1(\phi) = |K_1(\phi)| = \sqrt{1 + a_1^2 + 2a_1 \cos \phi}, \quad \phi = \omega\Delta, \quad (3.9)$$

$$A_2(\phi) = |K_2(\phi)| = \sqrt{(1 + a_1^2 + a_2^2) + 2[a_1(1 + a_2) \cos \phi + a_2 \cos 2\phi]}, \quad \phi = \omega\Delta, \quad (3.10)$$

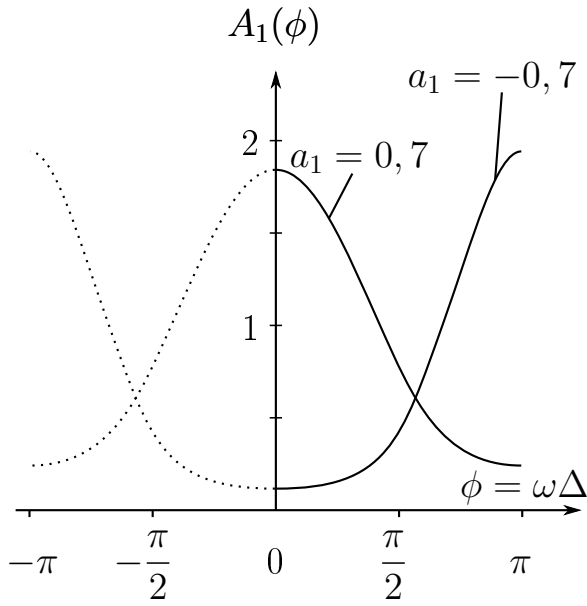


Рис. 3.3

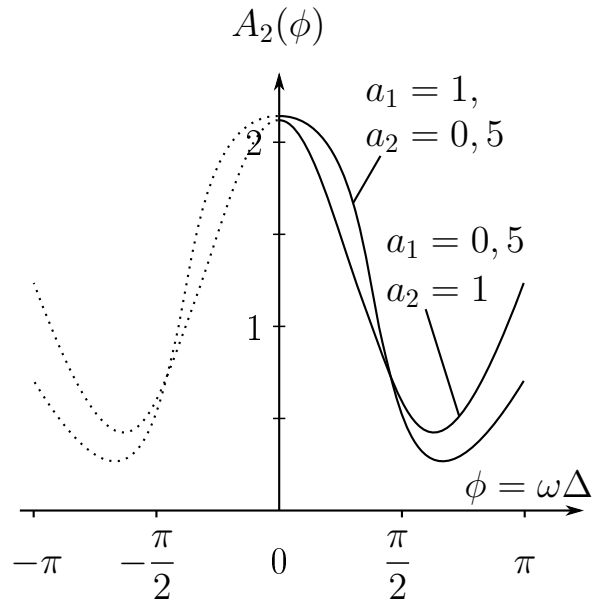


Рис. 3.4

Примерный вид АЧХ ЦФ 1-го и 2-го порядков, построенной в функции  $\phi = \omega\Delta$  при фиксированных значениях коэффициентов  $a_0$  и  $a_1, a_2$ , показан на рис. 3.3 – 3.5.

Сплошными линиями показан ход кривых в области физических (положительных) частот, а пунктирными — в области отрицательных частот.

Вид АЧХ нерекурсивных ЦФ зависит от координат нулей  $Z_0$  системной функции  $H(Z)$  ЦФ, а именно: положение минимумов АЧХ на оси абсцисс  $\phi = \omega\Delta$  соответствует значениям аргументов нулей  $\phi_0 = \arg Z_0$  системной функции.

Нулями системной функции  $H(Z)$  называются значения переменной  $Z$ , обращающие её в нуль.

Из (3.5) и (3.7) следует, что для ЦФ 1-го и 2-го порядков нули определяются, соответственно, из решения уравнений:  $Z + a_1 = 0$  и  $Z^2 + a_1Z + a_2 = 0$  и записываются:

$$Z_0 = -a_1, \quad (3.11)$$

$$Z_{0,1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}, \quad (3.12)$$

В табл. 3.1 приведены значения нулей системных функций ЦФ 1-го и 2-го порядков, а также соответствующие им значения модулей и аргументов, вычисленные по формулам (3.11) и (3.12) для тех же значений коэффициентов

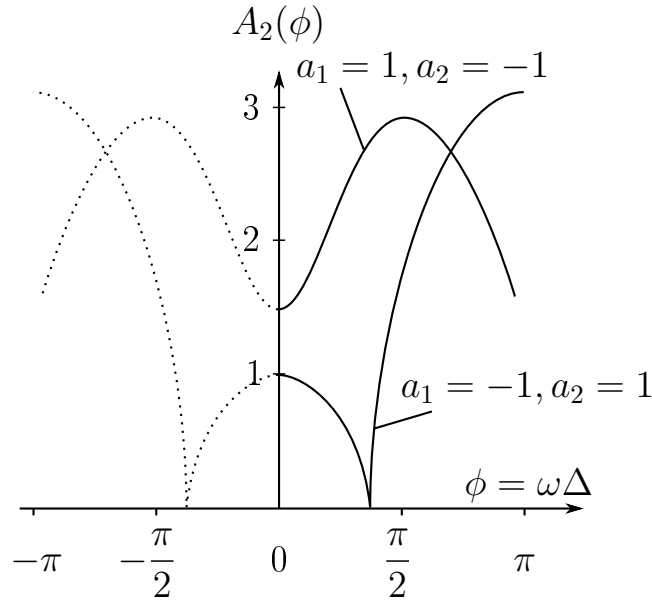


Рис. 3.5

разностных уравнений (3.2) и (3.3), для которых построены АЧХ на рис. 3.3 — 3.5.

Координаты нулей системных функций ЦФ 1-го и 2-го порядков для наглядности показаны на рис. 3.6, 3.7. На рисунках в скобках указаны номера вариантов значений коэффициентов или их сочетаний.

Из выражений рис. 3.3 — 3.5 и табл. 3.1 — видно, что, действительно, положение минимумов АЧХ на оси абсцисс  $\phi = \omega\Delta$  соответствует значениям аргументов нулей  $\phi_0 = \arg Z_0$  системной функции ЦФ.

Форма АЧХ зависит также от модуля нулей  $|Z_0|$  системной функции, определяемого значениями коэффициентов разностных уравнений (3.1) — (3.3), описывающих алгоритм работы ЦФ.

В зависимости от вида АЧХ ЦФ может выполнять роль фильтра нижних частот (ФНЧ), фильтра верхних частот (ФВЧ), полосового фильтра (ПФ) или режекторного фильтра (РФ).

