Дисперсией непрерывной СВ X называют математическое ожидание квадрата её отклонения от её математического ожидания $D[X] = M[X^2] - (M[X])^2$ и вычисляют по формуле

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M[X])^2 f(x)\,dx \qquad \text{или} \qquad D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - (M[X])^2.$$

Средним квадратическим отклонением непрерывной СВ называют

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]}.$$

Типовая задача №18. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ x^{3/2}, & 0 < x \le 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$

1) Найти плотность вероятности $f(x)$.

2) Построить графики функции распределения и плотности вероятности.

3) Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

4) Найти вероятность события $0 \le X \le 0{,}5$.

Решение. 1) Плотность вероятности найдем по формуле $f(x) = F'(x)$.

Получаем $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \dfrac{3}{2}\sqrt{x}, & 0 < x \le 1; \\ 0, & x > 1. \end{cases}$

2) Ниже приведены графики функции распределения $F(x)$ (рис. 2) и плотности распределения $f(x)$ (рис. 3) случайной величины X.

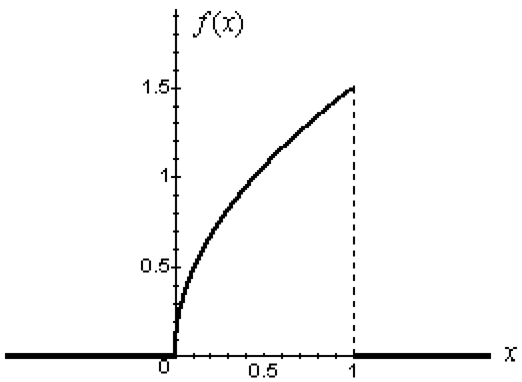

Рис.2. График функции плотности.

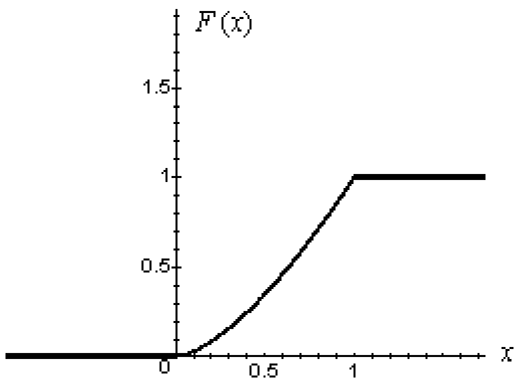

Рис.3. График функции распределения.

3) Вычислим математическое ожидание СВ X

$$\mathrm{M}(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\,f(x)\,dx=\int_0^1\frac{3}{2}x\sqrt{x}\,dx=\frac{3}{5}x^{5/2}\Big|_0^1=\frac{3}{5}=0,6.$$

Так как дисперсия $\mathrm{D}(X)=\mathrm{M}(X^2)-(\mathrm{M}(X))^2$, то вычислим

$$\mathrm{M}(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)\,dx=\int_0^1\frac{3}{2}x^2\sqrt{x}\,dx=\frac{3}{7}x^{7/2}\Big|_0^1=\frac{3}{7},$$

откуда $\mathrm{D}(X)=\frac{3}{7}-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{12}{175}\approx 0{,}069$ и среднее квадратическое отклонение

$$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{D}(X)}=\frac{2\sqrt{3}}{5\sqrt{7}}\approx 0{,}262.$$

4) Вероятность попадания СВ X в интервал [0; 0,5] вычислим через $F(x)$

$$P(0\le X\le 0{,}5)=F(0{,}5)-F(0)=\left(\frac{1}{2}\right)^{3/2}-0=\frac{1}{2\sqrt{2}}\approx 0{,}354.$$

Нормальное распределение

Непрерывная случайная величина называется *нормально распределенной*, если она описывается плотностью вероятностей

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где a — математическое ожидание, а σ — среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины X в интервал $(\alpha;\beta)$ вычисляется по формуле

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right), \qquad (*)$$

где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ — функция Лапласа, значения которой находят из таблицы (см. приложение 2). При этом используют свойства функции $\Phi(x)$:

1) функция $\Phi(x)$ нечётна, то есть $\Phi(-x)=-\Phi(x)$;

2) при $x\to+\infty$ $\Phi(x)\to 0{,}5$, поэтому при $x>5$ полагают $\Phi(x)=0{,}5$.