Из рассмотренных выше вариантов ЦФ роль ФНЧ могут выполнять, например, ЦФ 1-го порядка с коэффициентом разностного уравнения  $a_1 = 0,7$  (рис. 3.3) и ЦФ 2-го порядка с коэффициентами  $a_1 = 1, a_2 = 0,5$  и  $a_1 = 0,5, a_2 = 1$  (рис. 3.4). Роль ФВЧ может выполнять ЦФ 1-го порядка с коэффициентами  $a_1 = -0,7$  (рис. 3.3). Роль ПФ может выполнять ЦФ 2-го порядка с коэффициентами  $a_1 = 1, a_2 = -1$ , а роль РФ — этот же ЦФ с коэффициентами  $a_1 = -1, a_2 = 1$  (рис. 3.5).

Таблица 3.1

ЦФ 1-го порядка					ЦФ 2-го порядка					
№ п/п	$a_1$	$Z_0$	$ Z_0 $	$\phi_0$ , рад.	№ п/п	$a_1$	$a_2$	$Z_{01,2}$	$ Z_{01,2} $	$\phi_{01,2}$ , рад.
1	0,7	-0,7	0,7	$\pi$	1	1	0,5	$-0,5 \pm j0,5$	0,71	$\pm \frac{3\pi}{4}$
					2	0,5	1	$0,25 \pm j0,97$	1	$\pm 0,4\pi$
2	-0,7	0,7	0,7	0	3	-1	1	$0,5 \pm j0,87$	1	$\pm \frac{\pi}{3}$
					4	1	-1	$-0,5 \pm j1,12$	0,62; 1,62	$0, \pi$

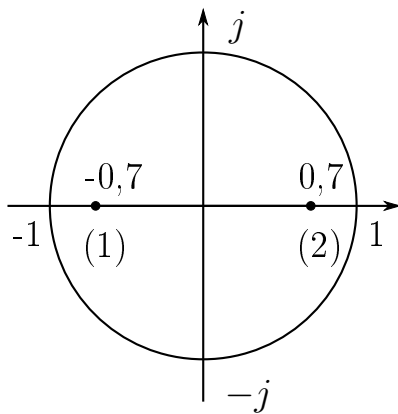


Рис. 3.6

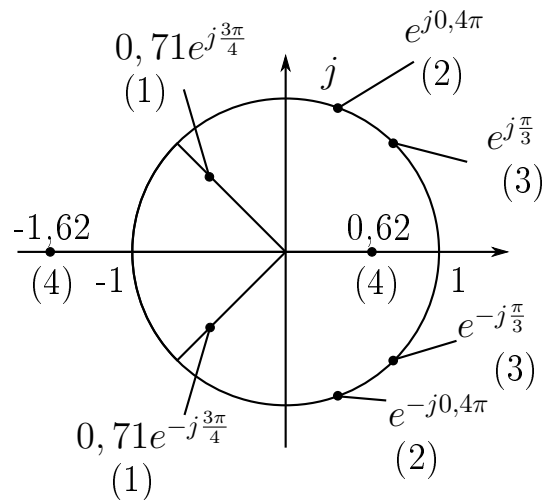


Рис. 3.7

В радиотехнических устройствах наиболее часто применяются ФНЧ и ПФ. Качество АЧХ ФНЧ с точки зрения её фильтрующих свойств принято характеризовать величиной ослабления  $\Delta_{\delta\delta}$  сигнала вне полосы прозрачности фильтра. Оно определяется из выражения:

$$\Delta_{\delta\delta} = 20 \lg \frac{A(\omega_1)}{A(0)}, \quad (3.13)$$

где  $A(0)$  — значение АЧХ на нулевой частоте ( $\omega = 0$ ), а  $A(\omega_1)$  — её значение на некой частоте  $\omega_1$  вне полосы прозрачности фильтра, связанной с так называемой частотой «среза»  $\omega_c$  фильтра соотношением

$$\omega_1 = n\omega_c, \quad (3.14)$$

где  $n$  — некое целое положительное число. Если принять  $n = 2$ , то говорят об ослаблении «на октаву».

Частота среза  $\omega_c$  определяется по ослаблению сигнала в  $\sqrt{2}$  раз, то есть

$$\frac{A(\omega_c)}{A(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0,71. \quad (3.15)$$

Фильтрующие свойства ПФ принято характеризовать величиной добротности  $Q$  фильтра, которая может быть определена из выражения

$$Q = \frac{\omega_p}{\Delta\omega_n}, \quad (3.16)$$

где  $\omega_p$  — резонансная частота фильтра, соответствующая максимуму АЧХ,  $\Delta\omega_n$  — полоса пропускания фильтра, определяемая по ослаблению сигнала в  $\sqrt{2}$  раза, то есть

$$\frac{A\left(\omega_p + \frac{\Delta\omega_n}{2}\right)}{A(\omega_p)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0,71. \quad (3.17)$$

Заметим, что, поскольку в лабораторной работе АЧХ строится в функции параметра  $\phi = \omega\Delta$ , при расчёте ослабления  $\Delta_{\delta\delta}$  и добротности  $Q$  частоты  $\omega_c$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_p$  и полосу частот  $\Delta\omega_n$  следует заменить на величины:  $\phi_c = \omega_c\Delta$ ,  $\phi_1 = \omega_1\Delta$ ,  $\phi_p = \omega_p\Delta$ ,  $\phi_n = \Delta\omega_n\Delta$ , то есть вместо формул (3.13) — (3.17) использовать при расчётах формулы:

$$\Delta_{\delta\delta} = 20 \lg \frac{A(\phi_1)}{A(0)}, \quad (3.18)$$

$$\phi_1 = n\phi_c, \quad (3.19)$$

$$\frac{A(\phi_c)}{A(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0,71, \quad (3.20)$$

$$Q = \frac{\phi_p}{\phi_n} \quad (3.21)$$

$$\frac{A\left(\phi_p \pm \frac{\Delta\phi_n}{2}\right)}{A(\phi_p)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0,71, \quad (3.22)$$

Для описания ЦФ во временной области используется его импульсная характеристика.

**Импульсная характеристика ЦФ** представляет собой дискретный сигнал  $\{h_k\}$ , который является реакцией ЦФ на «единичный импульс»  $(1, 0, 0, 0, \dots)$ . Она связана с системной функцией ЦФ  $H(Z)$  обратным  $Z$ -преобразованием

$$h_k = \frac{1}{2\pi i} \oint Z^{k-1} H(Z) dZ. \quad (3.23)$$

Для нерекурсивного ЦФ импульсная характеристика содержит ограниченное число членов. При известной системной функции  $H(Z)$  она может быть вычислена с использованием выражения (3.23) и представляет собой последовательность из коэффициентов разностного управления (3.1):

$$\{h_k\} = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_m) \quad (3.24)$$

Соответственно, для ЦФ 1-го и 2-го порядка при  $a_0 = 1$  импульсная характеристика записывается:

$$\{h_k\} = (1, a_1) \quad (3.25)$$

$$\{h_k\} = (1, a_1, a_2) \quad (3.26)$$

и имеет вид, представленный на рис. 3.8 и 3.9. Заметим, что в зависимости от знаков коэффициентов разностного управления импульсные характеристики могут быть как однополярными, так и разнополярными.