Типовая задача №19. Пусть X — случайная величина, распределённая по нормальному закону с параметрами $a=4$ и $\sigma=3$.

1) Записать формулу плотности вероятности $f(x)$ случайной величины X.

2) Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

3) Найти вероятность $P(2<X<9)$.

Решение: 1) Случайная величина X распределена по нормальному закону, т.е. её плотность вероятности определяется выражением

$$f(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-4)^2}{18}}.$$

2) Числовые характеристики заданной случайной величины:

$$M(X) = a = 4; \quad \sigma(X) = \sigma = 3; \quad D(X) = \sigma(X)^2 = 9.$$

3) Вероятность попадания случайной величины в промежуток найдём по формуле (*). В нашем случае,

$$P(2 < X < 9) = \Phi\left(\frac{9-4}{3}\right) - \Phi\left(\frac{2-4}{3}\right) \approx \Phi(1,67) - \Phi(-0,67) = \Phi(1,67) + \Phi(0,67) =$$

$$= 0,4525 + 0,2486 = 0,7011.$$

Тема «Математическая статистика»

Пусть для изучения количественного признака X из генеральной совокупности извлечена выборка объема n. Наблюдавшиеся значения x_i (i=1, 2, …, m) признака X называют *вариантами*, а последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке – *вариационным рядом*.

Статистическим распределением выборки для дискретного признака X называют перечень вариант x_i (i=1, 2, …, m) и соответствующих им частот n_i (сумма всех частот равна объему выборки n) или относительных частот $w_i = \frac{n_i}{n}$ (сумма всех относительных частот равна единице).

Для непрерывного признака X статистическое распределение выборки задают в виде последовательности интервалов и соответствующих им частот (где частоты интервала n_i – это сумма частот вариант, попавших в i-й интервал).

Гистограммой относительных частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длины Δ, а высоты равны отношению $\frac{w_i}{\Delta}$ (плотность относительной частоты). Площадь частичного i-го прямоугольника равна относительной частоте w_i, а площадь всей гистограммы равна единице.

Стандартными *точечными оценками* математического ожидания $M(X)$ и дисперсии $D(X)$ изучаемой случайной величины X, являются выборочное среднее $\overline{x}_B$ и выборочная дисперсия D_B, которые вычисляются по формулам

$$\overline{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i^* n_i}{n} = \sum_{i=1}^{m} x_i^* w_i, \qquad D_B = \frac{\sum_{i=1}^{m} \left(x_i^*\right)^2 n_i}{n} - (\overline{x}_B)^2.$$

При вычислении этих оценок по выборке, заданной интервальным статистическим рядом, предполагают, что все наблюдаемые значения выборки, попавшие в i-й интервал, совпадают с его серединой x_i^*.

Точечными оценками также являются *выборочное среднее квадратическое отклонение*

$$\sigma_B = \sqrt{D_B},$$

исправленная выборочная дисперсия (применяется в случае малых выборок)

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_B,$$

исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение

$$S = \sqrt{S^2}.$$

Доверительным называют интервал, который с заданной надежностью (доверительной вероятностью) γ покрывает заданный параметр.

Интервальной оценкой (с надежностью γ) математического ожидания a нормально распределенного количественного признака X по выборочной средней $\bar{x}_Â$ генеральной совокупности служит доверительный интервал

$$\bar{x}_B - \frac{t \cdot \sigma_B}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_B + \frac{t \cdot \sigma_B}{\sqrt{n}},$$

где $\bar{x}_B$ – выборочное среднее, σ_B – выборочное среднее квадратическое отклонение, t – значение аргумента функции Лапласа $\Phi(x)$ (см. приложение 2), при котором $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$;

при неизвестном σ (и объеме выборки $n \le 30$)

$$\bar{x}_B - \frac{t_\gamma \cdot S}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_B + \frac{t_\gamma \cdot S}{\sqrt{n}},$$

где $\bar{x}_B$ – выборочное среднее, S – исправленное среднее квадратическое отклонение, t_γ найдено по известным γ и n (см. приложение 3).