В заключении отметим, что, очевидно, расчёт АЧХ и импульсной характеристики для ЦФ 1-го и 2-го порядков можно производить по одним и тем же формулам (3.10) и (3.26), положив в них для случая ЦФ 1-го порядка значение коэффициента  $a_2 = 0$ .

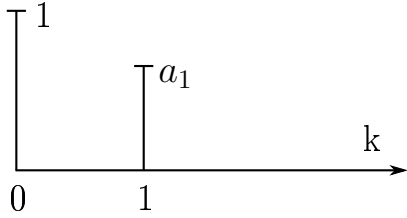


Рис. 3.8

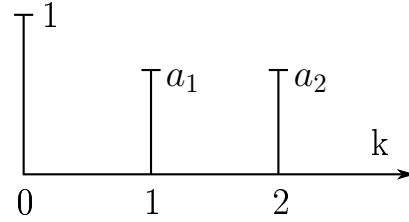


Рис. 3.9

### Подготовка к работе

1. Запись с использованием формул (3.2), (3.5), (3.6), (3.9), (3.25) разностное управление и выражения для системной функции, КЧХ, АЧХ и импульсной характеристики нерекурсивного ЦФ 1-го порядка. Изобразить с использованием рис. 3.1 функциональную схему этого фильтра.

2. Рассчитать с использованием формулы (3.11) значения нулей  $Z_0$  системной функции нерекурсивного ЦФ 1-го порядка для следующих значений коэффициента разностного управления  $a_1 : 0, 8; 1, 0; -0, 8; -1, 0$ .

Определить соответствующие этим нулям значения модулей  $|Z_0|$  и аргументов (в радианах)  $\phi_0 = \arg Z_0$ . Свести рассчитанные значения нулей, их модулей и аргументов в таблицу, аналогичную левой части табл. 3.1. Изобразить положение нулей на  $Z$ -плоскости аналогично рис. 3.6.

3. Изобразить с использованием указанной в теоретических сведениях связи между положением минимумов АЧХ и значениями аргументов нулей системной функции примерный вид АЧХ нерекурсивного ЦФ 1-го порядка для следующих значений коэффициента разностного управления  $a_1 : 0, 8; -0, 8$ , аналогично тому, как это сделано на рис. 3.3.

4. Изобразить с использованием формулы (3.25) вид импульсной характеристики нерекурсивного ЦФ 1-го порядка для следующих значений коэффициента разностного уравнения  $a_1 : 0, 8; -0, 8$ , аналогично тому, как это сделано на рис. 3.8.

5. Записать с использованием формул (3.3), (3.7), (3.8), (3.10), (3.26) разностное уравнение и выражения для системной функции, КЧХ, АЧХ и импульсной характеристики нерекурсивного ЦФ 2-го порядка. Изобразить с использованием рис. 3.2 функциональную схему этого фильтра.

6. Рассчитать с использованием формулы (3.12) значения нулей  $Z_0$  системной функции нерекурсивного ЦФ 2-го порядка для следующих сочетаний



значений коэффициентов разностного уравнения:

$$a_1 = 0,8; a_2 = -0,8; a_1 = 1; a_2 = 0,4; a_1 = -1; a_2 = 0,8; a_1 = 0,5; a_2 = -1.$$

Определить соответствующие этим нулям значения модулей  $|Z_0|$  и аргументов (в радианах)  $\phi_0 = \arg Z_0$ . Свести рассчитанные значения нулей, их модулей и аргументов в таблицу, аналогичную правой части табл. 3.1. Изобразить положение нулей на  $Z$ -плоскости аналогично рис. 3.7.

7. Изобразить с использованием указанной в теоретических сведениях связи между положением минимумов АЧХ и значениями аргументов нулей системной функции примерный вид АЧХ нерекурсивного ЦФ 2-го порядка для следующих сочетаний коэффициентов разностного уравнения:  $a_1 = 1; a_2 = 0,4; a_1 = 0,5; a_2 = -1$ , аналогично тому, как это сделано на рис. 3.4 и 3.5.

8. Изобразить с использованием формулы (3.26) вид импульсной характеристики нерекурсивного ЦФ 2-го порядка для следующих сочетаний коэффициентов разностного уравнения  $a_1 = 1; a_2 = 0,4; a_1 = 0,5; a_2 = -1$ , аналогично тому, как это сделано на рис. 3.9.

## Порядок выполнения работы

Лабораторная работа выполняется с использованием ПЭВМ. Программа расчёта АЧХ и импульсных характеристик нерекурсивных ЦФ 1-го и 2-го порядков написана на алгоритмическом языке «Mathcad» и внесена в память ПЭВМ.

1. Рассчитать и построить с использованием ПЭВМ АЧХ и импульсную характеристику нерекурсивного ЦФ 1-го порядка при фиксированном значении коэффициента  $a_2 = 0$  и следующих значениях коэффициента  $a_1 : 0,8; 1,0; -0,8; -1,0$ .

*Примечание:* ЦФ 1-го порядка рассматривается как частный случай ЦФ 2-го порядка (при  $a_2 = 0$ ) и расчёты ведутся по формулам (3.10) и (3.26).

2. Рассчитать и построить с использованием ПЭВМ АЧХ и импульсную характеристику нерекурсивного ЦФ 2-го порядка при следующих сочетаниях коэффициентов  $a_1 = 0,8; a_2 = -0,8; a_1 = 1,0; a_2 = 0,4; a_1 = -1,0; a_2 = 0,8; a_1 = 0,5; a_2 = -1,0$ .

3. Выбрать из построенных с использованием ПЭВМ АЧХ нерекурсивных ЦФ 1-го и 2-го порядков вариант реализации ЦФ, пригодной для использования в качестве ФНЧ.

Рассчитать для выбранного варианта с использованием формул (3.18) — (3.20) ослабление на октаву  $\Delta_{об}$  сигнала вне полосы прозрачности фильтра (при  $n = 2$ ).

4. Выбрать из построенных с использованием ПЭВМ АЧХ нерекурсивных ЦФ 1-го и 2-го порядков вариант реализации ЦФ, пригодный для использования в качестве ПФ.

Рассчитать для выбранного варианта с использованием формул (3.21) и (3.22) добротность фильтра.

## Содержание отчёта

Функциональные схемы нерекурсивных ЦФ 1-го и 2-го порядков.