Интервальной оценкой (с надежностью γ) среднего квадратического отклонения σ нормально распределенного признака X по исправленному выборочному среднему квадратическому отклонению S служит доверительный интервал

$$S \cdot (1-q) < \sigma < S \cdot (1+q), \text{ при } q < 1, \qquad 0 < \sigma < S \cdot (1+q), \text{ при } q \ge 1,$$

где q находят по таблице значений (см. приложение 4) по заданным γ и n.

Критерий Пирсона (критерий согласия χ2)

Этот критерий применяется для проверки гипотезы о типе распределения признака X. Применение критерия χ^2 включает следующие шаги.

1. Для каждого интервала вычисляем теоретические вероятности p_i попадания случайной величины X в интервал $[x_i; x_{i+1})$, а затем *теоретические частоты* $n_i' = n \cdot p_i$. (сколько наблюдений должно было бы попасть в i-й интервал, если верно, что СВ X имеет предполагаемый тип распределения).

2. Вычисляем *наблюдаемое значение величины* χ^2 по формуле:

$$\chi^2_{набл} = \sum_{i=1}^{m} \frac{n_i^2}{np_i} - n.$$

3. Находим *число степеней свободы* по формуле $k = m - r - 1$, где m – число групп выборки, а $r = 2-$ количество оцениваемых параметров распределения X. По заданному уровню значимости α и числу k находим в таблице (приложение 4) *критическое значение* $\chi^2_{крит}$.

4. Сравниваем наблюдаемое и критическое значения величины χ^2.

Если $\chi^2_{набл} \le \chi^2_{крит}$, то нет основания отвергать проверяемую гипотезу, и мы принимаем гипотезу о данном типе распределения СВ X.

Если $\chi^2_{набл} > \chi^2_{крит}$, то гипотезу отвергаем.

Замечание. Если в некоторых интервалах $n_i \le 5$, то число интервалов нужно уменьшить путем объединения соседних интервалов.

Типовая задача № 20. Задание такое же, как задание задачи № 20.

Интервалы	[6; 10)	[10; 14)	[14; 18)	[18; 22)	[22; 26)	[26; 30)	[30; 34)	[34; 38)
Частоты	4	15	38	58	50	26	8	1

Решение. 1). Объем выборки получают суммированием частот из второй строки таблицы. Объем выборки равен n = 4+15+38+58+50+26+8+1= 200 .

Относительные частоты вычисляем по формуле $\omega_i = \dfrac{n_i}{n}$, $i = 1, 2, ..., 8$. Внесем полученные данные в таблицу (третья строка таблицы).

Интервалы $[x_i; x_{i+1})$.	[6; 10)	[10; 14)	[14; 18)	[18; 22)	[22; 26)	[26; 30)	[30; 34)	[34; 38)
Частоты n_i	4	15	38	58	50	26	8	1
Относит. част. ω_i	0,02	0,075	0,19	0,29	0,25	0,13	0,04	0,005
Середины x_i*	8	12	16	20	24	28	32	36

Сумма относительных частот должна равняться единице.

Строим гистограмму относительных частот. Высота каждого прямоугольника определяем по формуле $h_i = \dfrac{\omega_i}{\Delta}$, где Δ = 4 – длина интервала в статистической таблице. С точностью до третьего знака после запятой получаем: h_1=0,005, h_2=0,019, h_3=0,048, h_4=0,073, h_5=0,063, h_6=0,032, h_7=0,01, h_8=0,001.