Аналитические выражения, расчёты и графики, выполненные при подготовке к работе.

Распечатка результатов расчёта на ПЭВМ АЧХ и импульсных характеристик нерекурсивных ЦФ, а также результаты других расчётов, произведённых в процессе выполнения работы.

Выводы, содержание анализ влияния параметров нерекурсивных ЦФ 1-го и 2-го порядков на их частотные и временные характеристики.

## Контрольные вопросы

Как по разностному уравнению определяется порядок нерекурсивного ЦФ?

Как определяется системная функция ЦФ?

Как связаны между собой КЧХ и системная функция ЦФ?

Дайте определение импульсной характеристики ЦФ. В чём состоит характерная особенность импульсной характеристики нерекурсивного ЦФ?

Как связаны между собой импульсная характеристика и системная функция ЦФ?

Как связан вид АЧХ нерекурсивного ЦФ со значениями аргументов нулей его системной функции?

В чём состоит характерная особенность АЧХ ЦФ по сравнению с АЧХ аналогового фильтра?

В чём состоит отличие АЧХ ФНЧ, ФВЧ, ПР и РФ?

Какими параметрами принято характеризовать фильтрующие свойства ФНЧ и ПФ и как на них влияют при реализации в виде нерекурсивных ЦФ параметры последних?

## Лабораторная работа № 4

### Анализ рекурсивных цифровых фильтров

**Цель работы** — исследование влияния параметров рекурсивных ЦФ 1-го и 2-го порядков на их частотные и временные характеристики.

#### Теоретические сведения

**Рекурсивным ЦФ** называется ЦФ, при формировании выходных отсчётов которого  $y_i$  используются как отсчёты входного сигнала в данный  $x_i$  и в некоторое число  $m$  предшествующих  $x_{i-1}, x_{i-2}, \dots, x_{i-m}$  моментов времени, так и отсчёты выходного сигнала  $y_{i-1}, y_{i-2}, \dots, y_{i-n}$  в некоторое число  $n$  предшествующих моментов времени.

При этом целое число  $n$  определяет порядок ЦФ.

**Алгоритм работы** рекурсивного ЦФ описывается разностным уравнением

$$y_i = a_0x_i + a_1x_{i-1} + a_2x_{i-2} + \dots + a_mx_{i-m} + b_1y_{i-1} + b_2y_{i-2} + \dots + b_ny_{i-n}. \quad (4.1)$$

Интервал  $\Delta$  между отсчётами входного или выходного сигналов называются **интервалом (периодом) дискретизации**, а соответствующая частота  $\omega_\Delta = \frac{2\pi}{\Delta}$  — **частотой дискретизации**.

Для случая, когда  $m = 0$ , а значение коэффициента  $a_0 = 1$ , алгоритмы работы рекурсивного ЦФ 1-го ( $n = 1$ ) и 2-го ( $n = 2$ ) порядков записываются:

$$y_i = x_i + b_1y_{i-1}, \quad (4.2)$$

$$y_i = x_i + b_1y_{i-1} + b_2y_{i-2}, \quad (4.3)$$

Функциональные схемы ЦФ представлены на рис. 4.1 и 4.2.

Здесь обозначено:  $\Delta$  — элемент задержки на период дискретизации,

$\nabla$  — масштабный усилитель.

Комплексная частотная характеристика (КЧХ) ЦФ может быть вычислена через его передаточную (системную) функцию  $H(Z)$ , определяемую как отношение  $Z$ -преобразования выходной последовательности отсчётов  $y_i$  к  $Z$ -

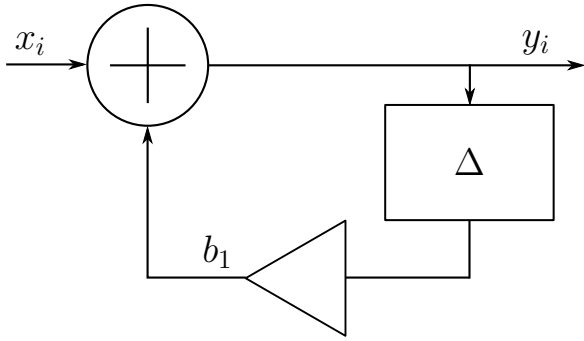


Рис. 4.1

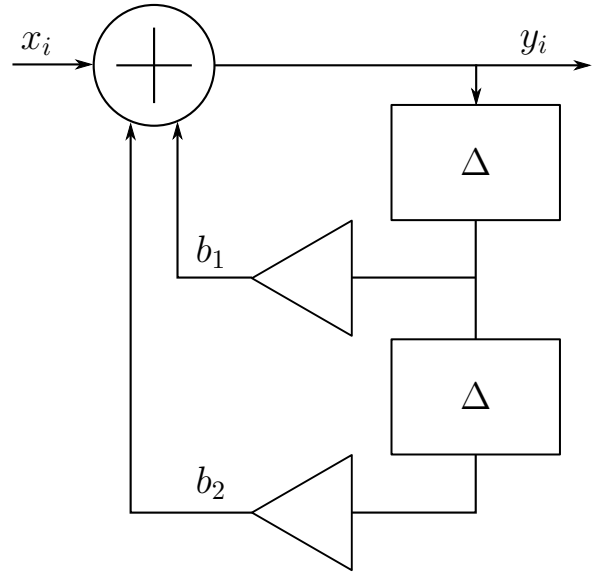


Рис. 4.2

преобразованию входной последовательности  $x_i$ , путём замены

$$K(j\omega) = H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} \Bigg|_{Z = e^{j\omega\Delta}}. \quad (4.4)$$

Для ЦФ 1-го и 2-го порядков при  $m = 0$ ,  $a_0 = 1$  передаточные функции и КЧХ с учётом (4.4) задаются, соответственно, выражениями:

$$H_1(Z) = \frac{1}{1 - b_1 Z^{-1}} = \frac{Z}{Z - b_1}, \quad (4.5)$$

$$K_1(i\omega) = \frac{1}{1 - b_1 e^{-j\omega\Delta}}, \quad (4.6)$$

$$H_2(Z) = \frac{1}{1 - b_1 Z^{-1} - b_2 Z^{-2}} = \frac{Z^2}{Z^2 - b_1 Z - b_2}; \quad (4.7)$$

$$K_2(i\omega) = \frac{1}{1 - b_1 e^{-j\omega\Delta} - b_2 e^{-j2\omega\Delta}}, \quad (4.8)$$

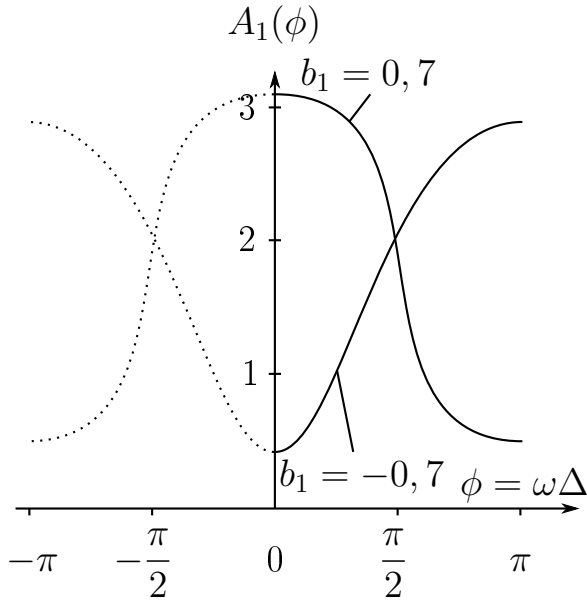


Рис. 4.3

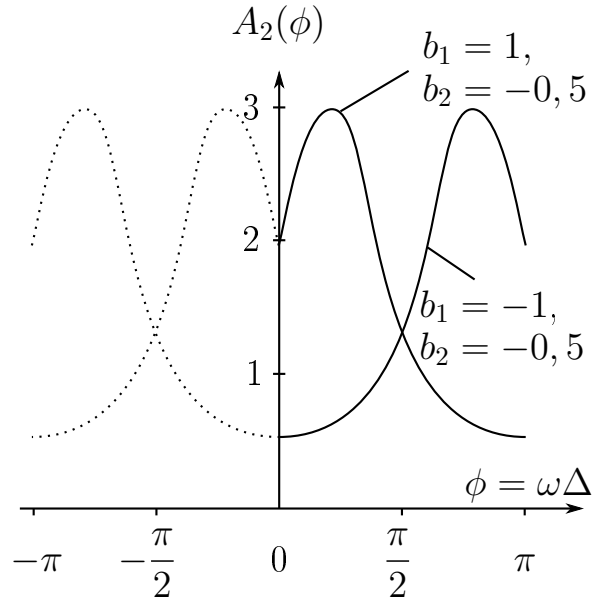


Рис. 4.4

Амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) ЦФ 1-го и 2-го порядков с учётом (4.6) и (4.7), соответственно, записываются:

$$A_1(\phi) = |K_1(\phi)| = \frac{1}{\sqrt{1 + b_1^2 - 2b_1 \cos \phi}}, \quad \phi = \omega\Delta, \quad (4.9)$$

$$A_2(\omega) = |K_2(\phi)| = \frac{1}{\sqrt{(1 + b_1^2 + b_2^2) - 2[b_1(1 - b_2) \cos \phi + b_2 \cos 2\phi]}}, \quad \phi = \omega\Delta. \quad (4.10)$$

Примерный вид АЧХ ЦФ 1-го и 2-го порядков, построенных в функции параметра  $\phi = \omega\Delta$ , при фиксированных значениях коэффициентов  $b_1, b_2$  показан на рис. 4.3 — 4.5.

Сплошными линиями показан ход кривых в области физических (положительных) частот, а пунктирными — в области отрицательных частот.

Вид АЧХ рекурсивных ЦФ зависит от координат полюсов  $Z_n$  системной функции  $H(Z)$  ЦФ, а именно: положение максимумов АЧХ на оси абсцисс  $\phi = \omega\Delta$  соответствует значениям аргументов полюсов  $\phi_n = \arg Z_n$  системной функции.

**Полюсами системной функции  $H(Z)$**  называются значения переменной  $Z$ , обращающие её в бесконечность.

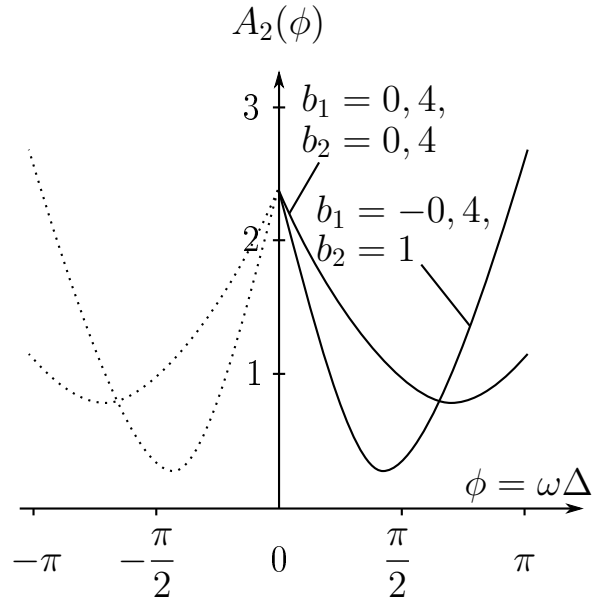


Рис. 4.5

Из выражений (4.5) и (4.7) следует, что для ЦФ 1-го и 2-го порядков полюсы определяются, соответственно, из решения уравнений:  $Z - b_1 = 0$  и  $Z^2 - b_1 Z - b_2 = 0$  и записываются:

$$Z_n = b_1, \quad (4.11)$$

$$Z_{n\ 1,2} = \frac{b_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b_1}{2}\right)^2 + b_2}. \quad (4.12)$$

В табл. 4.1 приведены значения полюсов системных функций ЦФ 1-го и 2-го порядков, а также соответствующие им значения модулей и аргументов, вычисленные по формулам (4.11) и (4.12) для тех же значений коэффициентов разностных уравнений (4.2) и (4.3), для которых построены АЧХ на рис. 4.3 — 4.5.

Координаты полюсов системных функций ЦФ 1-го и 2-го порядков для наглядности показаны на рис. 4.6 и 4.7. На рисунках в скобках указаны номера значений коэффициентов или их сочетаний.

Из рис. 4.3 — 4.5 и табл. 4.1 — видно, что действительно, положение максимумов АЧХ на оси абсцисс  $\phi = \omega\Delta$  соответствует значениям аргументов полюсов  $\phi_n = \arg Z_n$  системной функции ЦФ.

Форма АЧХ зависит также от модуля полюсов  $|Z_n|$  системной функции, определяемого значениями коэффициентов разностных уравнений (4.1) — (4.3), описывающих алгоритм работы ЦФ.