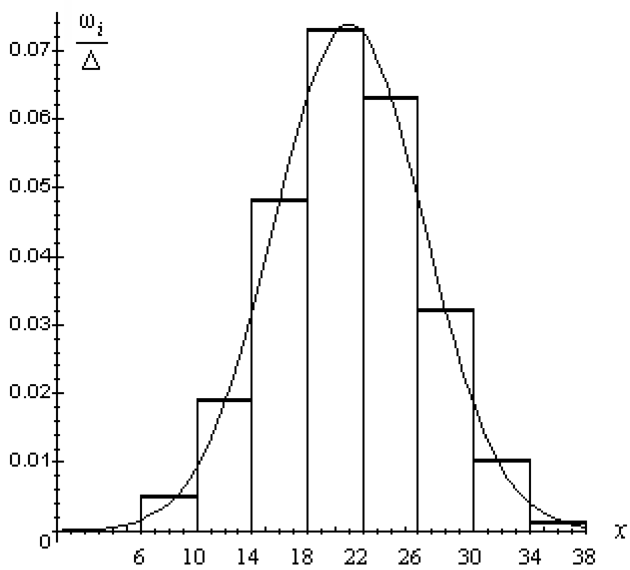

Рис.4. Гистограмма относительных частот и выравнивающая кривая

2). Вычисляем выборочную среднюю

$$\overline{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^{8} x^*_i n_i}{200} = \frac{8\cdot 4 + 12\cdot 15 + 16\cdot 38 + 20\cdot 58 + 24\cdot 50 + 28\cdot 26 + 32\cdot 8 + 36\cdot 1}{200} = 21$$

и выборочную дисперсию

$$D_B = \frac{\sum_{i=1}^{8} x_i^{*\,2} n_i}{200} - (\overline{x}_B)^2 =$$

$$= \frac{8^2\cdot 4 + 12^2\cdot 15 + 16^2\cdot 38 + 20^2\cdot 58 + 24^2\cdot 50 + 28^2\cdot 26 + 32^2\cdot 8 + 36^2\cdot 1}{200} - 21^2 \approx 29.$$

Исправленная выборочная дисперсия $S^2 = \frac{n}{n-1} D_B = \frac{200}{199}\cdot 29 \approx 29{,}1.$

Параметрами нормальной случайной величины являются математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение. Оценки для них – это выборочная средняя $\overline{x}_B = 21$ и выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma_B = \sqrt{D_B} = \sqrt{29} \approx 5{,}4.$

3). Таким образом, если исследуемая случайная величина X распределена по нормальному закону, то это закон с параметрами a = 21 и σ = 5,4, то есть $X \sim N(21;\, 5{,}4)$.

В этом случае плотность СВ X имеет вид $f(x)=\dfrac{1}{5,4\cdot\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-21)^2}{2\cdot 5,4^2}}$.

Для построения графика плотности найдем значения $f(x)$ в точке $x=21$ – точке максимума $f(x)$ и в точках x_i^*, $i=1,2,...,8$. При вычислении воспользуемся таблицей значений функции $\phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ (приложение 1). Очевидно, что $f(x)=\dfrac{1}{\sigma}\phi(u)$, где $u=\dfrac{x-a}{\sigma}$.

В итоге получаем $\dfrac{x_1^*-a}{\sigma}=-\dfrac{13}{5,4}\approx-2,67$; $f(x_1^*)=\dfrac{\phi(2,41)}{5,4}=\dfrac{0,0220}{5,4}=0,004.$

При вычислении воспользовались четностью функции $\phi(x)$: $\phi(x)=\phi(-x)$. Аналогично находим остальные значения:

$$\frac{x_2^*-a}{\sigma}=-1,67;\quad f(x_2^*)=\frac{0,0989}{5,4}=0,018;$$

$$\frac{x_3^*-a}{\sigma}=-0,93;\quad f(x_3^*)=\frac{0,2589}{5,4}=0,048;$$

$$\frac{x_4^*-a}{\sigma}=-0,19;\quad f(x_4^*)=\frac{0,3918}{5,4}=0,073;$$

$$\frac{x_5^*-a}{\sigma}=0,56;\quad f(x_5^*)=\frac{0,3411}{5,4}=0,063;$$

$$\frac{x_6^*-a}{\sigma}=1,30;\quad f(x_6^*)=\frac{0,1714}{5,4}=0,032;$$

$$\frac{x_7^*-a}{\sigma}=2,04;\quad f(x_7^*)=\frac{0,0498}{5,4}=0,009;$$

$$\frac{x_8^*-a}{\sigma}=2,78;\quad f(x_8^*)=\frac{0,0084}{5,4}=0,002;$$

$$f(21)=\frac{0,3989}{5,4}=0,074.$$

Все вычисления проведены с точностью до третьего знака после запятой.

Нанесем полученные точки на чертеж с гистограммой и соединим их гладкой кривой. Получили график плотности X (график выравнивающей кривой). Видно, что график хорошо согласуется с гистограммой, что подтверждает предположение о нормальном законе распределения X (см. рисунок 4).