Таблица 4.1

ЦФ 1-го порядка					ЦФ 2-го порядка					
№ п/п	$b_1$	$Z_n$	$ Z_n $	$\phi_n$	№ п/п	$b_1$	$b_2$	$Z_{n1,2}$	$ Z_{n1,2} $	$\phi_{n1,2}$
1	0,7	0,7	0,7	0	1	1	-0,5	$0,5 \pm j0,5$	0,71	$\pm \frac{\pi}{4}$
					2	-1	-0,5	$-0,5 \pm j0,5$	0,71	$\pm \frac{3\pi}{4}$
2	-0,7	-0,7	0,7	$\pi$	3	0,4	0,4	$0,2 \pm j0,66$	0,86; 0,46	$0, \pi$
					4	-0,4	1	$-0,2 \pm j1,02$	0,82; 1,22	$0, \pi$

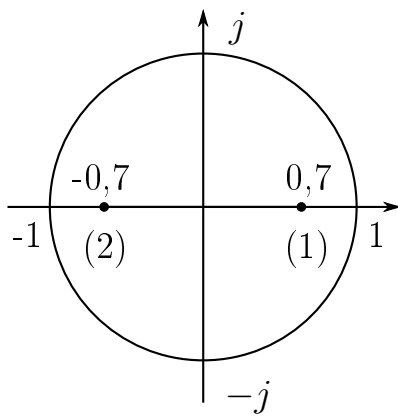


Рис. 4.6

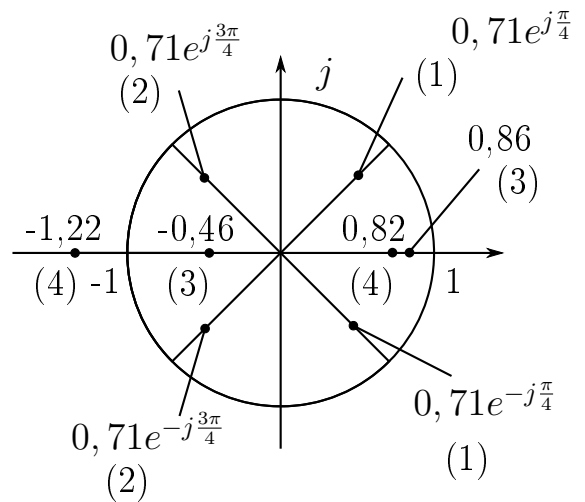


Рис. 4.7

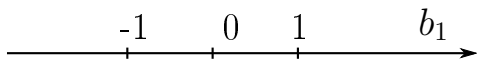


Рис. 4.8

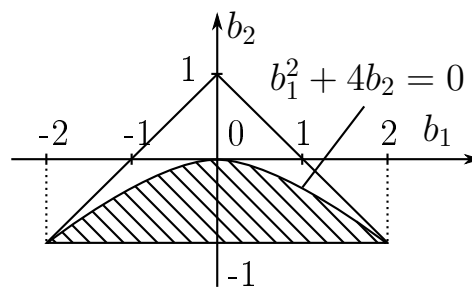


Рис. 4.9

Для рекурсивного ЦФ в отличие от нерекурсивного фильтра существует проблема устойчивости, заключающейся в том, что возникающие в нём в отсутствие входного воздействия свободные колебания представляют собой невозрастающую последовательность, то есть значения  $|y_i|$  при  $i \rightarrow \infty$  не превышают некоторого положительного числа  $M$  независимо от выбора начальных условий.

Критерий устойчивости рекурсивного ЦФ формируется следующим образом. ЦФ является устойчивым, если все полюсы  $Z_n$  его системной функции  $H(Z)$  по модулю не превосходят единицы, то есть:

$$|Z_n| < 1. \quad (4.13)$$

Таким образом, на  $Z$ -плоскости полюсы должны быть расположены внутри круга с центром  $Z = 0$  и радиусом равным 1.

Очевидно, практически могут применяться только устойчивые ЦФ. Из рассмотренных вариантов ЦФ в соответствии с критерием (4.13) неустойчивым является ЦФ 2-го порядка со значениями коэффициентов разностного уравнения (4.3)  $b_1 = -0,4$ ,  $b_2 = 1$ , поскольку для них  $|Z_{n2}| = 1,22$  (см. табл. 4.1).

Из выражений (4.11) — (4.13) следует, что области допустимых значений коэффициентов разностных уравнений для ЦФ 1-го и 2-го порядков ограничены, соответственно, отрезком прямой и треугольником, изображёнными на рис. 4.8 и 4.9.

При этом для ЦФ 2-го порядка заштрихованная область, ограниченная сверху уравнением  $b_1^2 + 4b_2 = 0$ , соответствует комплексно-сопряжённым полюсам системной функции, а не заштрихованная — вещественным.

В зависимости от вида АЧХ ЦФ может выполнять роль ФНЧ, ПФ или РФ.



Из рассмотренных выше вариантов ЦФ роль ФНЧ могут выполнять, например, ЦФ 1-го порядка с коэффициентом разностного уравнения  $b_1 = 0,7$  (рис. 4.3) и ЦФ 2-го порядка с коэффициентами  $b_1 = 0,4, b_2 = 0,4$  (рис. 4.5).

Роль ФВЧ может выполнять ЦФ 1-го порядка с коэффициентом  $b_1 = -0,7$  (рис. 4.3). Роль ПФ может выполнять ЦФ 2-го порядка с коэффициентами  $b_1 = 1, b_2 = -0,5$  и  $b_1 = -1, b_2 = -0,5$  (рис. 4.4).

В радиотехнических устройствах наиболее часто применяются ФНЧ и ПФ. Качество АЧХ ФНЧ с точки зрения её фильтрующих свойств принято характеризовать величиной ослабления  $\Delta_{\delta}$  сигнала вне полосы прозрачности фильтра.

Оно определяется из выражения:

$$\Delta_{\delta} = 20 \lg \frac{A(\omega_1)}{A(0)}, \quad (4.14)$$

где  $A(0)$  — значение АЧХ на нулевой частоте ( $\omega = 0$ ), а  $A(\omega_1)$  — её значение на некой частоте  $\omega_1$  вне полосы прозрачности фильтра, связанной с так называемой частотой «среза»  $\omega_c$  фильтра соотношением

$$\omega_1 = n\omega_c, \quad (4.15)$$

где  $n$  — некое целое число. Если принять  $n = 2$ , то говорят об ослаблении «на октаву».