4). Проверим гипотезу о нормальном распределении X по критерию Пирсона.

В таблице из пункта 1 частоты (эмпирические) в крайних интервалах таблицы меньше 5, поэтому крайние интервалы надо объединить с соседними. Получим ряд распределения

$[x_i, x_{i+1})$	[6; 14)	[14; 18)	[18; 22)	[22; 26)	[26; 30)	[30; 38)
n_i	19	38	58	50	26	9

Всего осталось $m=6$ исправленных частичных интервалов (число групп выборки).

Для каждого интервала найдем *теоретические частоты* n_i' (сколько наблюдений должно было бы попасть в i-й интервал, если верно, что случайная величина $X \sim N$ (21; 5,4).

Сначала для каждого интервала вычисляем теоретические вероятности p_i попадания случайной величины X в интервал $[x_i; x_{i+1})$. Так как $X \sim N(21; 5{,}4)$, то

$$p_i = p\{x_i \le X < x_{i+1}\} = \Phi\left(\frac{x_{i+1}-21}{5{,}4}\right) - \Phi\left(\frac{x_i-21}{5{,}4}\right),$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа и ее значения представлены в приложении 2. Для первого и последнего интервалов вероятности вычисляют иначе:

$$p_1 = p\{-\infty < X < 14\} = \Phi\left(\frac{14-21}{5{,}4}\right) - \Phi(-\infty) = 0{,}5 - \Phi(1{,}30) = 0{,}5 - 0{,}4032 = 0{,}0968;$$

$$p_6 = p\{30 \le X < \infty\} = \Phi\ \infty\ - \Phi\left(\frac{30-21}{5{,}4}\right) = 0{,}5 - \Phi(1{,}67) = 0{,}5 - 0{,}4525 = 0{,}0475.$$

Оставшиеся вероятности равны:

$$p_2 = \Phi\left(\frac{18-21}{5{,}4}\right) - \Phi\left(\frac{14-21}{5{,}4}\right) = \Phi(-0{,}56) - \Phi(-1{,}30) = -0{,}2123 + 0{,}4032 = 0{,}1909;$$

$$p_3 = \Phi\left(\frac{22-21}{5{,}4}\right) - \Phi\left(\frac{18-21}{5{,}4}\right) = \Phi(0{,}19) - \Phi(-0{,}56) = 0{,}0754 + 0{,}2123 = 0{,}2877;$$

$$p_4 = \Phi\left(\frac{26-21}{5{,}4}\right) - \Phi\left(\frac{22-21}{5{,}4}\right) = \Phi(0{,}93) - \Phi(0{,}19) = 0{,}3238 - 0{,}0754 = 0{,}2484;$$

$$p_5 = \Phi\left(\frac{30-21}{5{,}4}\right) - \Phi\left(\frac{26-21}{5{,}4}\right) = \Phi(1{,}67) - \Phi(0{,}93) = 0{,}4525 - 0{,}3238 = 0{,}1287.$$

После чего находим теоретические частоты по формуле $n_i' = 200 \cdot p_i$.

Полученные результаты сведем в таблицу:

$[x_i, x_{i+1})$	$(-\infty; 14)$	[14; 18)	[18; 22)	[22; 26)	[26; 30)	$[30; \infty)$
n_i	19	38	58	50	26	9
n_i'	19,36	38,18	57,54	49,68	25,74	9,5

Вычисляем наблюдаемое значение величины χ^2:

$$\chi^2_{набл} = \sum_{i=1}^{m} \frac{n_i^2}{np_i} - n = \left(\frac{19^2}{19,36} + \frac{38^2}{38,18} + \frac{58^2}{57,54} + \frac{50^2}{49,68} + \frac{26^2}{25,74} + \frac{9^2}{9,5} \right) - 200 \approx$$

$\approx$ 200,04 – 200 = 0.04.

Находим число степеней свободы $k = m - r - 1.$ У нас $m = 6,$ число параметров $r = 2$ (это $\overline{x}_B$ и D_B). Получаем $k = 6 - 2 - 1 = 3.$

По заданному уровню значимости α=0,05 и $k = 3$ находим по таблице (приложение 4) критическое значение $\chi^2_{крит} = 7,8.$

Сравниваем наблюдаемое и критическое значение величины χ^2.

У нас $\chi^2_{набл} = 0,04 < \chi^2_{крит} = 7,8.$ Следовательно, нет основания отвергать проверяемую гипотезу, и мы принимаем гипотезу о нормальном распределении случайной величины X .

5). Теперь мы вправе считать, что СВ X распределена по нормальному закону, параметры которого $M(X)$ и $\sigma = \sqrt{D[X]}$ неизвестны. В этом случае доверительный интервал для $M(X)$ имеет вид $(\overline{x}_B - t_\gamma \cdot \frac{S}{\sqrt{n}};\ \overline{x}_B + t_\gamma \cdot \frac{S}{\sqrt{n}})$, где $\overline{x}_B$ – выборочное среднее, $S = \sqrt{S^2}$ – исправленное среднее квадратическое отклонение, t_γ – критическая точка (квантиль) распределения Стьюдента (приложение 3), найденное по доверительной вероятности γ = 0,95 и объёму выборки n = 200.

В нашем случае:

$$\overline{x}_B = 21; \quad S = \sqrt{29,1} \approx 5,4; \quad t_\gamma = 1,98; \quad t_\gamma \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 1,98 \cdot \frac{5,4}{\sqrt{200}} \approx 0,76.$$

Следовательно, доверительный интервал для математического ожидания $M(X)$ равен (21-0,76; 21+0,76) = (20,24; 21,76). Это означает, что с надежностью (доверительной вероятностью) γ = 0,95 можно утверждать, что $M(X)$ принадлежит интервалу (20,24; 21,76).

Замечание. Критическую точку t_γ =1,98 из приложения 3 мы взяли для n=120. Видно, что для больших n критические значения практически одинаковые (изменяются от 1,98 до 1,96).

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2369	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	10060	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046

Продолжение приложения 1

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Приложение 2

Таблица значений функции $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2}\, dt$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,16	0,0636	0,32	0,1255	0,48	0,1844
0,01	0,0040	0,17	0,0675	0,33	0,1293	0,49	0,1879
0,02	0,0080	0,18	0,0714	0,34	0,1331	0,50	0,1915
0,03	0,0120	0,19	0,0753	0,35	0,1368	0,51	0,1950
0,04	0,0160	0,20	0,0793	0,36	0,1406	0,52	0,1985
0,05	0,0199	0,21	0,0832	0,37	0,1443	0,53	0,2019
0,06	0,0239	0,22	0,0871	0,38	0,1480	0,54	0,2054
0,07	0,0279	0,23	0,0910	0,39	0,1517	0,55	0,2088
0,08	0,0319	0,24	0,0948	0,40	0,1554	0,56	0,2123
0,09	0,0359	0,25	0,0987	0,41	0,1591	0,57	0,2157
0,10	0,0398	0,26	0,1026	0,42	0,1628	0,58	0,2190
0,11	0,0438	0,27	0,1064	0,43	0,1664	0,59	0,2224
0,12	0,0478	0,28	0,1103	0,44	0,1700	0,60	0,2257
0,13	0,0517	0,29	0,1141	0,45	0,1736	0,61	0,2291
0,14	0,0557	0,30	0,1179	0,46	0,1772	0,62	0,2324
0,15	0,0596	0,31	0,1217	0,47	0,1808	0,63	0,2357