Частота среза  $\omega_c$  определяется по ослаблению сигнала  $\sqrt{2}$  раз, то есть

$$\frac{A(\omega_c)}{A(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0,71. \quad (4.16)$$

Фильтрующие свойства ПФ принято характеризовать величиной добротности  $Q$  фильтра, которая может быть определена из выражения

$$Q = \frac{\omega_p}{\Delta\omega_n}, \quad (4.17)$$

где  $\omega_p$  — резонансная частота фильтра, соответствующая максимуму АЧХ,

$\Delta\omega_n$  — полоса пропускания фильтра, определяемая по ослаблению сигнала в  $\sqrt{2}$  раза, то есть

$$\frac{A\left(\omega_p \pm \frac{\Delta\omega_n}{2}\right)}{A(\omega_p)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0,71. \quad (4.18)$$

Заметим, что поскольку в лабораторной работе ЧХ строится в функции параметра  $\phi = \omega\Delta$ , при расчёте ослабления  $\Delta_{\delta\phi}$  и добротности  $Q$  частоты  $\omega_c, \omega_1, \omega_p$  и полюсу частот  $\Delta\omega_n$  следует заменить на величины:  $\phi_c = \omega_c\Delta$ ,  $\phi_1 = \omega_1\Delta$ ,  $\phi_p = \omega_p\Delta$ ,  $\Delta\phi_n = \Delta\omega_n\Delta$ , то есть вместо формул (4.4) — (4.18) использовать при расчётах формулы:

$$\Delta_{\delta\phi} = 20 \lg \frac{A(\omega_1)}{A(0)}, \quad (4.19)$$

$$\phi_1 = n\phi_c, \quad (4.20)$$

$$\frac{A(\omega_c)}{A(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0,71, \quad (4.21)$$

$$Q = \frac{\phi_p}{\Delta\phi_n}, \quad (4.22)$$

$$\frac{A\left(\phi_p \pm \frac{\Delta\phi_n}{2}\right)}{A(\phi_p)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0,71. \quad (4.23)$$

Для описания ЦФ во временной области используется его импульсная характеристика.

**Импульсная характеристика ЦФ** представляет собой дискретный сигнал  $\{h_k\}$ , который является реакцией ЦФ на «единичный импульс»  $(1, 0, 0, 0, \dots)$ . Она связана с системной функцией ЦФ  $H(Z)$  обратным  $Z$ -преобразованием

$$h_k = \frac{1}{2\pi i} \oint Z^{k-1} H(Z) dZ. \quad (4.24)$$

Для рекурсивного ЦФ в отличие от нерекурсивного ЦФ импульсная характеристика содержит неограниченное число членов. При известной системной функции  $H(Z)$  она может быть вычислена с использованием выражения (4.24).

Для ЦФ 1-го и 2-го порядков, системные функции которых задаются выражениями (4.5) и (4.7) с учётом (4.24), получаем:

$$\{h_k\} = (1, b_1, b_1^2, b_1^3, b_1^4, \dots), \quad (4.25)$$

$$\{h_k\} = (1, b_1, b_1^2 + b_2, b_1^3 + 2b_1b_2, b_1^4 + 3b_1^2b_2 + b_2^2, \dots). \quad (4.26)$$

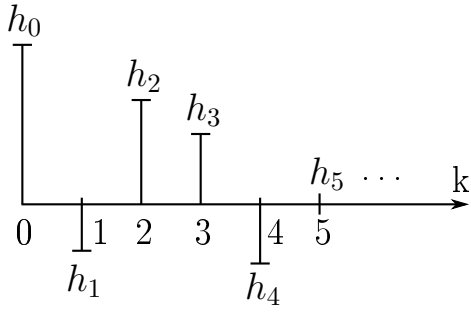


Рис. 4.10

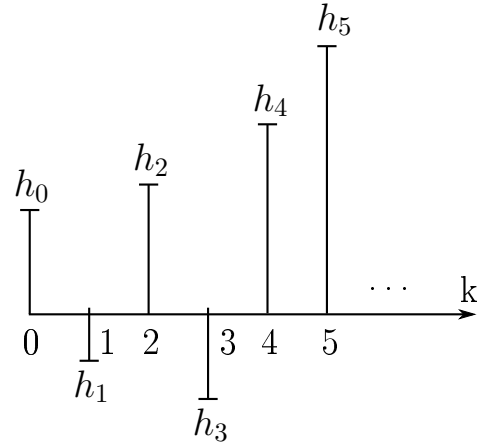


Рис. 4.11

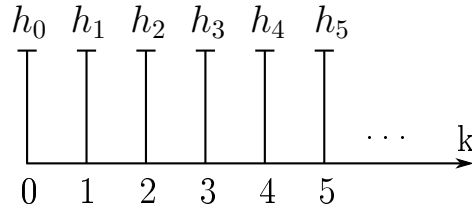


Рис. 4.12

Выражения для общих членов указанных импульсных характеристик через полюсы соответствующих системных функций записываются:

$$h_k = Z_n^k, \quad Z_n = b_1, \quad (4.27)$$

$$h_k = \frac{Z_{n_1}^{k+1} - Z_{n_2}^{k+1}}{Z_{n_1} - Z_{n_2}}, \quad Z_{n_{1,2}} = \frac{b_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b_1}{2}\right)^2 + b_2}. \quad (4.28)$$

Вид импульсных характеристик рекурсивного ЦФ для случаев, когда фильтр устойчив ( $|Z_n| < 1$ ), неустойчив ( $|Z_n| > 1$ ) или находится на границе устойчивости ( $|Z_n| = 1$ ) показан, соответственно, на рис. 4.10 — 4.12.

Заметим, что в зависимости от знаков коэффициентов разностного уравнения импульсные характеристики могут быть как однополярными, так и разнополярными.

В заключении отметим, что очевидно, расчёт АЧХ и импульсной характеристики для ЦФ 1-го и 2-го порядков можно производить по одним и тем же формулам (4.10) и (4.28), положив в них для случая ЦФ 1-го порядка значения коэффициента  $b_2 = 0$ .

## Подготовка к работе

Записать с использованием формул (4.2), (4.5), (4.6), (4.9), (4.25), и (4.27) разностное уравнение и выражения для системной функции, КЧХ, АЧХ и импульсной характеристики (и её общего члена) рекурсивного ЦФ 1-го порядка. Изобразить с использованием рис. 4.1 функциональную схему этого фильтра.

Рассчитать с использованием формулы (4.11) значения полюсов системной функции рекурсивного ЦФ 1-го порядка для следующих значений коэффициента разностного уравнения  $b_1 : 0, 6; 0, 8; -0, 6; -0, 8$ .

Определить соответствующий этим полюсам значения модулей  $|Z_n|$  и аргументов (в радианах)  $\phi_n = \arg Z_n$ . Свести рассчитанные значения полюсов, их модулей и аргументов в таблицу, аналогичную левой части табл. 4.1. Изобразить положение полюсов на  $Z$ -плоскости аналогично рис. 4.6.

Определить с использованием рис. 4.8 и критерия устойчивости (3.20), есть ли среди рассматриваемых вариантов коэффициентов разностного уравнения варианты, соответствующие неустойчивому ЦФ.

Изобразить с использованием указанной в теоретических сведениях связи между положением максимумов АЧХ и значениями аргументов полюсов системной функции примерный вид АЧХ рекурсивного ЦФ 1-го порядка для следующих значений коэффициента разностного уравнения  $b_1 : 0, 8; -0, 8$ , аналогично тому, как это сделано на рис. 4.3.

Изобразить с использованием формул (4.25) вид импульсной характеристики рекурсивного ЦФ 1-го порядка для следующих значений коэффициента разностного уравнения  $b_1 : 0, 6; 0, 8; -0, 6; -0, 8$ , ограничившись 4-5 членами последовательности, аналогично тому, как это сделано на рис. 4.10 — 4.12.

Записать с использованием формул (4.3), (4.7), (4.8), (4.10), (4.26), и (4.28) разностное уравнение и выражения для системной функции, КЧХ, АЧХ и импульсной характеристики (и её общего члена) рекурсивного ЦФ 2-го порядка. Изобразить с использованием рис. 4.2 функциональную схему этого фильтра.

Рассчитать с использованием формулы (4.12) значения полюсов системной функции рекурсивного ЦФ 2-го порядка для следующих значений коэффициентов разностного уравнения  $b_1 = 0, 5$ ,  $b_2 = -0, 9$ ;  $b_1 = -1, 2$ ,  $b_2 = -0, 4$ ;  $b_1 = 0, 4$ ,  $b_2 = 0, 5$ ;  $b_1 = -0, 5$ ,  $b_2 = 1, 0$ .

Определить соответствующий этим полюсам значения модулей  $|Z_n|$  и аргументов (в радианах)  $\phi_n = \arg Z_n$ . Свести рассчитанные значения полюсов, их модулей и аргументов в таблицу, аналогичную правой части табл. 4.1. Изобразить положение полюсов на  $Z$ -плоскости аналогично рис. 4.7.

Определить с использованием рис. 4.9 и критерия устойчивости (4.13), есть ли среди рассматриваемых вариантов коэффициентов разностного уравнения варианты, соответствующие неустойчивому ЦФ.

Изобразить с использованием указанной в теоретических сведениях связи между положением максимумов АЧХ и значениями аргументов полюсов системной функции примерный вид АЧХ рекурсивного ЦФ 2-го порядка для следующих сочетаний коэффициентов разностного уравнения  $b_1 = 0, 5$ ,  $b_2 = -0, 9$ ;  $b_1 = 0, 4$ ,  $b_2 = 0, 5$ , аналогично тому, как это сделано на рис. 4.4 и 4.5.

Изобразить с использованием формулы (4.26) вид импульсной характеристики рекурсивного ЦФ 2-го порядка для следующих сочетаний значений коэффициентов разностного уравнения  $b_1 = 0, 5$ ,  $b_2 = -0, 9$ ;  $b_1 = 0, 4$ ,  $b_2 = 0, 5$ , ограничившись 4-5 членами последовательности, аналогично тому, как это сделано на рис. 4.10 — 4.12.

## Порядок выполнения работы

Лабораторная работа выполняется с использованием ПЭВМ. Программа расчёта АЧХ и импульсных характеристик рекурсивных ЦФ 1-го и 2-го порядков написана на алгоритмическом языке «Mathcad» и внесена в память ПЭВМ.

1. Рассчитать и построить с использованием ПЭВМ АЧХ и импульсную характеристику рекурсивного ЦФ 1-го порядка при фиксированном значении коэффициента  $b_2 = 0$  и следующих значениях коэффициента  $b_1$  : 0, 6; 0, 8; -0, 6; -0, 8.

*Примечание:* ЦФ 1-го порядка рассматривается как частный случай ЦФ 2-го порядка (при  $b_2 = 0$ ) и расчёты ведутся по формулам (4.10) и (4.28).

2. Рассчитать и построить с использованием ПЭВМ АЧХ и импульсную характеристику рекурсивного ЦФ 2-го порядка при следующих сочетаниях коэффициентов  $b_1 = 0, 5$ ;  $b_2 = -0, 9$ ;  $b_1 = -1, 2$ ;  $b_2 = -0, 4$ ;  $b_1 = 0, 4$ ;  $b_2 = 0, 5$ ;  $b_1 = -0, 5$ ;  $b_2 = 1, 0$ .

3. Выбрать из построенных с использованием ПЭВМ АЧХ рекурсивных ЦФ 1-го и 2-го порядков вариант реализации ЦФ, пригодный для использования в качестве ФНЧ.

Убедиться с использованием рис. 4.8 и 4.9, что данный вариант соответствует устойчивому ЦФ.

Рассчитать для выбранного варианта с использованием формул (4.19) — (4.21) ослабление «на октаву»  $\Delta_{dB}$  сигнала вне полосы прозрачности фильтра (при  $n = 2$ ).

4. Выбрать из построенных с использованием ПЭВМ АЧХ рекурсивных ЦФ 1-го и 2-го порядков вариант реализации ЦФ, пригодный для использования в качестве ПФ.

Убедиться с использованием рис. 4.8 и 4.9, что данный вариант соответствует устойчивому ЦФ.

Рассчитать для выбранного варианта с использованием формул (4.22) и (4.23) добротность фильтра.

## Содержание отчёта

Функциональные схемы рекурсивных ЦФ 1-го и 2-го порядков.

Аналитические выражения, расчёты и графики, выполненные при подготовке к работе.

Распечатка результатов расчёта на ПЭВМ АЧХ и импульсных характеристик рекурсивных ЦФ, а также результаты других расчётов, произведённых в процессе выполнения работы.

Выводы, содержание анализ влияния параметров рекурсивных ЦФ 1-го и 2-го порядков на их частотные и временные характеристики.

## Контрольные вопросы

В чём состоит характерное отличие разностного уравнения рекурсивного ЦФ от разностного уравнения нерекурсивного ЦФ?

Как по разностному уравнению определяется порядок рекурсивного ЦФ?

В чём состоит характерное отличие импульсной характеристики рекурсивного ЦФ от импульсной характеристики нерекурсивного ЦФ?

Как связан вид АЧХ рекурсивного ЦФ со значениями аргументов полюсов его системной функции?

Сформулируйте критерий устойчивости рекурсивного ЦФ?

В чём состоит характерное отличие импульсных характеристик устойчивых и неустойчивых рекурсивных ЦФ?

Каковы достоинства и недостатки рекурсивного ЦФ по сравнению с нерекурсивным ЦФ?

Как связаны между собой КЧХ и системная функция ЦФ?

Как связаны между собой импульсная характеристика и системная функция ЦФ?

Какими параметрами принято характеризовать фильтрующие свойства ФНЧ и ПФ и как на них влияют при реализации в виде рекурсивных ЦФ параметры последних?

## Литература

- [1] Баскаков С. И. *Радиотехнические цепи и сигналы*. — М.: Высшая школа, 2005.
- [2] Гоноровский И. С. *Радиотехнические цепи и сигналы*. — М.: Дрофа, 2006.