Продолжение приложения 2

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,64	0,2389	0,97	0,3340	1,30	0,4032	1,63	0,4484
0,65	0,2422	0,98	0,3365	1,31	0,4049	1,64	0,4495
0,66	0,2454	0,99	0,3389	1,32	0,4066	1,65	0,4505
0,67	0,2486	1,00	0,3413	1,33	0,4082	1,66	0,4515
0,68	0,2517	1,01	0,3438	1,34	0,4099	1,67	0,4525
0,69	0,2549	1,02	0,3461	1,35	0,4115	1,68	0,4535
0,70	0,2580	1,03	0,3485	1,36	0,4131	1,69	0,4545
0,71	0,2611	1,04	0,3508	1,37	0,4147	1,70	0,4554
0,72	0,2642	1,05	0,3531	1,38	0,4162	1,71	0,4564
0,73	0,2673	1,06	0,3554	1,39	0,4177	1,72	0,4573
0,74	0,2703	1,07	0,3577	1,40	0,4192	1,73	0,4582
0,75	0,2734	1,08	0,3599	1,41	0,4207	1,74	0,4591
0,76	0,2764	1,09	0,3621	1,42	0,4222	1,75	0,4599
0,77	0,2794	1,10	0,3643	1,43	0,4236	1,76	0,4608
0,78	0,2823	1,11	0,3665	1,44	0,4251	1,77	0,4616
0,79	0,2852	1,12	0,3686	1,45	0,4265	1,78	0,4625
0,80	0,2881	1,13	0,3708	1,46	0,4279	1,79	0,4633
0,81	0,2910	1,14	0,3729	1,47	0,4292	1,80	0,4641
0,82	0,2939	1,15	0,3749	1,48	0,4306	1,81	0,4649
0,83	0,2967	1,16	0,3770	1,49	0,4319	1,82	0,4656
0,84	0,2995	1,17	0,3790	1,50	0,4332	1,83	0,4664
0,85	0,3023	1,18	0,3810	1,51	0,4345	1,84	0,4671
0,86	0,3051	1,19	0,3830	1,52	0,4357	1,85	0,4678
0,87	0,3078	1,20	0,3849	1,53	0,4370	1,86	0,4686
0,88	0,3106	1,21	0,3869	1,54	0,4382	1,87	0,4693
0,89	0,3133	1,22	0,3883	1,55	0,4394	1,88	0,4699
0,90	0,3159	1,23	0,3907	1,56	0,4406	1,89	0,4706
0,91	0,3186	1,24	0,3925	1,57	0,4418	1,90	0,4713
0,92	0,3212	1,25	0,3944	1,58	0,4429	1,91	0,4719
0,93	0,3238	1,26	0,3962	1,59	0,4441	1,92	0,4726
0,94	0,3264	1,27	0,3980	1,60	0,4452	1,93	0,4732
0,95	0,3289	1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738
0,96	0,3315	1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744

Продолжение приложения 2

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,96	0,4750	2,24	0,4875	2,56	0,4948	2,88	0,4980
1,97	0,4756	2,26	0,4881	2,58	0,4951	2,90	0,4981
1,98	0,4761	2,28	0,4887	2,60	0,4953	2,92	0,4982
1,99	0,4767	2,30	0,4893	2,62	0,4956	2,94	0,4984
2,00	0,4772	2,32	0,4898	2,64	0,4959	2,96	0,4985
2,02	0,4783	2,34	0,4904	2,66	0,4961	2,98	0,4986
2,04	0,4793	2,36	0,4909	2,68	0,4963	3,00	0,49865
2,06	0,4803	2,38	0,4913	2,70	0,4965	3,20	0,49931
2,08	0,4812	2,40	0,4918	2,72	0,4967	3,40	0,49966
2,10	0,4821	2,42	0,4922	2,74	0,4969	3,60	0,499841
2,12	0,4830	2,44	0,4927	2,76	0,4971	3,80	0,499928
2,14	0,4838	2,46	0,4931	2,78	0,4973	4,00	0,499968
2,16	0,4846	2,48	0,4934	2,80	0,4974	4,50	0,499997
2,18	0,4854	2,50	0,4938	2,82	0,4976	5,00	0,499997
2,20	0,4861	2,52	0,4941	2,84	0,4977		
2,22	0,4868	2,54	0,4945	2,86	0,4979		

Приложение 3

Таблица значений $t_\gamma = t(\gamma,\ n)$

γ / n	0,95	0,99	0,999	γ / n	0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,729	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Приложение 4

Критические точки распределения χ^2

Число степеней свободы m	Уровень значимости α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Рекомендуемая литература

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. М.: Айрис – пресс, 2009 г.
2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам. М.: Айрис – пресс, 2008 г.
3. Шипачёв В.С. Высшая математика. М.: Высшая школа, 2012 г.
4. Шипачёв В.С. Задачник по высшей математике. М.: Высшая школа, 2011 г.
5. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высшая школа, 2011 г.

Содержание